



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 160 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Повещенко Ю.А., Подрыга В.О.,
Шарова Ю.С.

Интегрально-согласованные
методы расчета
самогравитирующих и
магнитогидродинамических
явлений

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Шарова Ю.С. Интегрально-согласованные методы расчета самогравитирующих и магнитогидродинамических явлений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 160. 21 с. doi:[10.20948/prepr-2018-160](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-160)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-160>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Ю.А. Повещенко, В.О. Подрыга, Ю.С. Шарова

**Интегрально-согласованные методы расчета
самогравитирующих и
магнитогидродинамических явлений**

Москва – 2018

Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Шарова Ю.С.

Интегрально-согласованные методы расчета самогравитирующих и магнитогидродинамических явлений

Одним из направлений вычислительной астрофизики является разработка численных методик для моделирования самогравитирующих объектов. К ним относятся протопланетные облака, сверхновые звезды и другие скопления больших масс веществ, в эволюции которых существенную роль играет гравитация. Дискретное моделирование в этих задачах при значительных перепадах плотностей и возникновении, например, подвижных, адаптивных, неравномерных сеток может приводить к заметным нарушениям баланса гравитационной энергии. Данная работа посвящена построению полностью консервативных разностных схем в части интегрально-согласованных расчетов, воздействующих на среду гравитационных и магнитогидродинамических сил в лагранжевых переменных.

Ключевые слова: гравитационные и магнитогидродинамические силы, лагранжевые переменные, численное моделирование

Yury A. Poveshchenko, Viktoriia O. Podryga, Yulia S. Sharova

Integral-consistent methods for calculating self-gravitating and magnetohydrodynamic phenomena

One of the directions of computational astrophysics is the development of numerical methods for modeling self-gravitating objects. These objects include protoplanetary clouds, supernovas and other clusters of large masses, in the evolution of which an essential role is played by gravity. Discrete modeling in these problems with the significant differences in density and the appearance, for example, of mobile, adaptive, irregular grids, can lead to appreciable disturbances in the balance of gravitational energy. This paper is devoted to the construction of completely conservative difference schemes in the part of integrally-consistent calculations affecting the medium of gravitational and magnetohydrodynamic forces in Lagrangian variables.

Key words: gravitational and magnetohydrodynamic forces, Lagrangian variables, numerical simulation

1. Введение

При численном моделировании астрофизических задач с учетом самогравитации могут происходить процессы сверхсжатия вещества (плотность изменяется на несколько порядков), и важно на дискретном уровне учитывать соответствующие энергетические преобразования гравитационной и кинетической энергии в процессе эволюции звезды [1].

Данная проблема может решаться путем построения полностью консервативных разностных схем [2], учитывающих эти гравитационные процессы. Учет гравитационных сил при построении полностью консервативных разностных схем сопряжен со значительными сложностями. В настоящей работе с помощью метода опорных операторов [3] предложена интегрально-согласованная разностная схема, позволяющая согласовать изменение кинетической энергии с изменением гравитационной [4]. В качестве базового оператора в этом методе используется результат варьирования гравитационной энергии системы, представляющий собой дискретную свертку тензора тяготения Ньютона в изучаемой разностной среде, исчерпывающим образом отвечающего за все гравитационные процессы, разворачивающиеся на фоне гидродинамического движения вещества, и симметризованного тензора скоростей деформации, представляющего кинематические движения в данной системе. Оператор, сопряженный к свертке этих тензоров, в силу технологии метода опорных операторов автоматически дает силы тяготения, действующие на балансные домены разностной среды.

Методы расчета магнитогидродинамических явлений, сопутствующие процессам самогравитации, также аналогичным образом рассматриваются в данной работе.

2. Постановка задачи

Считая массу dM лагранжевых частиц среды, занимающих текущий объем dV , неизменной, запишем баланс гравитационной энергии системы в виде

$$\frac{1}{2} \int_M \hat{F} dM = \frac{1}{2} \int_M F dM + \int_t^{\hat{t}} d\tau \left(- \int_{O(\tau)} D_g dV + \frac{1}{8\pi\gamma} \int_{\Sigma(\tau)} \left| \frac{F}{dt} \frac{\vec{g} d\vec{s}}{dt} \right| \right). \quad (1)$$

Здесь рассматривается некоторая область течения O с массой M , ограниченная поверхностью Σ (с элементами внешне ориентированной поверхности $\vec{d}\vec{s}$). F –

гравитационный потенциал, $\vec{g} = -grad F$ – напряженность гравитационного поля, так что выполнен гравитационный аналог теоремы Гаусса

$$\int_{\Sigma} \vec{g} d\vec{s} = -4\pi\gamma \int_M dM, \quad (2)$$

где γ – гравитационная постоянная, d/dt – субстанциональная (лагранжева) производная по времени. Величины, отнесенные к конечному моменту времени \hat{t} , помечаются "крышкой". Гравитационная "диссипативная" функция $D_g = tr(t_g t_u)$ определяется как след произведения гравитационного

$$t_g = \frac{1}{4\pi\gamma} \left(\vec{g} \cdot \vec{g} - \frac{\vec{g}^2}{2} \delta \right) \quad (3)$$

и кинематического

$$t_v = \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{v}}{dr} + grad \vec{v} \right) \quad (4)$$

тензоров. Она определяет преобразование гравитационной энергии в кинетическую, разгоняя элементы течения "как целое" без термодинамического сжатия вещества. Это достигается работой сил тяготения

$$-div t_g = \rho \vec{g}, \quad (5)$$

отнесенных к единице объема среды. Соответственно, баланс импульса в такой интегральной системе при наличии гравитационных сил запишем в виде

$$\int_M \hat{v} dM = \int_M \vec{v} dM - \int_t d\tau \left(\int_{\Sigma(\tau)} P d\vec{s} + \int_{O(\tau)} div t_g dV \right). \quad (6)$$

Здесь \vec{v} – скорость, P – давление, ρ – плотность вещества. Считается также выполненным интегральное тождество векторного анализа

$$\int_O D_g dV + \int_O \vec{v} div t_g dV = \int_{\Sigma} t_g \vec{v} d\vec{s}. \quad (7)$$

2.1 Учет магнитогидродинамических явлений

Аналогично п. 2 при наличии электромагнитных полей в магнитогидродинамическом приближении рассмотрим интегральные балансы импульса, внутренней и магнитной энергии в среде.

$$\int_M \hat{v} dM = \int_M \vec{v} dM - \int_t d\tau \left(\int_{\Sigma(\tau)} P d\vec{s} - \int_{O(\tau)} div t_h dV \right). \quad (8)$$

Здесь в магнитогидродинамическом приближении тензор Максвелла дается

представлением

$$t_{\vec{h}} = \frac{c^2}{4\pi} \left(\vec{h} \cdot \vec{h} - \frac{\vec{h}^2}{2} \right), \quad (9)$$

где \vec{h} – напряженность магнитного поля, деленная на скорость света c .

