



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 172 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Жуков В.Т., Новикова Н.Д.,
Феодоритова О.Б.**

Чебышевские итерации с
адаптивным уточнением
нижней границы спектра
матрицы

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Чебышевские итерации с адаптивным уточнением нижней границы спектра матрицы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 172. 32 с. doi:[10.20948/prepr-2018-172](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-172)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-172>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

В.Т. Жуков, Н.Д. Новикова, О.Б. Феодоритова

**Чебышевские итерации
с адаптивным уточнением
нижней границы спектра матрицы**

Москва — 2018

Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б.

Чебышевские итерации с адаптивным уточнением нижней границы спектра матрицы

Построен адаптивный чебышевский итерационный метод для численного решения систем линейных уравнений с симметричной положительно определенной матрицей. В адаптивном методе неизвестная нижняя граница спектра матрицы уточняется в цикле внешних итераций, а в качестве верхней границы берется ее оценка по теореме Гершгорина. Построенный алгоритм обеспечивает сходимость итераций с вычислительными затратами, близкими к затратам чебышевского метода с заданием точных границ спектра.

Ключевые слова: системы линейных уравнений, чебышевские итерации, адаптация

Victor Timofeevich Zhukov, Natalia Dmitrievna Novikova, Olga Borisovna Feodoritova

Chebyshev iterations based on adaptive update of the lower bound of the spectrum of the matrix

For numerical solution of symmetric systems of linear equations with a positive-definite matrix an adaptive Chebyshev iterative method is constructed. In this method, the unknown lower bound of the spectrum of the matrix is refined in a cycle of the outer iterations; the upper bound is taken by the Gershgorin theorem. Such procedure ensures the convergence of the iterations with computational costs close to the costs of the Chebyshev method, which uses the exact bounds of the spectrum of the matrix.

Key words: systems of linear equations, Chebyshev iteration method, adaptive procedures

Исследование выполнено за счёт госзадания Института (тема № 2).

Оглавление

1. Введение.....	3
2. Стандартный чебышевский метод.....	5
3. Историческая справка о создании чебышевского метода.....	8
4. Процедура адаптации к нижней границе спектра.....	10
5. Численные эксперименты.....	17
6. Заключение.....	29
Библиографический список.....	30

1. Введение

В данной работе приведен вариант двухслойного чебышевского итерационного метода для решения систем линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно определенной матрицей. Для таких задач чебышевский метод может быть конкурентноспособным по сравнению с другими известными методами, особенно при параллельной реализации. Внимание к чебышевскому методу напрямую связано с развитием ультра-параллельных вычислений [1–6].

Недостатком чебышевского метода, ограничивающим его применение в вычислительной практике, называют необходимость априорной информации о границах спектра матрицы. Верхняя граница спектра может быть оценена по известной теореме Гершгорина [7], но хорошая оценка нижней границы спектра в общем случае отсутствует. Предлагаемый подход позволяет оценивать нижнюю границу спектра матрицы в процессе специально организованных итераций в рамках стандартного чебышевского метода.

Наш первоначальный интерес к этому методу связан с эффективностью его использования в параллельном варианте многосеточного метода. В течение ряда лет нами развивался вариант классического геометрического многосеточного метода применительно к задачам диффузии с анизотропными разрывными коэффициентами для вычислительных систем с экстремальным параллелизмом [1–3]. В процессе этой работы нами показана эффективность и необходимость применения процедуры адаптации при использовании полиномиальных сглаживателей на основе оптимальных чебышевских многочленов. В [4] этот же подход применен нами в алгебраическом многосеточном методе.

В геометрическом и алгебраическом многосеточных методах вычислительный процесс обычно начинается на самом подробном дискретном уровне (сетке), затем производится редукция задачи на следующий уровень, и так далее до самого грубого уровня. На самом грубом уровне решается система

линейных уравнений относительно небольшого размера, а затем производится интерполяция обратно на предыдущий уровень, и так до самого подробного уровня. Для сглаживания невязки на каждом многосеточном уровне, кроме самого грубого, нами опционально используется явный чебышевский метод, в котором на каждой многосеточной итерации уточняется нужная оценка с помощью процедуры адаптации, описанной в данной работе. Особенность алгоритма адаптации в случае сглаживателя состоит в том, что ищется оценка нижней границы спектра на подпространстве «негладких» функций. Это подпространство определено неявно взаимодействием сглаживания и грубосеточной коррекции: предполагается, что компоненты невязки, отвечающие подпространству «гладких» функций, эффективно подавляются грубосеточной коррекцией.

На самом грубом уровне для решения системы линейных уравнений нами также используется явный чебышевский метод, а так как такая система решается на каждой итерации многосеточного метода, то оценка нижней границы спектра встроена в этот итерационный процесс.

Указанная организация итераций многосеточного метода позволяет находить нужные оценки в ходе многосеточных итераций.

Такая же ситуация возникает и при многократном решении системы линейных уравнений с разными правыми частями, при использовании чебышевских итераций для предобусловливания в методе подпространств Крылова. Предлагаемый подход может быть применен и в процессе однократного решения линейной системы с симметричной положительно определенной матрицей, так как вычислительные затраты на адаптацию относительно невелики.

Рассматриваемая в данной работе процедура адаптации чебышевского метода достаточно проста и эффективна. Весь процесс решения разбивается на циклы – назовем их циклами адаптации. В многосеточном методе, например, такой цикл совпадает с одним циклом (итерацией) самого метода. В процессе

каждого цикла адаптации выполняется стандартный чебышевский метод с предписанной точностью, которая обычно существенно меньше заданной точности решения исходной линейной системы. Для начала адаптационного процесса предполагается, что границы спектра каким-то образом грубо оценены. Например, для получения первоначальной оценки минимального собственного значения можно использовать отношение Рэля-Ритца на достаточно произвольно выбранном векторе. Максимальное собственное значение оценивается по известной теореме Гершгорина. В конце цикла адаптации нижняя граница спектра уточняется на основе анализа норм начальной и результирующей невязок.

2. Стандартный чебышевский метод

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Au = g, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad u, g \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

с симметричной положительно определенной матрицей, спектр которой лежит на отрезке $[\lambda_{min}; \lambda_{max}]$ вещественной оси, причем $\lambda_{min} > 0$. Здесь u – вектор неизвестных, g – заданная правая часть.

В пространстве \mathbb{R}^n введено обычное евклидово скалярное произведение (\cdot, \cdot) и ассоциированная с ним норма $\|z\| = (z, z)^{1/2}$. Норма линейного оператора D , действующего из пространства \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n , определяется как $\|D\| = \max \|Dz\|$ при $\|z\| = 1$, и для самосопряженного оператора она равна максимальному по модулю собственному значению. Как правило, вместо матричной терминологии мы будем использовать операторную терминологию.

Запишем для системы (1) явный двухслойный итерационный метод

$$u_{k+1} = u_k + \tau_{k+1} (g - Au_k), \quad k = 0, 1, \dots, p-1, \quad (2)$$

где u_0 – заданное начальное приближение, k – номер итерации, p – заданное число итераций.

Рассмотрим чебышевский метод с оптимальным набором итерационных параметров $\{\tau_k, k=1, \dots, p\}$ (см. [8]). Итерирующий оператор метода $F_p(A)$ переводит начальное приближение u_0 и ошибку $z_0 = u - u_0$ соответственно в приближение u_p и ошибку $z_p = u - u_p$ согласно формуле $u_p = F_p(A) u_0 + [I - F_p(A)] A^{-1} g$, $z_p = F_p(A) z_0$, I – тождественный оператор.

Операторный многочлен $F_p(A)$ определяется как произведение p линейных сомножителей

$$F_p(A) = (I - \tau_p A) \dots (I - \tau_2 A) (I - \tau_1 A). \quad (3)$$

Выбор в (2) оптимальных параметров $\{\tau_k\}$ связан с построением алгебраического многочлена F_p степени p , наименее уклоняющегося от нуля на отрезке $[\lambda_{min}; \lambda_{max}]$ локализации спектра оператора A и удовлетворяющего условию нормировки $F_p(0) = 1$ в силу (3).

