



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 166 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Ольховская О.Г., Гасилов В.А.,  
Марков М.Б., Валько В.В.

Моделирование течения  
излучающего газа около  
возвращаемого  
космического аппарата

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Моделирование течения излучающего газа около возвращаемого космического аппарата / О.Г.Ольховская [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 166. 26 с. doi:[10.20948/prepr-2018-166](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-166)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-166>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**О. Г. Ольховская, В. А. Гасилов, М. Б. Марков,  
В. В. Валько**

**Моделирование течения  
излучающего газа  
около возвращаемого  
космического аппарата**

**Москва — 2018**

***Ольховская О. Г., Гасилов В. А., Марков М. Б., Валько В. В.***

**Моделирование течения излучающего газа около возвращаемого космического аппарата**

Рассматривается модельная задача расчета структуры гиперзвукового потока излучающего газа около спускаемого космического аппарата при его движении в верхних слоях атмосферы. Решение системы уравнений газодинамики в двумерной цилиндрической ( $r$ - $z$ ) геометрии осуществляется расщеплением по физическим процессам. Разностные аппроксимации строятся на треугольной сетке нерегулярной структуры. Используется динамическая адаптация расчетных сеток к особенностям решения. Консервативный алгоритм расчета переноса излучения построен на основе сеточно-характеристической схемы. Расчеты выполняются с применением широкодиапазонного уравнения состояния воздушной смеси и многогрупповых моделей коэффициентов поглощения. Высокая точность совпадения результатов проведенных нами расчетов с результатами авторов Т. Sakai, Т. Tsuru, К. Sawada (2001) в их численных экспериментах с высокоточными газодинамическими методиками и с результатами расчетов с детализированными спектральными моделями авторов С. Park, F. Milosh (1990) позволяет сделать вывод о целесообразности дальнейшего развития созданной нами методики с целью решения прикладных задач.

***Ключевые слова:*** Вычислительная гидродинамика, перенос излучения, неструктурированная сетка

***Olga Gourgenovna Olkhovskaya, Vladimir Anatolievich Gasilov, Mikhail Borisovich Markov, Viktor Vasilievich Val'ko***

**Simulation of a radiative gas flow near re-entry space vehicle**

We consider a model problem of calculating a hypersonic radiating gas flow around a spacecraft as it moves in the upper atmosphere. We use 2D cylindrical ( $r$ - $z$ ) geometry. Radiative-gasdynamics equations are solved by the method of physical splitting. Difference approximations are built on a triangular unstructured mesh used in our calculations. We use a dynamic mesh adaptation to the flow features. The conservative algorithm for calculating the radiation transfer is constructed on the basis of a grid-characteristic scheme. Air properties are taken into account via wide-range EOS, and emissivity and opacity datatables. Good comparisons between results of our calculations with those obtained by T. Sakai, T. Tsuru and K. Sawada (2001) in their numerical experiments with high accuracy numerical gasdynamic techniques, as well as with detailed spectral simulation techniques developed by C. Park and F. Milosh (1990) allows us to conclude that it is advisable to further extend our numerical methodology with the aim to solve applied problems.

***Key words:*** Computational fluid dynamics, radiative transfer, unstructured mesh

# 1 Введение

История исследований течений излучающего газа около космических аппаратов (КА), возвращаемых на Землю после завершения их миссии, а также аппаратов, спускаемых на другие планеты, насчитывает десятилетия. Определение потоков энергии, переносимой излучением от ударного слоя к поверхности аппарата, явилось одной из первых проблем радиационной газовой динамики, которая, несмотря на многочисленные глубокие исследования, выполненные в нашей стране и за рубежом, сохраняет актуальность и в наши дни. Новые исследования по программам создания возвращаемых космических аппаратов, по запуску аппаратов на планеты Солнечной системы стимулируют современные работы по анализу процессов, протекающих во время входа КА в плотные слои атмосферы (см., например, материалы на сайте Совета РАН по космосу <http://stp.cosmos.ru/index.php?id=links>).

Влияние радиационных тепловых потоков на структуру течения около КА меняется в весьма широких пределах в зависимости от скорости движения и высоты полета. Излучение в основном генерируется в невязкой зоне скачка уплотнения, где газ частично или практически полностью диссоциирован и, при определенных условиях, заметно ионизован. Выходящее излучение охлаждает газ в невязкой зоне. Проходя сквозь пограничный слой, излучение поглощается и нагревает газ в непосредственной близости от стенки аппарата. Часть излучения поглощается стенкой, а часть – отражается от нее и, складываясь с излучением погранслоя, в свою очередь оказывает воздействие на зону скачка уплотнения. При достаточно высокой интенсивности суммарного кинетического и теплового потока энергии на стенку, превышающей порог защиты теплового экрана, стенка начинает испаряться и разрушаться от механических нагрузок. Испаренный материал и твердые частицы, попадая в погранслой, существенно модифицируют его свойства, в том числе радиационные.

Проведенные ранее исследования позволяют описать характер радиационных процессов в течении около спускаемого КА следующим образом [1]. На малых высотах, т.е. в наиболее плотных слоях атмосферы, равновесное излучение от скачка уплотнения достигает максимума, определяемого излучением черного тела. На высотах около 50 км существенными становятся эффекты неравновесности. Поскольку размер области неравновесности обратно пропорционален плотности газа, а излучательная способность объема газа, напротив, пропорциональна его плотности, то для этого диапазона высот наблюдается эффект практической независимости интенсивности неравновесного излучения от плотности, и оно определяется в основном скоростью течения. С дальнейшим увеличением высоты интенсивность неравновесного лучистого потока снижается, что вызвано усилением его зависимости от плотности газа. Резкое снижение интенсивности излучения

происходит на высотах около 90 км, когда ударный слой становится полностью вязким.

При скорости входа в атмосферу, близкой к первой космической (~7,9 км/сек), температура равновесного ударного слоя умеренная, и влияние излучения на течение газа, как правило, несущественное. Так, унос энергии лучистым потоком в этой ситуации оказывается порядка одного-двух процентов от полной энергии потока. В этом случае радиационный поток энергии можно вычислять по полю течения, рассчитанному для неизлучающего газа, т.е. как поправку к конвективному потоку энергии. Однако, если скорость входа КА в атмосферу близка ко второй космической, (~11,2 км/сек), температура в ударном слое становится достаточно высокой, чтобы возникающее излучение влияло на течение газа, а при определенных условиях радиационные тепловые потоки могут превысить конвективные потоки энергии.

Таким образом, в течение полета КА в атмосфере свойства и роль излучения существенно меняются, поэтому для получения достаточно надежной количественной информации расчеты поля течения необходимо проводить на основе системы уравнений, учитывающей взаимодействие поля излучения с газовым потоком. Разработка соответствующей компьютерной модели представляет собой достаточно сложную проблему, что обусловлено рядом причин. Коэффициенты поглощения излучения в газе сильно зависят от частоты, а достаточно полный расчет интенсивности излучения "по линиям" требует учета до миллиона точек в адекватном задаче частотном диапазоне. Известным методом экономии вычислений при расчете переноса лучистой энергии является многогрупповое приближение коэффициентов поглощения [6]. Данный подход применялся к расчетам течений около КА в ряде работ, например [28]. Однако необходимо также учитывать зависимость излучательной способности и коэффициентов поглощения от условий движения КА (высоты, скорости), и, тем самым, по мере снижения аппарата в многогрупповое представление радиационных свойств газа требуется вносить корректировки.

Другим фактором, усложняющим расчет лучистого переноса энергии, является неоднородность процесса. Сравнения, выполненные разными авторами (см., напр., [27]) показывают, что использование относительно простых одномерных моделей дает сильно завышенные значения лучистых тепловых потоков (порядка 10-30 %).

Необходимо также отметить сложность построения сходящегося вычислительного алгоритма для совместного расчета радиационного и газодинамического полей. Излучение генерируется в некотором объеме газа за фронтом ударной волны, а длины пробега квантов для тех спектральных групп, в которых переносится существенная доля лучистой энергии, зачастую оказываются сравнимы или больше характерного размера изучаемой области течения (порядка радиуса закругления лобовой части КА). Поэтому вычисление

вклада лучистого теплового потока в баланс энергии газа имеет нелокальный характер, как, например, это могло бы быть в случае локального термодинамического равновесия (когда можно использовать модель лучистой теплопроводности) или в случае оптически прозрачной среды. Тем самым вычисление радиационно-газодинамического поля необходимо организовать таким образом, чтобы каждый элемент объема (или, другими словами, каждая расчетная ячейка) мог обмениваться лучистой энергией с каждым другим объемом. Сходимость такого вычислительного процесса замедлена сравнительно с расчетом только локальных источников, зависящих лишь от термодинамического состояния среды в данной точке течения. Построение робастного алгоритма совместного расчета уравнений лучистого переноса энергии и газовой динамики в случае сильно излучающего газа представляет собой сложную проблему, к настоящему времени не имеющую окончательного решения.

Полная газодинамическая модель, учитывающая неравновесность физико-химических процессов в течении за ударной волной и процессы в пограничном слое, испарение стенки КА и т.д., оказывается весьма сложной не только для теоретического анализа, но и для численного решения. В данной работе мы не будем рассматривать все аспекты построения такой модели. Мотивацией для выполнения данной работы является развитие новых численных алгоритмов и вычислительных технологий, базирующихся на использовании неструктурированных расчетных сеток, или сеток нерегулярной структуры [4]. Известно, что применение нерегулярных сеток представляет определенные преимущества сравнительно с распространенными "координатными" сетками в отношении учета геометрии изучаемых объектов и адаптации сетки с целью лучшего разрешения особенностей течения. В данной работе рассматривается методика расчета газодинамического течения совместно с учетом процессов переноса энергии излучением. Вычислительный алгоритм строится на основе метода контрольных объемов, а базовая сетка создается автоматической триангуляцией расчетной области. Алгоритм расчета переноса лучистой энергии строится на основе сеточно-характеристического подхода. Что же касается постановки задачи, то мы принимаем обычные допущения, используемые в расчетах невязкого обтекания затупленных тел. Предполагается, что газ находится в локальном термодинамическом и химическом равновесии. Толщины скачка уплотнения и погранслоя принимаются малыми сравнительно с расстоянием между скачком и стенкой КА. Влияние испаренного материала стенки не рассматривается.

## 1.1. Постановка задачи

Предложенные численные методики проверялись сравнением с экспериментальными и расчетными данными на примере задачи, описанной в [27]. Эксперименты проводились в аэродинамической трубе. Модель представляет собой сферически закругленный цилиндр, изготовленный из полиэтилена или поликарбоната. Диаметр цилиндра 0,7 см, радиус закругления 0,5 см. Набегающий поток воздуха имеет плотность  $5,5 \cdot 10^{-4}$  кг/м<sup>3</sup> и температуру 300 К. Рассматривались два скоростных режима: скорость набегающего потока 13,4 км/с и 16 км/с.

