



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ивченко А.Ю., Кислицын А.А.,
Орлов Ю.Н.

Распределение SIR для
траекторий
детерминированного
движения на примере
метрополитена

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ивченко А.Ю., Кислицын А.А., Орлов Ю.Н. Распределение SIR для траекторий детерминированного движения на примере метрополитена // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 155. 21 с. doi:[10.20948/prepr-2018-155](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-155)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-155>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.Ю. Ивченко, А.А. Кислицын, Ю.Н. Орлов

**Распределение SIR для траекторий
детерминированного движения
на примере метрополитена**

Москва — 2018

Ивченко А.Ю., Кислицын А.А., Орлов Ю.Н.

Распределение SIR для траекторий детерминированного движения на примере метрополитена

В работе исследуются свойства функций распределения значений функционала надежности беспроводной связи между приемо-передающими устройствами, когда движение этих последних задается в виде динамической системы. В качестве практических примеров рассмотрены транспортные системы метро городов Санкт-Петербурга, Москвы и Лондона. Численно определены минимально достаточные промежутки времени, на которых выборочные функции распределения отношения сигнал/интерференция становятся стационарными.

Ключевые слова: детерминированное движение, индекс нестационарности, беспроводная связь

Ivchenko A.Yu., Kislitsyn A.A., Orlov Yu.N.

SIR distribution for dynamical system trajectories on the example of underground tube

In this work the properties of the distribution functions of the reliability functional of wireless communication between transmitting and receiving devices are studied, when the motion of these devices is given in the form of a dynamic system. As practical examples, transport systems of the metro of the cities of St. Petersburg, Moscow and London are considered. The minimum sufficient time intervals at which the sample distribution functions of the signal-to-interference ratio become stationary are numerically determined.

Key words: deterministic motion, non-stationary index, wireless connection

Содержание

1. Введение	3
2. Кинетический подход к описанию эволюции среднего значения SIR	4
3. Отношение сигнал/интерференция для движущихся устройств.....	7
4. Согласованный уровень стационарности	12
5. Анализ динамики SIR для поездов метрополитена	14
Литература	21

1. Введение

В работах [1-3] был сформулирован кинетический подход к анализу метрик надежности и качества связи для модели прямых соединений между беспроводными приемо-передающими устройствами. Этот подход состоит в том, что траектории абонентов предполагаются случайными, а генерация независимых приращений («шагов» абонентов) на них основывается на решении определенного кинетического уравнения, описывающего эволюцию соответствующей плотности функции распределения (далее ПФР). В качестве модельного уравнения в [1-3] использовалось уравнение Фоккера–Планка со сносом. Совокупность траекторий соответствует числу абонентов, для которых и моделируется метрика надежности связи, представляющая собой отношение полезного сигнала к интерференции (SIR) и выражающаяся формулой

$$S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1/|r_{12}|^2}{\sum_{j=3}^N 1/|r_{1j}|^2}. \quad (1)$$

Здесь $r_{ij}^2 = \sum_{\alpha=1}^3 (x_i^\alpha - x_j^\alpha)^2$ есть квадрат расстояния между двумя точками с

номерами i и j в трехмерном пространстве. Формула (1) записана для ситуации, когда абонент с номером 1 является приемником сигнала, все остальные абоненты – передатчики, причем полезный сигнал исходит от абонента с номером 2. Если значение SIR (1) для выделенной пары абонентов в заданном окружении оказывается меньше определенной величины $s^* = 0,01$, то связь прерывается. При движении абонентов величина S меняется сложным образом, не допускающим в общем случае явного аналитического решения. Поэтому интерес представляет описание средних характеристик распределения SIR по системе абонентов (т.е. по «ансамблю траекторий») в предположении об определенных свойствах этих траекторий, а также средних по времени характеристик для выделенной, но произвольной пары передатчик–приемник.

Важным примером движения абонентов является хаотическое блуждание в силу определенного кинетического уравнения. Если соответствующее решение относится к классу устойчивых распределений, то в этом случае эволюция средних значений SIR может быть выражена в терминах эволюции ПФР приращений координат абонентов. При этом если распределение приращений координат стационарно, то и распределение SIR стационарно, а среднее по ансамблю совпадает со средним по времени.

Также практически важным случаем являются движения, порожденные определенной динамической системой. К таковым можно отнести траектории общественного транспорта в городе, по которым движутся автобусы или поезда в отсутствие нарушений расписания и маршрута. В теоретическом плане динамическая система порождает более разнообразную динамику функционала SIR на своей траектории, чем стохастическая. Если движение совершается в

ограниченной области пространства, то оно может быть, в частности, периодическим, когда частоты по всем степеням свободы соизмеримы, или иметь черты хаотического поведения в противном случае.

Цель данной работы состоит в исследовании функционала SIR (1) для траекторий динамической системы на примере поездов метро. В теоретическом плане эта задача представляет интерес для нахождения количества абонентов, при котором кинетический подход становится адекватным средством анализа, то есть когда запутанность динамической траектории становится сопоставима со случайным блужданием в рамках определенного кинетического уравнения. Для практических же нужд важно понимать, какие требования по качеству связи надо установить для той или иной конкретной транспортной системы.

Сначала будет рассмотрена относительно простая модельная одномерная задача. Но и для нее даже при соизмеримых частотах поведение SIR оказывается весьма нетривиальным. Далее будет проведено моделирование реального движения поездов метро для трех последовательно усложняющихся систем городского подземного транспорта – Санкт-Петербурга, Москвы и Лондона. Поскольку для реальных линий метрополитена частоты обращения по ним поездов несоизмеримы, то хаотическое поведение SIR возникает при любом выборе пары «передатчик–приемник» с разных линий. Оценка уровня нестационарности выборочной функции распределения (далее ВФР) SIR показывает, что при стационарном (как оно и есть в этой модели движения) распределении приращений координат движущихся устройств (поездов) функция распределения SIR стремится к стационарной со скоростью, обратно пропорциональной квадратному корню из числа абонентов. Этот вывод представляется корректным с точки зрения закона больших чисел, примененного к анализу хаотизации движения по независимым траекториям, имеющим случайное взаимное расположение.

2. Кинетический подход к описанию эволюции среднего значения SIR

Опишем здесь кратко метод анализа распределения SIR при хаотическом нестационарном блуждании абонентов. Будем считать приращения по каждой координате независимыми. Тогда для моделирования случайных траекторий достаточно рассмотреть одномерное кинетическое уравнение относительно ПФР $f(x, t)$ приращений координат, одинаковое для каждой координаты.

Например, пусть ПФР удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u(x, t)f) - \frac{\lambda(t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

В уравнении (2) величины скорости сноса $u(x, t)$ и нестационарного коэффициента диффузии $\lambda(t)$ считаются заданными, но на практике они могут быть вычислены по имеющемуся временному ряду как определенные моменты соответствующей выборочной функции распределения. Для этого, следуя [4], введем двумерную ВПФР $F(x, \dot{x}, t)$ совместного распределения случайных

