



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Зайцев Н.А., Критский Б.В.

Расчет оператора
неотражающих граничных
условий на трехмерной
плоской границе для
однородной в нормальном
направлении среды

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Зайцев Н.А., Критский Б.В. Расчет оператора неотражающих граничных условий на трехмерной плоской границе для однородной в нормальном направлении среды // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 169. 24 с. doi:[10.20948/prepr-2018-169](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-169)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-169>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Н. А. Зайцев, Б. В. Критский

**Расчет оператора неотражающих
граничных условий на трехмерной
плоской границе для однородной
в нормальном направлении среды**

Москва — 2018

Зайцев Н.А., Критский Б.В.

Расчет оператора неотражающих граничных условий на трехмерной плоской границе для однородной в нормальном направлении среды

Разработаны условия полной прозрачности (УПП) на искусственных границах расчетной области для трехмерных задач о распространении волн в упругой среде в случае, когда свойства среды меняются вдоль границы расчетной области, но постоянны в перпендикулярном к ней направлении. Вспомогательные эллиптические задачи в нормальном к границе направлении решаются методом коллокаций. Приведены численные примеры, показывающие, что разработанные граничные условия являются устойчивыми и достаточно точными.

Ключевые слова: прозрачные граничные условия, условия полной прозрачности, неотражающие граничные условия, анизотропная упругая среда, 3D задачи, открытые границы

Zaitsev N.A., Kritskii B.V.

Calculation of the operator of transparent boundary conditions on a three-dimensional plane boundary for a homogeneous in the normal direction medium

The transparent boundary conditions (TBC) on the artificial boundaries of the computational domain for 3D problems on the propagation of waves in an elastic medium are developed in the case when the properties of the medium vary along the boundary of the computational domain, but are constant in the direction perpendicular to it. The auxiliary elliptic problems in the normal to the boundary direction are solved by the collocation method. Numerical examples are given that indicate that the developed boundary conditions are stable and sufficiently accurate.

Key words: transparent boundary conditions, conditions for full transparency, non-reflecting boundary conditions, anisotropic elastic medium, 3D problems, open borders

Оглавление

Введение	3
1. Математическая модель	6
2. Метод построения УПП, или Transparent Boundary Conditions (TBC)	9
3. Решение системы ОДУ вспомогательной задачи	13
4. Численный пример	14
Список литературы.....	17

Введение

Целью работы является разработка условий полной прозрачности (УПП) на искусственных границах расчетной области для трехмерных задач о распространении волн в упругой среде в случае, когда свойства среды меняются вдоль границы расчетной области, но постоянны в перпендикулярном к ней направлении.

Для задач сейсморазведки и акустического каротажа типичной является слоистая среда, в которой свойства среды сильно меняются от слоя к слою (вдоль вертикальной оси z) и практически не меняются внутри слоя. Если слои имеют наклон относительно горизонтальной плоскости, то можно повернуть расчетную область так, чтобы граница $y=\text{const}$ шла вдоль линии уровня слоя. Тогда свойства среды будут меняться вдоль осей x и z и не будут меняться вдоль оси y (рис. 1).

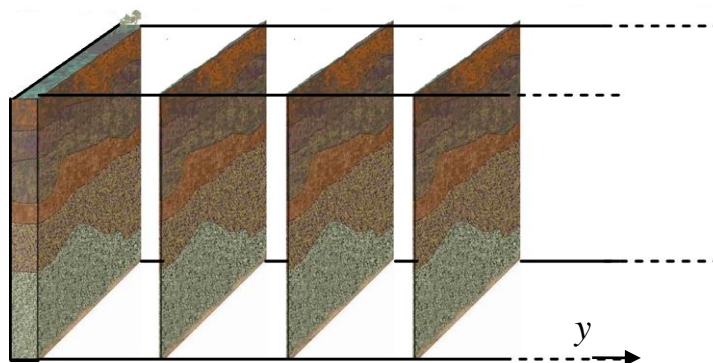


Рис. 1. Слоистая среда: свойства среды меняются вдоль границы расчетной области и не меняются в направлении оси y

В этом случае на границе расчетной области можно построить эффективные граничные условия полной прозрачности, которые будут эквивалентны решению задачи в неограниченной области. Это позволяет сделать расчетную область очень узкой (рис. 1) в направлении перпендикуляра к границе с УПП – минимально необходимой, чтобы в нее поместились необходимые для исследования объекты (источники и приемники звука). Без УПП размер расчетной области берется значительно больше, чтобы отражения звука, приходящие от границ расчетной области, не существующие в эксперименте, не искажали волновое поле. Использование УПП позволяет существенно экономить вычислительные ресурсы без потери точности расчетов.

На рис. 2 схематически показан пример расчетной области в случае постановки отражающих граничных условий на открытых границах. В этом случае границу расчетной области приходится отодвигать достаточно далеко,

чтобы отражение от нее не повлияло на решение в области интереса (показана на рисунке зеленым цветом).

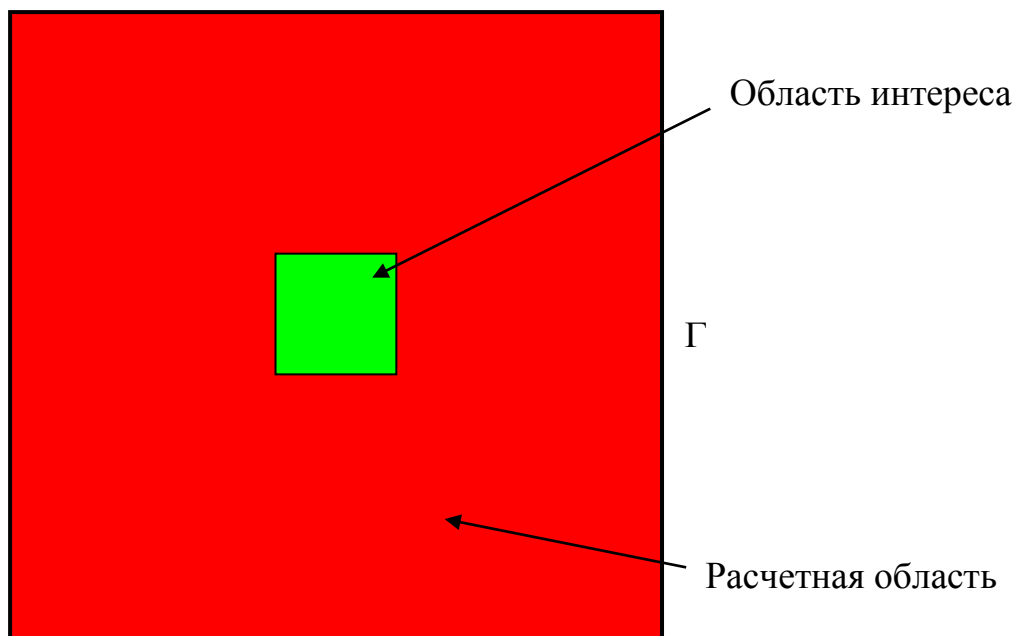


Рис 2. Пример расчетной области, области интереса и открытой границы Γ

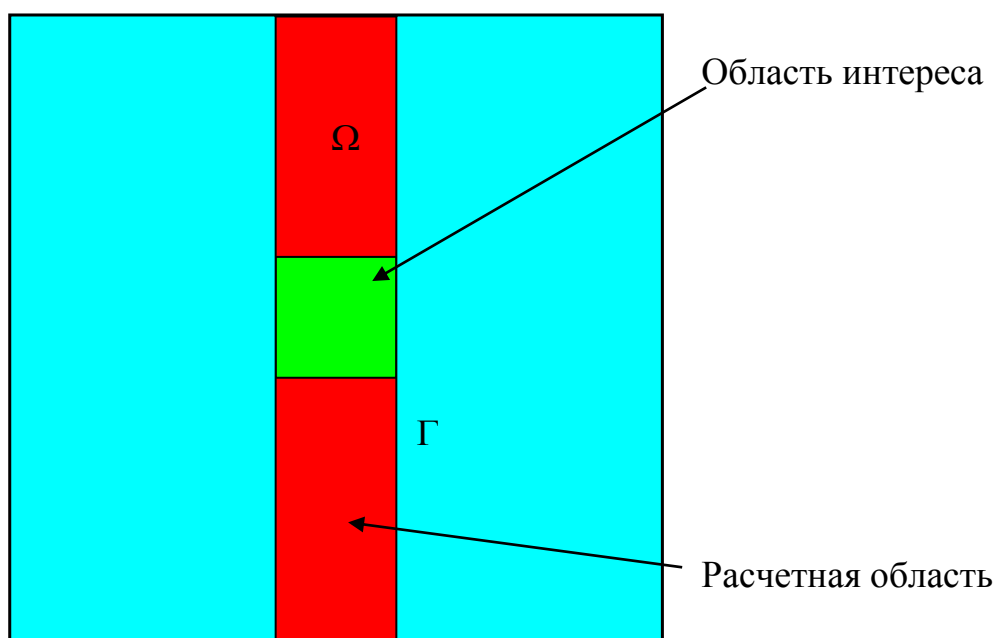


Рис 3. Уменьшение расчетной области, показанной на рисунке 2, в результате применения условий полной прозрачности, Ω — усеченная расчетная область, на границе которой ставятся УПП

На рис. 3 схематически показано уменьшение расчетной области, показанной на рис. 2, в результате применения условий полной прозрачности на границе расчетной области (отбрасываемая часть расчетной области показана на рисунке голубым цветом).