Расчетная область изображена на рис. 1.1.

Решалась внешняя задача обтекания при следующих граничных условиях:

- параметры набегающего потока на левой границе ( $AB$ );
- условия свободного выхода на внешних границах ( $BC$  и  $CD$ );
- условия скольжения на стенках обтекаемого тела ( $DE$  и  $EF$ );
- условия симметрии на оси ( $AF$ ).

При моделировании радиационных процессов мы полагали внешнюю границу черным телом при температуре 300 К, а стенку – черным телом при температуре 3000 К.

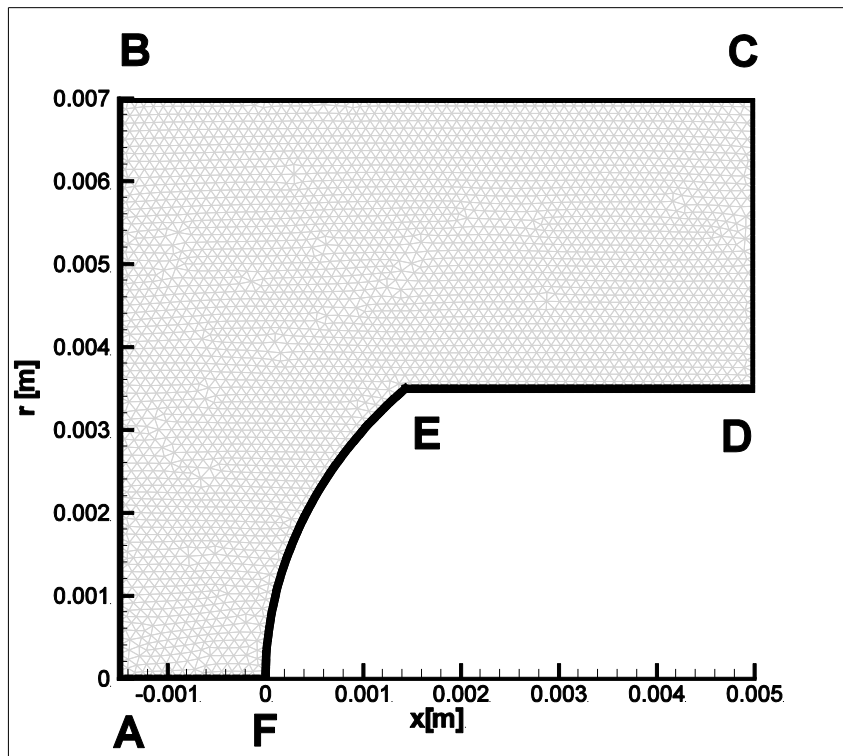


Рис. 1.1. Расчетная область.

## 2 Математические модели и численные методы

Разработанный код предназначен для решения задач радиационной газовой динамики в двумерных декартовых и цилиндрических координатах. В данной работе рассматривалась модель одножидкостной газовой динамики с учетом диссипативных процессов [2]. Система уравнений газовой динамики записывается в форме балансных уравнений.

$$\begin{aligned}
 &\text{уравнение непрерывности} && \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \\
 &\text{уравнение движения} && \frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = \operatorname{grad} P + \operatorname{div}(\hat{\tau}) \\
 &\text{уравнение баланса энергии} && \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \varepsilon \mathbf{V}) = -P \operatorname{div} \mathbf{V} - \operatorname{div} Q - G_{Rad} + \Phi
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Использованы стандартные обозначения физических величин,  $\varepsilon$  – полная внутренняя энергия, включающая энергию вибрационного возбуждения, диссоциации и ионизации.

Уравнение баланса энергии записано в однотемпературном приближении и учитывает перенос энергии излучением. Мы предполагаем, что течение существует при условиях локального термодинамического равновесия, а затраты энергии на вибрационное возбуждение, диссоциацию и ионизацию учитываются посредством использования табулированной зависимости внутренней энергии от плотности и температуры.

Для решения системы (2.1) применяется схема расщепления (суммарной аппроксимации), в которой группы уравнений, описывающих разные физические процессы, решаются последовательно предназначенными для этого программными модулями. В таблице 2.1 представлены основные численные методы, используемые на разных этапах расщепления.

Таблица 2.1

Схема расщепления

Идеальная газовая динамика	Диссипативные процессы	
	Теплопроводность	Перенос энергии излучением
Локальные процессы	Квазилокальные процессы	Нелокальные процессы
Явная схема	Неявная схема	Явная схема с дробными шагами
TVD схема повышенного порядка аппроксимации с коррекцией потоков	Интегро-интерполяционная схема контрольных объемов	Характеристическая схема
Схема интегрирования по времени "предиктор-корректор" 2-го порядка аппроксимации		



### 3 Дискретизация расчетной области

Решение системы уравнений радиационной газовой динамики (РГД) выполняется на неструктурированной треугольной сетке, адаптированной к границе расчетной области. Возможно измельчение сетки вблизи особенностей решения. Все расчетные величины отнесены к узлам сетки.

В данной работе рассматриваются двумерные треугольные неструктурированные сетки на плоскости. Связность сетки и отношения инцидентности узлов и ячеек произвольны. Мы рассматриваем только сетки, которые являются множествами правильно расположенных (или правильно примыкающих) треугольников. Правильное расположение означает, что любые два треугольника (ячейки сетки), рассматриваемые как замкнутые множества, либо не пересекаются, либо могут иметь только одно общее ребро (и, соответственно, две общих вершины), либо одну общую вершину.

Предлагаемый в данной работе метод аппроксимации системы (2.1) относится к классу методов «конечных объемов» или «контрольных объемов». Для его использования требуется наличие не только основной треугольной сетки, но и дополнительной двойственной сетки, также покрывающей всю расчетную область. Предполагается, что основная треугольная сетка создается с помощью одного из известных методов, осуществляющих триангуляцию расчетной области. Двойственная сетка представляет собой множество контрольных объемов, построенных вокруг узлов основной сетки. Двойственная сетка строится на основе исходной треугольной сетки перед осуществлением расчета задачи. Существуют различные подходы к построению сетки контрольных объемов. Описание алгоритма генерации двойственных сеток в двумерных областях сложной формы дано в работе [3]. Там же предлагается метод построения двойственной сетки, который и используется в данной работе.

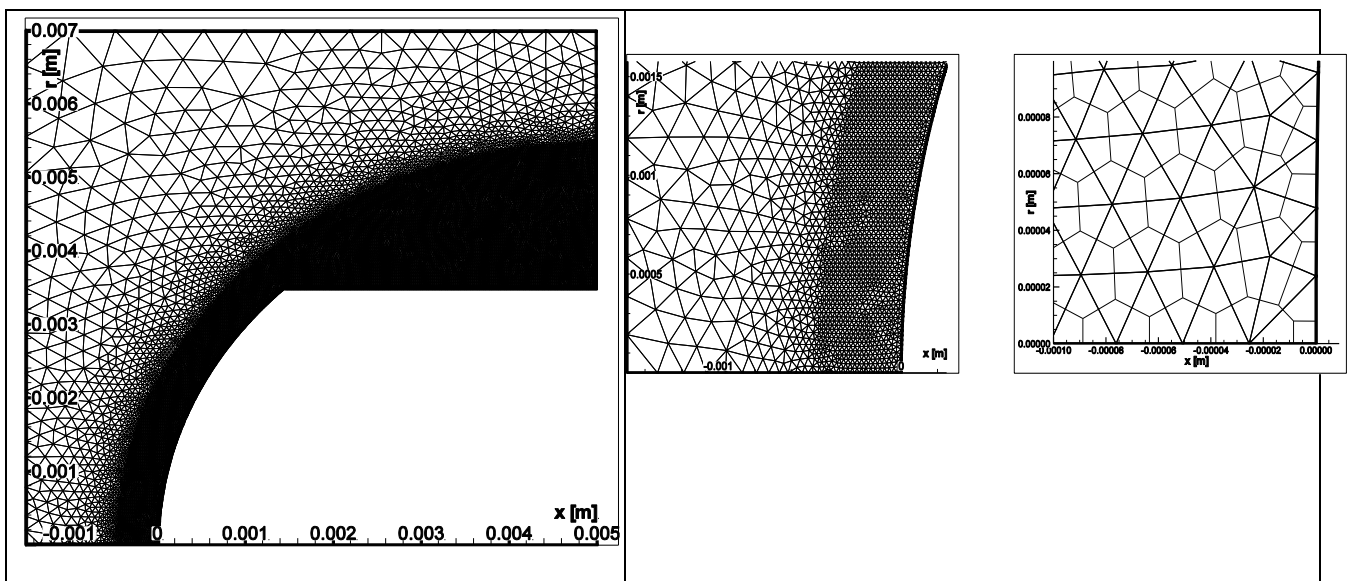


Рис. 3.1. Фрагменты расчетной сетки.

На рис. 3.1 показаны треугольная сетка в расчетной области (1.1) и фрагмент исходной треугольной сетки со сгущением вблизи головной части обтекаемого тела, а также фрагмент сетки контрольных объемов. Сетка, использовавшаяся для решения задачи (1.1), состоит из 15586 узлов (контрольных объемов) или 30775 треугольников.

## 4 Разностные схемы для неструктурированных треугольных сеток

В настоящей работе мы применяем для решения системы уравнений идеальной газовой динамики вариант модифицированной схемы Курганова-Тадмора [4], обобщенной на случай решения уравнений идеальной газодинамики на неструктурированных треугольных сетках. В случае регулярной триангуляции предложенная схема обеспечивает второй порядок аппроксимации пространственных производных. Схема использует механизм предиктора-корректора по времени, на каждом из этих этапов используются свои реконструкции решения. Этап корректора, на котором строится монотонная реконструкция, служит не только для повышения порядка аппроксимации по времени, но и является дополнительной стабилизирующей процедурой.

Для решения параболических уравнений, описывающих явления теплопроводности, были предложены схемы контрольных объемов, построенные по аналогии со схемами метода смешанных конечных элементов. Для уравнения теплопроводности построена дивергентная разностная схема, ячейками консервативности в которой служат те же контрольные объемы, которые используются при решении уравнений идеальной ГД. Это условие важно для обеспечения консервативности схемы в целом. Градиент температуры вычисляется на гранях контрольного объема. Для его аппроксимации используется вспомогательный контрольный объем, образованный двумя треугольными ячейками, смежными по ребру, пересекающему рассматриваемую грань контрольного объема. Очевидно, что интегрирование по такому объему не требует никаких дополнительных геометрических построений. Также на гранях контрольного объема вычисляются коэффициенты теплопроводности. Для их вычисления необходимо иметь значения температуры и плотности в центре грани контрольного объема. Их можно находить, например, посредством линейной интерполяции. Значение  $\text{div}_k(T)\text{grad}T$  в контрольном объеме вычисляется посредством суммирования соответствующих потоков через грани контрольного объема. По построению потоки через грань для двух смежных объемов равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Построенные схемы обеспечивают второй порядок аппроксимации  $O(h^2)$  пространственных производных на регулярных треугольных сетках (правильные треугольники, равнобедренные прямоугольные треугольники) и

первый порядок аппроксимации  $O(h)$  на произвольных сетках. Интегрирование по времени осуществлялось в рамках схемы предиктор-корректор, обеспечивающей второй порядок аппроксимации с учетом нелинейности коэффициента диффузии. На каждом этапе применялась абсолютно устойчивая неявная схема, позволяющая не вводить дополнительных ограничений на шаг по времени. Для ее разрешения использовались эффективные методы линейной алгебры.