Задача построения многочлена степени p , наименее уклоняющегося от нуля на стандартном отрезке $[-1; 1]$, решена в [9] – это многочлен Чебышева первого рода $T_p(x)$. Его конструкция хорошо известна:

$$T_p(x) = \begin{cases} \cos(\operatorname{arccos} x), & |x| \leq 1, \\ \operatorname{ch}(\operatorname{arch} x), & |x| > 1. \end{cases} \quad (4)$$

Многочлен $T_p(x)$ имеет наименьшую норму в пространстве функций $C[-1; 1]$ среди всех алгебраических многочленов степени p со старшим коэффициентом, равным 2^{p-1} . Ясно, что $|T_p(x)| \leq 1$ при $|x| \leq 1$. При $|x| > 1$ запись многочлена в виде $T_p(x) = \operatorname{ch}(\operatorname{arch} x)$ верна с учетом равенства $T_p(-x) = (-1)^p T_p(x)$. На гиперболических ветвях (при $|x| > 1$) функция $|T_p(x)|$ является строго монотонной. Это свойство используется нами при построении процедуры адаптации.

С учетом условия нормировки $F_p(0)=1$ многочлен F_p на спектральном отрезке $[\lambda_{min}; \lambda_{max}]$ выражается через многочлен Чебышева T_p на стандартном отрезке $[-1; 1]$ следующим образом

$$F_p(\lambda) = \frac{T_p(x)}{T_p(x_0)}, \quad x_0 = \frac{1+\eta}{1-\eta} > 1, \quad \eta = \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}.$$

Величина η является обратной к числу обусловленности матрицы A .

При выводе этих формул использована линейная замена

$$\lambda = 0.5[(\lambda_{max} + \lambda_{min}) - (\lambda_{max} - \lambda_{min})x], \quad (5)$$

которая переводит отрезок $[-1; 1]$ вещественной оси в отрезок $[\lambda_{min}; \lambda_{max}]$, причем точка $x=1$ переходит в точку $\lambda = \lambda_{min}$. При этом отображении точке нормировки $\lambda_0 = 0$ соответствует точка $x_0 = x(\lambda_0) > 1$, где $x = x(\lambda)$ – обратная функция к (5). Обозначим

$$q_p = \frac{1}{T_p(x_0)} = \frac{1}{ch(p \operatorname{arch} x_0)}.$$

Тогда согласно [8] многочлен $F_p(\lambda)$ можно записать в виде

$$F_p(\lambda) = q_p T_p(x), \quad \text{где} \quad q_p = \frac{2\rho_1^p}{1+\rho_1^{2p}}, \quad \rho_1 = \frac{1+\sqrt{\eta}}{1-\sqrt{\eta}}. \quad (6)$$

Оптимальные параметры τ_k определяются нулями

$$\beta_k \in K_p = \left\{ \cos \frac{2i-1}{2p} \pi, \quad i = 1, \dots, p \right\} \quad (7)$$

многочлена T_p по формуле

$$\tau_k^{-1} = \frac{\lambda_{max} + \lambda_{min}}{2} + \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{2} \beta_k, \quad k = 1, \dots, p, \quad (8)$$

причем нули β_k упорядочены для обеспечения устойчивости [8], т.е. из множества K_p нули берутся не в естественном порядке, а в некотором другом.

Для уменьшения нормы начальной невязки $r_0 = g - Au_0$ в заданное число $1/\varepsilon$

раз, т.е. для достижения неравенства $\|g - Au_p\| < \varepsilon \|g - Au_0\|$ требуется сделать $p = p(\varepsilon, \eta)$ итераций, где число p вычисляется по ε и η с округлением до ближайшего большего целого по формуле

$$p = p(\varepsilon, \eta) \approx \ln\left(\varepsilon^{-1} + \sqrt{\varepsilon^{-2} - 1}\right) / \ln\left(\frac{1 + \sqrt{\eta}}{1 - \sqrt{\eta}}\right). \quad (9)$$

После работы итерационного алгоритма для невязки $r_p = g - Au_p$ получаем соотношение $r_p = F_p(A)r_0$. Применив к обеим частям этого равенства оператор A^{-1} , получим, что так же ведет себя и погрешность приближенного решения $z_p = u_p - u$: $z_p = F_p(A)z_0$. Это значит, что компоненты невязки и ошибки уменьшаются в $\varepsilon^{-1} > 1$ раз равномерно по спектру $[\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$, а демпфирующая функция есть $F_p(\lambda)$. Эта функция принимает значения $\pm\varepsilon$ в точках экстремума многочлена на отрезке $[\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$ и растет вне этого отрезка (см. (4)). На дискретном уровне сказанное означает, что если начальную невязку разложить по системе собственных функций оператора A , то в конечной невязке амплитуда собственной функции, отвечающей некоторому собственному значению λ , умножится на $F_p(\lambda)$.

3. Историческая справка о создании чебышевского метода

Сделаем краткий исторический экскурс, опираясь на работы Р.П. Федоренко, О.В. Локуциевского, В.И. Лебедева, стоявших у истоков современной вычислительной математики. Часть приводимых ниже сведений вошла в англоязычную публикацию [10].

Если в итерационном процессе (2) взять не переменный набор параметров τ_k , а постоянное значение $\tau_k = 2 / (\lambda_{\min} + \lambda_{\max})$, то получим известный метод простой итерации. Он крайне медленно сходится на краях спектра и хорошо сходится в его средней части. Ричардсоном в работе [11], опубликованной в 1910 году, был предложен способ ускорения сходимости. В этом способе

итерационный процесс имел вид (2), но выбор параметров не являлся оптимальным, хотя и был связан со свойствами некоторых алгебраических многочленов. Требования оптимальности обеспечивают полиномы Чебышева, но в [11] они не были приведены, несмотря на их широкую к тому времени известность. Оптимальные многочлены были построены П.Л. Чебышевым уже в середине XIX века, (см. [9]), затем исследования были продолжены его учениками Е.И. Золотаревым и А.А. Марковым.

В первой половине 20 века идея использования полиномов Чебышева для решения систем линейных уравнений витала в воздухе часто обсуждалась на семинарах, но первые публикации появились в 1950 году. Применение корней многочленов Чебышева для определения итерационных параметров предложили независимо друг от друга М.К. Гавурин [12] и Фландерс в соавторстве с Шортли [13]. В последней работе показано, как использовать чебышевские полиномы при расчете собственных значений, но затем позднее Шортли в [14] использовал чебышевские полиномы при решении системы линейных уравнений. Следует отметить, что метод с оптимальными параметрами, выражающимися через нули чебышевского многочлена, открывался, переоткрывался и улучшался многими авторами. В процессе использования метода было обнаружено, что для не слишком малых степеней многочлена при использовании параметров в их естественном порядке проявляется вычислительная неустойчивость в результате роста ошибок округления в расчетах и в силу некоторых свойств нулей полиномов Чебышева, в частности сгущения нулей к границам спектра. Не останавливаясь на обсуждении причин неустойчивости чебышевского итерационного процесса, заметим, что для устранения неустойчивости необходимо переставить итерационные параметры в определенном порядке. На необходимость изменить порядок параметров впервые указано Янгом в [15] в 1954 году. Точная постановка задачи о переупорядочивании параметров и строгое решение были получены уже в 1970-е годы В. И. Лебедевым и В. Н. Финогеновым [16],

А.А. Самарским и Е.С. Николаевым [17]. Определенные правила упорядочивания предложил в 1958 году Ю. Чжао-дин [18–20], защитивший в том же году кандидатскую диссертацию на механико-математическом факультете МГУ. Он проводил расчеты на ЭВМ Стрела и в расчетах показал эффект найденного им упорядочивания. Его статью [20] в Доклады АН СССР представил С.Л. Соболев, и, судя по [21], Ю. Чжао-дин тесно общался с Л.А. Люстерником и В.К. Саулевым.

Начиная с 1980-х годов с возникновением параллельных компьютеров появился интерес к использованию чебышевских параметров в методах решения нестационарных задач [22–25], связанных с моделированием эволюционных процессов.

4. Процедура адаптации к нижней границе спектра

Как известно, для успешного применения чебышевского метода нужно знать границы спектра $[\lambda_{min}; \lambda_{max}]$. Обычно хорошая оценка нижней границы спектра λ_{min} оператора отсутствует. Мы предлагаем использовать автоматическую процедуру итерационного уточнения λ_{min} . Анонсированная в [26] процедура уточнения нижней границы основана на другом принципе.