величин x и \dot{x} исходного ряда и ряда его производной. Производная $\dot{x} = x(t+1) - x(t)$ трактуется как разность между значениями ряда в соседние моменты времени. Эта разность и есть аналог микроскопической скорости системы из N «частиц» (значений ряда). Для построения двумерной ВПФР $F(x, \dot{x}, t)$ в момент времени t необходимо иметь значение случайной величины в момент $t+1$, чтобы можно было построить микроскопическую скорость в момент времени t . Заметим здесь, что если ряд неэквиливантный, то разностная скорость определяется как

$$\dot{x} = \frac{x(n+1) - x(n)}{t(n+1) - t(n)}.$$

Одномерная ВПФР $f(x, t)$ определяется затем по $F(x, \dot{x}, t)$ формулой

$$f(x, t) = \int F(x, \dot{x}, t) d\dot{x}. \quad (3)$$

Заметим, что среднее по ансамблю значение эмпирической скорости равно $U(t) = \int \dot{x} F(x, \dot{x}, t) dx d\dot{x}$, и эта же величина равна выражению $\int u(x, t) f(x, t) dx$. Следовательно, средняя локальная скорость $u(x, t)$ в (2) определяется формулой

$$u(x, t) f(x, t) = \int \dot{x} F(x, \dot{x}, t) d\dot{x}. \quad (4)$$

Коэффициент диффузии λ должен определяться по элементам ряда в соответствии с уравнениями эволюции моментов в силу уравнения (2). Имеем, в частности, для дисперсии следующие уравнения:

$$\sigma^2(t) = \int (x - m(t))^2 f(x, t) dx,$$

откуда в соответствии с (2) и (4) получаем

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = - \int (x - m(t))^2 \frac{\partial(uf)}{\partial x} dx + \frac{\lambda}{2} \int (x - m(t))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx = \lambda + 2 \int uxf dx - 2mU.$$

Поскольку ковариация координаты и скорости равна

$$\begin{aligned} R(t) &= \text{cov}_{x,v}(t) = \int xvF(x, v, t) dx dv - \int xF(x, v, t) dx dv \cdot \int vF(x, v, t) dx dv = \\ &= \int xu(x, t) f(x, t) dx - m(t)U(t) \equiv \text{cov}_{x,u}(t), \end{aligned}$$

то эволюция выборочной дисперсии в силу уравнения Фоккера–Планка (2) имеет вид

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = \lambda + 2R. \quad (5)$$

Тем самым выявлен статистический смысл параметра $\lambda(t)$ в уравнении (2): это есть разность между производной текущей выборочной дисперсии ряда и удвоенной выборочной ковариацией исходного ряда и ряда его первых разностей.

Численный алгоритм, реализующий описанную методику построения эмпирического кинетического уравнения по данным наблюдений за случайной величиной, представлен в [5, 6].

Далее уравнение (2) решается численно при заданном начальном условии

$$f(x, t)|_{t=0} = \rho(x).$$

Решение строится на временном горизонте T . Шаг по времени для простоты выбираем единичным. После этого в каждый момент времени $t = 1, 2, \dots, T$ можно сгенерировать случайное число из функции распределения (далее ФР) $F(x, t)$, считая

$$F(x, t) = \int_0^x f(y, t) dy. \quad (6)$$

В частности, если решение уравнения (2) представлено в виде гистограммы $f_j(t)$, где j есть номер классового интервала, на который разбита область интегрирования, то непрерывная строго монотонная ФР имеет вид

$$F(x, t) = (nx - j) \cdot f_{j+1}(t) + \sum_{k=1}^j f_k(t), \quad x \in [(j-1)/n; j/n], \quad j = 1 \div n. \quad (7)$$

Алгоритм генерации случайных чисел, образующих в совокупности одну из возможных траекторий временного ряда на заданном промежутке времени, состоит в следующем.

Генерируется стационарный равномерно распределенный на $[0; 1]$ ряд чисел $\{y_k\}$ длиной T . Отвечающий ему ряд с распределением $F(x, t)$ из (7) строится по формуле обращения соответствующей локальной по времени функции распределения, движущейся в скользящем окне длины T :

$$y_k = F(x_k, k). \quad (8)$$

Генерируя набор равномерно распределенных выборок, получаем соответствующий набор траекторий, которые можно рассматривать как ансамбль решений кинетического уравнения. Число траекторий при моделировании SIR равно числу абонентов N .

Описанная методика применима для моделирования случайного блуждания большого числа абонентов. Если же их движение вполне детерминировано, например равномерное и прямолинейное на встречных курсах, то распределение приращений координат будет все время одно и то же, а SIR будет меняться со временем. Такая ситуация требует предварительного анализа траекторий абонентов и изучения распределения SIR на них согласно определению (1). Тогда, если выяснится, что динамика SIR имеет хаотические черты, можно попытаться получить модельное кинетическое уравнение относительно выборочной функции распределения SIR на основе анализа соответствующего временного ряда, как это описано в [4]. Если движение абонентов происходит в ограниченной области по произвольно направленным прямолинейным траекториям с заданным условием отражения от границы, то такой «газ» с увеличением плотности «частиц» все больше будет отвечать кинетической модели описания. Возникает вопрос: как ведет себя в этих условиях распределение SIR? Практическим примером такой задачи является анализ траекторий городского транспорта.

3. Отношение сигнал/интерференция для движущихся устройств

Рассмотрим сначала следующую сравнительно простую одномерную задачу. Имеется N различных точек, произвольным образом распределенных на отрезке $[0; 1]$. В начальный момент времени $t_0 = 0$ их координаты равны соответственно x_i^0 . Отмеченные точки одновременно начинают движение с одинаковой скоростью v в направлении от левого конца отрезка (точки 0) к правому (точке 1). Достигнув правой или левой границы отрезка, точки абсолютно упруго отражаются от нее и продолжают свое движение в противоположном направлении. Между собой точки не сталкиваются и проходят одна через другую без взаимодействия. Требуется найти распределение расстояний между точками в произвольный момент времени t .

Движение каждой точки является периодическим с одним и тем же периодом $T = 2/v$. Следовательно, функция распределения расстояний между точками является периодической с периодом $T/2$. Также и SIR, определяемый через расстояния между парами точек согласно (1), будет периодической функцией времени для каждой выбранной пары «передатчик–приемник». Полезно сравнить между собой средние значения SIR по ансамблю точек в каждый момент времени и за период для некоторой пары точек.

Выберем произвольную пару точек с координатами x_1^0 и x_2^0 . Положим для определенности, что $x_1^0 > x_2^0$. Обозначим $d(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$. В начальный момент $d(0) = x_1^0 - x_2^0 \equiv d_0$. Это расстояние остается постоянным в течение времени $t_1 = (1 - x_1^0)/v$, после чего первая точка отражается от правой границы, а вторая еще продолжает движение к ней. Между точками происходит сближение со скоростью $2v$, так что в момент времени $t' = t_1 + d_0/(2v)$ положения обеих точек совпали. Легко проверить, что $t' = \frac{1}{v} \left(1 - \frac{x_1^0 + x_2^0}{2} \right)$.

Местоположение второй точки в этот момент равно $x_2(t') = x_2^0 + vt' = 1 - d_0/2$. На промежутке времени $[t_1; t']$ расстояние между указанными двумя точками меняется по формуле $d(t) = d_0 - 2v(t - t_1)$. Затем расстояние между точками увеличивается до тех пор, пока вторая точка не достигнет правого конца отрезка. Это произойдет через промежуток времени $d_0/(2v)$, так что расстояние между этой парой точек, удаляющихся одна от другой со скоростью $2v$, снова станет равным d_0 . Таким образом, на промежутке времени $[t'; t_2]$, где $t_2 = t' + d_0/(2v) = (1 - x_2^0)/v$, имеем зависимость расстояния от времени в виде $d(t) = 2v(t - t')$.

Следовательно, для каждой запаздывающей (т.е. «второй») точки в момент времени $t_i = (1 - x_i^0)/v$ задача сведется к следующей: i -я точка находится на границе отрезка, а первая точка – на расстоянии d_i^0 от нее. Точки движутся в одном направлении с одинаковыми скоростями. Через время $T/2 = 1/v$

ситуация повторяется, только теперь у другой границы отрезка. В этой постановке зависимость расстояния между двумя точками от времени описывается формулой:

$$d_i(t) = \begin{cases} d_i^0, & 0 \leq t \leq t_1, \quad t_1 = \frac{1}{v} - \frac{d_i^0}{v}; \\ d_i^0 - 2v(t - t_1), & t_1 \leq t \leq t', \quad t' = \frac{1}{v} - \frac{d_i^0}{2v}; \\ 2v(t - t'), & t' \leq t \leq \frac{1}{v}. \end{cases}$$

Далее эта функция повторяется с периодом $1/v$. Для разных пар точек различие между этими функциями состоит в том, что их графики сдвигаются влево на промежутки времени $t_i = (1 - x_i^0)/v$.