## **5 Алгоритм решения уравнения переноса лучистой энергии на неструктурированных сетках**

Перенос энергии излучением является одним из важных факторов, которые необходимо учитывать при моделировании физических процессов в плазме. Эффективные алгоритмы расчета переноса излучения можно строить на основе характеристического метода [5]. Вопросы применения метода характеристик для решения уравнения переноса излучения в сочетании с сеточными методами решения уравнений газодинамики и магнитной газодинамики подробно рассмотрены в [6]. Метод характеристик оказывается весьма трудоемким в случае использования существенно неравномерных или нерегулярных основных сеток, т.е. тех, на которых рассчитывается система уравнений газодинамики. Необходимость использования нерегулярных сеток, как правило, обусловлена проблемой адекватного учета геометрии изучаемых устройств, а также пространственной и временной неоднородностью структуры течения. Сокращение объема вычислений за счет огрубления сетки лучей (уменьшения числа групп по частоте, угловых интервалов или увеличение расстояния между лучами) может приводить к снижению общей точности решения задачи. В этих условиях необходимо уделить особое внимание обеспечению консервативности, т.е. точному соблюдению баланса при расчете изменения энергии.

Мы предлагаем добиться этого, вычисляя изменение энергии в каждой ячейке сетки как сумму потоков через ее грани. Потоки через данную грань в смежные ячейки должны быть одинаковы по величине и противоположны по знаку. Желательно, чтобы ячейки консервативности совпадали с ячейками, используемыми при расчете газодинамических процессов, теплопроводности и др., что позволит избежать переинтерполяции и связанных с нею погрешностей. В данной работе изменение энергии за счет радиационных процессов вычисляется для тех же контрольных объемов, на которых была построена схема повышенной точности для решения системы уравнений газовой динамики.

Сеточно-характеристический алгоритм расчета переноса энергии излучения построен на основе модели Шустера-Шварцшильда [7], обобщенной для цилиндрической  $(r-z)$  геометрии расчетной области. Модель позволяет получить выражение для плотности энергии излучения в виде квадратуры от

коэффициента поглощения и излучательной способности плазмы и рассчитать вклад излучения в виде источника в уравнении энергии электронов. Приближение отражает основные спектральные и энергетические характеристики излучения, учет которых необходим при моделировании динамики плазмы многозарядных ионов. В принятой модели не учитываются процессы рассеяния.

С целью учета оптических свойств вещества полный изучаемый диапазон частот разбивается на  $k$  групп:  $0 \leq \omega_1 < \dots < \omega_i < \dots \leq \omega_{k+1}$ . Предполагается, что коэффициент поглощения в пределах группы не зависит от энергии фотона.

Численное интегрирование уравнения переноса энергии излучением выполняется на основе двухгруппового приближения (аппроксимации) для интенсивности излучения  $I(r, z, \varphi, \theta)$  по угловой переменной  $\varphi$

$$I(r, z, \varphi, \theta) = \begin{cases} I^+(r, z, \theta) & -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \\ I^-(r, z, \theta) & \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi \end{cases} \quad (5.1)$$

Данное приближение называется астрофизическим, или приближением “вперед-назад”. Отметим, что в [7] анализируется отличие данного приближения от широко применяемого диффузионного приближения. В многомерной постановке метод “вперед-назад” можно применить, используя приближение (5.1) и численно интегрируя  $I(r, z, \varphi, \theta)$  на сетке по угловой переменной  $\theta$  ( $0 \leq \theta < \pi$ ).

### Реализация алгоритма и построение сетки лучей

Для расчета переноса энергии излучением в расчетной области вводится сетка лучей, представляющая собой совокупность наборов (семейств) параллельных прямых. Каждый набор характеризуется углом наклона к координатным осям и плотностью расположения лучей в пространстве. Сетка лучей задает некоторое разбиение расчетной области по пространству и по углу  $\theta$  ( $0 \leq \theta < \pi$ ), необходимое для численного интегрирования уравнения переноса излучения в соответствии с описанной выше моделью. Сетка лучей накладывается на исходную расчетную сетку (в дальнейшем будем называть ее условно “основной сеткой”). Мы не делаем каких-либо предварительных предположений о способе построения этой сетки или форме ее ячеек. Для работы рассматриваемого алгоритма достаточно, чтобы

- ячейки исходной сетки  $\Delta$  покрывали всю расчетную область  $D$ :  $\bigcup_{\Delta_i \in \Delta} \Delta_i = D$ ;
- для каждой грани, не принадлежащей границе расчетной области  $\Gamma(D)$ , можно было указать две смежные по ней ячейки;
- для любой грани были определены ее площадь и направление нормали.

Для реализации расчета необходимо знать связь между основной сеткой и сеткой лучей. На рисунке 5.1 показан пример пересечения группы ячеек сетки контрольных объемов лучом.

Обе сетки могут быть стационарными или изменяться во время расчета. Используемые нами структуры данных и технологии программирования допускают такую динамическую перестройку сеток [8]. В этом случае может потребоваться:

- 1) Изменять во время расчета основную сетку. Даже если сетка лучей остается неизменной, необходима коррекция соответствия между элементами сеток.
- 2) Изменять во время расчета только сетку лучей. Также необходима коррекция соответствия.
- 3) Изменять обе сетки одновременно.

При работе с лучами можно выделить 2 этапа:

- 1) **Построение сетки лучей и вычисление сеточных коэффициентов, зависящих только от геометрии.** Этот этап весьма трудоемкий. Кроме того, требуются подробные описатели соответствия двух сеток. Для каждого луча необходимо вычислять все точки пересечения с гранями основной сетки и отрезки лучей внутри каждой ячейки. При использовании стационарных сеток данный этап может выполняться отдельным модулем, передающим данные через файл. Этими данными можно пользоваться только до тех пор, пока в процессе решения задачи не потребуются перестройка сетки.
- 2) **Расчет переноса энергии по лучам.** Выполняется на каждом шаге по времени. Соответствующие функции должны вызываться в основной программе и использовать общие структуры данных. Для них не требуется подробного описания сетки лучей. На каждом шаге расчета переноса излучения выполняются вычисления двух видов:

2.1) В каждой точке  $j$  каждого луча  $i$  вычисляются значения  $I^+_{i,j}$  и  $I^-_{i,j}$ . Если используется многогрупповое приближение по частоте излучения, то пар  $\{I^+, I^-\}$  должно быть столько, сколько используется частотных групп. В настоящее время типовой расчет проводится с использованием  $1 \div 20$  групп. Вычисление интенсивностей  $I^+, I^-$  выполняется единообразно по формуле

$$I^{+/-} = (I^{+/-}_{i,j+1} - I^p_{i,j}) \exp(-\kappa_{i,j} \xi_{i,j}) + I^p_{i,j}. \quad (5.2)$$

Здесь  $\xi_{i,j}$  – длина  $j$ -го отрезка,  $I^p_{i,j}$ , и  $\kappa_{i,j}$  – табличные или аналитические функции состояния излучающей среды, которые вычисляются на каждом шаге по времени на основной сетке. Для их интерполяции могут понадобиться геометрические коэффициенты, которые насчитываются на этапе построения лучей.

2.2) Для каждой ячейки исходной сетки вычисляется сумма потоков энергии через ее грани. Поток энергии через грань  $W = \int_0^\pi I \cos \alpha \sin \theta d\theta$ , где  $\alpha$  – угол между лучом и нормалью к грани, вычисляется по формуле

$$W_l = \sum_{k \in \mathcal{M}(l)} S_{l,k} (I_{l,k}^+ - I_{lk}^-). \quad (5.3)$$

В шаблон  $\mathcal{M}_l$  грани  $l$  включены точки пересечения этой грани с лучами, участвующие в вычислении потока энергии. Заметим, что, вообще говоря, точки шаблона грани выбираются специальным образом, и не все точки, попавшие на грань, включены в расчет суммарного потока через нее. Шаблон грани может быть описан так же, как обычные шаблоны в разностных схемах, например, в разреженном строчном формате или каком-либо подобном. Шаблон грани формируется на этапе построения лучей. В приведенной формуле (6.3)  $S_{l,k}$  – весовые множители, зависят только от геометрии основной и лучевой сеток,  $I^+, I^-$  – значения интенсивностей, рассчитанные на этапе 2.1.

Для каждой ячейки  $\Delta_m$  основной сетки энерговклад вычисляется по формуле

$$Q(m) = \sum_{l \in \Delta(m)} (+/-) W_l, \quad (5.4)$$

причем знак зависит от направления потока (плюс – “поток вперед”, минус – “поток назад”).

Для построения сетки лучей был сформулирован ряд требований.

- 1) Необходимо провести несколько семейств лучей, покрывающих диапазон  $0 < \theta < \pi$ . (Число таких семейств  $K_\theta$  было определено экспериментально исходя из аппроксимирующих свойств выбранных схем и требуемой точности.)
- 2) Каждую грань основной сетки контрольных объемов должен пересекать по меньшей мере один луч каждого направления. Исключение составляют грани, параллельные лучам данного семейства (с некоторым допуском:  $\cos \alpha < \varepsilon$ ,  $\varepsilon \sim 0,01$ ).
- 3) В целях ускорения расчета количество лучей следует по возможности уменьшить. (Обеспечить необходимый минимум.)

В случае осевой симметрии в рамках одного цикла строятся лучи направления  $A$  ( $y = Ax + B$ ,  $A$  фиксировано) и  $-A$ . Это целесообразно, т.к. при «отражении» от оси направление луча меняется с  $A$  на  $-A$ .

Оптимизация сетки лучей выполнялась методами линейного программирования [15].

На рис. 5.2 изображен фрагмент сетки лучей, построенной для численного исследования задачи (1.1). Базовая сетка состоит из 15586 контрольных объемов со сгущением вблизи головной части обтекаемого тела (см. рис. 3.2). Сетка лучей включает 12 угловых секторов (направлений) по углу  $\theta$ ,  $\Delta\theta = 0,24$  рад., общее число лучей – 4653.