Баланс внутренней энергии (E – приходящейся на единицу массы) имеет вид

$$\int_M \hat{E} dM = \int_M E dM + \int_t^i d\tau \left(-P\eta \operatorname{div} \vec{v} dM + \int_{O(\tau)} D dV + \int dQ \right), \quad (10)$$

где $D = \frac{c^2}{4\pi} \vec{e} \operatorname{rot} \vec{h}$ – джоулев нагрев единицы объема среды, \vec{e} – напряженность электрического поля в системе координат, связанной с движущейся частицей, $\eta = 1/\rho$ – удельный объем единицы массы среды, dQ – интенсивность выделения внутренней энергии в элементе течения.

Баланс магнитной энергии определяется как

$$\frac{c^2}{8\pi} \int_{O(\hat{i})} \hat{h}^2 d\hat{V} = \frac{c^2}{8\pi} \int_{O(i)} \vec{h}^2 dV + \int_t^i d\tau \left(\int_{O(\tau)} (D_{\vec{h}} - D) dV - \int_{\Sigma(\tau)} \vec{q} d\vec{s} \right). \quad (11)$$

Здесь $D_{\vec{h}} = \operatorname{tr}(t_{\vec{h}} t_{\vec{v}})$ – магнитная диссипативная функция, $\vec{q} = \frac{c^2}{4\pi} [\vec{e} \times \vec{h}]$ – вектор

Пойтинга.

Также имеем

$$\int_{O(\tau)} D_{\vec{h}} dV + \int_O \vec{v} \operatorname{div} t_{\vec{h}} dV = \int_{\Sigma} t_{\vec{h}} \vec{v} d\vec{s}. \quad (12)$$

В магнитногидродинамическом приближении интегральные уравнения Максвелла для электромагнитного поля имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{h} d\vec{s} = \oint_{H_{\tau}} \vec{e} d\vec{h}_{\tau}, \quad (13)$$

$$\int_{\Sigma} X_{\tau}^{-1} \vec{e} d\vec{s} = \oint_H \vec{h} d\vec{h}. \quad (14)$$

Здесь $d\vec{h}_{\tau}$ и $d\vec{h}$ – элементы циркуляционных контуров H_{τ} и H соответственно.

X_{τ} – положительно определенный тензор магнитной вязкости в среде. В изотропной среде с проводимостью σ (т.ч. $X_{\tau} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$) для плотности тока справедлив закон Ома в форме:

$$\vec{j} = \sigma \vec{e} = \frac{c^2}{4\pi} \text{rot} \vec{h}, \quad \vec{e} = X_{\tau} \text{rot} \vec{h}. \quad (15)$$

Из условия отсутствия магнитных зарядов вытекает соотношение $\int_{\Sigma} \vec{h} d\vec{s} = 0$.

Напряженность электрического поля \vec{E} в неподвижной и в движущейся с частицами среды (\vec{e}) системах координат в магнитогидродинамическом приближении связаны соотношением $\vec{e} = \vec{E} + [\vec{v} \times \vec{h}]$.

3. Метрические сетки метода опорных операторов для описания гравитационных процессов

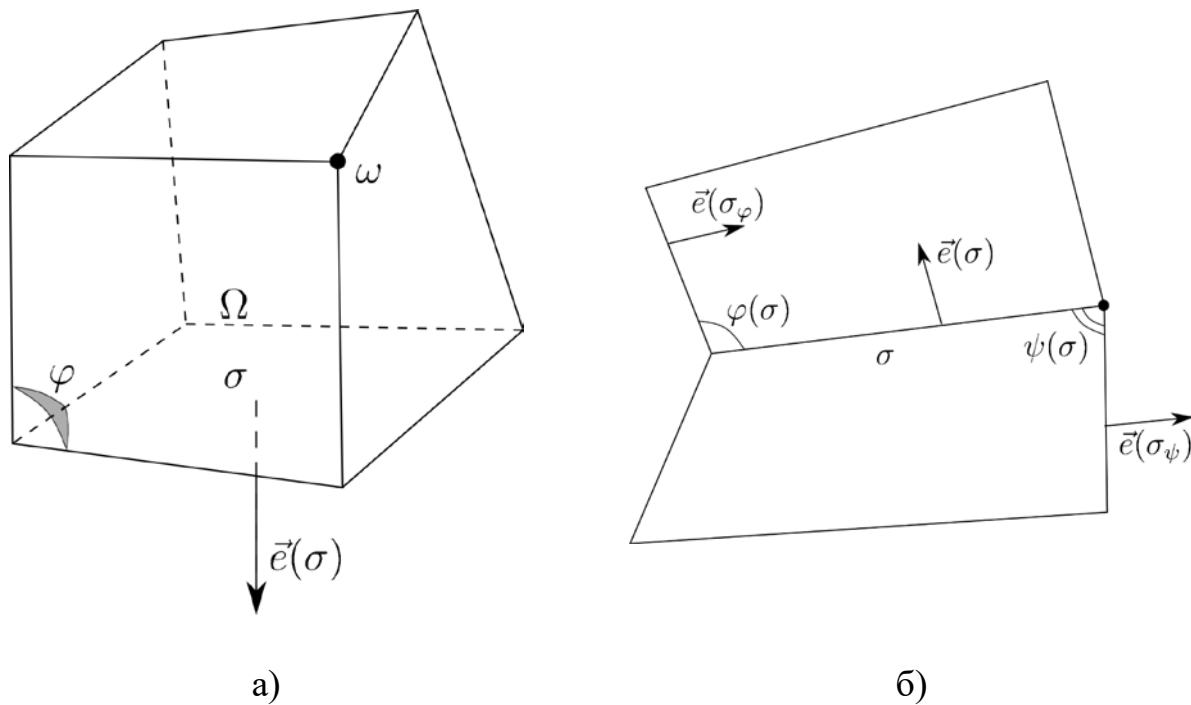


Рис. 1. Ячейка квазирегулярной сетки

Сетки такого типа [4, 5] состоят из ячеек (Ω), образованных узлами (ω) и гранями (σ) (см. Рис. 1а). Узлам $\omega(\Omega)$, образующим ячейку Ω , соответствуют базисы $\varphi(\Omega)$ в этой ячейке, состоящие из единичных нормалей $\vec{e}(\sigma)$ к граням σ , образующим базис. Метрическая калибровка разностной сетки состоит в выборе

объемов базисов $V_\varphi > 0$ с естественным условием нормировки $\sum_{\varphi(\Omega)} V_\varphi = V_\Omega$. Т.е. сумма базисных объемов внутри ячейки Ω равна объему этой ячейки V_Ω . Например, для 2d-четырёхугольной сетки $V_\varphi = \frac{1}{2} S_\varphi$, где S_φ – площадь треугольника, соответствующего базису φ . Компоненты напряженности гравитационного поля будем относить к сетке $(\sigma).(\varphi)$, состоящей из граней σ с нормальными к ним $\vec{e}(\sigma)$, упорядоченными в систему локальных базисов (φ) . Сетка считается квазирегулярной (см. Рис. 1б) с порядком регулярности h^m , если для любого ее индекса σ и любых прилежащих к нему базисов $\varphi(\sigma), \psi(\sigma)$ существует взаимно-однозначное соответствие $\sigma_\varphi \leftrightarrow \sigma_\psi$ входящих в эти базисы индексов, так что в некоторой норме справедливо равенство:

$$\|\vec{e}(\sigma_\varphi) - \vec{e}(\sigma_\psi)\| = O(h^m), \quad (16)$$

здесь h – параметр малости на сетке.