Что касается плотности $f(x, t)$ функции распределения этой динамической системы, то она представляет собой дельта-функцию от ее траектории. В этом примере она определяется формулой $f(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i(t))$. Плотность распределения расстояний между двумя точками $g(x, t)$ дается формулой

$$g(x, t) = \int f(x + y, t) f(y, t) dy.$$

Дальнейшее зависит от вида начального распределения. Пусть, например, точки брошены равномерно. Тогда в начальный момент времени имеем

$$\begin{aligned} f(x, 0) = f_0(x) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta\left(x - 1 + \frac{i}{N}\right), \\ g(x, 0) = g_0(x) &= \frac{2}{N(N-1)} \left((N-1)\delta\left(x - \frac{1}{N}\right) + (N-2)\delta\left(x - \frac{2}{N}\right) + \dots \right) = \\ &= \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} (N-i)\delta\left(x - \frac{i}{N}\right). \end{aligned}$$

Эти распределения сохраняются в течение промежутка времени $\tau = 1/(vN)$, пока первая точка не достигнет границы отрезка. После ее отражения и до момента, пока вторая точка не достигнет той же границы, распределение расстояний между точками будет иметь вид

$$\begin{aligned}
g(x,t)|_{t \in [\tau, 2\tau]} &= \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-2} (N-1-i) \delta\left(x - \frac{i}{N}\right) + \frac{2}{N(N-1)} \delta\left(x - \left|\frac{1}{N} - 2v(t-\tau)\right|\right) + \\
&+ \frac{2}{N(N-1)} \delta\left(x - \left|\frac{2}{N} - 2v(t-\tau)\right|\right) + \dots = \\
&= \frac{2}{N(N-1)} \left(\sum_{i=1}^{N-2} (N-1-i) \delta\left(x - \frac{i}{N}\right) + \sum_{i=1}^{N-1} \delta\left(x - \left|\frac{i}{N} - 2v(t-\tau)\right|\right) \right).
\end{aligned}$$

Аналогично рассматривается ситуация после отражения второй точки, третьей и т.д. до отражения последней, после чего полученная зависимость $g(x,t)$ продолжается периодически по времени с периодом $T = N\tau = 1/v$. В частности, например, для трех точек, двигающихся с единичной скоростью, получаем следующую плотность распределения расстояний между точками:

$$\begin{aligned}
g(x,t)|_{t \in [0; 1/3]} &= \frac{2}{3} \delta\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \delta\left(x - \frac{2}{3}\right); \\
g(x,t)|_{t \in (1/3; 2/3]} &= \frac{1}{3} \delta\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \delta(x - |2t - 1|) + \frac{1}{3} \delta\left(x - \left|2t - \frac{4}{3}\right|\right); \\
g(x,t)|_{t \in (2/3; 1]} &= \frac{1}{3} \delta\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \delta\left(x - \left|2t - \frac{4}{3}\right|\right) + \frac{1}{3} \delta\left(x - \left|2t - \frac{5}{3}\right|\right).
\end{aligned}$$

Далее эта функция продолжается с периодом $T = 1$.

В итоге для последнего примера получаем, что среднее расстояние между произвольными двумя точками в каждый момент времени определяется формулами:

$$\begin{aligned}
\bar{r}(t)|_{t \in [0; 1/3]} &= \frac{4}{9}; & \bar{r}(t)|_{t \in [1/3; 1/2]} &= \frac{8}{9} - \frac{4t}{3}; \\
\bar{r}(t)|_{t \in [1/2; 5/6]} &= \frac{2}{9}; & \bar{r}(t)|_{t \in [5/6; 1]} &= -\frac{8}{9} + \frac{4t}{3}.
\end{aligned}$$

Для наглядности приведем соответствующий график на рис. 1.

Поскольку среднее расстояние между точками непостоянно, то более сложная нелинейная конструкция в виде SIR в течение периода обращения точек будет иметь еще более нетривиальную динамику, обусловленную сингулярным поведением функции (1) в совпадающих точках.

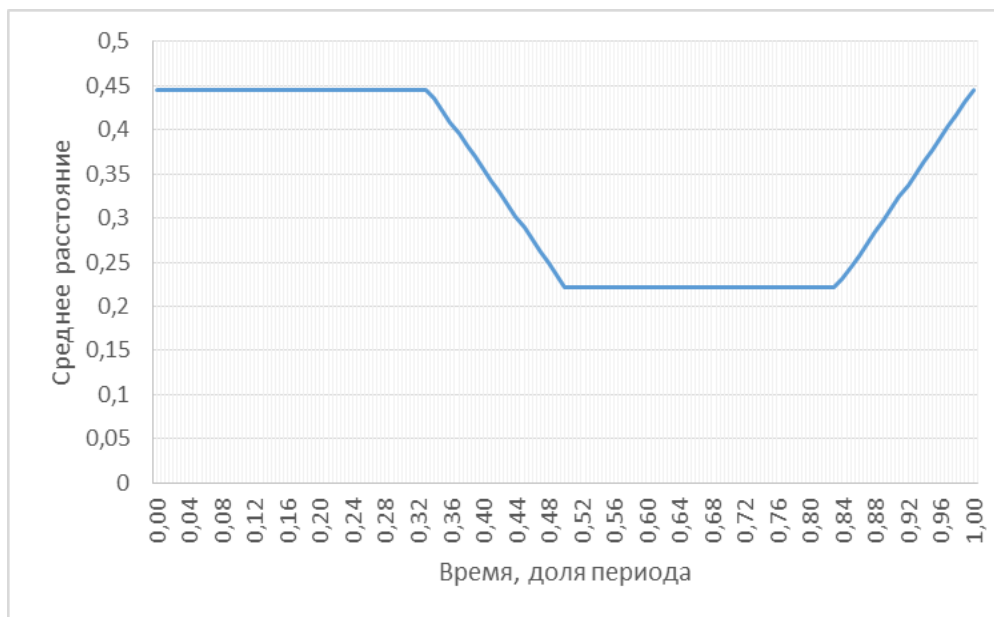


Рис. 1. Среднее расстояние по ансамблю из трех точек в зависимости от времени

Для вычисления SIR s_{ij} по формуле (1) между некоторой парой точек в рассмотренном примере надо провести определенную регуляризацию, чтобы не возникло деления на ноль в выражении $1/r_{ij}^2$, где r_{ij} есть расстояние между точками i и j . Именно, будем считать, что если на траектории динамической системы получилось так, что $r_{ij} \leq \varepsilon$, т.е. расстояние между точками стало меньше либо равно некоторой заданной величине ε , то оно принимается равным ε до тех пор, пока оно не превзойдет указанное значение. Для определенности первый индекс будем относить к приемнику, а второй – к передатчику. Пример таких регуляризованных расстояний между точками для $\varepsilon = 0,02$ приведен на рис. 2.