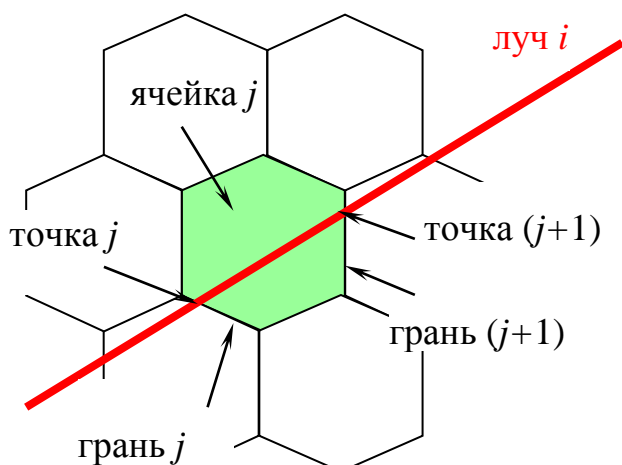


Рис. 5.1 Пересечение основной сетки лучом  $i$ .

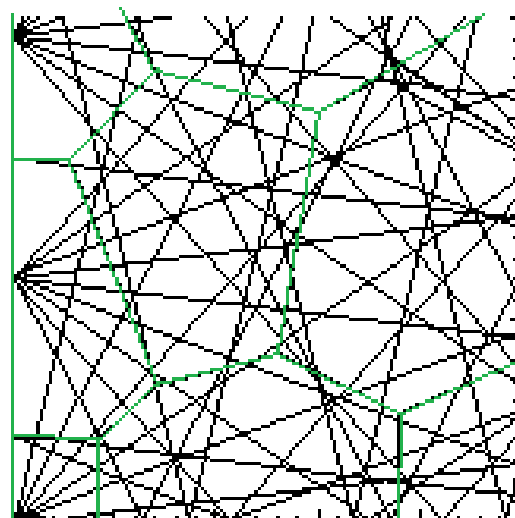


Рис. 5.2 Фрагмент сетки лучей.

## 6 Динамическая адаптация неструктурированных сеток

Адаптация разностной сетки к форме расчетной области, динамическая адаптация для выделения тонкой структуры решения – эти подходы к настоящему времени стали широко распространенными методами численного решения задач математической физики ([9-14] и др.). Теоретические оценки и опыт газодинамических расчетов показывают практические преимущества квазиравномерных сеток [16]. Треугольные квазиравномерные сетки можно строить, например, вариационными методами [16]. Не вводя строгие определения, поясним применяемый нами метод. Вводятся ограничения на элементы, образующие сетку:

- треугольный элемент не должен значительно отличаться от правильного (равностороннего) треугольника, т.к. при очень острых углах ухудшается аппроксимация (см. ниже оценку (6.1));
- соседние ячейки сетки не должны сильно отличаться по размерам, для аппроксимации с хорошей точностью необходимо обеспечить соотношение объемов соседних ячеек  $\Delta V/V = o(V)$ .

В случае использования метода контрольных объемов эти условия целесообразно дополнить требованием сохранения при адаптации однозначного соответствия ребер сетки контрольных объемов и основной сетки треугольников (см. раздел 3).

Если алгоритм адаптации не удовлетворяет сформулированным условиям, качество адаптированных сеток, несмотря на измельчение, оказывается невысоким. Плавный переход между расчетными подобластями требует многоуровневого дробления, что приводит к созданию сложных сеточных структур. "Скачкообразное" изменение размеров соседних ячеек, увеличение

количества ребер, инцидентных данному узлу, и т.п. вызывают появление нефизических осцилляций решения. Чтобы их устранить, необходимо выполнять сглаживающие процедуры, усложняющие алгоритм решения и снижающие ценность самой процедуры адаптации.

В настоящей работе представлен модифицированный алгоритм дробления-слияния ячеек, применение которого позволяет сохранить свойство квазирегулярности при весьма большом различии размеров ячеек в целом по расчетной области.

### Перестройка сетки методом дробления/слияния

Погрешность аппроксимации на треугольных сетках существенно зависит как от размеров ячеек, так и от их формы. Соответствующая оценка приведена в [18]

$$\|f - f_{CET}\|_{W_2^1} \leq C \frac{h}{\sin \theta} \|f\|_{W_2^2}, \quad (6.1)$$

где  $f_{CET}$  – кусочно-линейная сеточная функция, аппроксимирующая функцию  $f$ ,

$\theta$  – минимальный угол всех треугольников, образующих сетку,

$h$  – максимальная из сторон треугольников.

Отсюда видно, что при построении и модификации сеток не следует допускать появление ячеек со слишком острыми углами  $\theta < \theta_{min}$ . Для первоначальной дискретизации расчетной области можно применять алгоритмы оптимизации сеток, позволяющие еще на этапе триангуляции получить сетку заданного качества [16].

Измельчение сетки добавлением новых узлов используется часто, поскольку обеспечивается структура сеточных данных, отражающая изменения сетки (иерархию уровней дробления), достаточно проста интерполяция функций на новую сетку, сохраняется возможность возврата к исходной сетке (полного или частичного).

Недостаток метода – усложнение топологии сетки, вероятное появление нежелательных конфигураций (ячеек с  $\theta < \theta_{min}$ , узлов, из которых выходит слишком много ребер, и т.д.). Кроме того, удаление элементов сетки возможно только в обратной последовательности их добавления (по уровням).

При реализации этой техники на каждом шаге адаптации осуществлялось дробление исходной сетки  $T_0$  в соответствии с выбранным критерием. Пересмотр сетки выполнялся через  $\Delta t_{adanm}$ . В случае решения задачи методом выхода на стационар  $\Delta t_{adanm}$  определяется временем установления на текущей сетке. Критерий установления – совпадение решений на двух последовательных шагах в норме  $L_2$ . Для нестационарных задач мы выбирали  $\Delta t_{adanm} = h_{cp}(T_0)/|W_{cp}|(T_0)$  – оценка среднего времени смещения решения на 1 ячейку исходной сетки.



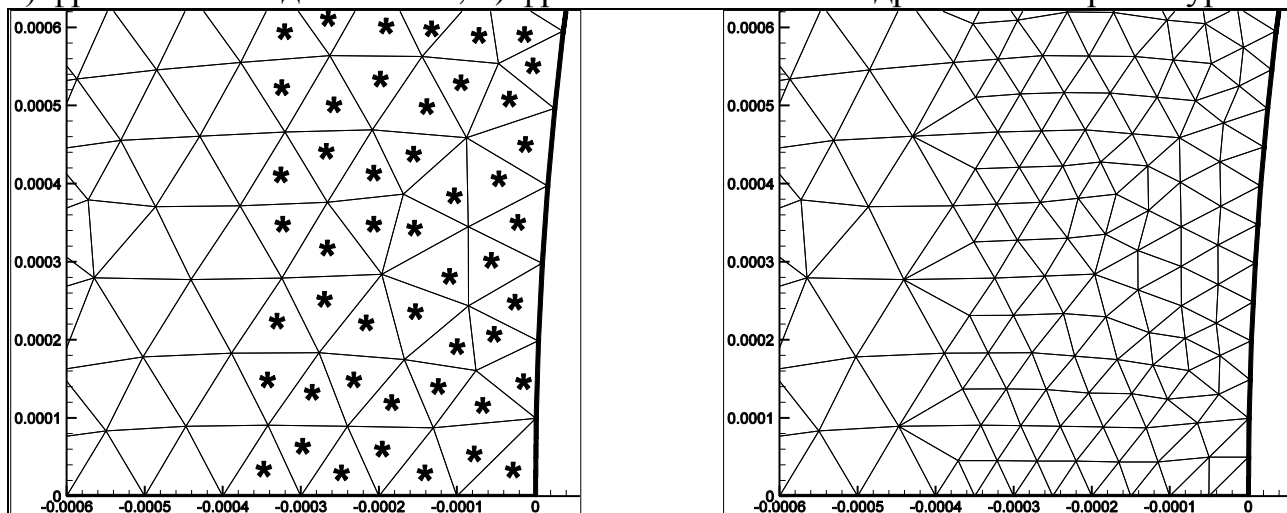
Нами применялось 2 варианта дробления ячеек. Основной – по средним линиям ячеек. При этом добавляется 3 новых узла (на серединах ребер), и получаются 4 новых треугольника, подобных исходному.

При изменении только части сетки неизбежно введение переходных ячеек, получающихся делением исходного треугольника по медиане. Этот случай может даже ухудшить аппроксимацию в новых ячейках, т.к.  $h_1 \sim h_0$ ,  $\sin \theta_1 \sim \frac{1}{2} \sin \theta_0$ . Поэтому на использование таких ячеек вводятся ограничения:

- 1) не дробить таким способом ячейку дважды (уже полученную в результате такой операции) или не делать этого, если подлежащий дроблению угол  $\varphi < \theta_{min}$ ;
- 2) не допускать, чтобы из одного узла выходило более  $n_{max}$  ребер.

Приведенные ограничения использовались в ряде работ, например, в [13]  $n_{max} = 14$ . В нашем случае  $n_{max} = 8$ ,  $\theta_{min} = 30^\circ$ .

а) фрагмент исходной сетки; б) фрагмент сетки после дробления первого уровня;



с) фрагмент сетки после дробления двух уровней

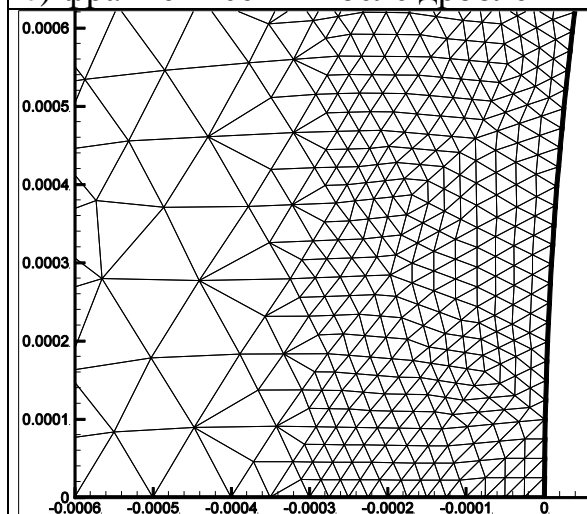


Рис. 6.1. Дробление ячеек треугольной сетки.

Для каждой ячейки сетки  $T_0$  в соответствии с некоторым функциональным критерием делается вывод о необходимости дробления на данном шаге. К выбранным для дробления ячейкам применялся основной вариант дробления (3 новых узла, 4 новых ячейки). После этого определяются переходные ячейки, в которых появился новый узел. Если для такой ячейки не выполняется условие (1) или (2), осуществляется ее дробление по основной схеме, и т.д. На практике такое ограничение не обременительно и позволяет построить плавный переход между частями сетки с различной плотностью узлов.

На рис. 6.1a изображен фрагмент исходной сетки  $T_0$ , звездочками отмечены ячейки, подлежащие дроблению. На рис. 6.1b – сетка, построенная посредством описанной выше процедуры. Чтобы удовлетворить заданному критерию измельчения сетки, возможно многократное дробление сетки на одном шаге. На рис. 6.1c представлена сетка, полученная в результате дробления двух уровней.