Введем сеточное скалярное произведение

$$(\bar{h}_1, \bar{h}_2)_\sigma = \sum_{\varphi} V_\varphi \bar{h}_1(\sigma) \bar{h}_2(\sigma) \quad (17)$$

с весом $V_\sigma = \sum_{\varphi(\sigma)} V_\varphi > 0$, понимаемым как пригранный объем.

Скалярное произведение $\int_O (\vec{h}, \vec{g}) dV$ в области O аппроксимируется сеточным

аналогом

$$(\bar{h}, g')_\sigma = \sum_{\varphi} V_\varphi \sum_{\sigma(\varphi), \tilde{\sigma}(\varphi)} Gr_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) \bar{h}(\sigma) \bar{g}(\tilde{\sigma}). \quad (18)$$

Здесь

$$g'(\sigma) = \frac{1}{V_\sigma} \sum_{\varphi(\sigma)} V_\varphi \sum_{\tilde{\sigma}(\varphi)} Gr_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) \bar{g}(\tilde{\sigma}), \quad (19)$$

или в операторной форме

$$g' = H \bar{g}. \quad (20)$$

Таким образом на сетке $(\sigma).(\varphi)$ мы ввели самосопряженный положительно определенный метрический сеточный оператор $H : (\sigma) \rightarrow (\sigma)$, $H = H^* > 0$, задаваемый матрицами Грама в локальных базисах $Gr_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) = (\vec{e}(\sigma), \vec{e}(\tilde{\sigma}))$ и переводящий сеточный аналог контравариантного представления $\bar{g}(\sigma)$, понимаемого нами как представление в среднем, в сеточный ковариантный аналог

$g'(\sigma)$, называемый сопряженным представлением векторного поля \vec{g} .

3.1 Ковариантное представление сеточного скалярного произведения на сетке $(\sigma).(\varphi)$

Наряду со скалярным произведением из п. 3, аппроксимирующим интеграл $\int_0 (\vec{h}, \vec{g}) dV$, рассмотрим на сетке $(\sigma).(\varphi)$ также ковариантное представление сеточного скалярного произведения

$$(\vec{h}, g')_{\sigma} = \sum_{\varphi} V_{\varphi} \sum_{\sigma(\varphi), \tilde{\sigma}(\varphi)} Gr'_{\varphi}(\sigma, \tilde{\sigma}) \tilde{h}'(\tilde{\sigma}) g'(\sigma). \quad (21)$$

Здесь

$$\vec{h}(\sigma) = \frac{1}{V_{\sigma}} \sum_{\varphi(\sigma)} V_{\varphi} \sum_{\tilde{\sigma}(\varphi)} Gr'_{\varphi}(\sigma, \tilde{\sigma}) \tilde{h}'(\tilde{\sigma}), \quad (22)$$

или в операторной форме

$$\vec{h} = G \tilde{h}'. \quad (23)$$

Таким образом на сетке $(\sigma).(\varphi)$ введен самосопряженный положительно определенный метрический сеточный оператор $G : (\sigma) \rightarrow (\sigma)$, $G = G^* > 0$, задаваемый семейством базисных матриц Грамма $Gr'_{\varphi}(\sigma, \tilde{\sigma}) = (\vec{e}'_{\varphi}(\sigma), \vec{e}'_{\varphi}(\tilde{\sigma}))$. В этих матрицах $\vec{e}'_{\varphi}(\sigma)$ – взаимные (контравариантные) в локальных базисах φ орты по отношению к исходным (ковариантным) нормальям $\vec{e}(\sigma)$ к граням σ . К сетке $(\sigma).(\varphi)$ с метрическим оператором G в дальнейшем будем относить компоненты напряженности магнитного поля \vec{h} .

4. Дискретная модель эволюции гравитационной энергии системы

Определим разностную дивергенцию $DIV : (\sigma) \rightarrow (\Omega)$ по формуле:

$$DIV \vec{g} = \frac{1}{V_{\Omega}} \sum_{\sigma(\Omega)} s_{\sigma}(\Omega) g'(\sigma) s(\sigma) \quad (24)$$

и скалярное произведение в ячейках

$$(F_1, F_2)_\Omega = \sum_{\Omega} V_\Omega F_{1\Omega} F_{2\Omega}. \quad (25)$$

Здесь $s(\sigma)$ – площадь грани σ . $s_\sigma(\Omega)$ – знаковая функция, равная единице, если нормаль $\vec{e}(\sigma)$ для ячейки Ω внешняя, и минус единице – наоборот.

Далее, для области O , ограниченной поверхностью Σ , моделируя интегральное соотношение

$$\int_0 \text{grad } F \vec{h} dV + \int_0 F \text{div} \vec{h} dV = \int_{\Sigma} F \vec{h} d\vec{s}, \quad (26)$$

определим разностный оператор $GRAD : (\Omega) \rightarrow (\sigma)$ из тождества

$$(\overline{GRAD F}, \vec{h}')_\sigma + (F, \text{DIV} \vec{h})_\Omega = \sum_{\partial\sigma} s_{\partial\sigma} F_{\partial\sigma} \vec{h}'(\partial\sigma) s(\partial\sigma). \quad (27)$$

Здесь для граничной грани $\partial\sigma$ $s(\partial\sigma)$ – ее площадь $s_{\partial\sigma}$ – единица, если нормаль $\vec{e}(\partial\sigma)$ – внешняя к аппроксимации области O . Наконец, $F_{\partial\sigma}$ – гравитационный потенциал на этой граничной грани. Подчеркнем, что F и $\vec{h}' = H \vec{h}$ здесь, вообще говоря, любые сеточные функции. Отсюда на грани σ

$$\overline{GRAD F} = \frac{\Delta F}{h'}, \quad (28)$$

где

$$\Delta F = - \sum_{\Omega(\sigma)} s_{\sigma(\Omega)} F_\Omega + s_{\partial\sigma} F_{\partial\sigma}. \quad (29)$$

Второе слагаемое в приращении потенциала через грань здесь существует, если эта грань граничная

$$h' = \frac{V_\sigma}{s(\sigma)}. \quad (30)$$

На граничных гранях $\partial\sigma = \{\partial_1\sigma | \partial_0\sigma\}$ считается заданной величина $F_{\partial_1\sigma}$ – первая краевая задача, или ее поток $GRAD F'(\partial_0\sigma)$ – неймановское граничное условие. Оператор $\text{DIV } GRAD : (\Omega) \rightarrow (\Omega)$, т.ч. $-\text{DIV } GRAD = (-\text{DIV } GRAD)^* \geq 0$ оказывается при этом самосопряженным и неотрицательным согласно (27) в смысле скалярного произведения (25). Аналогично свойствами самосопряженности и неотрицательности обладает оператор $-\text{GRAD } \text{DIV} : (\sigma) \rightarrow (\sigma)$.