Под условиями полной прозрачности понимаются граничные условия, обладающие следующими свойствами. Пусть изначально задача ставится в неограниченной области (на рис. 4 слева она показана голубым цветом). Желательно иметь расчетную область Ω как можно меньше, в идеале совпадающую с областью интереса (красный цвет). В этом случае возникает искусственная граница Γ (рис. 4 справа), на которой нужно поставить граничные условия, чтобы задача оставалась замкнутой.

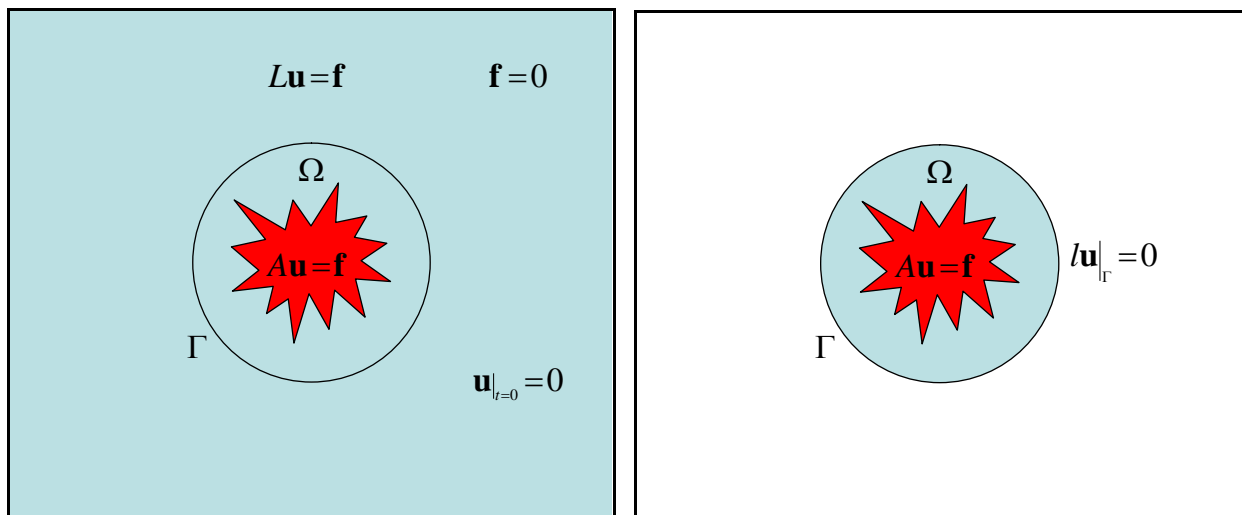


Рис. 4. Схемы постановок задач. Слева: постановка задачи без УПП, расчетная область (голубой цвет) занимает все пространство, область интереса (красный цвет) значительно меньше. Справа: постановка задачи с УПП, расчетная область практически совпадает с областью интереса

Граничные условия на искусственной границе Γ являются условиями полной прозрачности, если решение задачи в области Ω с этими граничными условиями совпадает с решением задачи в неограниченной области на области Ω .

Достаточными условиями возможности построения УПП являются (см. рис. 4) следующие:

1. Оператор исходной задачи A вне области Ω может быть приближен линейным оператором L .
2. Правая часть уравнения, которому должно быть подчинено искомое решение, вне области равна нулю.

3. В начальный момент времени решение всюду вне области Ω равно нулю.

Иными словами, если изначальная задача

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

вне области Ω может быть заменена на линейную задачу

$$L\mathbf{u} = 0$$

и в начальный момент времени $\mathbf{u}|_{t=0} = 0$ вне области Ω , то на границе Ω может быть построен оператор УПП.

Ранее граничные условия такого типа были разработаны для двумерных задач упругости (см., например, [1 – 5]). В настоящей работе предлагаются УПП для плоской границы трехмерной задачи. Кроме того, по сравнению с [1 – 5] применен более эффективный численный метод для решения вспомогательных эллиптических задач.

1. Математическая модель

Предполагается, что в рассматриваемой области акустические волны описываются линейным законом Гука.

Закон Гука в декартовой системе координат записывается следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}$$

или

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{23} & A_{23} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & A_{45} & A_{55} & A_{56} \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & A_{46} & A_{56} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где векторы

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix},$$

σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, ε_{ij} — компоненты тензора деформаций, которые связаны с компонентами вектора перемещений u_i следующими соотношениями:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Поле вектора перемещений среды, подчиняющейся закону Гука (1), описывается уравнениями Навье, которые в декартовой системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = & \\ = \frac{\partial}{\partial x_1} & \left[A_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{14} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + A_{15} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + A_{16} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x_2} & \left[A_{16} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{26} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{36} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{46} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + A_{56} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x_3} & \left[A_{15} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{25} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{35} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{45} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + A_{55} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + A_{56} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] \\ + F_1, & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = & \\ = \frac{\partial}{\partial x_1} & \left[A_{16} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{26} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{36} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{46} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + A_{56} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x_2} & \left[A_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{23} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{24} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + A_{25} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + A_{26} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x_3} & \left[A_{14} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{24} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{34} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{44} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + A_{45} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + A_{46} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] \\ + F_2, & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = & \\
= \frac{\partial}{\partial x_1} & \left[A_{15} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{25} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{35} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{45} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + A_{55} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + A_{56} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] \\
+ \frac{\partial}{\partial x_2} & \left[A_{14} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{24} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{34} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{44} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + A_{45} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + A_{46} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] \\
+ \frac{\partial}{\partial x_3} & \left[A_{13} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{23} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + A_{34} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + A_{35} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + A_{36} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] \\
+ F_3. &
\end{aligned}$$

Вместо матрицы A удобно использовать матрицу c , чтобы получить более компактную запись уравнений. Матрицы c и A связаны следующей формулой:

$$c_{e,j;f,k} = A_{I,J},$$

если $(e, j) \leftrightarrow I$, $(f, k) \leftrightarrow J$ по следующему правилу:

$$(1,1) \leftrightarrow 1, \quad (2,2) \leftrightarrow 2, \quad (3,3) \leftrightarrow 3, \quad (2,3) \leftrightarrow 4, \quad (1,3) \leftrightarrow 5, \quad (1,2) \leftrightarrow 6.$$

Реализовать это можно следующим образом:

$$c_{e,j;f,k} = A_{m(e,j),m(f,k)},$$

где

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

В обратную сторону:

$$c_{e,j;f,k} = A_{I,J} = c_{i_1(I),i_2(I),i_1(J),i_2(J)},$$

где

$$i_1 = [1, 2, 3, 2, 1, 1],$$

$$i_2 = [1, 2, 3, 3, 3, 2].$$

Используя симметрию $c_{e,j;f,k}$, можно записать уравнения компактно:

$$\rho \frac{\partial^2 u_e}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{f,l=1}^3 c_{e,j;f,l} \frac{\partial u_f}{\partial x_l}, \quad e = 1, \dots, 3. \quad (2)$$

2. Метод построения УПП, или Transparent Boundary Conditions (TBC)

Для построения оператора граничных условий полной прозрачности необходимо построить функцию Грина для области D , внешней по отношению к расчетной области Ω , которая в идеале совпадает с областью интереса (см. рис. 5).

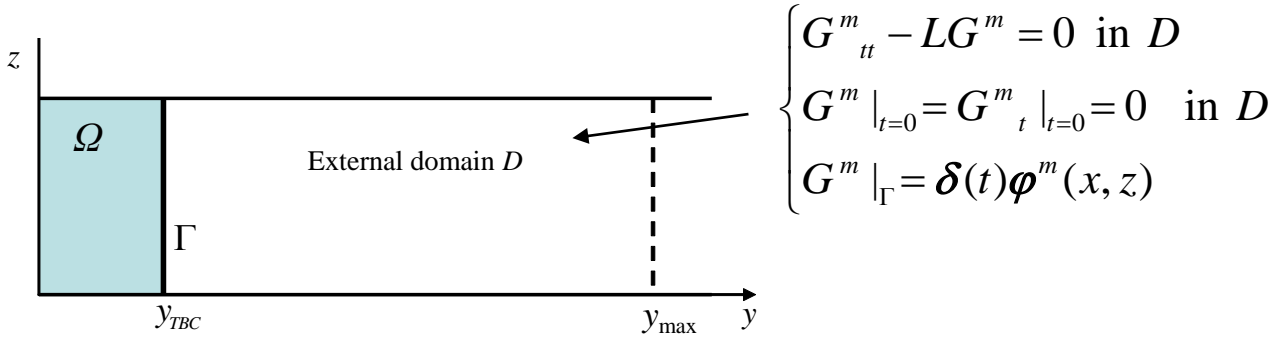


Рис. 5. Расчетная область (область интереса) Ω , вспомогательная область D и постановка задачи в D

С этой целью на границе Γ нужно выбрать подходящий базис

$$\{\varphi^m(x, z)\}_{m=0}^{\infty} : u(t, x, z)|_{\Gamma} = \sum_m c^m(t)\varphi^m(x, z),$$

где $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, и для каждой базисной функции решить задачу

$$\begin{cases} G^m_{tt} - LG^m = 0 & \text{in } D \\ G^m|_{t=0} = G^m_t|_{t=0} = 0 & \text{in } D \\ G^m|_{\Gamma} = \delta(t)\varphi^m(x, z) \end{cases}$$

В настоящей работе предполагается, что границы расчетной области отнесены достаточно далеко вдоль осей x и z и что условие периодичности по этим направлениям является приемлемым. В этом случае подходящим является обычный тригонометрический базис.

Если все $G^m(y, z, t)$ известны, то известна и функция Грина:

$$u(y, t, x, z) = \sum_m \int_0^t c^m(\tau)G^m(y, x, z, t - \tau)d\tau.$$

Практически это делается следующим образом.