В дальнейшем ниже в тексте под λ_{min} и λ_{max} будем подразумевать точные (обычно неизвестные) нижнюю и верхнюю границы спектра, а под λ_{min}^* и λ_{max}^* — их приближенные оценки. Известно, что если λ_{min}^* и λ_{max}^* являются приближениями для λ_{min} и λ_{max} соответственно снизу и сверху, т.е.

$$0 < \lambda_{min}^* \leq \lambda_{min} \leq \lambda_{max} \leq \lambda_{max}^*,$$

то чебышевский метод с заданием границ λ_{min}^* и λ_{max}^* сходится, но скорость сходимости может уменьшаться. Согласно [8] (с.328) для сходимости итераций с неточным заданием границ спектра необходимое и достаточное условие имеет вид

$$\lambda_{max} < \lambda_{max}^* + \lambda_{min}^*, \quad 0 < \lambda_{min}^*. \quad (10)$$

В процедуре адаптации будем предполагать выполнение соотношений

$$0 < \lambda_{min} \leq \lambda_{min}^* \leq \lambda_{max} \leq \lambda_{max}^*. \quad (11)$$

В качестве λ_{max}^* возьмем оценку λ_{max} сверху, получаемую для максимального собственного значения оператора по теореме Гершгорина о кругах [7]. Условие (11) гарантирует сходимость итераций (2) с упорядоченным набором параметров (7), (8), так как обеспечивает выполнение условия (10).

Оценку λ_{min}^* будем уточнять в ходе внешнего итерационного процесса (называемого циклом адаптации). Обозначим через λ_{min}^* текущее приближенное значение, а через λ_{new}^* – новое приближение к точному значению λ_{min} . Для адаптации нам необходимо задать начальное значение $\lambda_{min}^* \geq \lambda_{min}$. Заметим, что λ_{min}^* можно получить, применяя степенной метод [27, 28] к оператору $B = I - (1/\lambda_{max}^*)A$. Найдя максимальное собственное значение μ_{max} этого оператора, получим $\lambda_{min}^* = (1 - \mu_{max})\lambda_{max}^*$. Но мы используем другую процедуру, естественным образом встроенную в итерационный процесс, т.е. не требующую такой предварительной части. Чтобы избежать эмпирического произвола, мы берем в качестве начального приближения отношение Рэлея–Ритца $\lambda_{min}^* = \lambda_{RR} = (Av, v)/(v, v)$ [29] с произвольной ненулевой функцией v . Мы для определенности берем в качестве v правую часть g исходной системы уравнений (1). Согласно известному свойству отношения Рэлея–Ритца требуемое соотношение $\lambda_{min}^* \geq \lambda_{min}$ выполнено.

Предлагаемая процедура оценки нижней границы спектра основана на двух предположениях. Во-первых, верхняя граница спектра λ_{max}^* является оценкой сверху максимального собственного значения оператора A . В случае определения λ_{max}^* по теореме Гершгорина это предположение верно. Тогда выполнены условия (11) и (10). Во-вторых, в ходе однократного применения итерирующего оператора $F_p(A)$ к невязке r_0 в результирующей невязке r_p

ведущей становится собственная мода, отвечающая точному собственному значению λ_{min} . Другими словами, для достаточно больших значений p основные компоненты ошибки лежат в инвариантном подпространстве, ассоциированном с собственными значениями оператора A , принадлежащими отрезку $[\lambda_{min}; \lambda_{min}^*]$.

Алгоритм адаптации имеет следующий вид. Пусть нам нужно решить систему (1) с заданной точностью ε_{tot} . Зададимся много меньшей точностью $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_{tot}$. Характерными являются, например, значения $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\varepsilon_{tot} = 10^{-10}$.

Выполняя один шаг чебышевского алгоритма при заданных входных данных λ_{min}^* , λ_{max}^* , ε_1 , найдем

$$\delta = \|r_p\| / \|r_0\|, \quad r_p = F_p(A)r_0. \quad (12)$$

Здесь δ – реальная точность, достигнутая в текущем цикле адаптации, r_0 и r_p – начальная и конечная невязки. Заметим, что если $\lambda_{min}^* \leq \lambda_{min}$, то точность ε_1 гарантированно достигается.

Допустим, что значение δ превышает заданную точность ε_1 . Тогда максимальное собственное значение $\lambda_{max}(F_p)$ операторного многочлена $F_p(A)$ на отрезке $[\lambda_{min}; \lambda_{max}]$ достигается при $\lambda = \lambda_{min}$: $\lambda_{max}(F_p) = F_p(\lambda_{min})$. Следовательно, оно может быть приближенно найдено степенным методом [27, 28]. Поэтому в качестве приближения к $\lambda_{max}(F_p)$ мы возьмем полученное отношение $\delta = \|r_p\| / \|r_0\|$. По найденному значению $\lambda_{max}(F_p)$ находим новое приближение λ_{new}^* к λ_{min} (см. ниже) и полагаем $\lambda_{min}^* = \lambda_{new}^*$. Если точность ε_{tot} не достигнута, то переходим к новому циклу адаптации с новыми данными λ_{min}^* , λ_{max}^* , ε_1 , выполняя шаг вида (12). В пользу такого варианта степенного метода говорит следующее важное свойство оптимальных многочленов Чебышева: вне сегмента оптимальности многочлены Чебышева обладают в

некотором смысле противоположным экстремальным свойством, а именно, они уклоняются от нуля максимально по сравнению со всеми многочленами, удовлетворяющими заданной нормировке на сегменте оптимальности [30].

Если на k -ом цикле адаптации выполнено $\delta = \delta_k \leq \varepsilon_1$, то мы выполняем новый цикл адаптации опционально либо со старыми данными λ_{min}^* , λ_{max}^* , ε_1 , либо изменяем точность, беря новое значение $\varepsilon_1 = \varepsilon_{tot} / (\delta_1 \times \dots \times \delta_k)$. Условие $\delta_k \leq \varepsilon_1$ в общем случае означает, что оценка нижней границы спектра является удовлетворительной, следовательно, точность ε_{tot} с новым значением ε_1 может быть достигнута на следующем цикле адаптации.

Конечно, благодаря подбору начальных данных, например, задавая в качестве начального приближения точное решение, возмущенное высокочастотной модой с большой амплитудой, можно достигнуть условия $\delta_k \leq \varepsilon_1$ при существенно переоцененном значении λ_{min}^* . Но мы строим алгоритм адаптации не для нахождения точного значения λ_{min} , поэтому в конкретной задаче и такая оценка может считаться удовлетворительной.

Обсудим детально, как найти по полученному значению δ новое приближение для λ_{min}^* . Ясно, что значение демпфирующей функции $F_p(\lambda) = \delta$ достигается на гиперболической ветви многочлена, т.е. при $0 < \lambda < \lambda_{min}^*$, что соответствует интервалу $x > 1$ для стандартного многочлена $T_p(x)$ (4). Тогда единственный корень алгебраического уравнения $F_p(\lambda) - \delta = 0$ при $\lambda < \lambda_{min}^*$ и является новым значением λ_{min}^{new} .

Для наглядного объяснения алгоритма рассмотрим в качестве оператора A дискретный оператор Лапласа в единичном кубе на кубической сетке с шагом h с нулевыми граничными значениями.

Минимальное и максимальное собственные значения в данном случае известны [8]:

$$\lambda_{min} = \frac{12}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2} \approx 3\pi^2, \quad \lambda_{max} = \frac{12}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2} \approx \frac{12}{h^2}.$$

Линейным преобразованием $\lambda' = \lambda * h^2$ отобразим отрезок $[\lambda_{min}; \lambda_{max}]$ в нормированный отрезок $[h^2\lambda_{min}; h^2\lambda_{max}] \approx [0; 12]$. Демпфирующая функция $F_p(\lambda)$ на этом отрезке показана на рис. 1. Для иллюстрации процедуры уточнения нижней границы спектра предположим, что в качестве начального приближения λ_{min}^* и относительной точности ε_1 взяты значения $\lambda_{min}^* = 0.25/h^2 \approx 0.02\lambda_{max}$ и $\varepsilon_1 = 0.25$ соответственно. Выбор этих значений связан с желанием получить наглядную графическую интерпретацию. При указанных входных данных для чебышевского многочлена в соответствии с (9) получаем, что его степень $p = 7$.