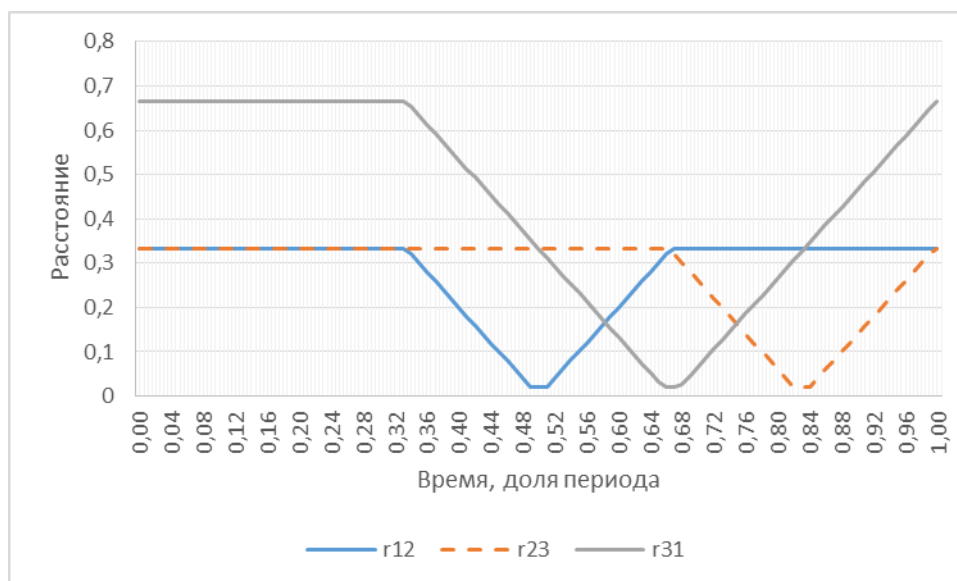


Рис. 2. Пример регуляризованных расстояний между точками

В описанной системе из трех точек возможны шесть вариантов сочетаний для вычисления отношения сигнал/интерференция, из которых независимыми являются только два: $s_1 \equiv s_{12} = \frac{1/r_{12}^2}{1/r_{13}^2}$ и $s_2 \equiv s_{21} = \frac{1/r_{12}^2}{1/r_{32}^2}$. Остальные выражаются через них по формулам: $s_{13} = 1/s_1$; $s_{31} = s_2/s_1$; $s_{23} = 1/s_2$; $s_{32} = s_1/s_2$. На рис. 3 показаны зависимости от времени для сочетаний SIR s_{ij} . Также приведено среднее по ансамблю значение SIR, определяемое формулой

$$\bar{s}(t) = \frac{1}{6} \left(s_1 + s_2 + \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{s_1}{s_2} + \frac{s_2}{s_1} \right).$$

Как видно из рис. 3, среднее значение SIR по ансамблю возможных сочетаний не является постоянным. Поэтому стационарность ВФР для SIR зависит от длины выборки, т.е. от промежутка времени для одного шага. На рис. 3 шаг выбран равным 0,01. Средние по времени за период значения SIR для каждого из шести сочетаний различны. Они меняются от 9,5 до 13,5. Для сочетаний s_{13} и s_{31} существует вероятность обрыва связи (когда $s_{ij} < s^*$), равная 0,03. Средний по ансамблю SIR меняется от 1,75 до 100, имея промежутки монотонного роста и спада. На интервале от 0,33 до 1 эта функция симметрична относительно точки середины указанного промежутка (т.е. относительно 0,66).

В общем случае N точек график среднего по ансамблю SIR будет иметь $2N - 3$ локальных максимума, эквидистантно расположенных на расстоянии $1/(2N)$ один от другого.

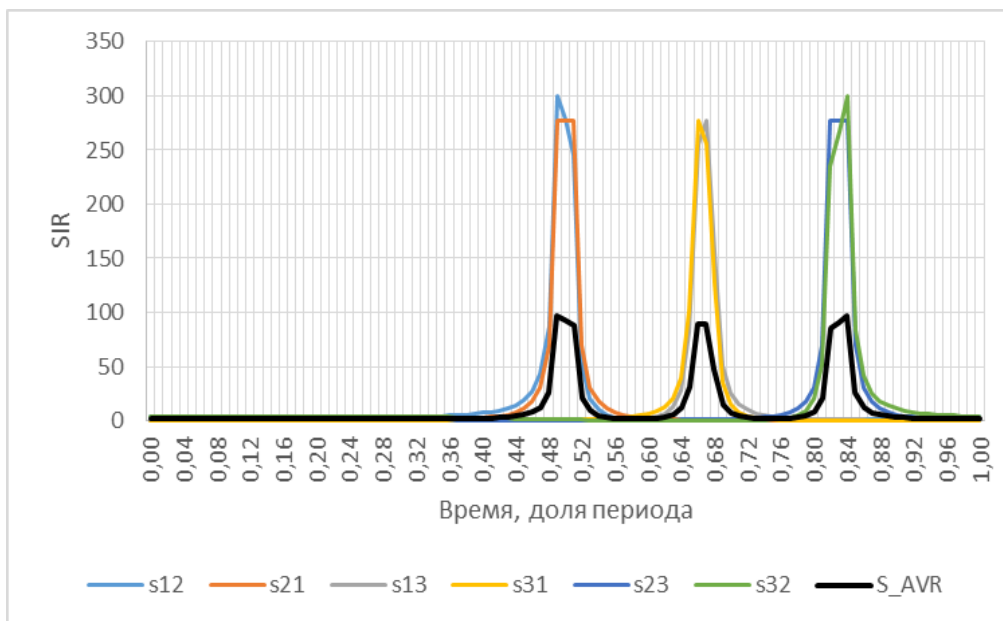


Рис. 3. Пример изменения SIR для системы из трех точек

Для исследования стационарности ВФР SIR в следующем разделе будет кратко описан так называемый согласованный уровень стационарности выборочных распределений.

4. Согласованный уровень стационарности

Для анализа нестационарного поведения временного ряда используется статистика, называемая согласованным уровнем стационарности (СУС) [4]. Смысл статистики СУС состоит в том, что для выборок определенной длины из стационарного или из нестационарного ряда величина СУС равна уровню значимости, на котором две выборки признаются взятыми из одного распределения. Соответствующий одномерный численный код, позволяющий проводить анализ СУС в зависимости от длины выборки, строить функцию распределения расстояний между выборочными распределениями и генерировать ансамбль траекторий, имеющих нестационарную функцию распределения, был разработан в [5, 6].

Как известно [7, 8], решение задачи о принадлежности двух выборочных функций распределения (ВФР) одной генеральной совокупности использует непараметрический критерий Колмогорова-Смирнова. Строится статистика

$$S_N = \sup_x |F_{1,N}(x) - F_{2,N}(x)|, \quad (9)$$

для которой справедлива асимптотика

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ 0 < \sqrt{\frac{N}{2}} S_N < z \right\} = K(z), \quad (10)$$

где $K(z)$ есть табулированная функция Колмогорова, а N есть длина выборки. Неубывающая непрерывная функция $F_N(x)$ есть ВФР случайной величины ξ , значения которой x наблюдаются в виде последовательности событий во временном окне длины N . В формуле (10) уровень значимости Q , на котором принимается решение, считается равным $1 - K(z)$.

Пусть ε есть расстояние между выборками в норме C , определяемое формулой (9). Рассмотрим стационарную точку уровня значимости (т.е. СУС):

$$Q(\varepsilon) \equiv 1 - K \left(\sqrt{\frac{N}{2}} \varepsilon \right) = \varepsilon. \quad (11)$$

Для стационарных распределений положение стационарной точки $\varepsilon = \varepsilon_0(N)$ как решения уравнения (11) не зависит от вида распределения F . Это решение единственно в силу монотонности функции $K(z)$. Примеры решений $\varepsilon_0(N)$ для различных N содержатся в [4].