Моделируя гравитационный аналог теоремы Гаусса (2) на сетке $(\sigma).(\varphi)$ как

$$\text{DIV} \vec{g} = \frac{-4\pi\gamma M}{V}, \quad \vec{g} = -\overline{GRAD F} \quad (31)$$

(здесь M и V – масса и объем ячейки Ω) запишем, используя метрический оператор H , вариацию гравитационной энергии (1) на сетке в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(F, \frac{M}{V} \right)_{\Omega} = - \sum_{\varphi} D_{g\varphi} V_{\varphi} + \frac{1}{8\pi\gamma} \sum_{\partial\sigma} s_{\partial\sigma} \left| \frac{F_{\partial\sigma}}{dt} \quad \frac{g'(\partial\sigma)s(\partial\sigma)}{dt} \right|, \quad (32)$$

$$D_{g\varphi} = \frac{1}{4\pi\gamma} \sum_{\sigma(\varphi), \tilde{\sigma}(\varphi)} \bar{g}(\sigma) \bar{g}(\tilde{\sigma}) \left(t_{v(-1/2)\varphi}^g \right)_{\sigma\tilde{\sigma}}, \quad (33)$$

$$\left(t_{v(-1/2)\varphi}^g \right)_{\sigma\tilde{\sigma}} = - \frac{h'(\sigma)h'(\tilde{\sigma})}{2V_{\varphi}} \frac{d}{dt} \left(\frac{Gr_{\varphi}(\sigma, \tilde{\sigma})}{h'(\sigma)h'(\tilde{\sigma})} V_{\varphi} \right). \quad (34)$$

Поскольку

$$D_g = \frac{1}{4\pi\gamma} \text{tr} \left(\vec{g} \cdot \vec{g} \left(t_v - \frac{1}{2} \text{tr}(t_v) \delta \right) \right), \quad (35)$$

заключаем, что величина $\left(t_{v(-1/2)\varphi}^g \right)_{\sigma\tilde{\sigma}}$ аппроксимирует ковариантный тензор $\left(t_v - \frac{1}{2} \text{tr}(t_v) \delta \right)$ на сетке $(\sigma), (\varphi)$. Отсюда гравитационно согласованная аппроксимация ковариантного тензора скоростей деформаций t_v в базисе φ имеет вид

$$\left(t_{v\varphi}^g \right)_{\sigma\tilde{\sigma}} = - \frac{h'(\sigma)h'(\tilde{\sigma})}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{Gr_{\varphi}(\sigma, \tilde{\sigma})}{h'(\sigma)h'(\tilde{\sigma})} \right) \quad (36)$$

на сетке $(\sigma), (\varphi)$.

4.1 Аппроксимация тензора $(t_{v\varphi}^g)_{\sigma\tilde{\sigma}}$ на параллельных сдвиговых смещениях континуальной среды

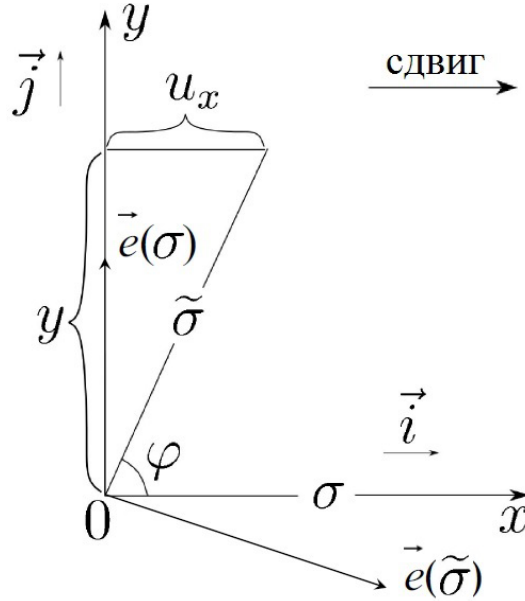


Рис. 2. Параллельное сдвиговое смещение континуальной среды вдоль оси Ox

Для примера рассмотрим (см. рис. 2) вдоль оси Ox характеризуемое углом φ параллельное сдвиговое смещение континуальной среды, в которую лагранжевым образом вписана параллелограммная сетка с гранями $\sigma, \tilde{\sigma}$ и соответствующими им нормальными $\vec{e}(\sigma), \vec{e}(\tilde{\sigma})$.

Смещения точек среды $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j}$ определяются как $u_x = y \operatorname{ctg} \varphi$, $u_y = 0$.

Скорости $v_y = \frac{du_y}{dt} = 0$, $v_x = \frac{du_x}{dt} = -\frac{y}{\sin^2 \varphi} \dot{\varphi}$.

Для параметров сетки очевидно также $h'(\sigma) = \operatorname{const}$, $h'(\tilde{\sigma}) = \widetilde{\operatorname{const}} \cdot \sin \varphi$. Выполняя несложные континуальные преобразования [6] для симметризованного тензора скоростей деформаций в системе координат $x^\sigma = \operatorname{ctg} \varphi \cdot x + y$, $x^{\tilde{\sigma}} = x / \sin \varphi$, связанной с нормальными $\vec{e}(\sigma), \vec{e}(\tilde{\sigma})$, в ковариантном представлении будем иметь:

$$t_v = \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{v}}{dr} + \nabla \vec{v} \right) = -\frac{\dot{\varphi}}{2 \sin \varphi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Тот же результат (37) дает и разностная формула (36) для $(t_{v\varphi}^g)_{\sigma\tilde{\sigma}}$ на сетке $(\sigma) \cdot (\varphi)$.