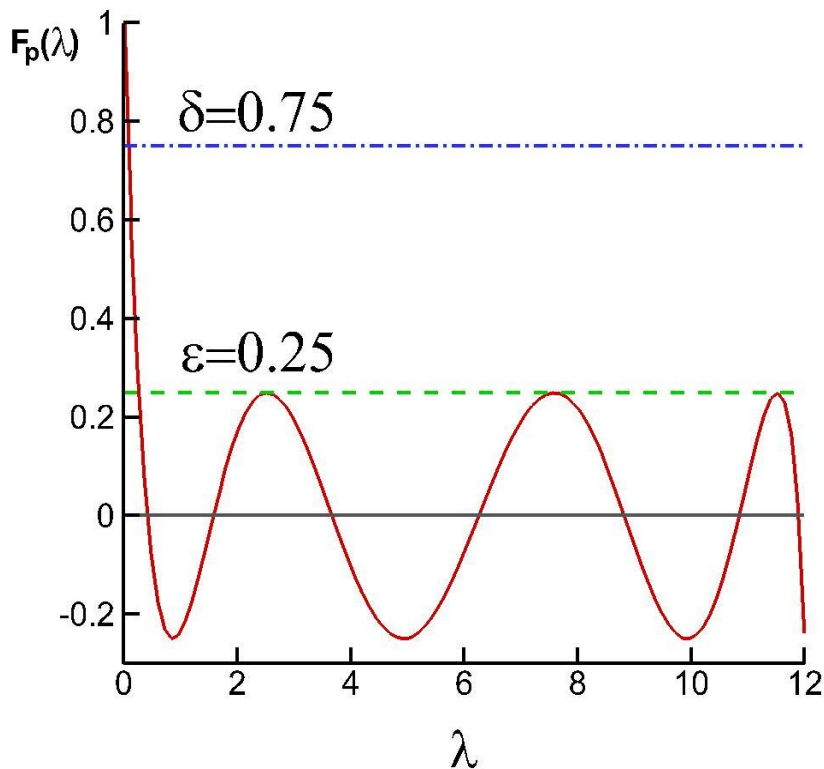


Рис. 1. Демпфирующая функция $F_p(\lambda)$

На рис. 2 показан график функции $F_p(\lambda)$ на начальном участке $[0; 1.5]$ нормированного спектра. Заданному значению λ_{min}^* на рис. 2 отвечает точка D с координатами (d, ε) , где $d = \lambda_{min}^*$.

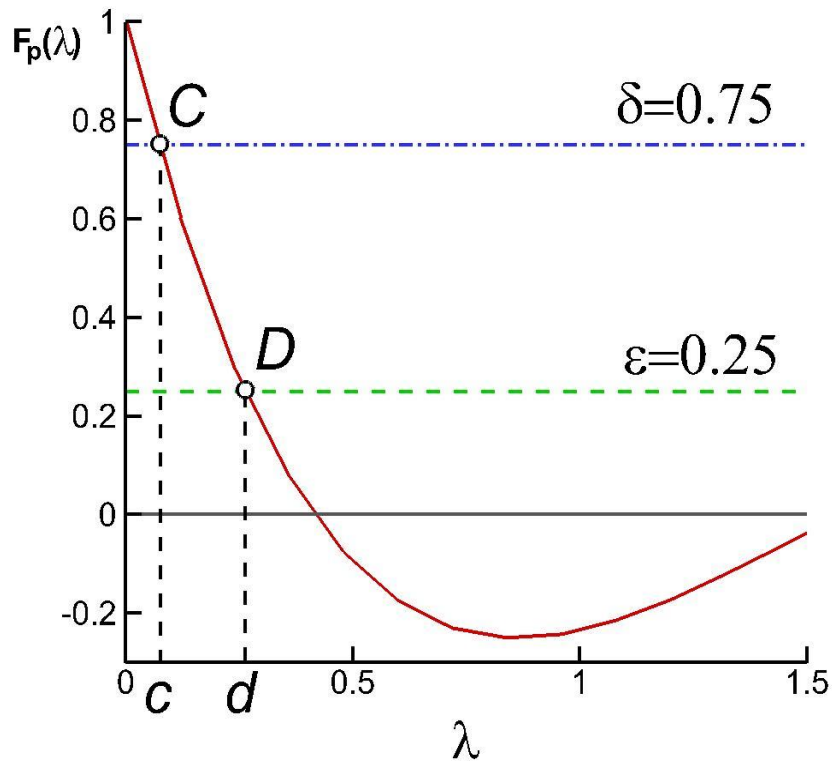


Рис. 2. Демпфирующая функция $F_p(\lambda)$ на начальном участке спектра $[0; 1.5]$

Допустим, что в конце одного шага адаптации вместо заданной точности $\varepsilon_1 = 0.25$ достигнута указанная на рисунке точность $\delta = 0.75$, что является следствием грубой оценки нижней границы спектра. Значение функции $F_p(\lambda) = \delta$ достигается в точке C с абсциссой $\lambda^* = c$. Именно это значение принимается за новое приближение к минимальному собственному значению.

Нетрудно формализовать предложенную иллюстрацию в терминах стандартного полинома Чебышева T_p . Нахождение корня уравнения $F_p(\lambda) = \delta$ на интервале $[0; \lambda_{min}^*]$ равносильно нахождению единственного корня x^*

уравнения $T_p(x^*) = \delta/q_p$ на интервале $[1; x_0]$. По построению $T_p(1) = 1$ и на отрезке $[1; x_0]$ функция $T_p(x)$ монотонно возрастает. Согласно (6) $T_p(x_0) = 1/q_p$, причем это значение больше, чем δ/q_p . Тогда на $[1; x_0]$ существует точка x^* , такая, что $T_p(x^*) = \delta/q_p \equiv y_1$. Точка x^* лежит на гиперболической монотонной ветви многочлена $T_p(x)$. Решая уравнение $ch(p \operatorname{arch} x) = y_1$, находим $x^* = ch(y_2/p)$, где $y_2 = \operatorname{arch}(y_1)$, или, избегая вычислений обратной гиперболической функции, $y_2 = \ln(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 1})$. Новое приближенное значение λ_{min}^* получаем, возвращаясь от переменной x к переменной λ .

Окончательно получаем следующие формулы для вычисления нового приближения к λ_{min} по входным данным λ_{min}^* , λ_{max}^* , ε_1 и полученной в расчете одного цикла точности δ :

1. $\eta = \frac{\lambda_{min}^*}{\lambda_{max}^*}$, $\rho_1 = \frac{1 + \sqrt{\eta}}{1 - \sqrt{\eta}}$, $q_p = \frac{2\rho_1^p}{1 + \rho_1^{2p}}$,
2. $y_1 = \frac{\delta}{q_p}$, $y_2 = \ln(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 1})$, $x^* = ch(y_2/p)$,
3. $\lambda_{new}^* = \frac{1 + \eta}{2} - \frac{1 - \eta}{2} x^*$, $\lambda_{min}^* = \lambda_{new}^*$.

Как уже говорилось, изложенная процедура является степенным методом нахождения максимального собственного значения оператора $F_p(A)$. В расчетах подтверждается успех этой процедуры, что объясняется быстрым ростом чебышевского многочлена $F_p(A)$ на гиперболических ветвях. Упомянутый выше быстрый рост хорошо виден на рис. 2; ординаты точек С и D разделены заметно сильнее, чем их абсциссы. Нетрудно привести строгие оценки роста многочлена $T_p(x)$ на гиперболических ветвях, но такое исследование выходит за рамки данной работы.

5. Численные эксперименты

Рассмотрим возможности предложенного метода на примере задачи анизотропной диффузии с разрывными коэффициентами [31]. Область расчета – куб $\Omega = [0; 1]^3$, разделенный на четыре подобласти Ω_i , $i = 1, \dots, 4$ (см. рис. 3).