Для нестационарных ВФР распределение расстояний между выборками заданной длины отличается от статистики (10) в большую сторону. Обозначим через $G_N(\rho)$ эмпирическую функцию распределения расстояний $\rho(N)$ между двумя пересекающимися выборками длины N :

$$\rho(N) = \|F_{1,N}(x) - F_{2,N}(x)\|_C. \quad (12)$$

Численное решение относительно ρ уравнения

$$G_N(\rho) = 1 - \rho \quad (13)$$

дает значение СУС $\rho^*(N)$ как вероятности того, что расстояние между выборками длины N больше ρ^* . Если оказалось, что $\rho^*(N) > \varepsilon_0(N)$, то ВФР считается нестационарной. Величина $\rho^*(N)$ есть уровень значимости, на котором можно принимать решение об однородности выборок.

Индексом нестационарности будем называть отношение

$$J(N) = \frac{\rho^*(N)}{\varepsilon_0(N)}. \quad (14)$$

Для стационарных процессов индекс нестационарности с точностью $\varepsilon_0(N)$ равен единице. Для нестационарных выборочных функций распределения на соответствующих длинах индекс нестационарности больше единицы. На рис. 4 показана зависимость СУС от длины временной выборки с шагом 1/100 по времени (по отношению к единичному периоду) для движения трех точек из примера п. 3. Рассмотрены распределения среднего по ансамблю SIR в сравнении с табулированной в [4] стационарной зависимостью.

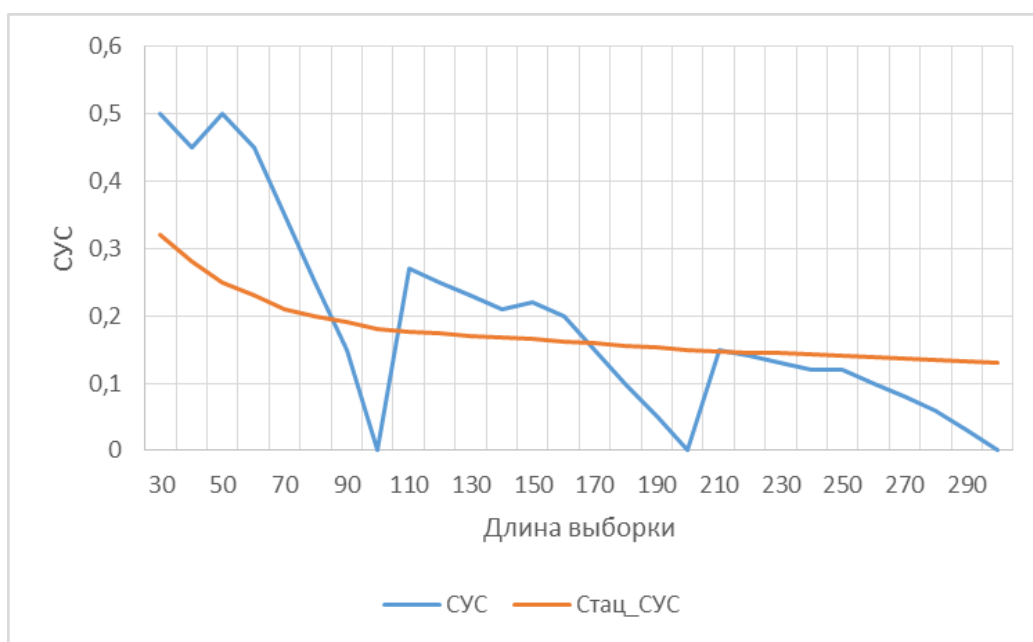


Рис. 4. СУС распределений среднего SIR для системы из трех точек

В соответствии с определением (14) делаем вывод, что на длинах, превышающих два периода из примера п.3, распределения SIR становятся стационарными с той точностью, с которой можно строить соответствующие ВФР. Нулевые значения СУС отвечают длинам выборок, кратным периоду.

Если же частоты по разным степеням свободы несоизмеримы, то стационарность выборочных распределений достигается на выборках значительно больших длин. Примеры такого рода рассмотрены ниже в п.5.

5. Анализ динамики SIR для поездов метрополитена

Рассмотрим реальный пример генерации траектории SIR для поездов городского метрополитена. Как будет показано ниже, такая система физических объектов может считаться «природным» генератором нестационарного временного ряда для значений некоторого нелинейного функционала (в данном случае SIR), заданного вдоль траекторий этой динамической системы.

Нашей задачей является анализ уровня стационарности распределения SIR при квазистационарном движении поездов. Интерес к метрополитену обусловлен тем, что его линии можно рассматривать как траектории хаотического движения в трехмерном пространстве.

Для моделирования были использованы координаты реальных станций метро в трех городах: Санкт-Петербурге, Москве и Лондоне. Данные были взяты по состоянию на 2016 г. Глубина расположения станций приведена относительно уровня моря. Сферичностью Земли в пределах города пренебрегаем, поэтому поверхностные координаты (широта и долгота) были пересчитаны в плоские относительно некоторого условного центра города. Еще одна идеализация модели состоит в том, что перегоны между станциями считаются прямолинейными. Соответствующие схемы приведены на рис. 5-7.

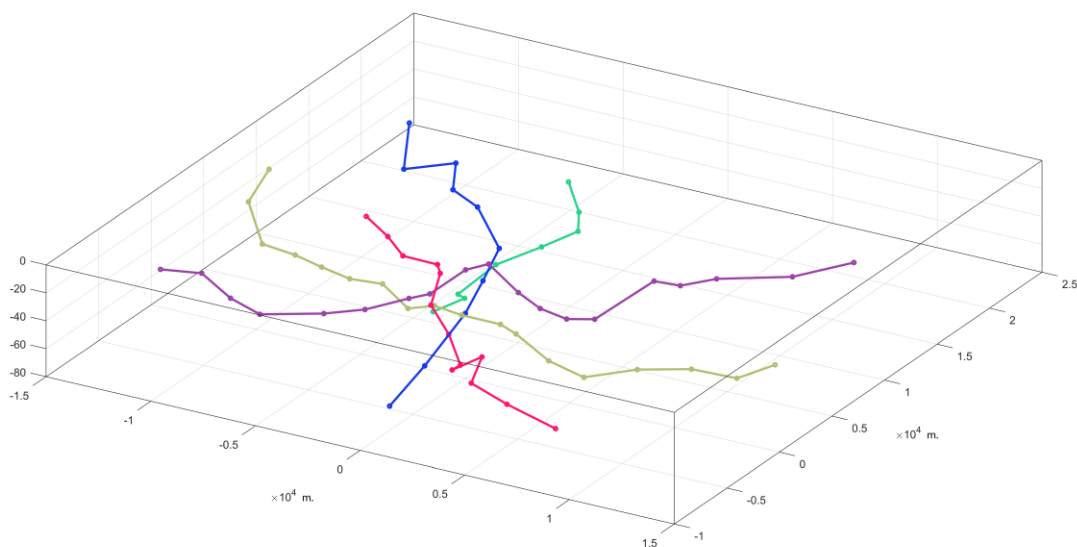


Рис. 5. 3D-схема метро Санкт-Петербурга (5 линий)