4.2 Аппроксимация сил гравитационного тяготения $-div t_g dV$, согласованная с изменением гравитационной энергии системы

Моделируя интегральное соотношение (12) и собирая множители при скоростях \vec{v}_ω в линейных по этим узловым скоростям и квадратичных по гравитационному полю формам, определим оператор $-(div t_g dV)_\Delta : (\sigma) \rightarrow (\omega)$, аппроксимирующий действующую на приузловой объем гравитационную силу из следующего тождества

$$\sum_{\varphi} D_{g\varphi} V_{\varphi} + \sum_{\omega} (\vec{v}_{\omega}, (div t_g dV)_{\Delta \omega}) = \left(\int_{\Sigma} t_g \vec{v} d\vec{s} \right)_{\Delta}. \quad (38)$$

Аппроксимируя площадь $d\vec{s}$ поверхности Σ как сумму поверхностей $\vec{s}_{\partial\varphi}$ в граничных базисах с граничной гранью согласно

$$\vec{s}_{\partial\sigma} = \sum_{\partial\varphi(\partial\sigma)} \vec{s}_{\partial\varphi}, \quad (39)$$

запишем аппроксимацию поверхностного интеграла в виде

$$\left(\int_{\Sigma} t_g \vec{v} d\vec{s} \right)_{\Delta} = \sum_{\partial\sigma} \sum_{\partial\varphi(\partial\sigma)} (t_g)_{\partial\varphi} \vec{v}_{\partial\omega(\partial\varphi)} \vec{s}_{\partial\varphi} \quad (40)$$

здесь согласно (3)

$$(t_g)_{\partial\varphi} = \frac{1}{4\pi\gamma} \left(\vec{g}_{\partial\varphi} \cdot \vec{g}_{\partial\varphi} - \frac{(\vec{g}_{\partial\varphi})^2}{2} \delta \right), \quad (41)$$

$$\vec{g}_{\partial\varphi} = \sum_{\vec{\sigma}(\partial\varphi)} \vec{g}(\vec{\sigma}) \vec{e}(\vec{\sigma}) \quad (42)$$

$\partial\omega(\partial\varphi)$ – центральный узел $\partial\omega$ базиса $\partial\varphi$.

5. Дискретная магнитогидродинамическая модель эволюции электромагнитной энергии системы

5.1 Метрические сетки метода опорных операторов для описания электромагнитных процессов

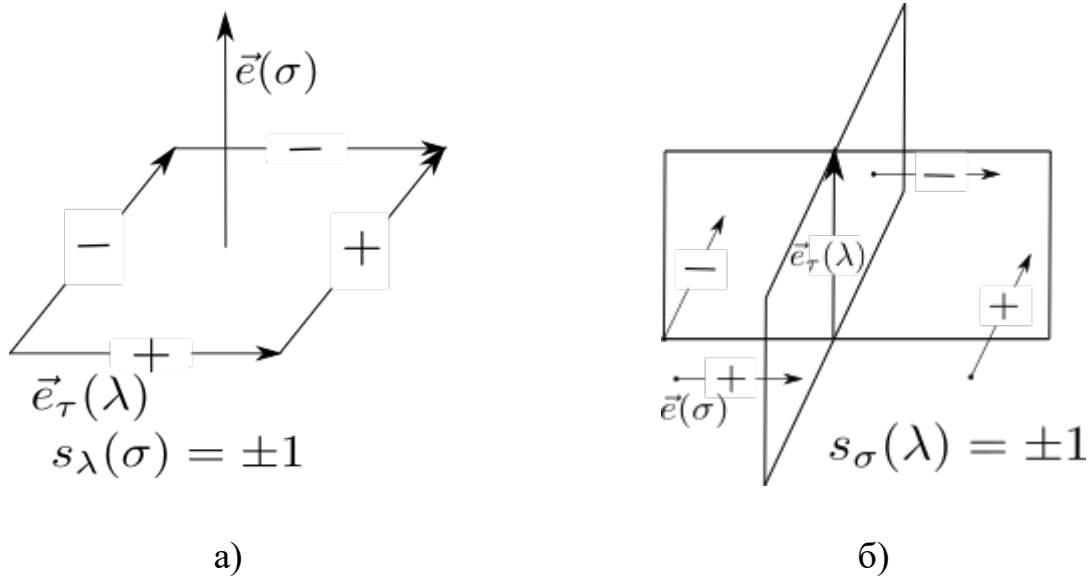


Рис. 3. Циркуляционное согласование граней и ребер сетки

Каждому ориентированному ребру λ с единичным ортом $\vec{e}_\tau(\lambda)$ поставим в соответствие его длину $h_\tau(\lambda) > 0$. Также каждому поверхностному базису $\partial\varphi$ поставим в соответствие его часть площади $\vec{s}_{\partial\varphi}$ граничной грани, так что $\vec{s}_{\partial\sigma} = \sum_{\partial\varphi(\partial\sigma)} \vec{s}_{\partial\varphi}$. На граничных ребрах $\partial\lambda$ определим также величины $s_{\partial\lambda} = \sum_{\partial\varphi(\partial\lambda)} s_{\partial\varphi}$ и $h_\Sigma(\partial\lambda) = s_{\partial\lambda} / h_\tau(\partial\lambda)$.

Аналогично п. 3.1 рассмотрим сетку $(\lambda).(\varphi)$, состоящую из ребер λ с тангенциалами к ним $\vec{e}_\tau(\lambda)$, упорядоченными в систему локальных базисов (φ) . К этой сетке с метрическим оператором G_τ в дальнейшем будем относить компоненты напряженности электрического поля \vec{e} .

Для сетки $(\lambda).(\varphi)$ введем скалярное произведение:

$$(e_1, e_2)_\lambda = \sum_{\lambda} V_\lambda e_1(\lambda) e_2(\lambda) \quad (43)$$

с весом $V_\lambda = \sum_{\varphi(\lambda)} V_\varphi > 0$, понимаемым как приреберный объем.

Скалярное произведение $\int_O (\vec{e}, \vec{b}) dV$ в области O аппроксимируется

сеточным аналогом

$$(\bar{e}, b')_\lambda = \sum_{\varphi} V_\varphi \sum_{\tilde{\lambda}(\varphi), \lambda(\varphi)} Gr'_{\tau\varphi}(\lambda, \tilde{\lambda}) e'(\tilde{\lambda}) b'(\lambda), \quad (44)$$

здесь

$$\bar{e}(\lambda) = \frac{1}{V_\lambda} \sum_{\varphi(\lambda)} V_\varphi \sum_{\tilde{\lambda}(\varphi)} Gr'_{\tau\varphi}(\lambda, \tilde{\lambda}) e'(\tilde{\lambda}). \quad (45)$$

Или в операторной форме

$$\bar{e} = G_\tau e'. \quad (46)$$

Таким образом, на сетке $(\lambda).(\varphi)$ введен самосопряженный положительно определенный метрический сеточный оператор $G_\tau : (\lambda) \rightarrow (\lambda)$, $G_\tau = G_\tau^* > 0$, задаваемый семейством базисных матриц Грамма $Gr'_{\tau\varphi}(\lambda, \tilde{\lambda}) = (\vec{e}'_{\tau\varphi}(\lambda), \vec{e}'_{\tau\varphi}(\tilde{\lambda}))$. В этих матрицах $\vec{e}'_{\tau\varphi}(\lambda)$ – взаимные (контравариантные) в локальных базисах φ орты по отношению к исходным (ковариантным) тангенциалам $\vec{e}_\tau(\lambda)$ к ребрам λ . Индексом τ здесь и далее помечаются величины, отнесенные к сетке $(\lambda).(\varphi)$.