### Критерии измельчения сетки

Критерий измельчения сетки в области больших градиентов основан на предложенном в [17] принципе сравнения первой и второй разностей. Для оценки первой разности в элементе  $l$  использовалось выражение  $\Delta^1_l = F_{MAX_l} - F_{MIN_l} \geq 0$ , где  $F_{MAX_l} = \max\{f_i\}$ ,  $F_{MIN_l} = \min\{f_i\}$ ,  $i \in \mathbb{Ш}_l$  – максимальное и минимальное значение функции  $f$  в элементе  $l$ . Для оценки второй разности:  $\Delta^2_i = \Delta^1_{MAX_i} - \Delta^1_{MIN_i} \geq 0$ , где  $\Delta^1_{MAX_i} = \max\{\Delta^1_l\}$ ,  $\Delta^1_{MIN_i} = \min\{\Delta^1_l\}$   $l \in \mathbb{Ш}_i$  – максимальное и минимальное значение первой разности в элементах, окружающих узел  $i$ . Ячейка  $l$  подлежит дроблению, если

$$\exists i \in \mathbb{Ш}_l, \Delta^2_i / \Delta^1_l > \alpha_0 \quad (\alpha_0 \sim 1). \quad (6.2)$$

При перестройке сетки с заданной плотностью узлов (многократное дробление) величина  $\alpha = \Delta^2_i / \Delta^1_l$  использовалась также для определения требуемого размера новых ячеек.

Дробление сетки по такому признаку, даже однократное (равномерное) на каждом шаге адаптации, позволило существенно повысить точность решения тестовых модельных задач.

### Интерполяция сеточных величин с исходной сетки на перестроенную

Задача интерполяции ставится следующим образом. Имеется вектор сеточных расчетных величин  $\vec{u}^T$ , определенный в узлах исходной сетки  $T_0$ , который содержит значения величин на данный момент времени  $t$ . Требуется построить на его основе новый вектор  $\vec{u}^{T'}$ , определенный в узлах адаптированной сетки  $T'$ . При этом на  $\vec{u}^{T'}$  могут быть наложены некоторые ограничения, например, условия сохранения определенных норм решения. Для иллюстрации приведем одно из подобных ограничений. Пусть сеточная расчетная величина – плотность вещества  $\rho$ . Тогда сеточный аналог закона сохранения массы может иметь следующий вид:

$$\sum_{\text{узлы } T} \rho_i^T \cdot V_i^T = \sum_{\text{узлы } T'} \rho_i^{T'} \cdot V_i^{T'}. \quad (6.3)$$

Здесь введены обозначения:  $V_i^T$  – площадь  $i$ -ой ячейки сетки  $T_0$ ,  $V_i^{T'}$  – площадь  $i$ -ой ячейки сетки  $T'$ . Подобные соотношения можно также написать, например, для компонент импульса, полной энергии и т.д.

Заметим, что для многих применений приемлемое качество интерполяции достигается при использовании простой линейной интерполяции вида

$$\vec{u}_i^{T'} = \alpha_{m,i} \vec{u}_{m(i)}^T + \alpha_{n,i} \vec{u}_{n(i)}^T + \alpha_{p,i} \vec{u}_{p(i)}^T. \quad (6.4)$$

Коэффициенты  $\alpha_{m,i}, \alpha_{n,i}, \alpha_{p,i}$  линейной интерполяции находятся из условия

$$\vec{r}_i^{T'} = \alpha_{m,i} \vec{r}_{m(i)}^T + \alpha_{n,i} \vec{r}_{n(i)}^T + \alpha_{p,i} \vec{r}_{p(i)}^T. \quad (6.5)$$

Здесь  $\vec{r}_i^{T'}$  – радиус-вектор  $i$ -го узла адаптированной сетки  $T'$ ,  $\vec{r}_i^T$  – радиус-вектор  $i$ -го узла исходной сетки  $T_0$ . Функции  $m(I), n(I), p(I)$  определяют индексы узлов  $A, B, C$  исходной сетки  $T_0$ , таких, что треугольная ячейка  $ABC$  содержит  $I$ -й узел адаптированной сетки  $T'$ . Очевидно, искомая ячейка  $ABC$ , содержащая  $i$ -й узел новой сетки, одна и только одна.

В случае применения описанного выше способа дробления ячеек формула (6.4) приобретает простой вид  $\vec{u}_i^{T'} = \frac{1}{2}(\vec{u}_A^T + \vec{u}_B^T)$ , где  $A$  и  $B$  – вершины ребра исходной сетки  $T_0$ , на середине которого был добавлен  $i$ -й узел адаптированной сетки  $T'$ .

Выбор метода интерполяции  $\vec{u}^{T'}$  по имеющимся значениям  $\vec{u}^T$  зависит от характера решаемой задачи. Например, для стационарных течений, рассчитываемых методом установления, малые возмущения, внесенные конечным количеством адаптаций сетки, не влияют на решение при  $t \rightarrow \infty$ . Следовательно, для этого класса задач стремление к точному сохранению норм решения (например, вида (6.3)) не оправдано. Однако эти ограничения могут играть важную роль при моделировании импульсных высокоэнергетических процессов, требующем строгого соблюдения консервативности решения. Это подтверждается и вычислительными экспериментами по расчету задач газовой динамики. Во всех примерах данной работы использована простая линейная интерполяция.

### **Применение дробления сеток в расчете стационарного течения методом установления**

При решении задачи (1.1) об обтекании спускаемого космического аппарата динамическая адаптация сетки была использована для уточнения положения ударной волны.

Первоначальная квазиравномерная сетка, построенная в расчетной области, включала 3403 узла (6544 треугольника). На рис. 6.2 показана эта сетка, на рис. 6.3 – полученная на ней картина установившегося течения

(изолинии плотности и распределение температуры вдоль оси  $OX$  вблизи точки торможения).

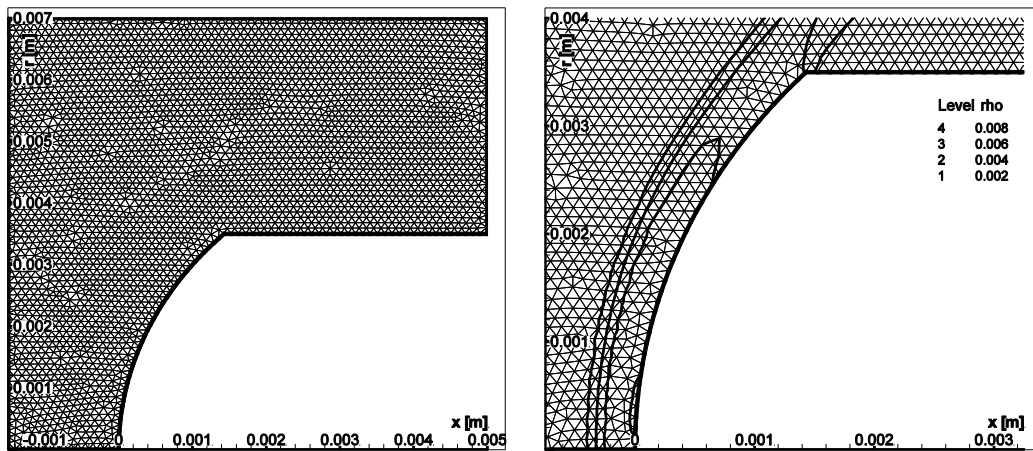
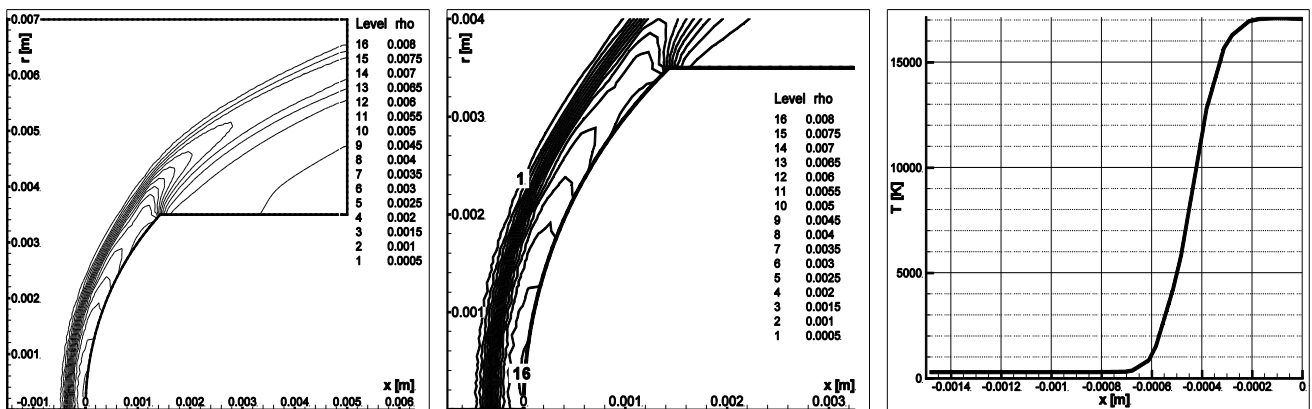


Рис. 6.2 Исходная квазиравномерная сетка и зона ударной волны на ней.



Изолинии плотности

Зона ударной волны

Температура на оси

Рис. 6.3 Результаты расчета на исходной квазиравномерной сетке.

Установление течения контролировалось в норме  $L_2$  при выполнении

$$\text{критерия } \frac{\sqrt{\sum_i V_i (\rho_i^{s+1} - \rho_i^s)^2}}{\sum_i V_i \rho_i^{s+1}} < \varepsilon, \quad (6.6)$$

где суммирование ведется по узлам расчетной сетки,  $\rho_i^s$  – значение плотности в узле  $i$  на итерации  $s$ ,  $V_i$  – мера контрольного объема  $i$ , а  $\varepsilon$  – относительная погрешность, расчет на текущей сетке прекращался, и выполнялось дробление ячеек в области  $\rho > 1/2 \rho_{max}$ . Счет на установление продолжался на измельченной сетке. Такая операция была повторена 2 раза, в результате в области формирования ударной волны было добавлено 2905 новых узлов. На рис. 6.4 и 6.5 показана измельченная сетка (6308 узлов, 12226 треугольников) и результаты расчета на ней. Видно существенное увеличение крутизны фронта ударной волны и изменение его положения. Дальнейшее дробление сетки не позволяет получить новых результатов согласно критерию (6.6).

