ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 175 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Бессонов Р.В., Куркина А.Н., Сазонов В.В.

Определение вращательного движения космического аппарата по измерениям звездных датчиков и датчика угловой скорости методом наименьших квадратов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бессонов Р.В., Куркина А.Н., Сазонов В.В. Определение вращательного движения космического аппарата по измерениям звездных датчиков и датчика угловой скорости методом наименьших квадратов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 175. 31 с. doi:10.20948/prepr-2018-175
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-175

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

Р.В. Бессонов, А.Н. Куркина, В.В. Сазонов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ЗВЕЗДНЫХ ДАТЧИКОВ И ДАТЧИКА УГЛОВОЙ СКОРОСТИ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Москва – 2018

Бессонов Р.В., Куркина А.Н., Сазонов В.В.

Определение вращательного движения космического аппарата по измерениям звездных датчиков и датчика угловой скорости методом наименьших квадратов

Рассматривается определение вращательного движения космического аппарата (КА) по измерениям датчика угловой скорости (ДУС) и одного или двух звездных датчиков (ЗД). Используемая методика обработки измерений основана на кинематических уравнениях вращательного движения твердого тела. В рамках этой методики данные измерений обоих типов, собранные на некотором отрезке времени, обрабатываются совместно. Измерения угловой скорости подставляются в разностную схему для кинематических дифференциальных уравнений, которые описывают изменение во времени кватерниона, задающего переход от приборной системы координат КА к инерциальной системе координат. Полученные таким образом разностные уравнения представляют собой кинематическую модель вращательного движения КА. Решение этих уравнений, аппроксимирующее фактическое движение, находится из условия наилучшего согласования данных измерений ЗД с их расчетными значениями. В процессе построения аппроксимации уточняются постоянные смещения в измерениях ДУС, и можно уточнить кватернион перехода от собственной системы координат ЗД к системе координат ДУС. Аппроксимация движения КА одним решением кинематических уравнений, определяемым методом наименьших квадратов, строится на интервалах времени до 1000 с.

Ключевые слова: космический аппарат, вращательное движение, датчик угловой скорости, звездный датчик, обработка данных измерений, реконструкция реального вращательного движения

Bessonov R.V., Kurkina A.N., Sazonov V.V.

Reconstruction of spacecraft attitude motion by measurements of star trackers and angular rate sensor using least squares method

We consider the reconstruction of spacecraft attitude motion by measurements of angular rate sensor and star trackers. The processing technique uses kinematical equations of the attitude motion of a rigid body. In its framework, the measurement data of both types, collected on a time interval, are processed jointly. The angular rate data are put into kinematical equations for components of the quaternion, which defines a transformation of the spacecraft coupled coordinate system to the inertial one. The equations obtained present the model of a spacecraft attitude motion. The solution of the equations, which approximates the real motion, is found by the least squares method from the condition of the best agreement between measurement and calculation data of the magnetic strength. The technique allows reconstructing the attitude motion on time intervals up to 1000 seconds.

Key words: spacecraft, attitude motion, angular rate sensor, star tracker, measurement processing, reconstruction of real attitude motion.

1. Датчики ориентации и системы координат. Рассматривается вращательное движение космического аппарата (КА). Это движение описывается нормированной кватернионной функцией времени $\mathbf{q}(t)$, $\|\mathbf{q}(t)\| \equiv 1$. Кватернион $\mathbf{q}(t)$ задает ориентацию жестко связанной с корпусом КА системы координат $x_1x_2x_3$ относительно базовой инерциальной системы координат $X_1X_2X_3$ в момент t. Формулы перехода от системы $x_1x_2x_3$ к системе $X_1X_2X_3$ записываются в кватернионной форме следующим образом

$$(0, X_1, X_2, X_3) = \mathbf{q} \circ (0, x_1, x_2, x_3) \circ \mathbf{q}^{-1}.$$