$\Omega_1 = \{(x, y, z) \in \Omega; y \leq 0.5, z \leq 0.5\}$	$\Omega_2 = \{(x, y, z) \in \Omega; y > 0.5, z \leq 0.5\}$
$\Omega_3 = \{(x, y, z) \in \Omega; y > 0.5, z > 0.5\}$	$\Omega_4 = \{(x, y, z) \in \Omega; y \leq 0.5, z > 0.5\}$

Диагональные элементы тензора диффузии $k(x, y, z) = \text{diag}(k_x, k_y, k_z)$ терпят разрыв на плоскостях $y = 0.5$ и $z = 0.5$, разбивающих куб на четыре подобласти Ω_i , $i = 1, \dots, 4$, и постоянны в каждой из них:

$$k_x(x, y, z) = \{k_x^i, i = 1, \dots, 4\}; k_x^1 = k_x^2 = k_x^3 = k_x^4 = 1,$$

$$k_y(x, y, z) = \{k_y^i, i = 1, \dots, 4\}; k_y^1 = 10, k_y^2 = 0.1, k_y^3 = 0.01, k_y^4 = 100,$$

$$k_z(x, y, z) = \{k_z^i, i = 1, \dots, 4\}; k_z^1 = 0.01, k_z^2 = 100, k_z^3 = 10, k_z^4 = 0.1.$$

Точное решение $u(x, y, z)$ в каждой подобласти Ω_i , $i = 1, \dots, 4$ имеет вид

$$u(x, y, z) = \alpha_i \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \sin(2\pi z). \quad (13)$$

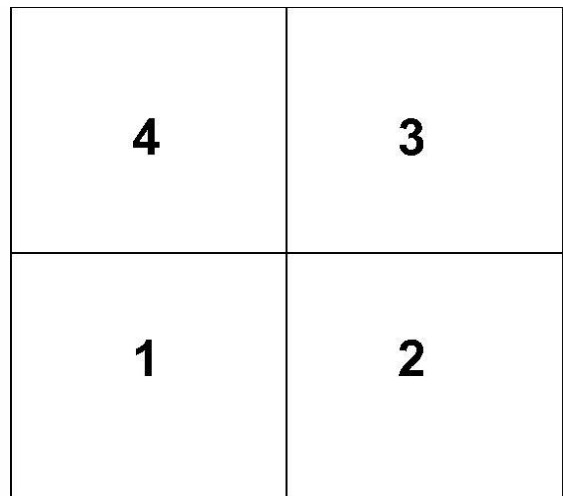
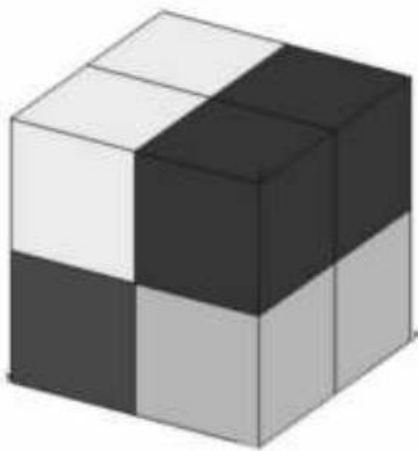


Рис. 3. Разбиение куба и нумерация подобластей в сечении Oyz

Условия непрерывности решения и потока на поверхностях разрыва коэффициентов обеспечиваются при выборе в указанных областях значений $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 10$, $\alpha_3 = 100$, $\alpha_4 = 0.01$. На внешних границах области поставлены краевые условия Дирихле, которые, как и правая часть уравнения, определяются из точного решения.

Возьмем в области Ω декартову сетку $\Omega_h = \{(x, y, z)_n \in \Omega, 0 \leq n \leq N\}$ с сеточной границей Γ_h . Пусть сетка является равномерной по каждому координатному направлению с числом узлов $N = N_x \times N_y \times N_z$. Рассмотрим стандартную схему, построенную методом конечных объемов. Свяжем с каждым узлом сетки Ω_h дуальную ячейку в виде прямого параллелепипеда, грани которого проходят через середины ребер сетки Ω_h . Обозначим объемы дуальных ячеек как V_n , $0 \leq n \leq N$.

Схему вида $A_h u_h = g_h$ записываем на основе закона сохранения, интегрируя исходное уравнение по всем дуальным ячейкам, за исключением ячеек, у которых вершины лежат на границе Γ_h и в них записано краевое условие Дирихле. В итоге получаем систему линейных уравнений вида (1) с самосопряженным положительно определенным оператором $A = A_h$ и правой частью $g = g_h$.

Скалярное произведение в пространстве функций U_h , заданных на сетке Ω_h (и обращающихся в нуль в узлах Γ_h с условием Дирихле), вводится стандартным образом: $(u, w) = \sum u_n w_n V_n$, где сумма берется по всем узлам сетки. Это скалярное произведение определяет сеточную норму.

Коэффициенты уравнения диффузии ограничены снизу и сверху величинами $k_{\min} = 0.01$, $k_{\max} = 100$ соответственно. В качестве априорной оценки точного минимального значения λ_{\min} оператора A можно взять величину (см., например, [8])

$$\lambda_{\min}^* = 8k_{\min} \left(1/l_x^2 + 1/l_y^2 + 1/l_z^2 \right),$$

что приводит в данном конкретном случае к оценке $\lambda_{min}^* = 0.24$. Можно взять более точную оценку

$$\lambda_{min}^* = 8 \left(\min k_x(x, y, z) / l_x^2 + \min k_y(x, y, z) / l_y^2 + \min k_z(x, y, z) / l_z^2 \right), \quad (14)$$

где минимум берется по всей сеточной области Ω_h . Здесь мы воспользовались сеточной природой оператора A в предположении его расщепления по координатным направлениям, записав оценку (14) для прямого параллелепипеда с ребрами l_x, l_y, l_z . Оценка (14) является неплохой оценкой снизу точного собственного значения λ_{min} . Забегая вперед, скажем, что в расчетах с адаптацией на последовательности измельчающихся сеток с числом узлов $N = 16^3, 32^3, 64^3, 128^3$ получено, что приближенные значения λ_{min}^* равны соответственно 138, 152, 164, 172. Поэтому условимся считать «точной» оценкой $\lambda_{min}^* = 140$. Небольшие различия в значениях λ_{min}^* на разных сетках и грубость априорной оценки (14) связаны с переменностью коэффициентов исходного дифференциального уравнения. Заметим, что оценка (14) дает $\lambda_{min}^* \approx 10$.

Зададим относительную точность расчета $\varepsilon_{tot} = 10^{-12}$. Вычислительные затраты будем оценивать полным числом итераций N_{iter}^{total} . Самая затратная часть алгоритма на каждой итерации состоит в вычислении невязки, что практически эквивалентно однократному применению оператора A к сеточной функции.

Приведем результаты решения поставленной задачи чебышевским итерационным методом в нескольких вариантах.

Расчет 1 демонстрирует результат решения стандартным чебышевским методом при «точном» значении $\lambda_{min}^* = 140$ и оценке λ_{max}^* по теореме Гершгорина. Выбранное значение λ_{min}^* близко к точному минимальному собственному числу λ_{min} (оно неизвестно, но в данном случае мы это значение подтвердили расчетом). Число итераций N_{iter}^{total} , затраченное на достижение

точности $\varepsilon_{tot} = 10^{-12}$, приведено в табл. 1. Как и ожидалось, с удвоением N_h происходит удвоение числа итераций.

Таблица 1

Число итераций N_{iter}^{total} . Расчет 1, без адаптации, $\lambda_{min}^* = 140$

Сетка, N_h^3	16^3	32^3	64^3	128^3
Число итераций, N_{iter}^{total}	386	771	1541	3082

Расчет 2 отличается от предыдущего заданием грубой оценки нижней границы спектра. В качестве минимального собственного числа выбрано заниженное значение $\lambda_{min}^* = 10$, полученное округлением величины (14). Число затраченных итераций для достижения точности $\varepsilon_{tot} = 10^{-12}$ в зависимости от размера сетки указано в табл. 2.

Использование в расчете 2 грубой априорной оценки $\lambda_{min}^* = 10$ приводит к четырехкратному росту вычислений, так как в соответствии с (9) число итераций приближенно прямо пропорционально величине $\sqrt{\lambda_{max}^* / \lambda_{min}^*}$.

Таблица 2

Число итераций N_{iter}^{total} . Расчет 2, без адаптации, $\lambda_{min}^* = 10$

Сетка, N_h^3	16^3	32^3	64^3	128^3
Число итераций, N_{iter}^{total}	1422	2883	5766	11531

В следующей серии расчетов 3 показано влияние на процедуру адаптации ее внутренних параметров – точности решения на каждом цикле адаптации ε_1 и начальной оценки λ_{min}^* . Для характеристики процесса сходимости вместо параметра λ_{min}^* удобно использовать величину, обратную числу обусловленности $\eta = \lambda_{min}^* / \lambda_{max}^*$.

Процедура адаптации состоит из двух вложенных циклов: на каждом внешнем цикле выполняется N_{iter}^{adapt} итераций внутреннего цикла, на котором задача решается с небольшой точностью ε_1 и находится новая уточненная нижняя граница спектра λ_{min}^* . Число N_{iter}^{adapt} определяется текущими значениями ε_1 , λ_{min}^* , λ_{max}^* . Внешний итерационный процесс завершается при достижении заданной точности $\varepsilon_{tot} = 10^{-12}$.