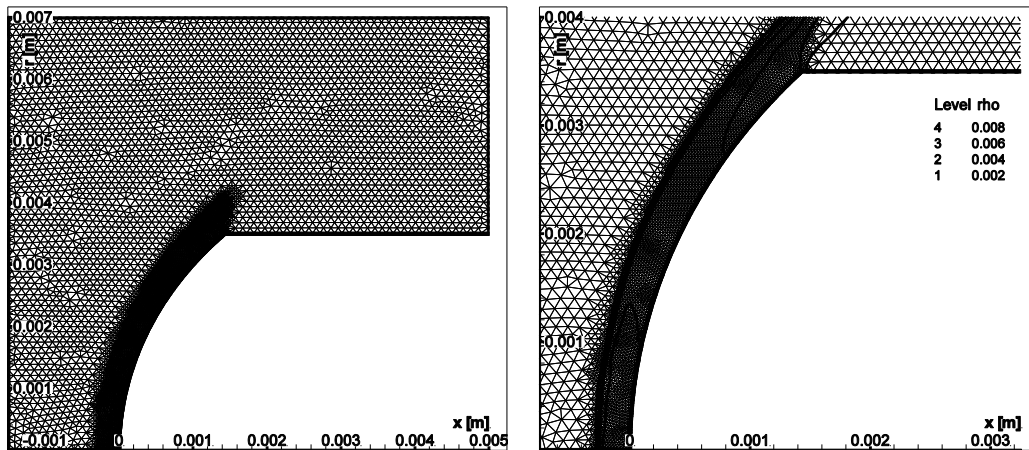
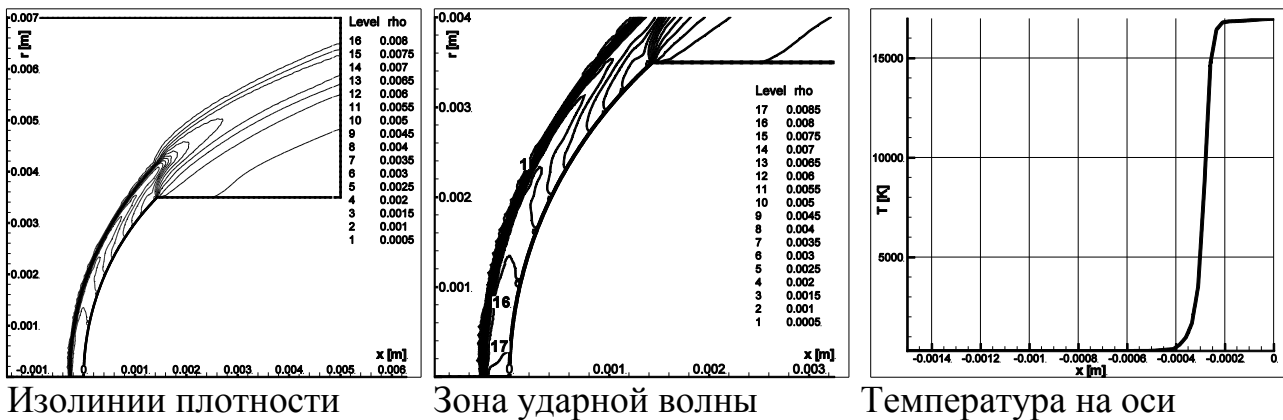


Рис. 6.4 Измельченная сетка и зона ударной волны на ней.



Изолинии плотности

Зона ударной волны

Температура на оси

Рис. 6.5 Результаты расчета на измельченной сетке.

Результаты рис. 6.5 полностью совпадают с результатами контрольного расчета, выполненного на сетке рис. 3.1, включавшей 15586 узлов (30775 треугольников). Средний размер ячеек вблизи поверхности головной части обтекаемого тела для сеток рис. 6.4 и рис. 3.1 совпадает и составляет  $\sim 0,0025$  см. Сетка рис. 3.1 была построена с помощью препроцессорных средств [8], позволяющих задавать области сгущения сетки и желаемый размер ячеек. Однако отсутствие точных данных о картине течения не позволило ограничиться минимально необходимым измельчением сетки, как это имеет место при динамической адаптации. Тем самым значительно возросли затраты вычислительных ресурсов, что особенно заметно при решении задачи методом установления, требующим большого числа итераций.

Для решения задачи методом установления на сетке рис. 3.1 потребовалось 57600 итераций. Оценка времени счета  $N_{итераций} \times N_{узлов} = 57600 \cdot 15586 = 8,97753600 \cdot 10^8$  операций. Число итераций на последовательных сетках, потребовавшееся для установления с применением динамической адаптации, показано в таблице 6.1.

Таблица 6.1

**Вычислительные затраты при адаптации сеток**

№ сетки	$N_{узлов}$	$N_{итераций}$	$N_{операций}$
1	3403	15990	$5,4413970 \cdot 10^7$
2	4081	12369	$5,0477889 \cdot 10^7$
3	6375	10437	$6,6535875 \cdot 10^7$
стационарная	15586	57600	$8,97753600 \cdot 10^8$

Таким образом, общее число операций составило  $1,71427734 \cdot 10^8$ , т.е. приблизительно в 5 раз меньше, чем при расчете на стационарной подробной сетке. Сама же перестройка сетки и сопутствующие ей действия значительно менее трудоемки.

**7 Термодинамические и оптические свойства воздуха**

В данном разделе излагаются основные положения построения широкодиапазонного уравнения состояния воздушной смеси: 78,12 % –  $N_2$ , 20,95 % –  $O_2$ , 0,93 % –  $Ar$  (далее – воздух).

Рабочий диапазон изменения термодинамических функций разработанного уравнения состояния составляет:

- по температуре –  $200 \div 1,16 \cdot 10^5$  К;
- по плотности –  $10^{-3} \div 18$  кг/м<sup>3</sup>;
- по давлению –  $5,7 \cdot 10^{-8} \div 3,7$  ГПа;
- по удельной внутренней энергии –  $1,4 \cdot 10^{-1} \div 8,3 \cdot 10^4$  кДж/г.

Температуре  $T = 288,15$  К и плотности  $\rho = 1,225$  кг/м<sup>3</sup> соответствует давление  $P = 1,01325 \cdot 10^5$  Па и удельная энергия  $E = 2,05901 \cdot 10^5$  Дж/кг.

Представлена методика построения групповых моделей коэффициентов поглощения воздушной высокотемпературной смеси по заданному весовому составу и параметрам спектральной модели.

Расчитаны спектральные коэффициенты поглощения для двадцати спектральных групп (осреднение по Планку, Росселанду и с единичным весовым множителем) в диапазоне температур –  $200 \div 5,5 \cdot 10^4$  К и относительных плотностей –  $10^{-3} \div 10$ .

Все построенные зависимости по уравнению состояния и оптическим характеристикам затабулированы в зависимости от плотности и температуры. Все таблицы представлены в электронном виде.

**Широкодиапазонное уравнение состояния воздуха**

В настоящее время для решения задач газовой динамики во многих работах используется уравнение состояния воздуха в табличной форме, взятое из работы [19]. В этой работе представлены таблицы термодинамических функций, вычисленных в диапазоне  $T = 200 \div 3 \cdot 10^6$  К и  $\rho/\rho_0 = 10^{-6} \div 30$ , где

$\rho_0 = 1,2925 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup> – плотность воздуха при нормальных условиях. При составлении таблиц предполагалось, что воздух при нормальных условиях состоит из 78.12 % (по объему)  $N_2$ , 20.95 % -  $O_2$  и 0.93 % -  $Ar$ .

Основными источниками погрешностей при вычислении термодинамических функций являются: неточность исходных данных о константах химического равновесия и о потенциалах ионизации; произвольный выбор числа членов электронных статистических сумм атомов и ионов; неточность вычисления кулоновских поправок.

Силы взаимодействия электронов и ионов воздушной плазмы приводят к уменьшению энергии и давления, возникающему вследствие поляризации плазмы. В работах [20, 21] при составлении таблиц сделана кулоновская классическая поправка Дебая-Хюккеля (модель МДХ). Данная поправка является первым членом разложения энергии кулоновского взаимодействия, рассматриваемого в классическом приближении, по малому параметру порядка

$r/D_M$ , где  $D_M = \left( \frac{kT}{\sum_i 4\pi^2 n_i^2} \right)^{1/2}$  – дебаевский радиус [7],  $r$  – среднее расстояние

между заряженными частицами. В таблице 7.1 [20] иллюстрируется зависимость относительной величины учтенной при составлении таблиц кулоновской поправки к энергии от температуры и плотности.

Таблица 7.1

**Зависимость кулоновской поправки МДХ  $\Delta E/E$   
от температуры и плотности воздуха**

$T, K \backslash \rho/\rho_0$	32	10	1	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$
$1 \cdot 10^4$	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0001
$2 \cdot 10^4$	0.01	0.012	0.015	0.0059	0.0007	0.0001
$3 \cdot 10^4$	0.05	0.49	0.033	0.0060	0.0010	0.0001
$5 \cdot 10^4$	0.094	0.079	0.040	0.0073	0.0012	0.0001
$1 \cdot 10^5$	0.13	0.10	0.051	0.0085	0.0011	0.0001
$2 \cdot 10^5$	0.18	0.12	0.054	0.0065	0.0006	0.0001

Следующие члены разложения и неучтенные квантовые поправки вносят заметный вклад в термодинамические функции воздуха там, где поправки первого приближения составляют более 5%. Считается, что эту модель целесообразно использовать, когда параметр неидеальности плазмы  $\gamma < 0,1$ . Необходимо отметить, что формальное вычисление по модели МДХ для

больших плотностей приводит к отрицательному давлению и энергии, т.е. так называемому кулоновскому фазовому переходу. Плохая экстраполяция за границу применимости модели является в некоторой мере ее недостатком. Имеются и другие недостатки, в силу которых модель МДХ в настоящее время мало используется для практических расчетов.

В связи с вышеизложенным представляет интерес уточнение уравнения состояния воздуха [18] в области высоких термодинамических параметров.

Для расчета термодинамических функций воздуха использовались методика и программный комплекс [22]. В расчетах использовалась модель неидеальности в приближении БДХ. Учитывалось образование и диссоциация двух- и трехатомных молекул, а также налипание электронов на атомы и молекулы. Статистические суммы атомов и молекул вычислялись с использованием моделей обрезания статистических сумм [20, 21]. При вычислении полной статистической суммы учитывалось до  $10 \div 15$  электронных состояний. Для вычисления статистических сумм атомов и ионов использовался микрополевой обрезающий формфактор [21].

Уравнение состояния воздуха с учетом диссоциации молекул было рассчитано в диапазоне  $-7,25 < \lg \rho, [\text{г/см}^3] < -0,5$  и  $-1,5 < \lg T, [\text{эВ}] < 1,0$ . При расчете учитывались молекулы  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $NO$ , их положительные однократные ионы, отрицательные ионы  $O_2^-$ ,  $NO^-$ ,  $O^-$ , а также все положительные ионы атомов вплоть до их максимальной степени кратности.