Сделаем преобразование Лапласа по времени и перейдем к изображениям функций \tilde{u}_f . Тогда в уравнениях производная по времени исчезнет, и уравнения будут зависеть от двойственной переменной s как от параметра:

$$\rho s^2 \tilde{u}_e = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{f,l=1}^3 c_{e,j;f,l} \frac{\partial \tilde{u}_f}{\partial x_l}, \quad e=1,\dots,3.$$

В связи с неоднородностью свойств среды удобно ввести преобразование координат, которое вводит сгущение точек или деформирует базисные функции. На практике более часто встречается потребность в преобразовании координат в вертикальном направлении из-за слоистой структуры среды, но мы делаем преобразование координат по всем переменным:

$$\rho s^2 \tilde{u}_e = \sum_{j=1}^3 \frac{d\xi_j}{dx_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \sum_{f,l=1}^3 c_{e,j;f,l} \frac{\partial \tilde{u}_f}{\partial \xi_l} \frac{d\xi_l}{dx_l}, \quad e=1,\dots,3.$$

На практике обычно известны $x_i(\xi_i)$, а не $\xi_i(x_i)$, поэтому удобнее переписать уравнения в следующем виде:

$$\rho s^2 \tilde{u}_e = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{x'_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \sum_{f,l=1}^3 c_{e,j;f,l} \frac{\partial \tilde{u}_f}{\partial \xi_l} \frac{1}{x'_l}, \quad e=1,\dots,3. \quad (3)$$

Каждую компоненту решения разложим по своему базису:

$$\tilde{u}_f(\xi, \eta, \zeta, s) = \sum_{m=1}^{M_f} \sum_{k=1}^{K_f} U_{m,k}^f(\eta, s) \varphi_{m,k}^f(\xi, \zeta), \quad (4)$$

где $\xi = \xi_1$, $\eta = \xi_2$, $\zeta = \xi_3$. Базисные функции $\varphi_{m,k}^f(\xi, \zeta)$ могут быть различными для разных компонент из-за различий в граничных условиях для них. Количество тоже может различаться, так как если одни разлагаем по синусам, а другие по косинусам, то естественно разлагать до одной и той же частоты и при этом не брать нулевую гармонику у синусов.

Обычно базисные функции $\varphi_{m,k}^f(\xi, \zeta)$ имеют вид:

$$\varphi_{m,k}^f(\xi, \zeta) = \varphi_m^{f_x}(\xi) \varphi_k^{f_z}(\zeta).$$

Подставим разложение (4) в уравнение (3):

$$\begin{aligned} \rho s^2 \sum_{m=1}^{M_e} \sum_{k=1}^{K_e} U_{m,k}^e(\eta, s) \varphi_{m,k}^e(\xi, \zeta) = \\ = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{x'_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \sum_{f=1}^3 \sum_{l=1}^3 c_{e,j;f,l} \frac{1}{x'_l} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \sum_{m=1}^{M_f} \sum_{k=1}^{K_f} U_{m,k}^f(\eta, s) \varphi_{m,k}^f(\xi, \zeta), \quad (5) \\ e=1:3. \end{aligned}$$

Будем требовать выполнения этого уравнения в слабом смысле, для проекций на базисные функции. Для этого умножим (5) скалярно на базисные функции

$$\psi_{\mu,\kappa}^e(\xi,\zeta), \quad \mu=1:M_e, \quad \kappa=1:K_e, \quad e=1:3 \quad (6)$$

(базисные функции (6) не обязаны совпадать с функциями, по которым разложены искомые функции, но могут и совпадать):

$$\begin{aligned} & \left\langle \rho(\xi,\zeta) s^2 \sum_{m=1}^{M_e} \sum_{k=1}^{K_e} U_{m,k}^e(\eta,s) \varphi_{m,k}^e(\xi,\zeta), \psi_{\mu,\kappa}^e(\xi,\zeta) \right\rangle = \\ & = \left\langle \sum_{j=1}^3 \frac{1}{x'_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \sum_{f=1}^3 \sum_{l=1}^3 c_{e,j;f,l}(\xi,\zeta) \frac{1}{x'_l} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \sum_{m=1}^{M_f} \sum_{k=1}^{K_f} U_{m,k}^f(\eta,s) \varphi_{m,k}^f(\xi,\zeta), \psi_{\mu,\kappa}^e(\xi,\zeta) \right\rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

(Угловыми скобками обозначено скалярное произведение.)

После выполнения операции дифференцирования по переменным $\xi_1 \equiv \xi$ и $\xi_3 \equiv \zeta$ и группирования коэффициентов, уравнение (7) преобразуется в матричное обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\sum_{f=1}^3 \sum_{m=1}^{M_f} \sum_{k=1}^{K_f} \mathbf{M}_{0,\mu,\kappa,e}^{m,k,f} U_{m,k,f} + \sum_{f=1}^3 \sum_{m=1}^{M_f} \sum_{k=1}^{K_f} \mathbf{M}_{1,\mu,\kappa,e}^{m,k,f} U'_{m,k,f} + \sum_{f=1}^3 \sum_{m=1}^{M_f} \sum_{k=1}^{K_f} \mathbf{M}_{2,\mu,\kappa,e}^{m,k,f} U''_{m,k,f} = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{0,\mu,\kappa,e}^{m,k,f} &= \left\langle \frac{1}{x'} \frac{\partial}{\partial \xi} c_{e,1;f,1} \frac{1}{x'} \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi_{m,k}^f, \psi_{\mu,\kappa}^e \right\rangle + \left\langle \frac{1}{x'} \frac{\partial}{\partial \xi} c_{e,1;f,3} \frac{1}{z'} \frac{\partial}{\partial \zeta} \varphi_{m,k}^f, \psi_{\mu,\kappa}^e \right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{1}{z'} \frac{\partial}{\partial \zeta} c_{e,3;f,1} \frac{1}{x'} \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi_{m,k}^f, \psi_{\mu,\kappa}^e \right\rangle + \left\langle \frac{1}{z'} \frac{\partial}{\partial \zeta} c_{e,3;f,3} \frac{1}{z'} \frac{\partial}{\partial \zeta} \varphi_{m,k}^f, \psi_{\mu,\kappa}^e \right\rangle \\ &- \delta_e^f s^2 \left\langle \rho(\xi,\zeta) \varphi_{m,k}^e(\xi,\zeta), \psi_{\mu,\kappa}^e(\xi,\zeta) \right\rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{1,\mu,\kappa,e}^{m,k,f} &= \frac{1}{y'} \left\langle \frac{1}{x'} \frac{\partial}{\partial \xi} c_{e,1;f,2} \varphi_{m,k}^f, \psi_{\mu,\kappa}^e \right\rangle + \frac{1}{y'} \left\langle c_{e,2;f,1} \frac{1}{x'} \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi_{m,k}^f, \psi_{\mu,\kappa}^e \right\rangle \\ &+ \frac{1}{y'} \left\langle c_{e,2;f,3} \frac{1}{z'} \frac{\partial}{\partial \zeta} \varphi_{m,k}^f, \psi_{\mu,\kappa}^e \right\rangle + \frac{1}{y'} \left\langle \frac{1}{z'} \frac{\partial}{\partial \zeta} c_{e,3;f,2} \varphi_{m,k}^f, \psi_{\mu,\kappa}^e \right\rangle \\ &- \frac{y''}{(y')^3} \left\langle c_{e,2;f,2} \varphi_{m,k}^f, \psi_{\mu,\kappa}^e \right\rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_{2,\mu,\kappa,e}^{m,k,f} = \frac{1}{(y')^2} \left\langle c_{e,2;f,2} \varphi_{m,k}^f, \psi_{\mu,\kappa}^e \right\rangle. \quad (11)$$

Задача (8) решается для всех граничных условий вида: решение ограничено при $\eta > 0$ и

$$U_{m,k,f} = \delta(m,\mu) \delta(k,\kappa) \delta(f,e) \quad (12)$$

при $\eta = 0$ для всех $\mu = 1, \dots, m_{\max}$, $\kappa = 1, \dots, k_{\max}$, $e = 1, \dots, 3$.

На практике вместо решения задачи (8) в неограниченной области с условием ограниченности решения ищется решение в ограниченной области с условием на правом конце $U'_{m,k,f} = 0$. При этом размер области выбирается достаточно большим, чтобы отодвигание правой границы на большее расстояние не меняло решения при $\eta = 0$.

Производная по y на границе Γ каждого решения, соответствующего граничному условию вида (12), рассматриваемая как вектор-столбец, образует столбец матрицы $\hat{\mathbf{P}}$, которая является матрицей оператора Пуанкаре-Стеклова. После того как все столбцы матрицы заполнены, становится известной связь

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial y} = \hat{\mathbf{P}} \vec{U}.$$

Это и есть искомый оператор УПП в пространстве Лапласа для коэффициентов Фурье.

Матрица $\hat{\mathbf{P}}$ является функцией двойственной переменной s , стремящейся к линейной при $s \rightarrow \infty$. Поэтому ее можно представить в виде

$$\hat{\mathbf{P}}(s) = \mathbf{P}_1 s + \mathbf{P}_0 + \hat{\mathbf{K}}(s); \quad \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0 \text{ are consts, } \hat{\mathbf{K}}(s) = o(1).$$

Коэффициенты матрицы $\hat{\mathbf{K}}(s)$ стремятся к нулю как первая степень s при $s \rightarrow \infty$, поэтому каждый элемент матрицы как функция s может быть приближен суммой вида

$$\hat{K}_n^m(s) \approx \hat{\tilde{K}}_n^m(s) \equiv \sum_{l=1}^{I_n^m} \frac{\alpha_{n,l}^m}{s - \beta_{n,l}^m}, \quad \operatorname{Re}(\beta_{n,l}^m) < 0.$$

После этого оператор УПП может быть записан в виде

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}_1 \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} + \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}_0 \mathbf{Q} \mathbf{u} + \mathbf{Q}^{-1} \left\{ \tilde{\mathbf{K}}(t) * \right\} \mathbf{Q} \mathbf{u} = 0, \quad (13)$$

где \mathbf{Q} — оператор преобразования Фурье

$$\mathbf{Q}: u_f(x, y, z, t) \rightarrow U_{f,m,k}(y, t),$$

$$\tilde{K}_n^m(t) = \sum_{l=1}^{I_n^m} \alpha_{n,l}^m \exp(\beta_{n,l}^m t), \quad \operatorname{Re}(\beta_{n,l}^m) < 0,$$

звездочка — оператор свертки по времени от начала процесса до актуального времени.