Сравним три варианта, отличающиеся точностью ε_1 и начальным значением относительной границы раздела спектра $\eta_0 = \lambda_{min}^* / \lambda_{max}^*$. Первый вариант характеризуется набором значений $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\eta_0 = 0.0166$. Во втором варианте нижняя граница спектра оценивается согласно отношению Рэлея-Ритца, т.е. взяты параметры $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\eta_0 = \eta_{RR}$. Значения отношения $\eta_0 = \eta_{RR}$ зависят от размера сетки и приведены в табл. 3.

Таблица 3

Серия расчетов 3. Зависимость $\eta_0 = \eta_{RR}$ от сетки

Сетка, N_h^3	16^3	32^3	64^3	128^3
Значения $\eta_0 = \eta_{RR}$	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$5.0 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$

И, наконец, для оценки характера сходимости при изменении точности ε_1 внутренних итераций предпринят третий вариант с набором параметров $\varepsilon_1 = 10^{-3}$, $\eta_0 = \eta_{RR}$.

Результаты расчетов для каждого из вариантов приведены в таблицах 4 – 6 соответственно. В них указаны для набора сеток суммарное число итераций N_{iter}^{total} , оценка λ_{min}^* и число внутренних итераций N_{iter}^{adapt} на каждом шаге адаптации. При выходе параметра λ_{min}^* на стационарное значение число внутренних итераций уже не меняется, поэтому мы указываем это число с мультипликативным сомножителем (например, $4 \cdot 73$). Отметим, что число

внутренних итераций на каждом следующем шаге адаптации возрастает в силу уменьшения λ_{\min}^* . Результаты, приведенные в таблицах 4 – 6, показывают, что независимо от точности ε_1 и начального приближения для нижней границы спектра, адаптивный алгоритм сходится на каждой сетке практически к одному и тому же значению λ_{\min}^* . Динамика выхода на стационарное значение зависит от начального приближения, но эта зависимость является слабой.

Таблица 4

Серия расчетов 3, $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\eta_0 = 0.0166$

Сетка, N_h^3	Число итераций, N_{iter}^{total}	λ_{\min}^*	Число внутренних итераций, N_{iter}^{adapt}
16^3	504	138	7, 23, 36, 45, 56, 4*73
32^3	945	152	7, 41, 68, 89, 90, 99, 137, 3*138
64^3	1824	164	7, 78, 131, 178, 182, 190, 260, 3*266
128^3	3575	172	7, 153, 260, 357, 364, 374, 500, 3*520

Таблица 5

Серия расчетов 3, $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\eta_0 = \eta_{RR}$

Сетка, N_h^3	Число итераций, N_{iter}^{total}	λ_{\min}^*	Число внутренних итераций, N_{iter}^{adapt}
16^3	481	138	19, 32, 44, 45, 50, 72, 3*73
32^3	926	152	38, 64, 88, 90, 96, 136, 3*138
64^3	1827	164	75, 129, 177, 182, 258, 3*266
128^3	3561	172	151, 258, 356, 364, 374, 498, 3*520

Таблицы показывают слабую зависимость объема вычислений (выражается числом итераций N_{iter}^{total}) от точности ε_1 и наличие ресурса повышения эффективности алгоритма: после выхода числа внутренних

итераций на стационарное значение можно определить новое значение ε_1 , чтобы завершить расчет за один шаг.

Таблица 6

Серия расчетов 3, $\varepsilon_1 = 10^{-3}$, $\eta_0 = \eta_{RR}$

Сетка, N_h^3	Число итераций, N_{iter}^{total}	λ_{min}^*	Число внутренних итераций, N_{iter}^{adapt}
16^3	516	138	27, 48, 64, 66, 102, 104, 105
32^3	943	152	97, 128, 131, 190, 198, 199
64^3	1949	164	108, 196, 259, 263, 359, 2*382
128^3	3831	172	216, 392, 519, 525, 691, 2*746

Сведем в табл. 7 значения полного числа итераций N_{iter}^{total} в трех расчетах с адаптацией, а также в расчетах без адаптации: в «идеальном» случае с $\lambda_{min}^* = 140$ (расчет 1) и «плохом» случае с $\lambda_{min}^* = 10$ (см. (14)).

Таблица 7

Число итераций N_{iter}^{total} при различных параметрах $\varepsilon_1, \eta_0, \varepsilon_{tot} = 10^{-12}$

Сетка, N_h^3	Без адаптации		С адаптацией		
	$\lambda_{min}^* = 140$	$\lambda_{min}^* = 10$	$\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\eta_0 = 0.0166$	$\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\eta_0 = \eta_{RR}$	$\varepsilon_1 = 10^{-3}$, $\eta_0 = \eta_{RR}$
16^3	386	1422	504	481	516
32^3	771	2883	945	926	943
64^3	1541	5766	1824	1827	1949
128^3	3082	11531	3575	3561	3831

Видим, что число итераций N_{iter}^{total} в расчетах с адаптацией не слишком превосходит число итераций в идеальном случае.

В следующей серии расчетов 4 изменим постановку задачи. Возьмем прямой параллелепипед $\Omega^* = [-0.25; 1.25] \times [0; 1] \times [0; 1]$ и на двух его гранях $x = -0.25$ и $x = 1.25$ зададим однородное условие Неймана, т.е. нулевой поток по нормали к грани. В этом случае априорная оценка нижней границы спектра оператора имеет вид $\lambda_{min}^* \approx 8(\min k_y(x, y, z)/l_y^2 + \min k_z(x, y, z)/l_z^2) = 0.16$. Следовательно, число обусловленности данной разностной краевой задачи на каждой сетке заметно увеличивается по сравнению с предыдущей задачей.

На рис. 4 показана зависимость адаптации в этой серии расчетов для параметров $\varepsilon_{tot} = 10^{-12}$, $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\eta_0 = 0.166$ на сетках $N_h^3 = 16^3, 32^3, 64^3, 128^3$. Из соображений наглядности ординаты графиков ограничены сверху величиной 10^4 . По оси абсцисс отложен номер цикла адаптации. Сетки с $N_h^3 = 16^3, 32^3$ требуют 9 циклов адаптации, сетки с $N_h^3 = 64^3, 128^3$ – 10 циклов. Видно, что параметр λ_{min}^* начинает стабилизироваться на 6 шаге процедуры адаптации на значениях от 207 до 290 в зависимости от размера сетки. Такой результат является удовлетворительным, так как коэффициенты диффузии являются разрывными и разностные аппроксимации на указанных сетках не являются достаточными близкими.

На рис. 5 показано влияние точности внутренних итераций ε_1 на сходимость приближений λ_{min}^* . Показаны результаты расчетов на сетке с числом узлов $N = 128^3$ для $\varepsilon_1 = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$. Относительная начальная граница раздела спектра взята $\eta_0 = 0.166$, что соответствует начальной оценке $\lambda_{min}^* = \eta_0 \lambda_{max} \approx 0.166 * 6.59 \times 10^6 \approx 1.1 \cdot 10^5$. Один шаг адаптации для $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ и $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ дороже шага адаптации для $\varepsilon_1 = 10^{-1}$ соответственно в 2 и 3 раза. Следовательно, общие затраты слабо зависят от точности внутренних итераций.