Интересно отметить, что для того диапазона параметров набегающего потока, в котором рассматривалась исходная задача, вполне удовлетворительные результаты были получены также в расчетах с использованием уравнения состояния сухого воздуха, предложенного в работе [23]. В данной работе это уравнение применялось для тестовых и оценочных расчетов, но с учетом только первой ионизации:

$$P = \rho RT [1 + A_0 + 2A_1];$$

$$\varepsilon = RT [0,5(5 + A_0) + 3A_1] + A_0 I_0 + A_1 I_1;$$

$$0 \leq A_i \leq 1;$$

$$A_0 = 2 / [1 + (1 + 2B_0)^{1/2}]; \quad B_0 = C_0 \rho T^{-1/2} \exp(I_0 / RT);$$

$$A_1 = 2 / [1 + (1 + 2B_1)^{1/2}]; \quad B_1 = C_1 \rho T^{-3/2} \exp(I_1 / 2RT);$$

$$R = 2,87096 \cdot 10^6 \text{ эрг} / \text{г};$$

$$I_0 = 2,92013 \cdot 10^{11} \text{ эрг} / \text{г}; \quad I_1 = 9,55764 \cdot 10^{11} \text{ эрг} / \text{г};$$

$$C_0 = 0,331131, \quad C_1 = 1,09763 \cdot 10^7.$$



В приведенных формулах  $I_0$ ,  $I_1$  – соответственно эффективные значения удельной энергии диссоциации и первой ионизации,  $C_0$ ,  $C_1$  – константы в уравнении Саха для диссоциации и первой ионизации.

Учитывая вышеизложенные недостатки и преимущества моделей, заложенные в расчеты обоих уравнений состояния воздуха, на основе сравнительного анализа было составлено новое интерполяционное уравнение состояния воздуха. При этом в области  $-1,6 < \lg T, [\text{эВ}] < 0,3$  за основу взяты результаты из работы [19], в области  $0,4 < \lg T, [\text{эВ}] < 1,0$  – вновь насчитанное уравнение состояния, а в интервале  $0,3 < \lg T, [\text{эВ}] < 0,4$  произведен пересчет (интерполяция двух уравнений состояния) по температуре.

### **Построение групповых моделей коэффициентов поглощения воздушной высокотемпературной смеси**

В подавляющем большинстве задач радиационной газовой динамики (РГД) требуется знание малогрупповых спектральных моделей, содержащих порядка нескольких десятков участков осреднения. Обычно используемая математическая технология решения подробных задач состоит в предварительном построении обширных таблиц спектральной зависимости коэффициентов поглощения при различных температурах и плотностях среды и последующем осреднении этих зависимостей с использованием различных весовых функций. На этапе построения спектральных моделей применяются наиболее совершенные квантово-механические расчеты [24]. К преимуществам такого подхода можно отнести в первую очередь возможность получения сведений об атомной или молекулярной структуре на основе незначительного числа фундаментальных констант и возможность формализовать процедуру осреднения. Главные недостатки состоят в чрезвычайной сложности и трудоемкости расчетов. При низких температурах ( $T < 10$  эВ) методы, основанные на квантово-механических расчетах, как правило, не дают удовлетворительной точности, а иногда проведение расчетов невозможно. Обычно в этом диапазоне температур применяют различные полуэмпирические методы, основанные на широком использовании экспериментальных данных [19, 26, 27]. Эти методы реализуют приближенные способы расчета оптических свойств плазменных смесей. Главным преимуществом такого подхода является простота и высокая экономичность реализующих программ, а недостатком – необходимость использования опытной (или предварительно рассчитанной) информации по энергетической структуре атомов и молекул, а также меньшая точность описания специфических особенностей спектра. Впрочем, последнее требование и не должно предъявляться к указанным приближенным полуэмпирическим моделям.

В связи с исходными требованиями по температурному диапазону математическое моделирование оптических характеристик воздушной смеси в настоящей работе осуществлялось с использованием полуэмпирической модели

непрерывного спектра (ПМНС) [25]. Система построения групповых моделей коэффициентов поглощения включает в себя две составляющих части: расчет ионизационно-равновесного состава и расчет групповых коэффициентов. В основе вычислительной модели расчета ионизационного равновесия в плазме сложного химического состава лежит модель Саха. В основу полуэмпирической модели непрерывного спектра положена квазиклассическая теория Унзольда-Крамерса с модификацией расчетных соотношений, основанной на учете реального расположения уровней энергии [25]. Основное расчетное соотношение имеет следующий вид:

$$k_{iz}(\omega) = 4,76 \cdot 10^6 \cdot p_i \cdot Q_{i,z+1} \cdot Z^2 / (T \cdot Q_{i,z} \cdot \omega^3) \cdot \left\{ 1,44 \sum_{j=1}^{j^*-1} \left( \frac{d\omega}{dj} \right)_j \cdot \exp[-1,44(\omega_1 - \omega_j)/T] + T \cdot \exp[-1,44(\omega_1 - \omega_j^*)/T] \right\},$$

где:  $k_{iz}$  – коэффициент поглощения  $Z$ -го иона  $i$ -го компонента смеси,  $[\text{см}^{-1}]$ ,  $p_i$  – парциальное давление, [атм];  $T$  – температура, [К],  $\omega$  – волновое число,  $[\text{см}^{-1}]$ ;  $\omega_j$  – волновое число  $j$ -го терма (определяется как среднеарифметическая величина с учетом статистических весов компонент мультиплета);  $Q$  – статистическая сумма по состояниям.

Первое слагаемое суммы в фигурных скобках отвечает фотоионизационному поглощению с индивидуально учитываемых уровней, а второе слагаемое – поглощению высоковозбужденных уровней и тормозному поглощению. Суммирование ведется по тем термам  $j$ , для которых выполняется условие  $\omega > \omega_j$ . Предельный уровень  $j^*$  выбирается для каждой частицы индивидуально. Исследовалось несколько моделей расчета функции  $(d\omega/dj)$ . В данной работе использовалась простейшая из них, состоящая в допущении о гладкой монотонной зависимости  $\omega(j)$ , где  $\omega_j$  брались из экспериментальных данных.

В начале для воздушной смеси, имеющей химический состав: 78,12 % –  $N_2$ , 20,95 % –  $O_2$ , 0,93 % –  $Ar$ , определялся равновесный состав по заданным температуре и плотности, при этом учитывалась не более чем пятикратная ионизация. Параметры рассчитывались в диапазоне температур  $(1,5 \div 5,5) \cdot 10^4$  К (41 расчетная точка, равномерная шкала с шагом  $10^3$  К) и относительных плотностей  $10^{-3} \div 10$  (41 расчетная точка, равномерная логарифмическая шкала).

По полуэмпирической модели непрерывного спектра для каждой термодинамической точки строилась следующая групповая модель:  $2000 \text{ см}^{-1}$  – наименьшее волновое число,  $500000 \text{ см}^{-1}$  – наибольшее, рассчитывалось 250 спектральных групп (равномерных по спектру), расчет осуществлялся с учетом спектральных линий.

При построении групповых моделей коэффициентов поглощения воздушной высокотемпературной смеси для задач радиационной газовой

динамики формировалась 20 групповая спектральная модель. Границы участков осреднения модели специально подбирались из расчета наилучшего описания переноса энергии излучением при температуре  $T \sim 20 \cdot 10^3$  К. Границы модели: 2000-4000-6000-8000-10000-12115.3-14678.0-17782.8-21544.3-26101.6-31622.8-38311.9-46415.9-56234.1-68129.2-82540.4-100000-200000-300000-400000-500000  $\text{см}^{-1}$ . Осреднение осуществлялось по Планку, Росселанду и с единичным весовым множителем.

## 8 Результаты расчетов и выводы

Построенные алгоритмы были реализованы в объектно-ориентированном программном коде, предназначенном для моделирования радиационно-газодинамических процессов на неструктурированных сетках. Средства программного комплекса использовались для численных экспериментов, связанных с моделированием движения спускаемого космического аппарата в верхних слоях атмосферы (задача (1.1)).

Результаты расчетов продемонстрировали достаточно точное количественное воспроизведение картины течения и высокую производительность разработанного программного обеспечения. На рис. 8.1 показаны изолинии плотности и температуры вблизи обтекаемого тела. Распределение рассчитано для скорости набегающего потока 16 км/с. На рис. 8.2 приведены графики распределения температуры вдоль линии торможения при скоростях набегающего потока 16 км/с ( $M=25,9$ ) и 13,4 км/с ( $M=23,9$ ). Положение скачка уплотнения с очень высокой точностью соответствует результату [27] и приведенным там экспериментальным данным.

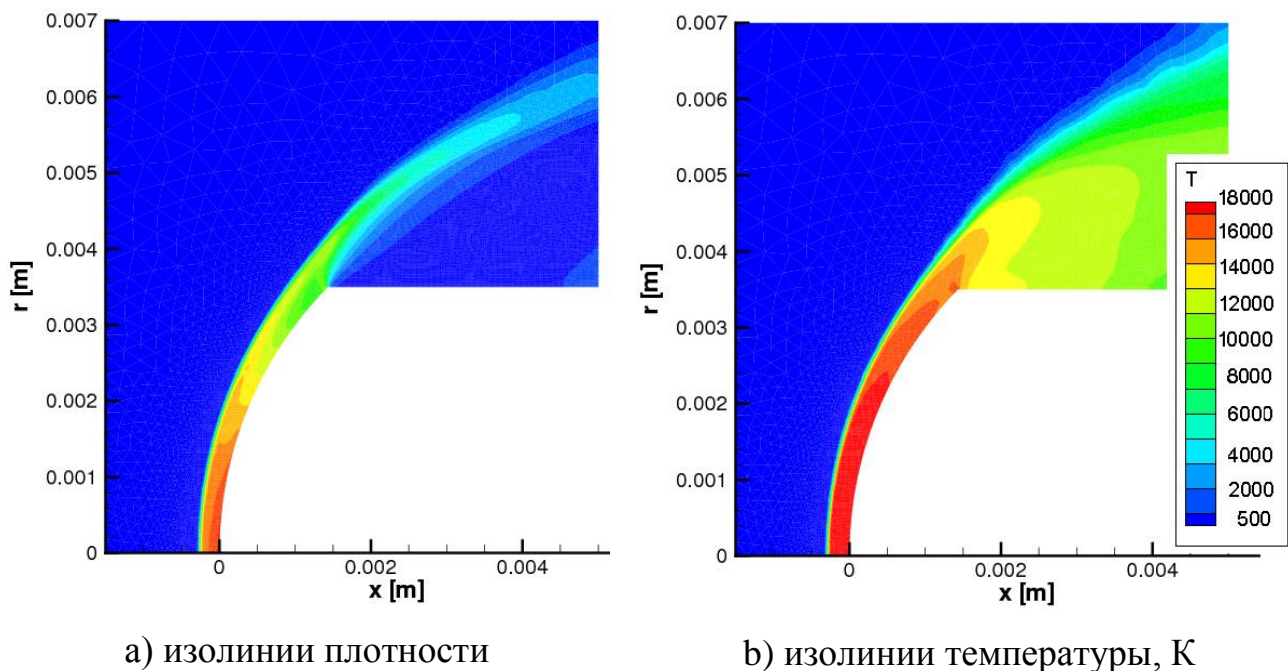


Рис. 8.1 Результаты расчетов ( $V=16$  км/с).