3. Решение системы ОДУ вспомогательной задачи

Система ОДУ вспомогательной задачи (8) может быть записана в матричном виде:

$$\mathbf{M}_2 \frac{d^2 U}{d\eta^2} + \mathbf{M}_1 \frac{dU}{d\eta} + \mathbf{M}_0 U = 0, \quad (14)$$

где $U = \{U_{m,k}^f\}$ — вектор длины $K = \sum_{e=1}^3 M_e K_e$, а $\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_0$ — $K \times K$ матрицы.

В дважды периодическом случае, который рассматривается в настоящей работе, размерности базисов по направлениям M_e и K_e не зависят от номера уравнения e , и $K = 3M_e K_e$.

Введением

$$W = \begin{bmatrix} U' \\ U \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1 & -\mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_0 \\ I & 0 \end{bmatrix},$$

где \mathbf{A} — $2K \times 2K$ матрица, система уравнений (14) приводится к системе ОДУ первого порядка:

$$\frac{dW}{d\eta} = \mathbf{A}W. \quad (15)$$

В работах [1 – 5] для вычисления коэффициентов матрицы оператора Пуанкаре-Стеклова система ОДУ (15) решалась конечно-разностным методом второго порядка аппроксимации с многократным применением экстраполяции по Ричардсону, что в принципе позволяет получить метод произвольно высокого порядка аппроксимации, но дорогой ценой. Использование для решения (15) методов высокого порядка аппроксимации очень важно для эффективности вычислений, так как искомые решения бесконечно дифференцируемы во внутренних точках области.

В настоящей работе мы используем существенно более эффективный метод коллокаций, основные черты которого описаны ниже.

Пусть нам нужно решить систему (15) на отрезке $\eta \in [0,1]$ с граничными условиями

$$B_0 W(0) + B_1 W(1) = \beta,$$

где $n \times n$ матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, вектор $\beta \in \mathbb{R}^n$, $n = 2K$. Использование полиномиального метода коллокаций степени m означает, что на отрезке $\eta \in [0,1]$ аналитическое решение дифференциальной задачи аппроксимируется коллокационной функцией $P(\eta)$, которая для данной сетки $\Delta = \{\eta_0, \dots, \eta_N\}$ ($\eta_0 = 0, \eta_N = 1$) является полиномом степени m на каждом интервале $[\eta_{i-1}, \eta_i]$:

$$P(\eta) := P_i(\eta) \equiv a_{i,0} + a_{i,1}\eta + \dots + a_{i,m}\eta^m, \quad \eta \in [\eta_{i-1}, \eta_i], \quad i = 1, \dots, N.$$

Коэффициенты полиномов $a_{i,j}$ однозначно определяются следующими условиями:

$$\begin{cases} P'_i(\eta_{i,j}) = \mathbf{A}P(\eta_{i,j}), & i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, m; \\ P_i(\eta_i) = P_{i+1}(\eta_i), & i = 1, \dots, N - 1; \\ B_0P_1(0) + B_1P_N(1) = \beta, \end{cases} \quad (16)$$

где точки коллокации $\eta_{i,j}$ определяются формулами:

$$\eta_{i,j} := \eta_i + \rho_i(\eta_{i+1} - \eta_i), \quad 0 < \rho_1 < \dots < \rho_m < 1.$$

Полиномиальный метод коллокаций гарантирует сходимость порядка $O(h^m)$ для гладких решений, где h — максимальный шаг сетки Δ . Однако при специальном выборе узлов коллокации (например, Гауссовские точки) имеет место сверхсходимость со скоростью $O(h^{2m})$ в точках сетки η_i , что и обеспечивает эффективность метода.

Подробности метода коллокаций можно найти в [6].

4. Численный пример

Для проверки правильности работы алгоритма построения оператора УПП была разработана программа для решения исходной задачи (2) с граничными условиями (13). Решалась задача в кубе размером $1\text{км} \times 1\text{км} \times 1\text{км}$:

$$x \in [0,1], \quad y \in [0,1], \quad z \in [0,1].$$

На границах $x = \text{const}$ и $z = \text{const}$ ставилось условие периодичности:

$$u_f(x + X, y, z, t) = u_f(x, y, z, t), \quad u_f(x, y, z + Z, t) = u_f(x, y, z, t).$$

На границе $y = 0$ ставилось условие Дирихле $u_f = 0$ (чтобы уменьшить вычислительные затраты на тестовую задачу). На границе $y = 1$ ставились граничные условия (13). Использовались следующие базисные функции

$$\Phi_{m,k}^f(\xi, \zeta) = \Phi_m(\xi)\Phi_k(\zeta),$$

$$\Phi_m(\xi) = \cos\left(2\pi m \frac{\xi - \xi_{\min}}{\xi_{\max} - \xi_{\min}}\right), \quad m = 0, \dots, M,$$

$$\varphi_m(\xi) = \sin\left(2\pi(m-M)\frac{\xi - \xi_{\min}}{\xi_{\max} - \xi_{\min}}\right), \quad m = M+1, \dots, 2M,$$

где M — номер старшей частоты, участвующей в операторе граничных условий (общее количество базисных функций по одному направлению для одной компоненты равно $2M+1$, общее количество базисных функции равно $3(2M+1)^2$).

Для контроля качества решения, полученного при использовании УПП, решалась аналогичная задача в большей области, размеры которой выбирались так, чтобы отражение от дальней границы не успело войти в область интереса (расчетную область основной задачи). Для этого подходящей оказалась область $x \in [0,1]$, $y \in [0,2]$, $z \in [0,1]$.

Центр источника, возбуждавшего волновой процесс, находился в точке $x = y = z = 0.5$. Для возбуждения волнового процесса в уравнении (2) использовалась правая часть следующего вида:

$$\text{grad}\left(\frac{1 - \cos(2\pi x)}{2} \exp\left(-\frac{(y-0.5)^2}{0.004}\right) \frac{1 - \cos(2\pi z)}{2}\right) \exp\left(-\frac{(t-0.05)^2}{0.00002}\right).$$

Предполагалось, что среда является десятипроцентно синусоидально возмущённой анизотропной средой, задаваемой параметрами Томсена:

$$\rho_0 = 2.57, \quad V_{p0} = 4.449, \quad V_{s0} = 2.585, \quad \gamma_0 = 0, \quad \delta_0 = 0.565, \quad \varepsilon_0 = 0.091.$$

Для такой VTI среды матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \rho V_P^2 (1 + 2\varepsilon), \\
A_{33} &= \rho V_P^2, \\
A_{44} &= \rho V_S^2, \\
A_{13} &= \sqrt{(A_{33} - A_{44})^2 + 2\delta A_{33} (A_{33} - A_{44})} - A_{44}, \\
A_{12} &= A_{11} - 2A_{44} (1 + 2\gamma), \quad A_{66} = (A_{11} - A_{12}) / 2.
\end{aligned}$$

Для этой задачи на сетке $100 \times 100 \times 100$ в маленькой области с УПП на границе было вычислено решение \vec{u}_{TBC} и на сетке $100 \times 200 \times 100$ в большой области решение \vec{u}_{ref} . Для вычисления оператора УПП использовалось 5 частот в каждом направлении, что соответствует общему количеству базисных функций, равному $363 = 3 \times 11 \times 11$. Относительная точность решения $\|\vec{u}_{TBC} - \vec{u}_{ref}\| / \|\vec{u}_{ref}\|$ оказалась в пределах 2% за все время расчета.

Зависимость нормы решения от времени для \vec{u}_{TBC} (синяя линия) и \vec{u}_{ref} (красная линия) показаны на рис. 6. Красная линия заканчивается раньше, чем синяя, т.к. при больших временах расчета в область интереса приходит отражение от дальней границы и это решение не может считаться эталонным.

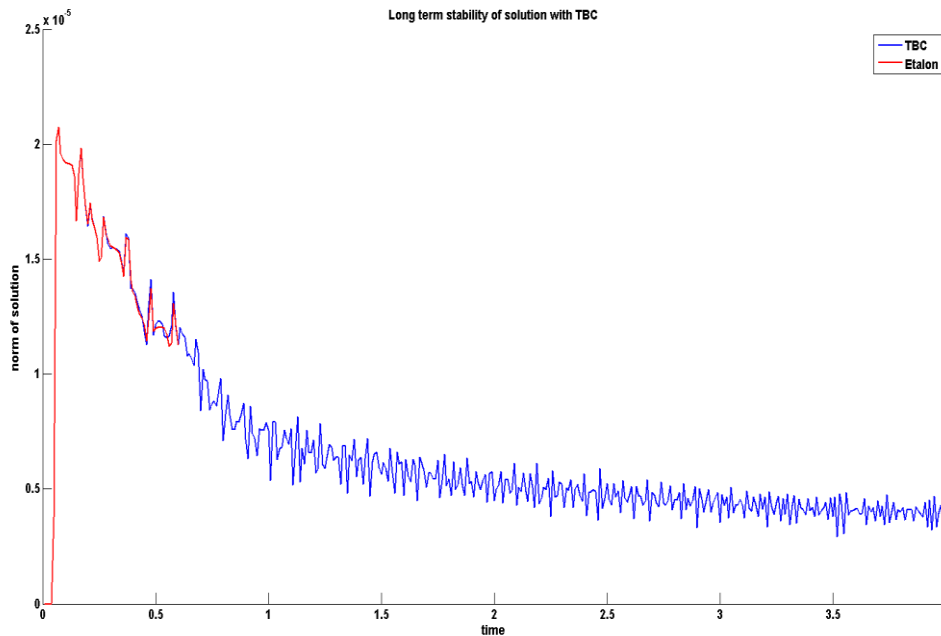


Рис. 6. Зависимость нормы решения от времени для \vec{u}_{TBC} (синяя линия) и \vec{u}_{ref} (красная линия)

Поведение нормы решения \vec{u}_{TBC} показывает, что решение остается устойчивым при расчете на большие времена.