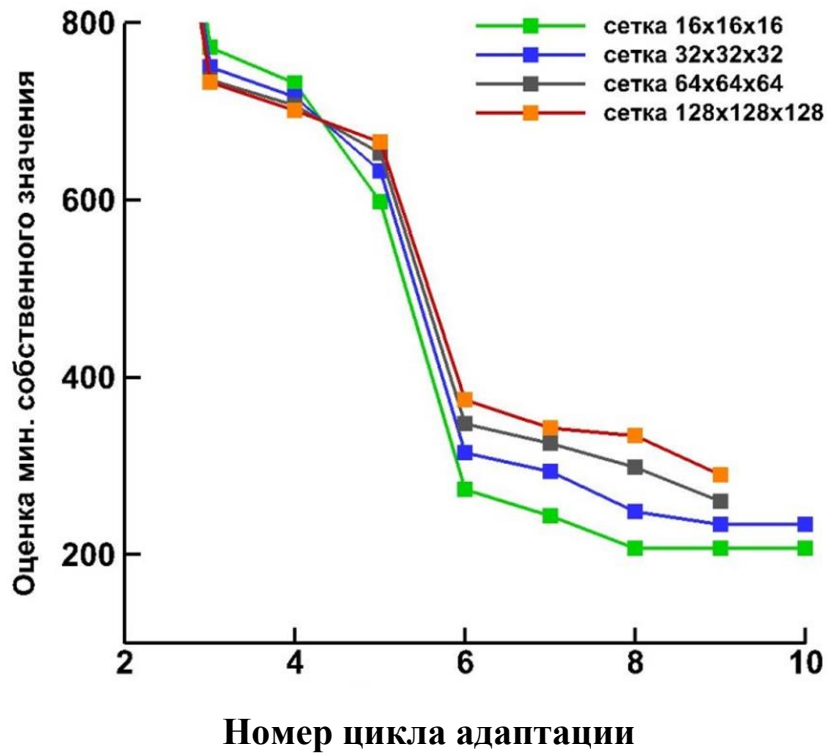


Рис. 4. Процесс адаптации в серии расчетов 4

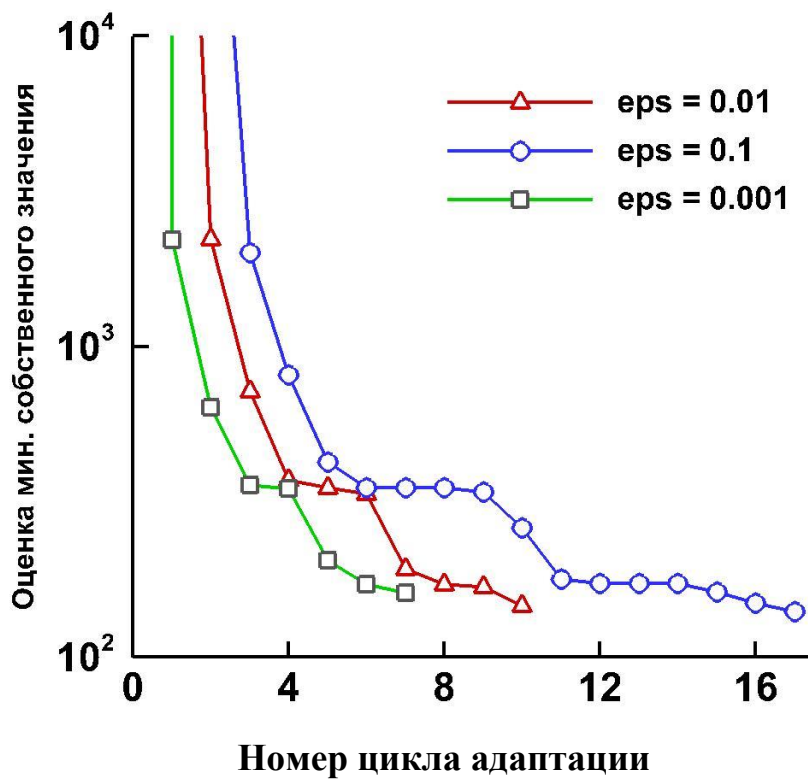


Рис. 5. Зависимость процесса адаптации от относительной точности ε_1

В табл. 8 показаны значения суммарного числа итераций N_{iter}^{total} в расчетах с адаптацией и без нее при указанных различных начальных параметрах ε_1, η_0 . В вариантах 4 и 5 значение параметра η_0 – относительной границы раздела спектра – зависит от размера сетки. В варианте 3 это значение постоянно $\eta = \eta_0 = 0.166$. Результаты расчетов, представленные в табл. 8, показывают, что существенного влияния параметры ε_1, η_0 на процесс адаптации не оказывают.

Таблица 8

Число итераций N_{iter}^{total} при различных параметрах ε_1, η_0

Сетка, N_h^3	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
	без адаптации		с адаптацией		
	$\lambda_{min}^* = 0.16$	$\lambda_{min}^* = 0.16$	$\varepsilon_1 = 10^{-2}$	$\varepsilon_1 = 10^{-2}$	$\varepsilon_1 = 10^{-3}$
16^3	455	11364	533	592	540
32^3	909	22727	980	1120	1027
64^3	1819	45453	1859	1853	1984
128^3	3637	90907	3591	3605	3858

Эффективность адаптации оценивается вычислительными затратами, которые практически прямо пропорциональны числу итераций N_{iter}^{total} . Видим, затраты в расчетах с адаптацией превышают идеальные значения на 15 – 40% в зависимости от числа шагов сетки, причем чем больше сетка, тем меньше разница. По сравнению с «плохим» случаем (Вариант 2) преимущество расчетов с адаптацией многократное. Зависимость от входных параметров метода (точности ε_1 и начальной оценки λ_{min}^*) довольно слабая, что подтверждается многочисленными расчетами.

Дополнительно графически (см. рис. 6) проиллюстрируем процедуру адаптации для уравнения Пуассона $\Delta u = 4$ в области $\Omega = \Omega^*$ (см. выше описание серии расчетов 4), для которой известно точное значение нижней границы

спектра $\lambda_{min} = 24$. Краевые условия Дирихле взяты из точного решения $u(x, y, z) = x^2 + y^2$. На всех сетках с числом узлов $N_h^3 = 16^3, 32^3, 64^3, 128^3$ для $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\eta_0 = 0.166$ процесс адаптации дает практически точное значение.

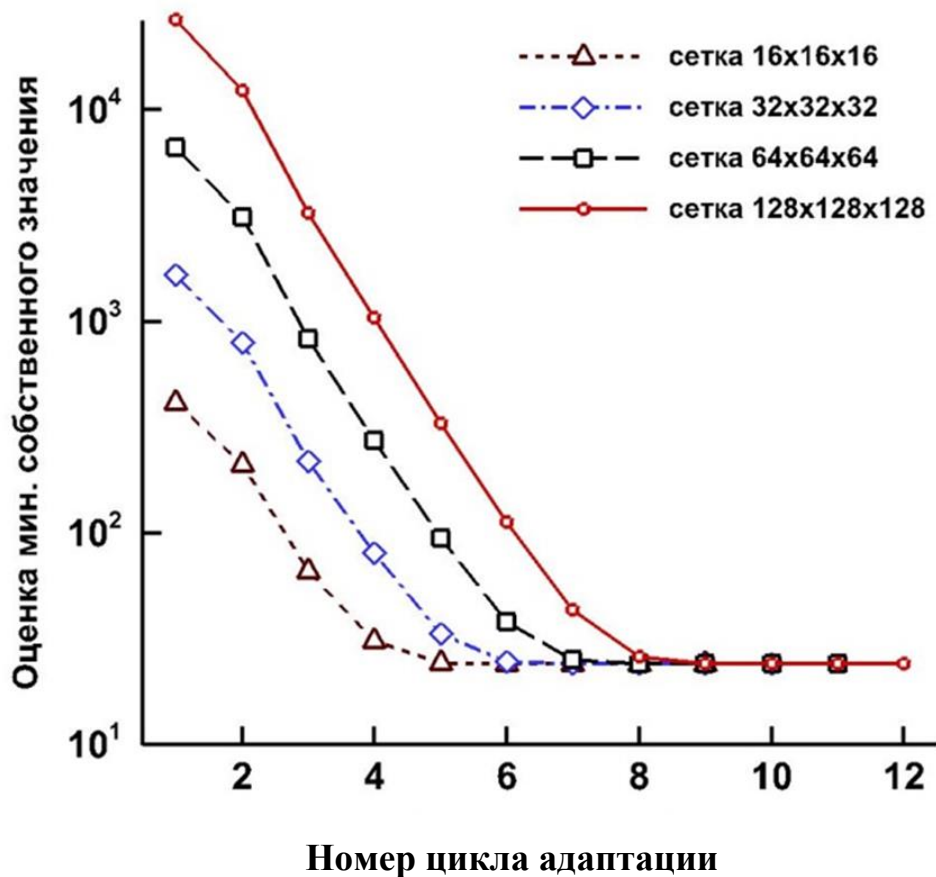


Рис. 6. Процесс адаптации при решении уравнения Пуассона

Сравним построенную процедуру нахождения нижней границы спектра с другой возможной процедурой – степенным методом при его применении для нахождения максимального собственного значения μ_1 оператора $B = I - (1/\lambda_{max}^*)A$ в предположении, что второе собственное значение $\mu_2 < \mu_1$. Тогда для оператора A минимальное собственное значение $\lambda_{min} = \lambda_1$ и следующее за ним удовлетворяют условию $\lambda_2 > \lambda_1$. При заданном начальном приближении $x^{(0)}$ запишем итерационный процесс в виде $x^{(n)} = Bx^{(n-1)}$.