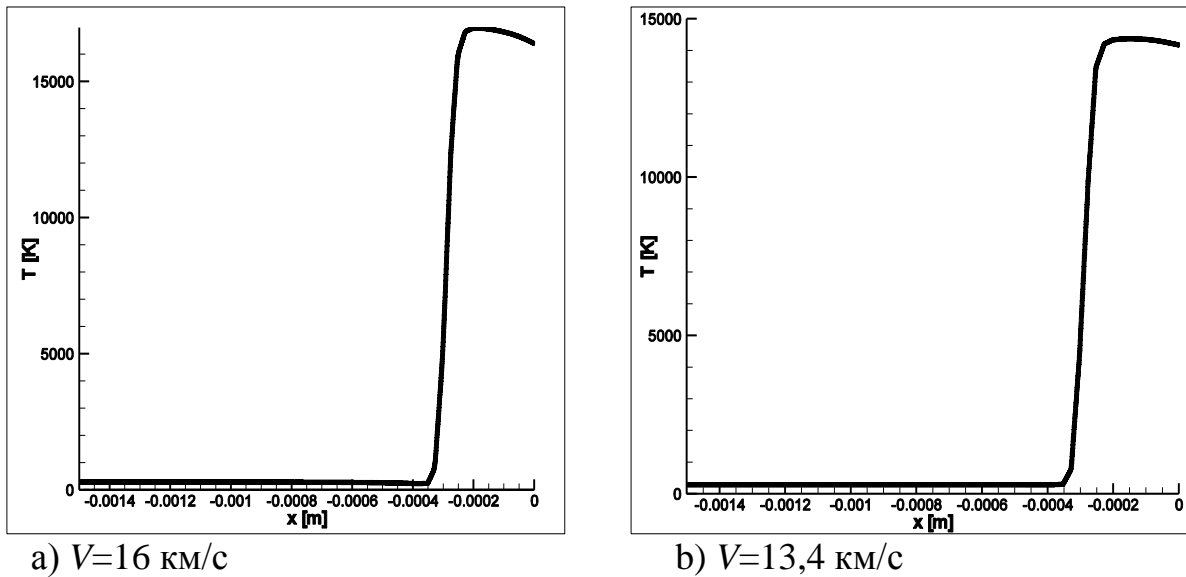


Рис. 8.2 Результаты расчетов: температура на линии торможения.

Для расчета переноса лучистой энергии первоначально были выбраны 20 спектральных групп в границах  $2000 \div 500000$   $\text{см}^{-1}$ . Однако численные эксперименты показали, что в рассматриваемой задаче (1.1) все излучение оказалось сконцентрировано в пределах первой группы ( $2000 \div 4000$   $\text{см}^{-1}$ ). Для уточнения расчета был построен новый набор из 20 спектральных групп.



Рис. 8.3 Распределение интенсивности излучения по спектральным группам.

Диаграмма на рис. 8.3 иллюстрирует распределение интенсивности излучения в диапазоне  $2000 \div 3000$   $\text{см}^{-1}$  (показаны первые 10 групп). Излучение в остальных 10 группах при имеющихся место значениях температуры и плотности незначительно. Поток излучения оценивался вблизи поверхности головной части обтекаемого тела. Полный поток лучистой энергии в области

точки торможения потока составляет примерно  $1200 \text{ W/cm}^3$ , что также хорошо согласуется с данными [28, 29].

Отметим, что в работе [29] для расчета течения в такой же постановке задачи использовалось гораздо больше число спектральных групп – около 600. Возможность проведения достаточно точных расчетов при меньшем количестве групп важна для ускорения сходимости решения, получаемого методом установления, к стационарному состоянию. Скорость сходимости к стационарному состоянию оказалось возможным существенно повысить за счет использования адаптирующихся сеток.

## 9 Заключение

1) Течение вблизи спускаемого аппарата можно успешно моделировать с применением численных методов, основанных на технологиях неструктурированных сеток с локальным измельчением в целях более точного разрешения ударных волн и пограничных слоев. Скорость сходимости решения системы газодинамических уравнений методом установления стационарного состояния можно существенно повысить за счет применения адаптивных сеток и обоснованного выбора минимально необходимого набора спектральных групп для описания радиационных свойств газового потока. Полученные в данной работе результаты подтверждают эти выводы, они хорошо согласуются с экспериментальными данными, а также с теоретическими оценками и численными результатами других авторов.

2) В рассмотренной задаче перенос тепла излучением вносит сравнительно небольшой вклад в полный баланс энергии вблизи обтекаемого тела. Испарение стенки аппарата может быть учтено введением в пристеночный слой соответствующей концентрации газообразного углерода, однако в рассматриваемых условиях это не оказывает существенного влияния на радиационные характеристики течения. Энергетический баланс при данных условиях полета определяется в основном диссоциацией-рекомбинацией молекул воздушной смеси за ударной волной и в пристеночном слое.

3) Для дальнейшего уточнения аэродинамики входа в атмосферу необходимо включать в модель неравновесные химические превращения в ударной волне.

4) Для более полной оценки влияния радиационного теплообмена желательно провести численные эксперименты для разных условий полета, например, для различных высот, чисел Маха набегающего потока и углов атаки. В последнем случае нужны средства трехмерного моделирования.

В заключение отметим, что численное моделирование – необходимый инструмент для изучения условий движения спускаемых космических аппаратов в верхних слоях атмосферы, поскольку с его помощью можно обойти проблему отсутствия “масштабируемых” параметров при наличии химических превращений, которое существенно усложняет теоретическое и экспериментальное изучение такого рода сверхзвуковых течений.

## Библиографический список

1. Агафонов В. П. и др. Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике. М.: Машиностроение, 1972.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. И. Курс теоретической физики. Том VI "Гидродинамика". М.: Физматлит, 1986.
3. Гасилов В. А., Дьяченко С. В., Карташева Е. Л. Алгоритм построения сеток контрольных объемов для сложных двумерных областей. Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем: Сборник научных трудов учебно-научного центра математического моделирования МГТУ "Станкин" - ИММ РАН. Вып.6. М., Изд-во "Янус-К", 2003, С. 190-197.
4. Kurganov A., Tadmor En. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations. - Journ. Comput.Phys., 2000, Vol. 160, No 3, pp.241-282.
5. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics, Volume II, Wiley-Interscience, 1962.
6. Четверушкин Б. Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985.
7. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматлит, 2008.
8. Гасилов В. А., Карташева Е. Л., Фрязинов О. В. Дискретизация неоднородных геометрических объектов. – Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Сер. Б. Справочные приложения. Базы и банки данных. Т. VII-1, Математическое моделирование в низкотемпературной плазме. Часть 1, раздел 3, глава 7. / Под ред. Ю.П.Попова. – М.: Янус-К, 2009 (ISBN 978-5-8037-0424-9). С. 298-318.
9. Годунов С. К. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. - М.: Наука, 1976.
10. Lohner R., Morgan K. Improved adaptive refinement strategies for finite element aerodynamic computations. - AIAA paper AIAA-86-0499, 1988.
11. Berger M. J.; Colella P. (1989). "Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics". J. Comput. Phys. (Elsevier) 82: 64–84. Lohner R., Morgan K. Improved adaptive refinement strategies for finite element aerodynamic computations. - AIAA paper AIAA-86-0499, 1988.
12. Mavriplis D. Adaptive mesh generation for viscous flows using Delaunay triangulation. - Journ. of Comput. Physics, 1990, Vol.90, p. 271-291.
13. Войнович П. А., Шаров Д. М. Моделирование разрывных течений газа на неструктурированных сетках. 2. Нестационарная локальная адаптация сетки. - Математическое моделирование, 1993, Т.5, № 7, С. 101-112.
14. Гильманов А. Н. Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. М.: Физматлит, 2000.

15. Сигал И. Х., Иванова А. П. Введение в прикладное дискретное программирование. М.: Физматлит, 2002.
16. Лисейкин В. Д. Разностные сетки. Теория и приложения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014.
17. Федоренко Р. П. Введение в вычислительную физику. М.: МФТИ, 1994.
18. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
19. Кузнецов Н. М. Термодинамические функции и ударные адиабаты воздуха при высоких температурах. М.: Машиностроение, 1965, с. 463.
20. Калиткин Н. Н., Ритус И. В., Шпатаковская Г. В. Статистические суммы атомов и ионов в плазме. // Препринт № 98. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1981.
21. Волокитин В. С., Калиткин Н. Н. Статистические суммы водородоподобных ионов // Препринт № 11. - М.: ВЦММ АН СССР, 1991.
22. Волокитин В. С. Расчет термодинамики и состава неидеальных газоплазменных смесей. Препринт № 14. - М.: ВЦММ АН СССР, 1991.
23. Гасилов В. А., Скворцов В. А. Численное исследование динамики развития осесимметричных тепловых взрывов в колебательно-неравновесном азоте, ТВТ, 27:4 (1989), 771–776.
24. Никифоров А. Ф., Новиков В. Г., Уваров В. Б. Квантово-механические модели высокотемпературной плазмы и методы расчета росселандовых пробегов и уравнений состояния. М.: Физматлит, 2000.
25. Суржиков С. Т. Вычислительный эксперимент в построении радиационных моделей механики излучающего газа. М.: Ин-т прикл. мех. РАН, 1992, с. 157.
26. Кобзев Г. А., Нужный В. А. Спектральные и интегральные оптические характеристики непрерывного спектра воздушной плазмы при высоких температурах // Препринт ИВТ АН СССР № 1131.-М., 1984.
27. Кобзев Г. А., Нужный В. А. Оптические свойства воздушной плазмы с учетом спектральных линий,  $T=20000-300000$  К. // Препринт ИВТ АН СССР № 1-134. - М., 1984.
28. Sakai T., Tsuru T. and Sawada K., Computation of Hypersonic Radiating Flowfield over a Blunt Body. - Journal of Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 15, № 1, 91-98, 2001.
29. Chul P., Milos F. S. Computational Equations for radiating and Ablating Shock Layers. AIAA Paper AIAA-90-0356, 1990.

## Оглавление

1	Введение.....	3
1.1.	Постановка задачи .....	6
2	Математические модели и численные методы .....	7
3	Дискретизация расчетной области .....	8
4	Разностные схемы для неструктурированных треугольных сеток.....	9
5	Алгоритм решения уравнения переноса лучистой энергии на неструктурированных сетках.....	10
6	Динамическая адаптация неструктурированных сеток .....	14
7	Термодинамические и оптические свойства воздуха.....	21
8	Результаты расчетов и выводы .....	26
9	Заключение .....	28
	Библиографический список.....	29