На следующих картинках показаны поля модулей векторов \vec{u}_{TBC} (слева) и \vec{u}_{ref} (справа) для различных моментов времени (цветовая шкала фиксирована).

Видно, что решения визуально неотличимы.

Итак, предложенное граничное условие является устойчивым и достаточно точным.

Список литературы

1. Sofronov, I. L., Zaitsev N. A., *Non-reflecting boundary conditions for 2D anisotropic elastodynamics* // ПАММ, v. 6, Iss. 1, 611 – 612 (2006) <http://dx.doi.org/10.1002/pamm.200610286>
2. Зайцев Н. А., Софронов И. Л., *Применение прозрачных граничных условий для решения двумерных задач упругости с азимутальной анизотропией* // Матем. моделирование, 2007, 19:8, 49–54. http://www.mathnet.ru/php/getFT.phtml?jrnid=mm&paperid=1101&what=fullt&option_lang=rus
3. Sofronov I.L., Zaitsev N.A., *Transparent boundary conditions for the elastic waves in anisotropic media* // *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications*. Eds. Benzoni-Gavage, Serre. Springer Verlag, pp. 997–1004 (2008) https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-540-75712-2_105
4. Sofronov I.L., Zaitsev N.A., *Numerical generation of transparent boundary conditions on the side surface of a vertical transverse isotropic layer* // *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Online publication: 21-AUG-2009; V. 234, Issue 6, 1732 – 1738 (2010) <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2009.08.022>
5. Zaitsev N. A., Sofronov I. L., *Generation of transparent boundary conditions for modeling wave propagation in anisotropic media*, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2018, 082, 36 pp. <http://www.mathnet.ru/php/calstat.phtml?type=extfullt&efopen=&jrnid=ipmp&paperid=2442&thref=http%3A%2F%2Fwww.library.keldysh.ru%2Fpreprint.asp%3Fid%3D2018-82%26lg%3Dr>
6. Winfried Auzinger, Günter Kneisl, Othmar Koch and Ewa Weinmüller, *A collocation code for singular boundary value problems in ordinary differential equations*, *Numerical Algorithms* **33**: 27–39, 2003. https://www.researchgate.net/publication/226489306_A_Collocation_Code_for_Singular_Boundary_Value_Problems_in_Ordinary_Differential_Equations

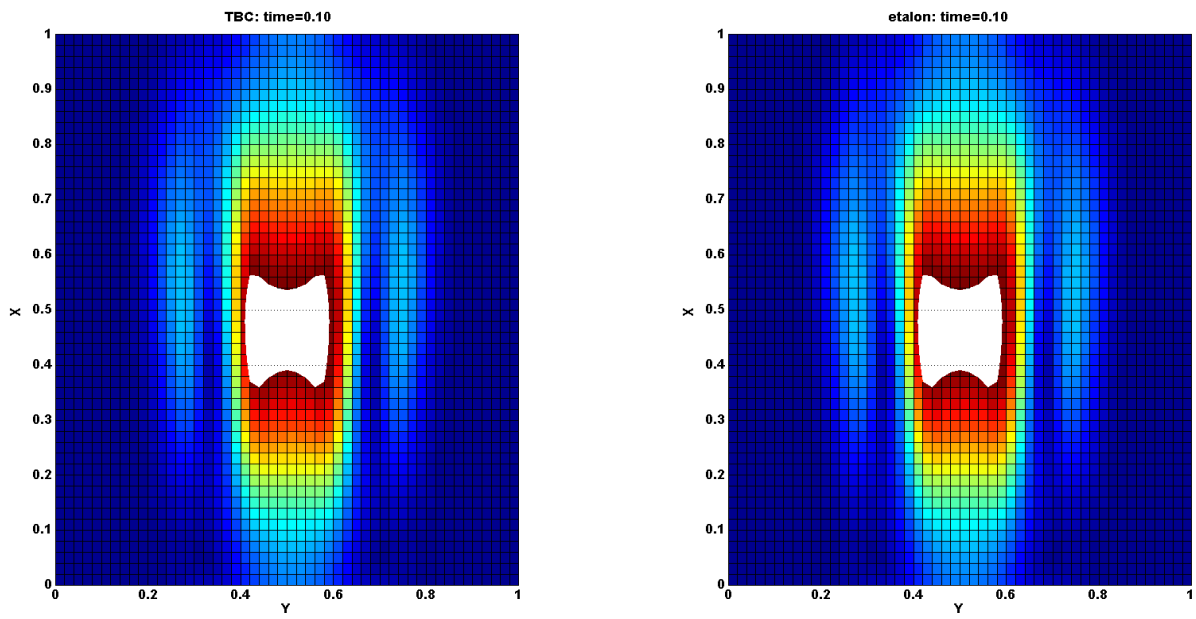


Рис. 7. Поля $|\vec{u}_{TBC}|$ (слева) и $|\vec{u}_{ref}|$ (справа) для $t=0.1$ сек

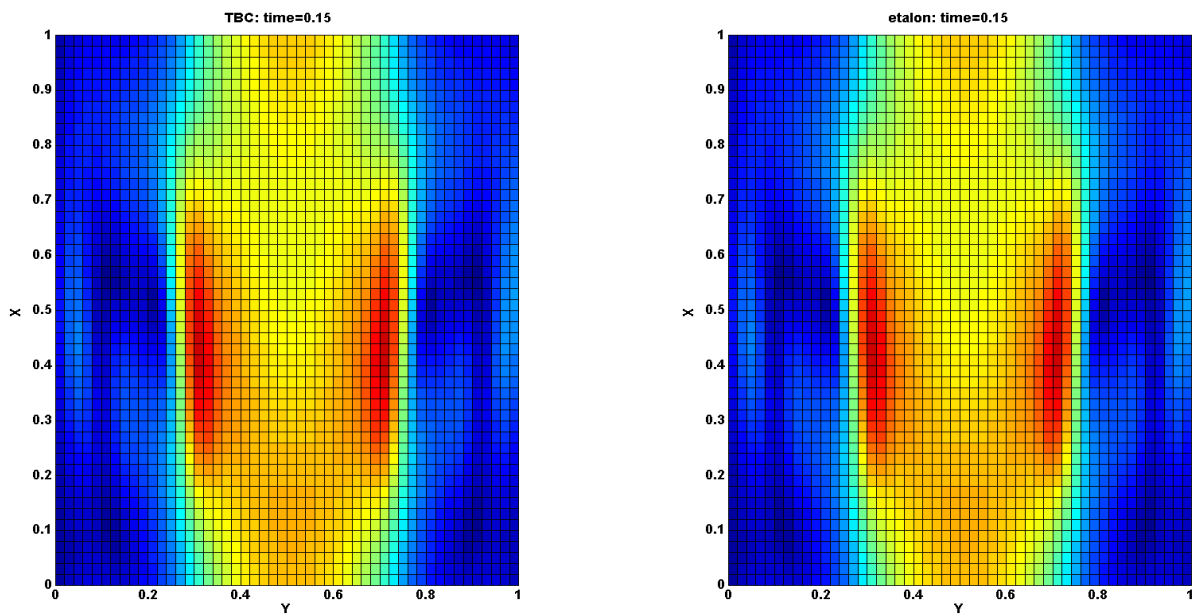


Рис. 8. Поля $|\vec{u}_{TBC}|$ (слева) и $|\vec{u}_{ref}|$ (справа) для $t=0.15$ сек

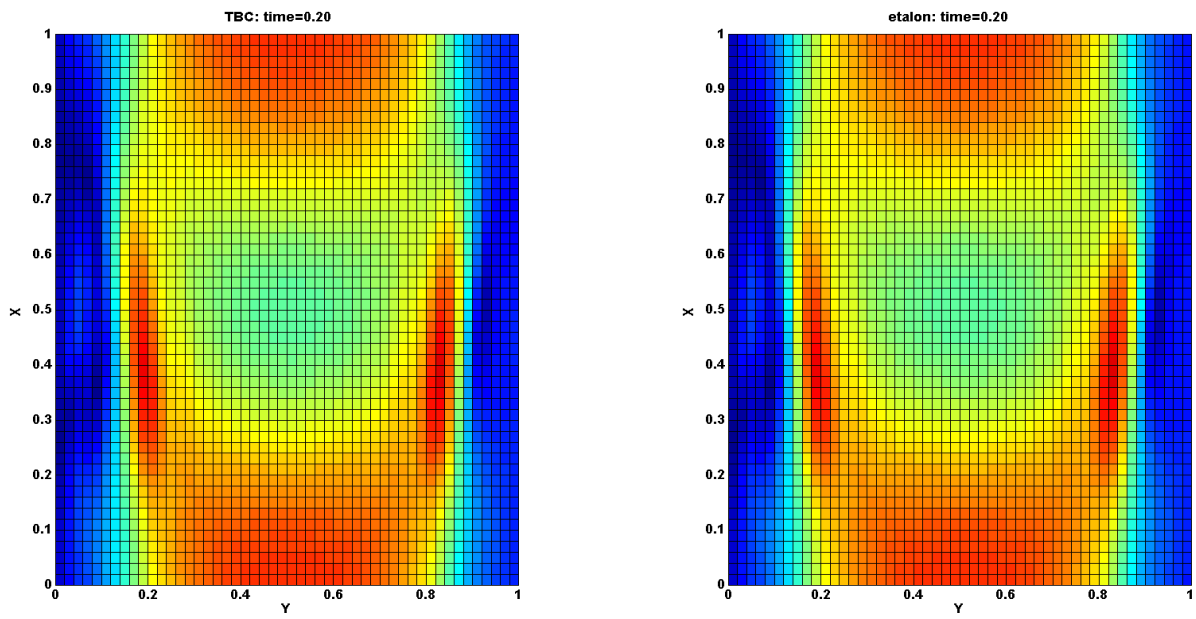


Рис. 9. Поля $|\vec{u}_{TBC}|$ (слева) и $|\vec{u}_{ref}|$ (справа) для $t=0.20$ сек