Скорость сходимости приближений $\mu_1^{(n)}$ к μ_1 является квадратичной: $\mu_1^{(n)} = \mu_1 + O(|\mu_2/\mu_1|^{2n})$ [8]. Имеем $\mu_1 = 1 - \lambda_1/\lambda_{\max}^*$, $\mu_2 = 1 - \lambda_2/\lambda_{\max}^*$, и, следовательно, $\mu_2/\mu_1 \approx 1 - (\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_{\max}^*$. Поэтому скорость сходимости приближений к λ_1 медленная:

$$|\mu_2/\mu_1|^{2n} \approx \left[1 - (\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_{\max}^* \right]^{2n} \approx 1 - 2n \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_{\max}^*. \quad (15)$$

Для большей ясности рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в области $\Omega = [0; \pi]^3$ с однородными краевыми условиями. Первые собственные числа разностного оператора Лапласа мало отличаются от собственных значений дифференциального оператора Лапласа, которые в данном случае являются целыми числами $\lambda = k^2 + l^2 + m^2$. На сетке $N_h^3 = 128^3$ можно полагать, что первые два разностных собственных числа равны соответственно $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, а максимальное собственное значение $\lambda_{\max} \approx 12 \cdot N_h^2 \approx 2 \cdot 10^4$. Следовательно, для такого варианта степенного метода согласно (15) потребуется $n \approx 10^3$ итераций и при измельчении сетки это число будет расти как $O(N_h^2)$.

Как уже указывалось выше, в отличие от приведенного простейшего варианте предложенная нами процедура представляет собой степенные итерации вида $x^{(n)} = F_p(A)x^{(n-1)}$. В табл. 9 приведены характеристики сходимости приближений λ_{\min}^* к точному минимальному собственному значению $\lambda_1 = 3$ в процессе адаптации при заданных $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ и $\varepsilon_{tot} = 5 \cdot 10^{-6}$. Видно, что сходимость достаточно быстрая даже при выборе грубого начального приближения $\lambda_{\min}^* = \lambda_{\max}^* / 6$, а полное число итераций, полученное суммированием второго столбца табл. 9, равно 816. Для идеального случая в этом примере при задании точной нижней границы число чебышевских итераций равно 526.

Адаптация для уравнения Пуассона, $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\eta_0 = 0.166$

Номер шага адаптации	Число внутренних итераций, N_{iter}^{adapt}	Достигнутая точность, δ	Оценка, λ_{min}^*
1	7	0.210	3307.007
2	10	0.452	1532.265
3	19	0.385	405.1740
4	33	0.398	129.7234
5	59	0.363	40.92577
6	100	0.321	14.03311
8	162	0.152	5.361031
9	212	0.016	3.126278
10	216	0.0099	3.000035

6. Заключение

Приведен адаптивный чебышевский итерационный метод для решения систем линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно определенной матрицей. В этом методе неизвестная нижняя граница спектра матрицы уточняется во внешнем итерационном цикле, а верхняя граница оценивается по теореме Гершгорина. В численных экспериментах показана сходимость метода с вычислительными затратами, близкими к затратам стандартного чебышевского метода, использующего точные границы спектра матрицы. Область применения построенного адаптивного метода – многократное решение эллиптических уравнений с разными правыми частями, что типично для многих задач и алгоритмов: для многосеточного метода, для алгоритмов решения уравнений динамики несжимаемой жидкости, для алгоритмов преобусловливания в итерационном методе подпространств Крылова.

Библиографический список

1. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Многосеточный метод для анизотропных уравнений диффузии на основе адаптации чебышевских сглаживателей // Матем. моделирование. 2014. Т.26. № 9. С. 126–140.
2. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Многосеточный метод для эллиптических уравнений с анизотропными разрывными коэффициентами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 7. С. 1168–1182.
3. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. О решении эволюционных уравнений многосеточным и явно-итерационным методами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 8. С. 1305–1319.
4. Жуков В. Т., Краснов М. М., Новикова Н. Д., Феодоритова О. Б. Алгебраический многосеточный метод с адаптивными сглаживателями на основе многочленов Чебышева // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 113. 32 с. doi:10.20948/prepr-2016-113.
5. Baker A., Falgout R., Gamblin T., Kolev T., Schulz M., Yang U. Scaling Algebraic Multigrid Solvers: On the Road to Exascale // In: Competence in High Performance Computing 2010, C. Bischoff et al., eds., Springer-Verlag (2012), Schwetzingen Germany. LLNL–PROC–463941.
6. Baker A., Falgout R., Kolev T., Yang U. Multigrid smoothers for ultra-parallel computing // SIAM J. Sci. Comput. 2011. V.33. № 5. P. 2864–2887.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966, 576 с.
8. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978, 592 с.
9. Чебышев П.Л. Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций. – СПб.: Сочинения, т.1, 1899.
10. Shvedov A.S., Zhukov V.T. Explicit iterative difference schemes for parabolic equations // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1998. V. 13, №. 2. С.133–148. [In English]

11. Richardson L. F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stresses in a masonry dam // Roy. Soc. Philos. Trans. (1910) 210A, P. 307–357.

12. Гавурин М. К. Применение полиномов наилучшего приближения к улучшению сходимости итеративных процессов // Успехи математических наук. 1950. Т. 5. Вып. 3(37). С. 156–160.

13. Flanders D., Shortley G. Numerical determination of fundamental modes. // J. Appl. Phys. (1950) 21, No. 12. P.1326–1332.

14. Shortley G.H. Use of Tschebyscheff–polynomial operators in the solution of boundary value problems // J. Appl. Phys. . 24 (1953). P. 392–396.

15. Young D. M. On Richardson's method for solving linear systems with positive definite matrices // Math. Phys. (1954) 32, № 4. P. 243-255.

16. Лебедев В.И., Финогенов С.А. О порядке выбора итерационных параметров в чебышевском циклическом методе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11. № 2. С.425–438.

17. Николаев Е. С., Самарский А. А. Выбор итерационных параметров в методе Ричардсона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12. № 4. С. 960–973 .

18. Юань Чжао-дин. Некоторые разностные схемы решения первой краевой задачи для линейных дифференциальных уравнений с частными производными //Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук, М.: МГУ, 1958 г.

19. Юань Чжао-дин. Некоторые разностные схемы численного решения дифференциального уравнения параболического типа // Матем. сборник. 1960. Т. 50 (92). № 4. С. 391–422.

20. Юань Чжао-дин. Об устойчивости разностных схем для решения дифференциальных уравнений параболического типа // ДАН СССР. 1957. Т. 117. № 4. С. 578—581.

21. Саульев В.К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток / Ред. Люстерник Л. А. – М.: Физматгиз, 1960, 324 с.

22. Локуциевский В.О., Локуциевский О.В. О численном решении краевых задач для уравнений параболического типа // Докл. АН СССР. 1986. Т.291. № 3. С. 540 – 544.
23. Жуков В.Т. Численные эксперименты по решению уравнения теплопроводности методом локальных итераций. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1984, препринт № 97, 22 с.
24. Жуков В. Т. О явных методах численного интегрирования для параболических уравнений // Матем. моделирование. 2010. Т. 22, № 10. С. 127–158; Math. Models Comput. Simul., 3:3 (2011), 311–332.
25. Жуков В.Т., Забродин А. В., Феодоритова О.Б. Метод решения двумерных уравнений динамики теплопроводного газа в областях сложной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993.Т.33. № 8. С. 1240–1250.
26. Попов М.В., Повещенко Ю.А., Гасилов В.А. Колдоба А.В., Повещенко Т. С. Применение метода Ричардсона при неизвестной нижней границе спектра задачи // Матем. моделирование. 2017. Т. 29. № 5. С. 96–108.
27. Люстерник Л. А. Замечания к численному решению краевых задач уравнения Лапласа и вычислению собственных значений методом сеток // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1947. Т. 20. С.49–64.
28. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987, 600 с.
29. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001, 430 с.
30. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Физматлит, 2005, 479 с.
31. R. Eymard, G. Henry, R. Herbin, F. Hubert, R. Kloforn, et al. 3D Benchmark on Discretization Schemes for Anisotropic Diffusion Problems on General Grids. J. Fort, J. Furst, J. Halama, R. Herbin, F. Hubert. Finite Volume for Complex Applications VI. – Praha, Czech Republic. Springer, 2011, pp.895–930.