Теперь определим разностный оператор ротор, действующий на компоненты напряженности электрического поля \vec{e} , как $ROD : (\lambda) \rightarrow (\sigma)$ по формуле (см. Рис. 3), аппроксимирующей теорему Стокса:

$$(ROD \vec{e})' = \frac{1}{s(\sigma)} \sum_{\lambda(\sigma)} s_\lambda(\sigma) e'(\lambda) h_\tau(\lambda). \quad (47)$$

Здесь знаковые функции $s_\lambda(\sigma) = \pm 1$ и $s_\sigma(\lambda) = \pm 1$ определены как указано на Рис. 3. Аналогично Рис. 3 будем считать граничную знаковую функцию $s_{\partial\lambda(\partial\varphi)} = +1$, если вращение в направлении орта $\vec{e}_\tau(\partial\lambda)$ дает (в поверхностном базисе $\partial\varphi(\partial\sigma)$) направление внешней нормали к области O . В противном случае $s_{\partial\lambda(\partial\varphi)} = -1$.

Наряду с сеточными компонентами магнитного поля $\vec{h}'(\sigma)$ и $\vec{h}(\sigma)$ на гранях сетки $(\sigma).(\varphi)$ в области O определим также поверхностное тангенциальное магнитное поле $\vec{h}'_\tau(\partial\lambda)$ (аналогично электрическому полю $e'(\partial\lambda)$), заданное на граничных ребрах $\partial\lambda$.

Далее для области O , ограниченной поверхностью Σ , воспользуемся интегральным соотношением

$$\int_0 \vec{e} \operatorname{rot} \vec{h} dV - \int_0 \vec{h} \operatorname{rot} \vec{e} dV = \int_{\Sigma} [\vec{h}_{\tau} \times \vec{e}] d\vec{s} \quad (48)$$

и определим разностный оператор ротор, действующий на компоненты напряженности магнитного поля \vec{h} , как $ROG:((\sigma) \cup (\partial\lambda)) \rightarrow (\lambda)$ из разностного аналога этого соотношения

$$\left(\overline{e', ROG\vec{h}} \right)_{\lambda} - \left(\vec{h}, (ROD\vec{e})' \right)_{\sigma} = \sum_{\partial\lambda} e'(\partial\lambda) h_{\tau}(\partial\lambda) (\vec{h} d\vec{h})_{\Sigma}(\partial\lambda). \quad (49)$$

Элемент поверхностной магнитной циркуляции поперечной к ребру $\partial\lambda$ определяется из аппроксимации смешанного произведения векторов $[\vec{h}_{\tau} \times \vec{e}] d\vec{s}$ как

$$\left(\vec{h} d\vec{h} \right)_{\Sigma}(\partial\lambda) = -h'_{\Sigma}(\partial\lambda) / s_{\partial\lambda} \sum_{\partial\varphi(\partial\lambda)} \frac{s_{\partial\lambda(\partial\varphi)} \cdot s_{\partial\varphi}}{\sqrt{\det \|Gr_{\tau\partial\varphi}\|}} \vec{h}'_{\tau}(\partial\tilde{\lambda}) \Big|_{\partial\tilde{\lambda}(\partial\varphi) \neq \partial\lambda}. \quad (50)$$

Здесь определитель матрицы Грама $Gr_{\tau\partial\varphi}$ в поверхностном базисе $\partial\varphi$, состоящем из ортов $\vec{e}_{\tau}(\partial\lambda)$ и $\vec{e}_{\tau}(\partial\tilde{\lambda})$, определяется как

$$\det \|Gr_{\tau\partial\varphi}\| = \left(\vec{e}_{\tau}(\partial\lambda), \vec{e}_{\tau}(\partial\lambda) \right) \cdot \left(\vec{e}_{\tau}(\partial\tilde{\lambda}), \vec{e}_{\tau}(\partial\tilde{\lambda}) \right) \cdot \sin^2 \overline{\vec{e}_{\tau}(\partial\lambda) \vec{e}_{\tau}(\partial\tilde{\lambda})} \Big|_{\partial\lambda(\partial\varphi) \neq \partial\tilde{\lambda}(\partial\varphi)}. \quad (51)$$

Наконец, искомый оператор ROG , сопряженный базовому оператору ROD определится из выше приведенного разностного аналога интегрального соотношения как

$$\overline{ROG\vec{h}} = \frac{1}{s_{\tau}} \left[\sum_{\sigma(\lambda)} s_{\sigma}(\lambda) \vec{h}(\sigma) h'(\sigma) + (\vec{h} d\vec{h})_{\Sigma}(\partial\lambda) \right], \quad (52)$$

$$s'_{\tau} = V_{\lambda} / h_{\tau}. \quad (53)$$

На граничных ребрах $\partial\lambda = \{\partial_1\lambda | \partial_0\lambda\}$ задается поверхностная магнитная циркуляция $(\vec{h} d\vec{h})_{\Sigma}(\partial_1\lambda)$ – первая краевая задача (замыкающая контур вокруг ребра $\partial_1\lambda$ в операторе ROG), или поверхностная электрическая циркуляция $e'(\partial_0\lambda) \cdot h_{\tau}(\partial_0\lambda)$ вдоль ребра $\partial_0\lambda$ (замыкающая контуры граней $\sigma(\partial_0\lambda)$ в операторе ROD). Оператор $ROD ROG: (\sigma) \rightarrow (\sigma)$, такой что $ROD ROG = (ROD ROG)^* \geq 0$, оказывается при этом самосопряженным и

неотрицательным согласно (49). Аналогичными свойствами самосопряженности и неотрицательности обладает оператор $ROG ROD : (\lambda) \rightarrow (\lambda)$.

Очевидны также свойства операторов $DIV ROD \vec{e} = 0$ в ячейках сетки Ω и $\overline{ROG GRAD F} = 0 \Big|_{\lambda \neq \partial \lambda}$ на внутренних ребрах сетки, аппроксимирующие операции векторного анализа $div rot \vec{e} = 0$ и $rot grad F = 0$.

5.2 Уравнения Максвелла и эволюция электромагнитной энергии

В магнитогидродинамическом приближении уравнение Максвелла (13) для эволюции магнитного поля на гранях сетки $(\sigma).(\varphi)$ запишется в виде

$$\frac{d}{dt}(\vec{h}'s) = -s (ROD \vec{e})'. \quad (54)$$

Из этого и в силу определения операций векторного анализа (24) и (47) получим, что при отсутствии магнитных зарядов в ячейке сетки Ω в начальный момент выполняется условие $DIV \vec{h} = 0$ всегда в этой ячейке.