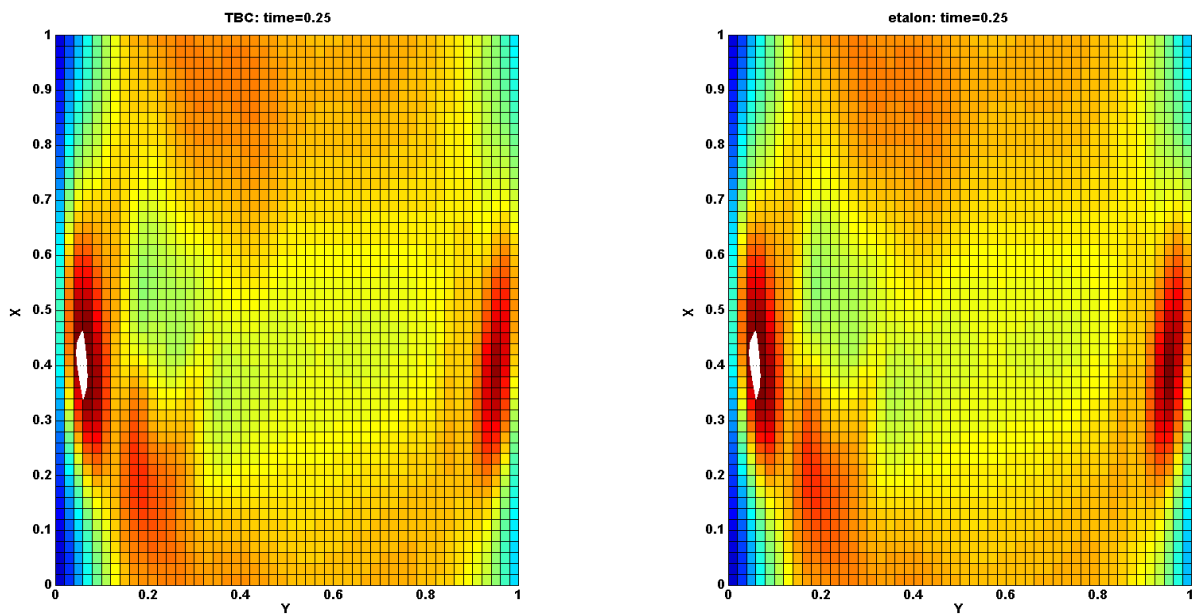


Рис. 10. Поля $|\vec{u}_{TBC}|$ (слева) и $|\vec{u}_{ref}|$ (справа) для $t=0.25$ сек

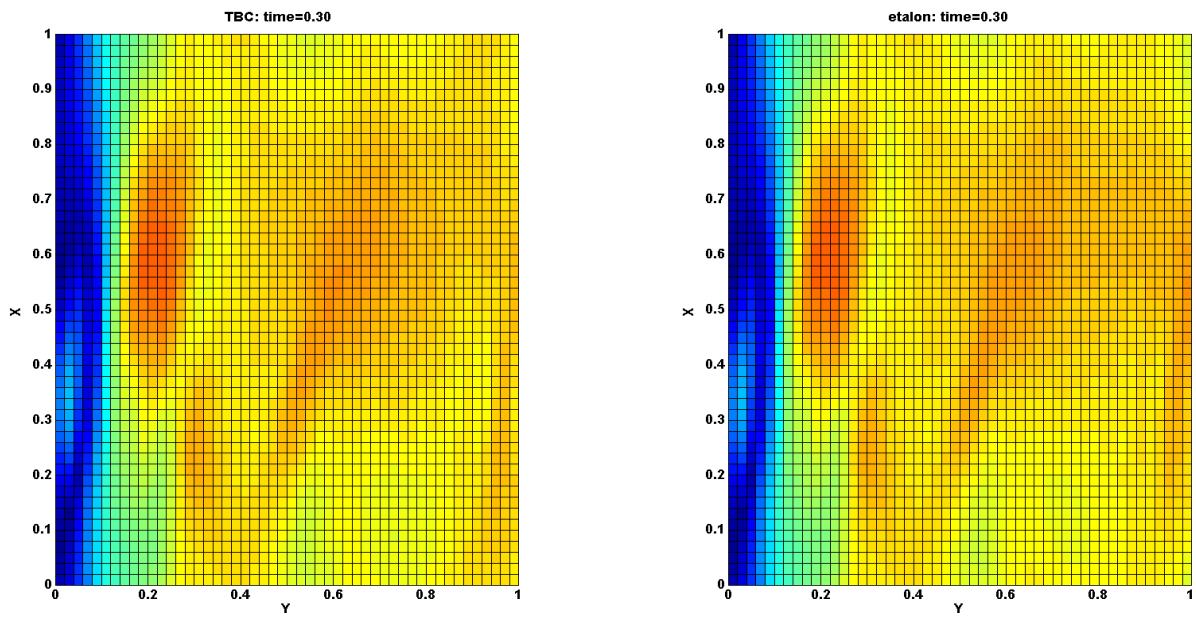


Рис. 11. Поля $|\vec{u}_{TBC}|$ (слева) и $|\vec{u}_{ref}|$ (справа) для $t=0.30$ сек

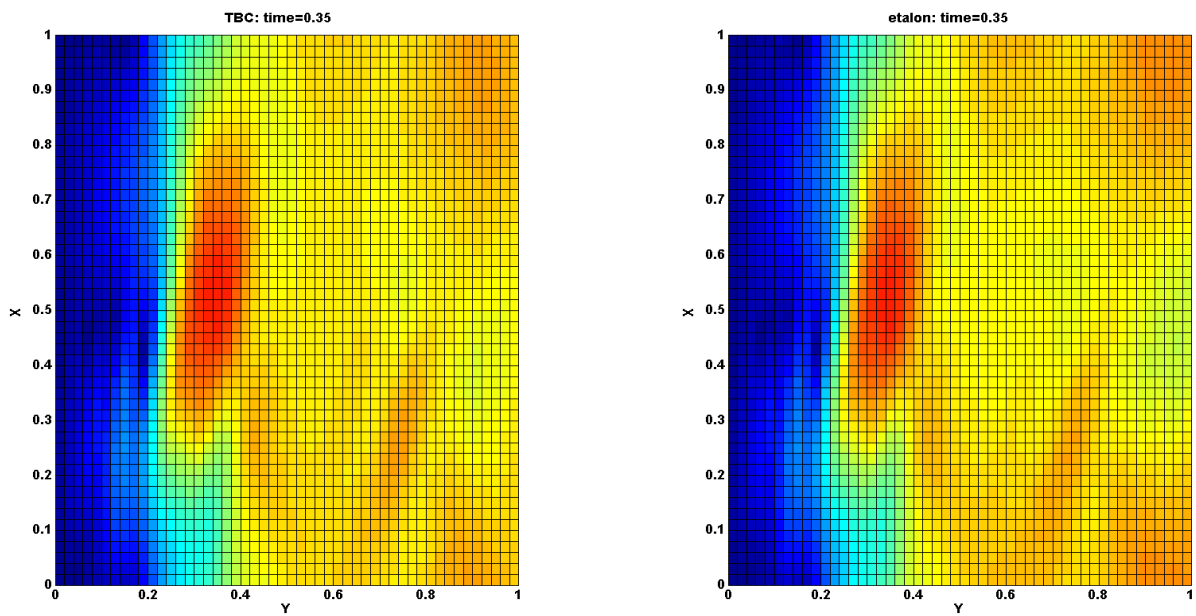


Рис. 12. Поля $|\vec{u}_{TBC}|$ (слева) и $|\vec{u}_{ref}|$ (справа) для $t=0.35$ сек