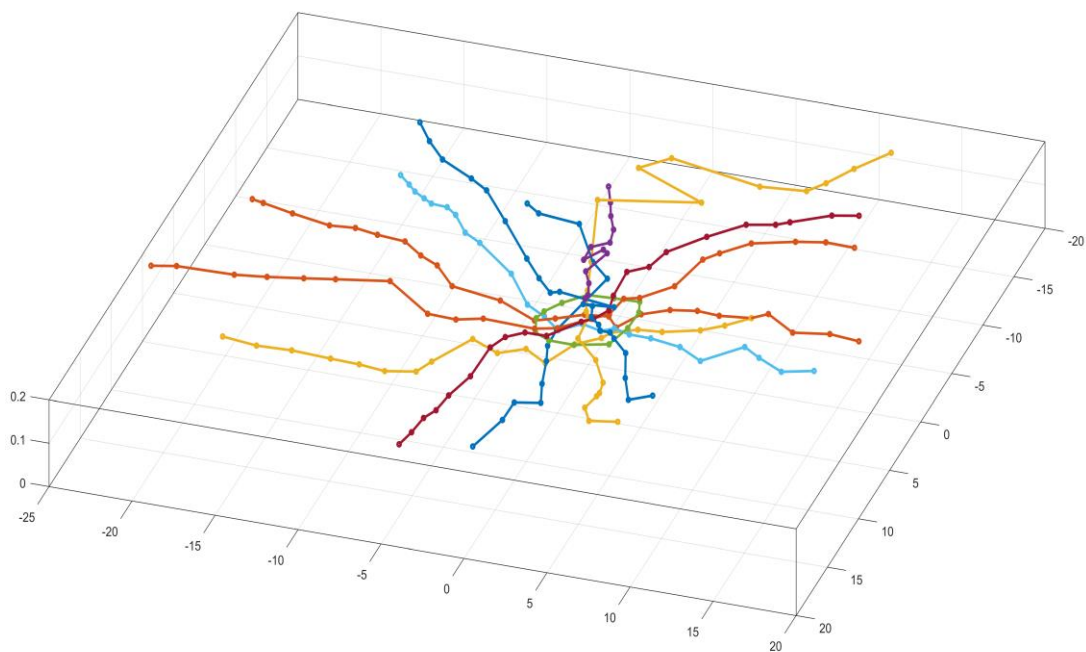


Рис. 6. 3D-схема метро Москвы (10 линий)

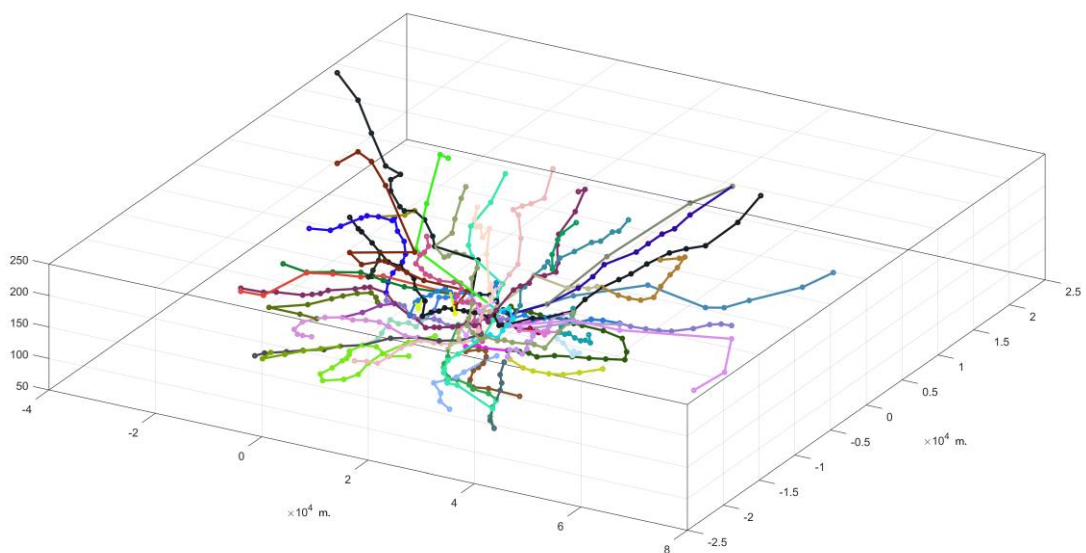


Рис. 7. 3D-схема метро Лондона (49 линий)

Считаем, что поезда движутся без сбоев в соответствии с маршрутной схемой. Стоянка поезда на станции принята равной 25 секунд. Разгон до скорости 70 км/ч происходит равноускоренно за 20 секунд, после чего поезд едет с постоянной скоростью. Торможение перед станцией происходит с постоянным замедлением в течение 15 секунд. Это средние характеристики движения поездов московского метро.

В начальный момент поезда стоят на платформах «через одну». Движение начинается одновременно в соответствии с описанным выше графиком. При достижении конечной станции (если линия не кольцевая) считаем для простоты, что поезд мгновенно меняет направление движения на противоположное и становится на соответствующую платформу. Расстояние между платформами на встречном движении принято равным $\varepsilon = 20$ м.

Для вычисления SIR берется произвольная пара поездов с разных линий. Остальные поезда со всех линий создают интерференцию в точке нахождения приемника. Каждый поезд рассматривается как эквивалент одного абонента. Время, в течение которого моделируется SIR, составляет 10 полных оборотов по самой длинной линии. Шаг по времени принят равным 1 сек.

Описанная ситуация несколько напоминает элементарный пример одномерного движения из п.3, только направление движения после каждой остановки меняется на некоторый непостоянный угол, станции расположены не эквидистантно, периоды обращения поездов по каждой линии несоизмеримы, а само движение происходит не с постоянной скоростью. На рис. 8 для примера приведены значения X-координат поездов метро Москвы, отправляющихся в начальный момент от первой станции своей линии.

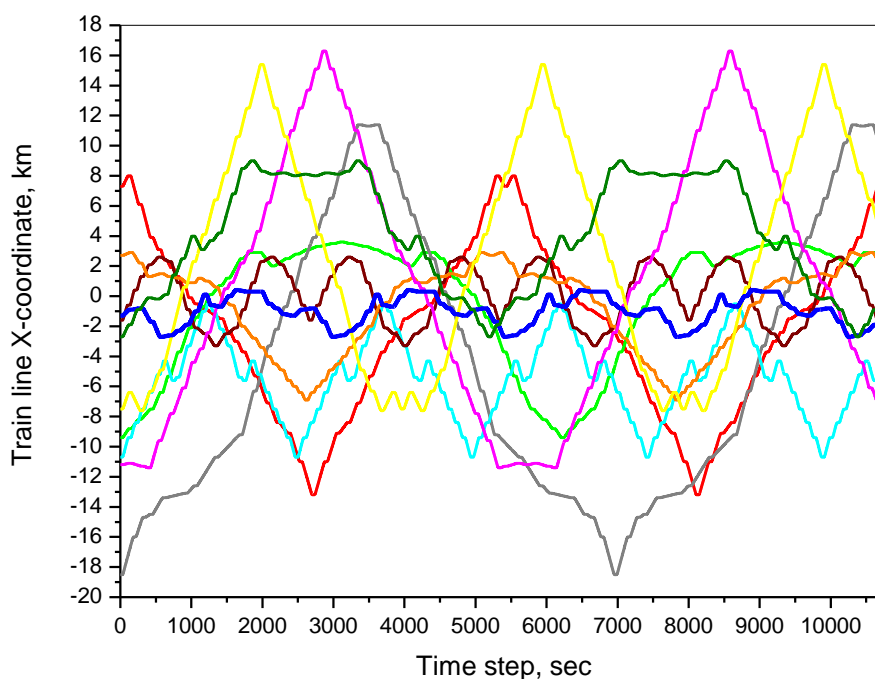


Рис. 8. X-координата траекторий поездов для линий московского метро

В табл. 1 приведены значения периодов обращения поездов по каждой из десяти линий в соответствии с цветовой раскраской рис. 8. В зависимости от протяженности линий и числа станций эти периоды меняются от 40 минут до почти двух часов.

Табл. 1. Периоды обращения поездов по линиям московского метро, сек

Линия	красн	зелен	син	голуб	кор	фиол	оран	желт	сер	салат
Период	5410	6214	2422	2470	2666	5216	5716	3958	6958	5184

Примеры графиков SIR для произвольной пары поездов с разных линий метро Санкт-Петербурга, Москвы и Лондона приведены на рис. 9.