Нормальные компоненты магнитного поля $\vec{h}'(\sigma)$ считаются непрерывными на гранях сетки.

Далее, на сетке $(\lambda).(\varphi)$ по аналогии с метрическим оператором $G_\tau : (\lambda) \rightarrow (\lambda)$ (см. (45), (46)) для самосопряженного, положительно определенного тензора магнитной проводимости $\rho_{\tau\varphi} = \left(\frac{1}{X_\tau}\right)_\varphi$, аппроксимирующего в базисах сетки φ обратную магнитную вязкость в среде (см также (15)), введем метрический оператор проводимости $G_{\rho\tau} : (\lambda) \rightarrow (\lambda)$ и второе уравнение Максвелла (14) для потока электрического поля как

$$G_{\rho\tau} e' = \overline{ROG \vec{h}}, \quad (55)$$

$$G_{\rho\tau} e' = \frac{1}{V_\lambda} \sum_{\varphi(\lambda)} V_\varphi \sum_{\tilde{\lambda}(\varphi)} Gr'_{\rho\tau\varphi}(\lambda, \tilde{\lambda}) e'(\tilde{\lambda}). \quad (56)$$

Здесь матрицы Грамма проводимости среды определяются как $Gr'_{\rho\tau\varphi}(\lambda, \tilde{\lambda}) = (\vec{e}'_{\tau\varphi}(\lambda), \rho_{\tau\varphi} \vec{e}'_{\tau\varphi}(\tilde{\lambda}))$.

Очевидно, оператор $G_{\rho\tau} = (G_{\rho\tau})^* > 0$ является также самосопряженным и положительно определенным на сетке $(\lambda).(\varphi)$.

Тангенциальные компоненты электрического поля $e'(\lambda)$ считаются непрерывными на сетке $(\lambda).(\varphi)$.

Из (54) с учетом (49) следует

$$\frac{c^2}{4\pi} \sum_{\sigma} V_{\sigma} \bar{h}(\sigma) \frac{1}{s(\sigma)} \frac{d}{dt} (\bar{h}'(\sigma) s(\sigma)) = - \left(\int_O DdV \right)_{\Delta} - \left(\int_{\Sigma} \vec{q} d\vec{s} \right)_{\Delta}. \quad (57)$$

Здесь джоулев нагрев всего объема среды

$$\left(\int_O DdV \right)_{\Delta} = \frac{c^2}{4\pi} (G_{\rho\tau} e', e')_{\lambda} = \sum_{\varphi} D_{\varphi} V_{\varphi} \geq 0 \quad (58)$$

определяется как его сумма в локальных базисах φ

$$D_{\varphi} = \frac{c^2}{4\pi} \sum_{\lambda(\varphi), \tilde{\lambda}(\varphi)} Gr'_{\rho\tau\varphi}(\lambda, \tilde{\lambda}) e'(\lambda) e'(\tilde{\lambda}) = \frac{c^2}{4\pi} (\vec{e}_{\varphi}, \rho_{\tau\varphi} \vec{e}_{\varphi}) \geq 0 \quad (59)$$

с напряженностями электрических полей в этих базисах $\vec{e}_{\varphi} = \sum_{\lambda(\varphi)} e'(\lambda) \vec{e}_{\tau\varphi}(\lambda)$.

Также в силу (44) получается, что для потока вектора Пойтинга $\vec{q} = \frac{c^2}{4\pi} [\vec{e} \times \vec{h}]$ через поверхность Σ , ограничивающую искомую область O , следует представление

$$\left(\int_{\Sigma} \vec{q} d\vec{s} \right)_{\Delta} = - \frac{c^2}{4\pi} \sum_{\partial\lambda} e'(\partial\lambda) h_{\tau}(\partial\lambda) (\vec{h} d\vec{h})_{\Sigma}(\partial\lambda) \quad (60)$$

(см. также (45)).

Теперь преобразуем выражение для изменения магнитной энергии (см. (11)) на сетке $(\sigma).(\varphi)$ с метрическим оператором G

$$\frac{c^2}{8\pi} \frac{d}{dt} (\bar{h}, \bar{h}')_{\sigma} = \frac{c^2}{4\pi} \sum_{\sigma} V_{\sigma} \bar{h}(\sigma) \frac{1}{s(\sigma)} \frac{d}{dt} (\bar{h}'(\sigma) s(\sigma)) + \sum_{\varphi} D_{\bar{h}\varphi} V_{\varphi}, \quad (61)$$

$$D_{\bar{h}\varphi} = \frac{c^2}{4\pi} \sum_{\sigma(\varphi), \tilde{\sigma}(\varphi)} \bar{h}'(\sigma) \bar{h}'(\tilde{\sigma}) \left(t_{\nu(-1/2)\varphi}^{\bar{h}} \right)^{\sigma\tilde{\sigma}}, \quad (62)$$

$$\left(t_{\nu(-1/2)\varphi}^{\bar{h}} \right)^{\sigma\tilde{\sigma}} = \frac{1}{2h'_{\varphi}(\sigma) h'_{\varphi}(\tilde{\sigma})} \frac{d}{dt} \left(\frac{h'_{\varphi}(\sigma) h'_{\varphi}(\tilde{\sigma}) Gr'_{\varphi}(\sigma, \tilde{\sigma})}{V_{\varphi}} \right), \quad (63)$$

$$\left(t_{\nu\varphi}^{\bar{h}} \right)^{\sigma\tilde{\sigma}} = \frac{1}{2h'_{\varphi}(\sigma) h'_{\varphi}(\tilde{\sigma})} \frac{d}{dt} \left(h'_{\varphi}(\sigma) h'_{\varphi}(\tilde{\sigma}) Gr'_{\varphi}(\sigma, \tilde{\sigma}) \right), \quad (64)$$

$$h'_\varphi(\sigma) = \frac{V_\varphi}{s(\sigma)}. \quad (65)$$

Окончательно будем иметь закон сохранения магнитной энергии

$$\frac{c^2}{8\pi} \frac{d}{dt} (G\vec{h}', \vec{h}')_\sigma = \sum_\varphi D_{\vec{h}\varphi} V_\varphi - \left(\int_O DdV \right)_\Delta - \left(\int_\Sigma \vec{q}d\vec{s} \right)_\Delta. \quad (66)$$

Поскольку

$$D_{\vec{h}} = \frac{c^2}{4\pi} \text{tr} \left(\vec{h} \cdot \vec{h} \left(t_v - \frac{1}{2} \text{tr}(t_v) \delta \right) \right), \quad (67)$$

заключаем, что величины $(t_{v(-1/2)\varphi}^{\vec{h}})^{\sigma\tilde{\sigma}}$ и $(t_{v\varphi}^{\vec{h}})^{\sigma\tilde{\sigma}}$ аппроксимируют на сетке $(\sigma), (\varphi)$ магнитодинамически согласованные контравариантный тензор $\left(t_v - \frac{1}{2} \text{tr}(t_v) \delta \right)^{\sigma\tilde{\sigma}}$ и контравариантный симметризованный тензор скоростей деформаций $(t_v)^{\sigma\tilde{\sigma}}$ соответственно.