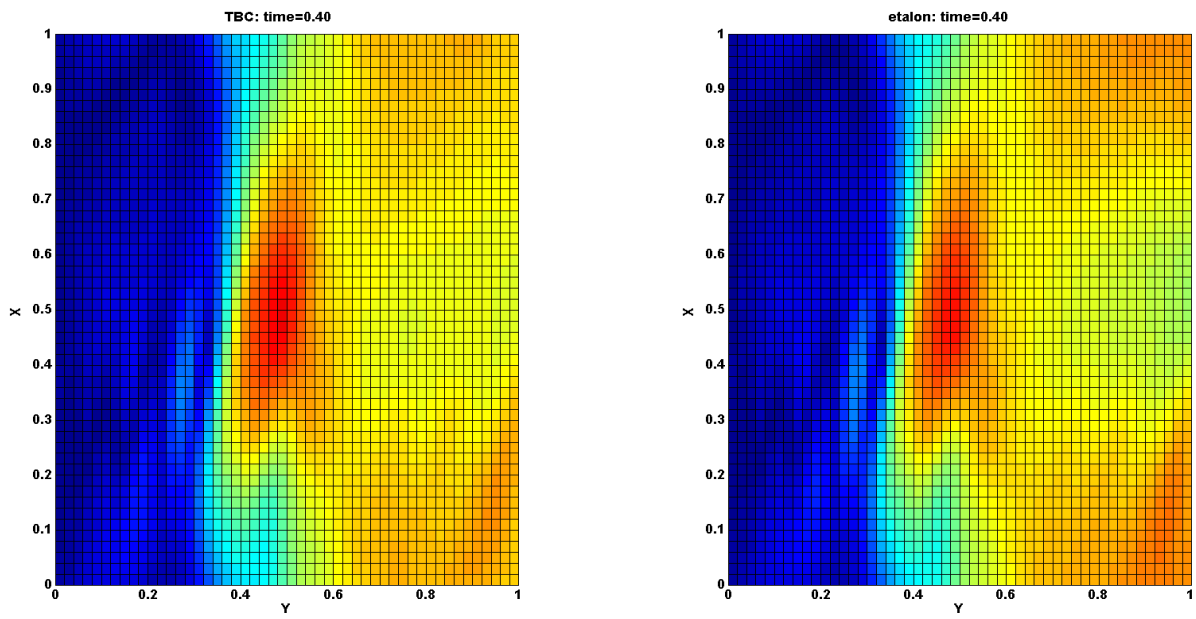


Рис. 13. Поля $|\vec{u}_{TBC}|$ (слева) и $|\vec{u}_{ref}|$ (справа) для $t=0.40$ сек

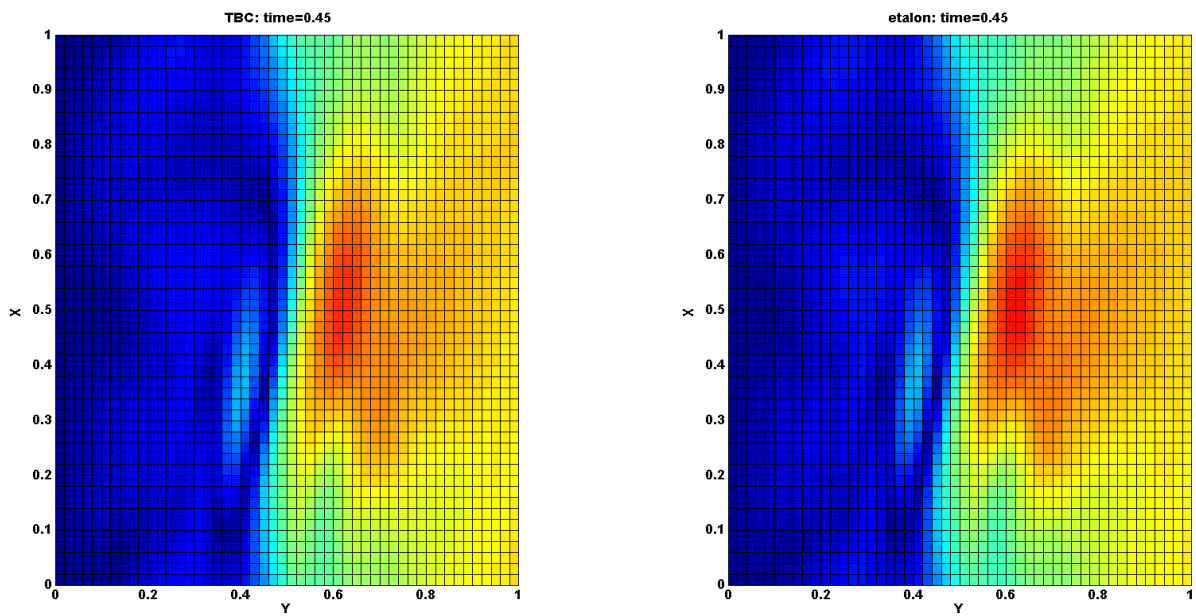


Рис. 14. Поля $|\vec{u}_{TBC}|$ (слева) и $|\vec{u}_{ref}|$ (справа) для $t=0.45$ сек

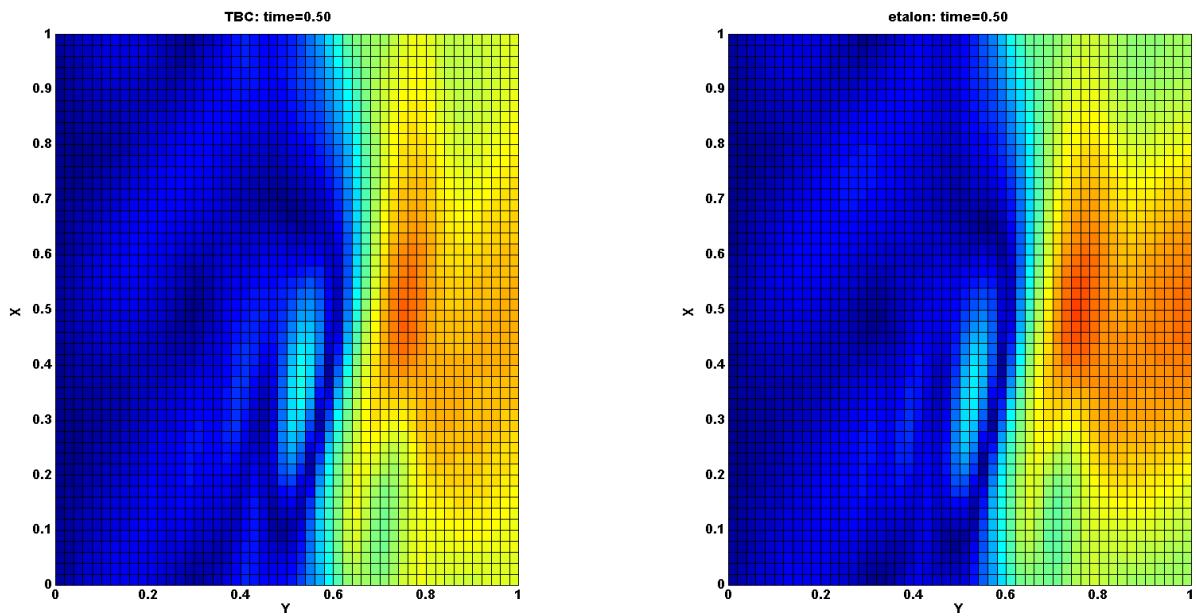


Рис. 15. Поля $|\vec{u}_{TBC}|$ (слева) и $|\vec{u}_{ref}|$ (справа) для $t=0.50$ сек

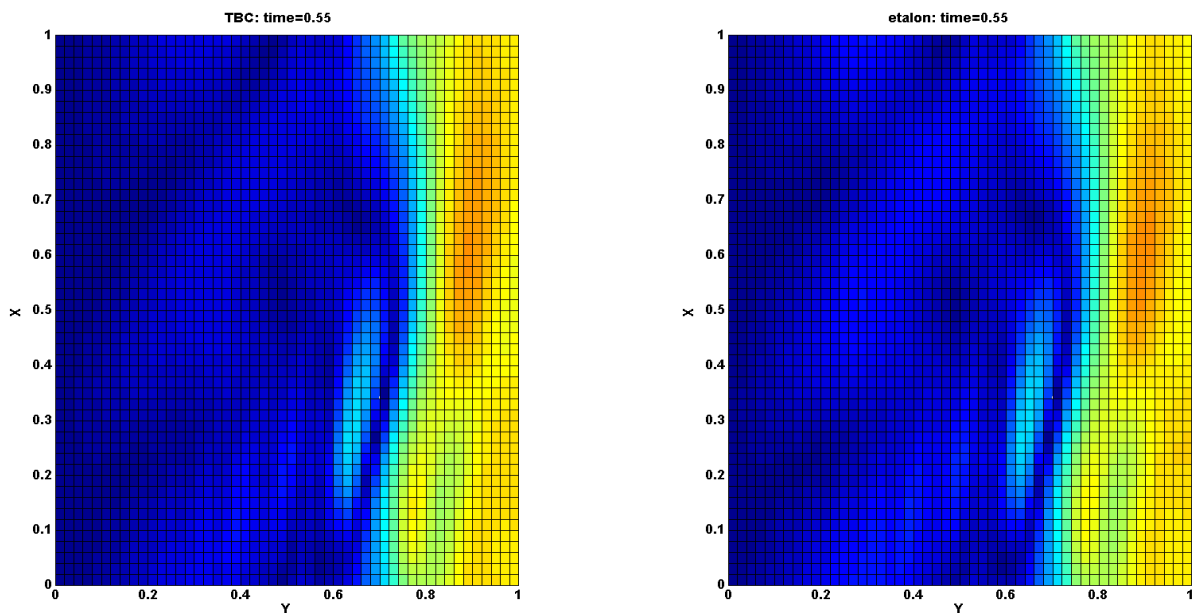


Рис. 16. Поля $|\vec{u}_{TBC}|$ (слева) и $|\vec{u}_{ref}|$ (справа) для $t=0.55$ сек