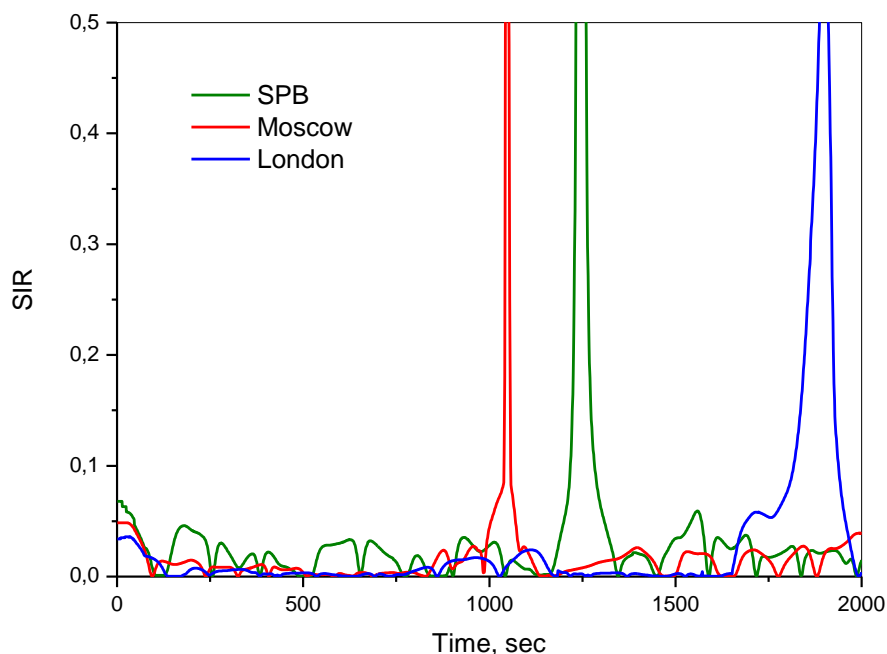


Рис. 9. Динамика SIR для пары поездов в поле интерференции

Из рис. 9 видно, что SIR убывает с увеличением числа поездов. Однако, в отличие от случайного блуждания, эта зависимость не имеет вида $1/N$, поскольку линия, на которой находится приемник, играет определяющую роль в формировании поля интерференции, хотя в отдельные моменты времени влияние оказывают и близко проходящие поезда с других линий. Анализ периодов длительности устойчивой связи, когда SIR больше, чем $s^* = 0,01$, показывает, что с высокой достоверностью (на уровне 0,95) вероятность непрерывной связи между устройствами падает как $1/\sqrt{N}$. Доля времени, когда $s > s^*$, составляет примерно 0,75 для метро Санкт-Петербурга, 0,5 для метро Москвы и 0,35 для метро Лондона.

Когда встречные поезда той линии, на которой находится приемник, оказываются на противоположной стороне вестибюля станции, где в данный момент пребывает приемник, SIR становится очень малым. Когда происходит максимальное сближение передатчика и приемника, SIR становится очень большим (пики на графиках рис. 9). Это сближение весьма различно для разных линий и разных поездов на них, так что интерес представляет среднее значение SIR по ансамблю поездов. По сравнению с рис. 9 соответствующий график

выглядит аналогично графикам рис. 3 – пики остаются на своих местах, но имеют более сглаженную форму и меньший максимум.

Исследуем теперь статистику расстояний между ВФР SIR в зависимости от длины временной выборки. Рассматриваются встык-выборки длины T в единицах шагов по времени, определяются их ВФР и разность между этими ВФР в норме S . Эти встык-выборки сдвигаются с шагом 500, образуя тем самым временной ряд расстояний между независимыми выборками длины T . Затем строится функция распределения этих расстояний и находится ее согласованный квантиль согласно (13). Результат вычислений представлен на рис. 10. Наблюдается эффект, ожидаемый из рассмотрения элементарной задачи из п.3, а именно: уровень нестационарности SIR тем больше, чем меньше линий в системе и чем больше средний период обращения поездов. Примерно через промежуток времени, равный трем средним периодам, распределение среднего по системе SIR становится стационарным.

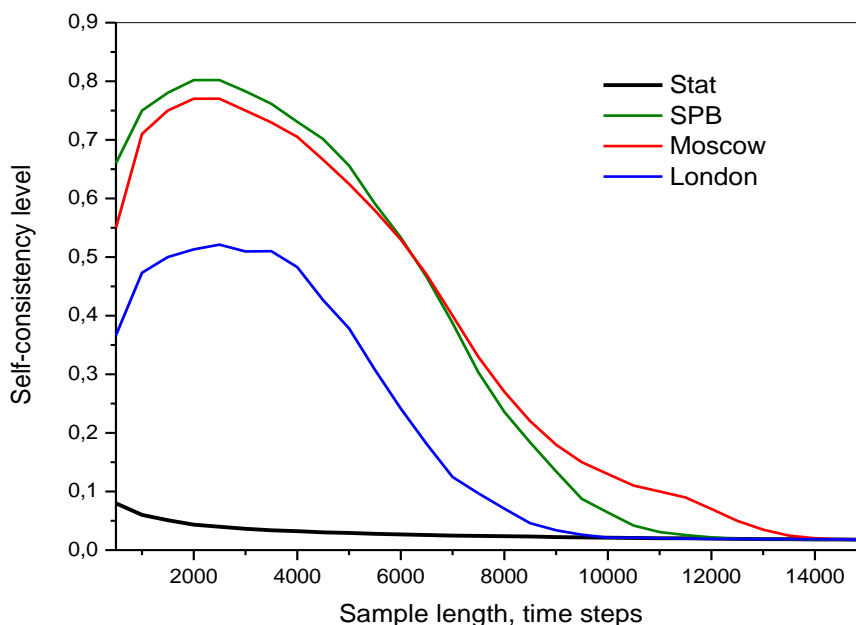


Рис. 10. СЭС ряда SIR в зависимости от длины выборки

Поскольку скорость установления стационарного режима зависит не только от числа линий и станций на них, но и от геометрии области, то сравнивать между собой графики рис. 10 на предмет выявления зависимости от числа абонентов не вполне корректно, хотя качественно они похожи один на другой. Более точным является сравнение скоростей установления стационарного режима внутри одной и той же системы метрополитена, но при разном количестве задействованных линий. На рис. 11 показана зависимость индекса нестационарности (14) ряда средних значений SIR по ансамблю поездов от числа N линий и длины T выборки для метро Лондона.