5.3 Аппроксимация тензора $(t_{v\varphi}^{\vec{h}})^{\sigma\tilde{\sigma}}$ на параллельных сдвиговых смещениях континуальной среды

Рассмотрим пример (см. Рис. 2), разобранный в п. 4.1, с параллельным сдвиговым смещением континуальной среды (вдоль Ox , характеризуемый углом φ), в которую лагранжевым образом вписана параллелограммная сетка с гранями $\sigma, \tilde{\sigma}$ и соответствующими им нормальными $\vec{e}(\sigma), \vec{e}(\tilde{\sigma})$. Для параметров сетки, связанных с тензором $(t_{v\varphi}^{\vec{h}})^{\sigma\tilde{\sigma}}$ (см. (64), (65)), очевидно $h'_\varphi(\sigma) = \text{const}$, $h'_\varphi(\tilde{\sigma}) = \widetilde{\text{const}} \cdot \sin \varphi$.

В п. 4.1 мы приводили одинаковый результат (37), полученный в данном примере для ковариантного гравитационно согласованного разностного (36) и континуального [6] представлений симметризованного тензора скоростей деформаций $t_v = 1/2 \left(\frac{d\vec{v}}{dr} + \nabla \vec{v} \right)$ в движущейся среде.

Аналогичный одинаковый результат получается в этом же примере при вычислении контравариантного магнитодинамически согласованного разностного (64) и континуального [6] представлений

$$t_v = \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{v}}{dr} + \nabla\vec{v} \right) = -\frac{\dot{\varphi}}{2\sin^3\varphi} \begin{pmatrix} 2\cos\varphi & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (68)$$

При этом (37) и (68) – это, разумеется, один и тот же тензор параллельного сдвига в движущейся сплошной среде.

5.4 Аппроксимация магнитогидродинамической силы Лоренца, согласованная с изменением электромагнитной энергии системы

Моделируя интегральное соотношение (12) и собирая множители при скоростях \vec{v}_ω в линейных по этим узловым скоростям и квадратичных по магнитному полю формах, определим оператор $(\text{div } t_{\vec{h}} dV)_{\Delta} : (\sigma) \rightarrow (\omega)$, аппроксимирующий действующую на приузловой объем силу Лоренца из следующего тождества

$$\sum_{\varphi} D_{\vec{h}\varphi} V_{\varphi} + \sum_{\omega} \left(\vec{v}_{\omega}, (\text{div } t_{\vec{h}} dV)_{\Delta\omega} \right) = \left(\int_{\Sigma} t_{\vec{h}} \vec{v} d\vec{s} \right)_{\Delta}. \quad (69)$$

Аналогично п. 4.2 имеем

$$\left(\int_{\Sigma} t_{\vec{h}} \vec{v} d\vec{s} \right)_{\Delta} = \sum_{\partial\sigma} \sum_{\partial\varphi(\partial\sigma)} (t_{\vec{h}})_{\partial\varphi} \vec{v}_{\partial\omega(\partial\varphi)} \vec{s}_{\partial\varphi}. \quad (70)$$

Здесь согласно (9)

$$(t_{\vec{h}})_{\partial\varphi} = \frac{c^2}{4\pi} \left(\vec{h}_{\partial\varphi} \cdot \vec{h}_{\partial\varphi} - \frac{(\vec{h}_{\partial\varphi})^2}{2} \delta \right), \quad (71)$$

$$\vec{h}_{\partial\varphi} = \sum_{\tilde{\sigma}(\partial\varphi)} \vec{h}'(\tilde{\sigma}) \vec{e}'_{\varphi}(\tilde{\sigma}), \quad (72)$$

$\partial\omega(\partial\varphi)$ – центральный узел $\partial\omega$ в базисе $\partial\varphi$.

6 Заключение

Применительно к задачам вычислительной астрофизики в работе на метрически согласованных квазирегулярных сетках теории метода опорных операторов построены полностью консервативные разностные схемы в части интегрально согласованных расчетов, воздействующих на среду гравитационных сил в лагранжевых переменных. Такой выбор сил согласован с изменением гравитационной и кинетической энергии системы и не приводит к их дисбалансам при сверхсжатии вещества и возникновении искажений сетки в расчетах. Также на метрически согласованных сетках метода опорных операторов построены алгоритмы расчета магнитогидродинамических явлений, сопутствующих процессам самогравитации, рассматриваемых в данной работе.

7 Библиографический список

- [1] Денисов А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П., Чечеткин В.М. Роль вращения в термоядерной модели взрыва сверхновой // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. № 99. 1986.
- [2] Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992. 424 с.
- [3] Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: ЗАО «Критерий», 1996. 273 с.
- [4] Колдоба А.В., Кузнецов О.А., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П., Самарский А.А. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений механики сплошной среды в квазилагранжевых переменных при наличии гравитационных и магнитогидродинамических процессов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. № 55. 1985.
- [5] Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Гасилова И.В., Дорофеева Е.Ю. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 12. С. 86-96.
- [6] Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Ленанд, Физико-математическое наследие, 2017. 432 с.

Оглавление

1. Введение	3
2. Постановка задачи	3
2.1 Учет магнитогидродинамических явлений.....	4
3. Метрические сетки метода опорных операторов для описания гравитационных процессов.....	6
3.1 Ковариантное представление сеточного скалярного произведения на сетке $(\sigma).(\varphi)$	8
4. Дискретная модель эволюции гравитационной энергии системы	8
4.1 Аппроксимация тензора $(t_{\nu\varphi}^g)_{\sigma\tilde{\sigma}}$ на параллельных сдвиговых смещениях континуальной среды	11
4.2 Аппроксимация сил гравитационного тяготения $-\mathit{div} t_g dV$, согласованная с изменением гравитационной энергии системы	12
5. Дискретная магнитогидродинамическая модель эволюции электромагнитной энергии системы.....	13
5.1 Метрические сетки метода опорных операторов для описания электромагнитных процессов.....	13
5.2 Уравнения Максвелла и эволюция электромагнитной энергии	16
5.3 Аппроксимация тензора $(t_{\nu\varphi}^h)^{\sigma\tilde{\sigma}}$ на параллельных сдвиговых смещениях континуальной среды	18
5.4 Аппроксимация магнитогидродинамической силы Лоренца, согласованная с изменением электромагнитной энергии системы	19
6 Заключение	20
7 Библиографический список	20