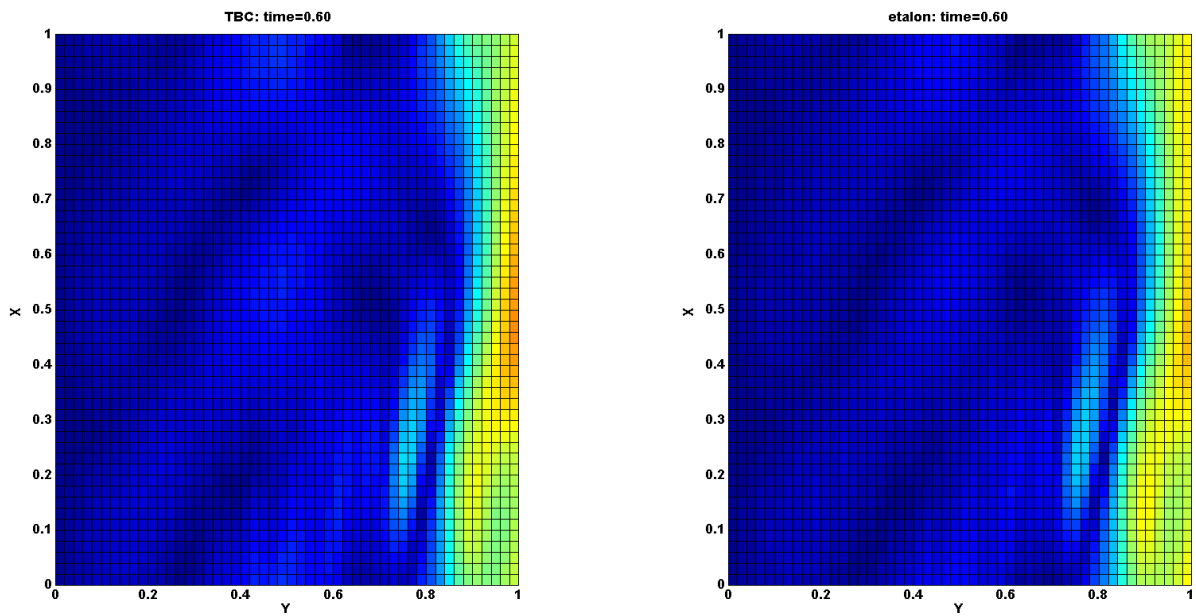


Рис. 17. Поля $|\vec{u}_{TBC}|$ (слева) и $|\vec{u}_{ref}|$ (справа) для $t=0.60$ сек

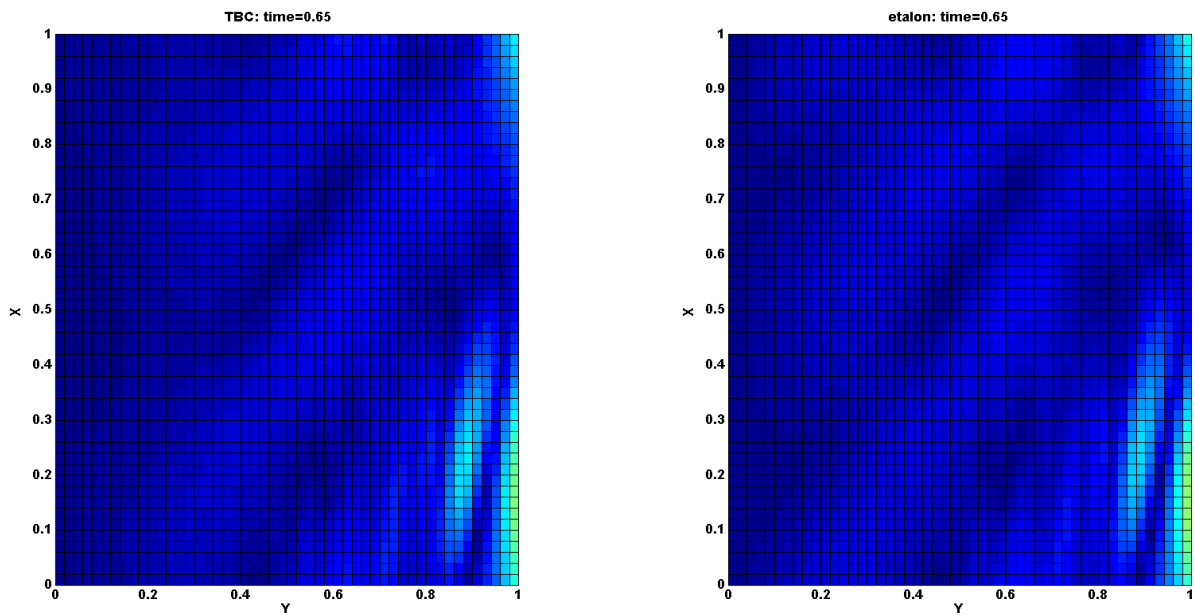


Рис. 18. Поля $|\vec{u}_{TBC}|$ (слева) и $|\vec{u}_{ref}|$ (справа) для $t=0.65$ сек

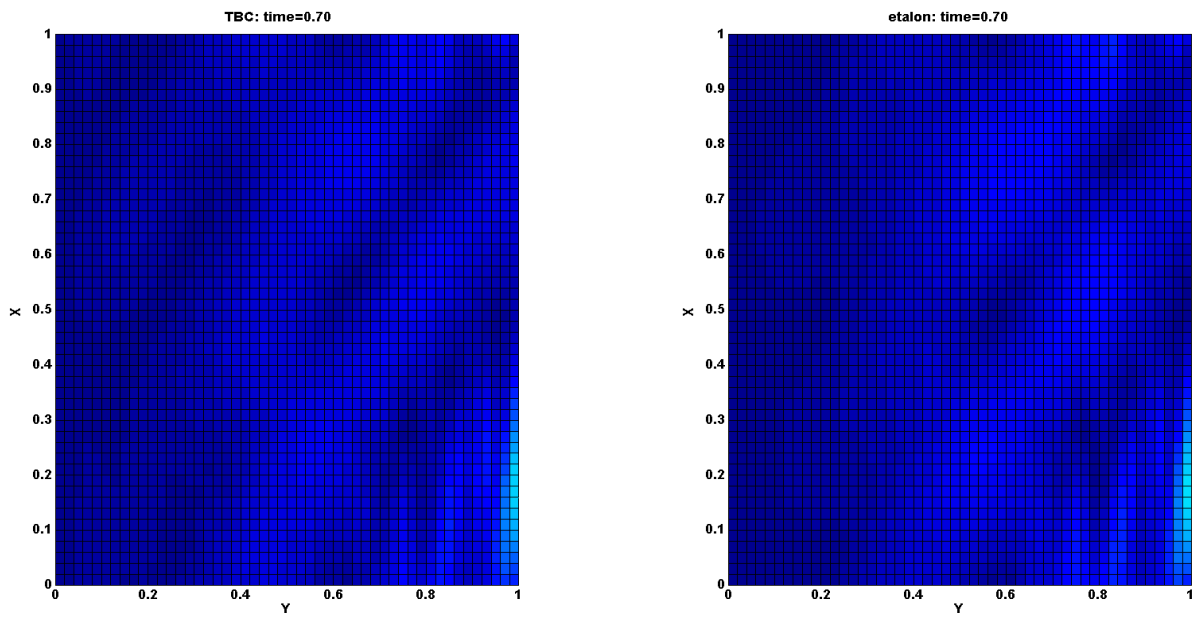


Рис. 19. Поля $|\vec{u}_{TBC}|$ (слева) и $|\vec{u}_{ref}|$ (справа) для $t=0.70$ сек

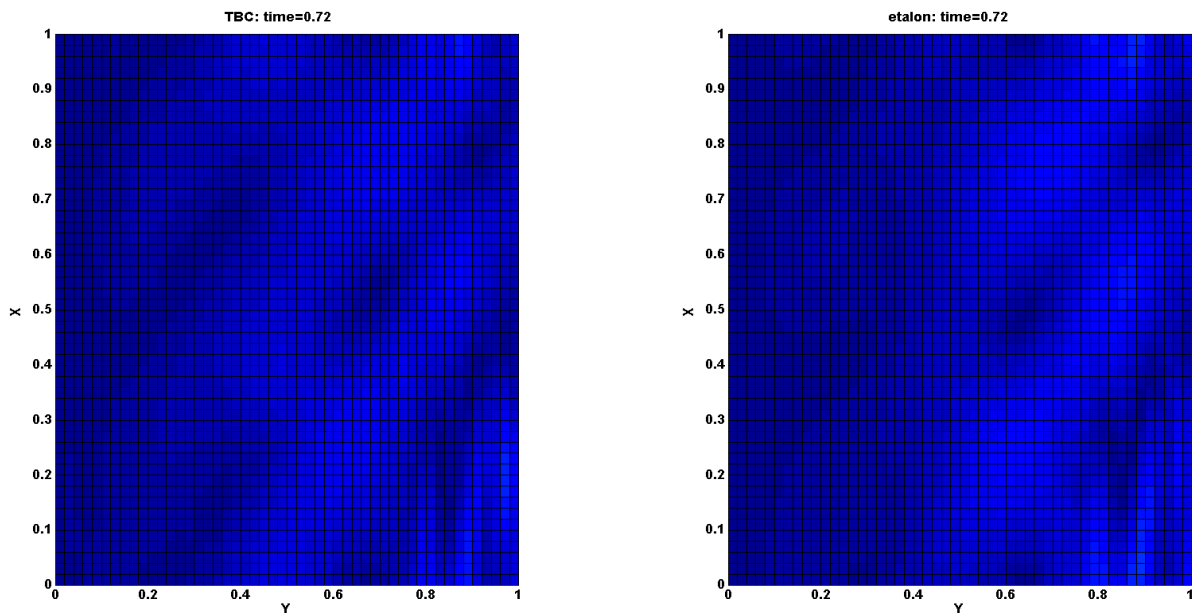


Рис. 20. Поля $|\vec{u}_{TBC}|$ (слева) и $|\vec{u}_{ref}|$ (справа) для $t=0.72$ сек