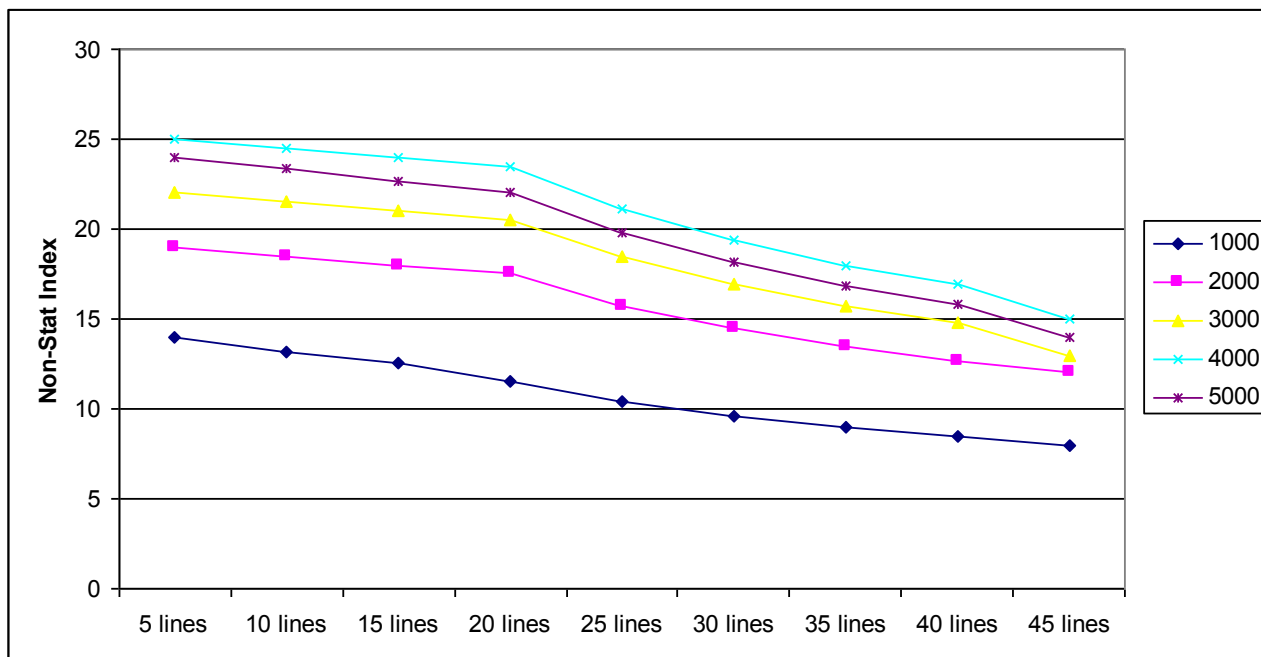


Рис. 11. Индекс нестационарности ряда SIR
в зависимости от длины выборки и числа линий (Лондон)

Для малого числа линий (от 5 до 15) рассматриваемая зависимость приблизительно линейна, а с увеличением числа линий индекс нестационарности меняется в соответствии с полуэмпирической формулой (на уровне детерминации 0,9):

$$J(N, T) = 1 + \frac{A(T)}{\sqrt{N}}, \quad (15)$$

где $A(T)$ есть некоторый численный коэффициент, характерный для выборки определенной длины. В вычислительном эксперименте ряд следует считать стационарным, если индекс J отличается от единицы на величину, меньшую чем $\varepsilon_0(N)$. Соответствующее условие

$$\frac{A(T)}{\sqrt{N}} = \varepsilon_0(N) \quad (16)$$

определяет минимально достаточное число абонентов для рассматриваемой системы, при котором статистические свойства SIR могут быть выведены в рамках кинетического подхода относительно функции распределения координат абонентов, как это описано выше в п. 2. Если $T = 1000$, то $A(T) \approx 30$ и минимально достаточное число абонентов оценивается из (16) как $N_0 \approx 10^7$. Если же $T = 6000$, то $A(T) \approx 1$ и $N_0 \approx 10^4$. Полученная оценка представляется адекватной, если с отдельным приемо-передающим устройством связать не поезд, а вагон.

Таким образом, выяснилось, что на достаточно большом промежутке времени (порядка трех часов) временной ряд SIR для системы поездов метро не является стационарным, а на выборках длин порядка 1 часа – сильно нестационарным, с уровнем нестационарности, большим 10. Отметим в этой

связи, что распределение приращений координат поездов (то есть приемо-передающих устройств, с ними связанных) на уровне разностных производных для последовательных моментов времени становится стационарным очень быстро – всего лишь после промежутка времени, отвечающего первому разгонному периоду. Пример ряда расстояний между этими распределениями приведен на рис. 12.

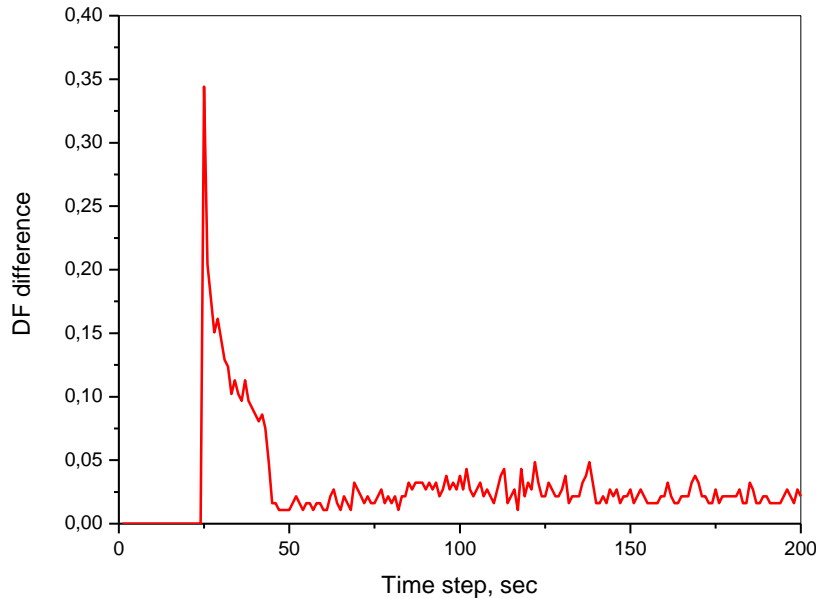


Рис. 12. Расстояние между ВФР приращений координат поездов метро, Москва

В течение первых 25 секунд стоянки на станциях все приращения координат одинаковые (нулевые). Затем начинается движение хоть и с одинаковыми модулями скоростей, но в разных направлениях, поэтому распределение координат расплывается. В течение 20 секунд после начала движения распределение приращений нестационарно, однако после 45-ой секунды расстояния между этими распределениями начинают формировать стационарный временной ряд: соответствующий СУС оказывается равным 0,03 для метро Санкт-Петербурга, 0,02 для метро Москвы и 0,01 для метро Лондона. Эти значения существенно меньше, чем следует ожидать для выборок длин 100, 200 и 500 (по порядку количества поездов в этих системах метро). Теоретические значения стационарного СУС приведены выше на рис. 4 и 10.

Более того, после первой минуты движения любая пара распределений приращений координат, отвечающих произвольным моментам времени, образует стационарный ряд расстояний: соответствующий индекс нестационарности (14) оказывается близким к единице.

Таким образом, динамические системы со стационарным распределением приращений координат могут порождать на своих траекториях существенно нестационарные функционалы, как, например, SIR. Возможность исследования таких функционалов методами статистической механики представляется практически важной и требующей дальнейшего изучения.

Литература

1. Гайдамака Ю.В., Орлов Ю.Н., Молчанов Д.А., Самуйлов А.К. Моделирование отношения сигнал/интерференция в мобильной сети со случайным блужданием взаимодействующих устройств // Информатика и ее применения, 2017. Т. 11. № 2. С. 50-58.
2. Orlov Yu.N., Fedorov S.L., Samoulov A.K., Gaidamaka Yu.V., Molchanov D.A. Simulation of Devices Mobility to Estimate Wireless Channel Quality Metrics in 5G Network // AIP Conference Proceedings, 2017. V. 1863, 090005.
3. Orlov Yu.N., Fedorov S.L., Samuylov A.K. et al. SIR Distribution in D2D Environment with Non-stationary Mobility of Users // 31st European Conference on Modelling and Simulation, ECMS 2017. P. 720-725.
4. Орлов Ю.Н. Кинетические методы исследования нестационарных временных рядов. – М.: МФТИ, 2014. – 276 с.
5. Орлов Ю.Н., Федоров С.Л. Методы численного моделирования процессов нестационарного случайного блуждания. – М.: МФТИ, 2016. – 112 с.
6. Орлов Ю.Н., Федоров С.Л. «Программный комплекс NonStatBox для статистического анализа и моделирования нестационарных временных рядов». Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2017619117 от 15.08.2017.
7. Kolmogoroff A.N. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione // Giornale dell` Istituto Italiano degli Attuari. 1933. – Vol. 4. – № 1. – P. 83-91.
8. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Физматлит, 1961. – 406 с.