КА снабжен датчиком угловой скорости (ДУС) и двумя звездными датчиками (ЗД) типа БОКЗ-М60, которые обозначим ЗД$_1$ и ЗД$_2$. Показания ЗД$_k$ ($k = 1, 2$) представляют собой нормированный кватернион $\mathbf{Q}_k$, задающий ориентацию собственной систем координат этого датчика $y_1^{(k)}y_2^{(k)}y_3^{(k)}$ относительно системы $X_1X_2X_3$. Измерения обоих ЗД выдаются на единой равномерной временной сетке t_n $(n = \ldots, 0, 1, 2, \ldots)$, $t_{n+1} - t_n \equiv h = 0.25$ с и представляют собой последовательности кватернионов $\mathbf{Q}_k^{(n)} \approx \mathbf{Q}_k(t_n)$. В некоторые моменты времени t_n измерения одного или обоих ЗД могут отсутствовать. Системы координат $x_1x_2x_3$, $y_1^{(1)}y_2^{(1)}y_3^{(1)}$ и $y_1^{(2)}y_2^{(2)}y_3^{(2)}$ достаточно жестко связаны между собой. Связь между системами $x_1x_2x_3$ и $y_1^{(k)}y_2^{(k)}y_3^{(k)}$ задается нормированным кватернионом $\mathbf{T}_k$ $(k = 1, 2)$. Формула перехода от системы $y_1^{(k)}y_2^{(k)}y_3^{(k)}$ к системам $X_1X_2X_3$ и $x_1x_2x_3$ записывается в кватернионной форме следующим образом:

$$(0, X_1, X_2, X_3) = \mathbf{Q}_k \circ \left(0,\, y_1^{(k)},\, y_2^{(k)},\, y_3^{(k)}\right) \circ \mathbf{Q}_k^{-1},$$

$$(0, x_1, x_2, x_3) = \mathbf{T}_k \circ \left(0,\, y_1^{(k)},\, y_2^{(k)},\, y_3^{(k)}\right) \circ \mathbf{T}_k^{-1}.$$

Показания ДУС представляют собой измерения вектора абсолютной угловой скорости КА $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ в системе координат $x_1x_2x_3$. Показания задаются на сетке $\{t'_n\}$, которая также равномерная с шагом h, но ее узлы на несколько тысячных долей секунды смещены относительно узлов сетки $\{t_n\}$. Полагаем, что измерения ДУС не имеют пропусков. Результат измерения ДУС в момент времени t'_n обозначим $\boldsymbol{\omega}^{(n)} = \left(\omega_1^{(n)},\, \omega_2^{(n)},\, \omega_3^{(n)}\right)$.

Ниже при определении движения КА используются интегралы от компонент угловой скорости – квазиуглы. В узлах сетки $\{t'_n\}$ они вычисляются по правилу трапеций

$$\phi_i^{(0)} = 0\,, \quad \phi_i^{(n)} = \phi_i^{(n-1)} + \frac{h}{2}[\omega_i^{(n)} + \omega_i^{(n-1)}] \quad (i = 1, 2, 3;\, n = \ldots, 0, 1, 2, \ldots).$$

Между узлами сетки $\{t'_n\}$ квазиуглы $\phi_i(t)$ находятся с помощью линейной интерполяции. Используя квазиуглы, измерения ДУС можно пересчитать на другую временную сетку. Например, величины

$$\hat{\omega}_i^{(n)} = \frac{\phi_i(t_{n+1}) - \phi_i(t_n)}{h}$$

рассматриваются как измерения ДУС на сетке $\{t_{n+0.5}\}$, $t_{n+0.5} = (t_n + t_{n+1})/2$.

2. Параметры Родрига. Введем удобные для последующего изложения обозначения. Нормированные кватернионы будем выражать через модифицированные параметры Родрига [1] $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$. Компоненты произвольного кватерниона $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, $\|\mathbf{q}\| = 1$ представим в виде

$$q_0 = \frac{1 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2}{1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad q_i = \frac{2z_i}{1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Для удобства записи такую параметризацию обозначим $\mathbf{q} = \mathbf{F}(\mathbf{z})$.

В общем случае

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_1) \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) \neq \mathbf{F}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2), \quad \mathbf{F}(\mathbf{z}_1) \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) \neq \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}_1),$$

но при $|\mathbf{z}_1| << 1$, $|\mathbf{z}_2| << 1$ разность $\mathbf{F}(\mathbf{z}_1) \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) - \mathbf{F}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2)$ будет иметь второй порядок малости относительно $|\mathbf{z}_1|$ и $|\mathbf{z}_2|$. Ниже для любых малых $|\mathbf{z}_1|$ и $|\mathbf{z}_2|$ принимаем

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_1) \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) = \mathbf{F}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2) = \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}_1).$$

Такое упрощение эквивалентно линеаризации некоторых используемых ниже соотношений.

Имеют место точные равенства

$$[\mathbf{F}(\mathbf{z})]^{-1} = \mathbf{F}(-\mathbf{z}), \quad \mathbf{F}(\mathbf{z}) - \mathbf{F}(-\mathbf{z}) = |1 + \mathbf{F}(\mathbf{z})|^2\,(0, \mathbf{z}).$$

Функцию, обратную функции $\mathbf{s} = \mathbf{F}(\mathbf{z})$, обозначим $\mathbf{z} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{s})$. Она определена на трехмерной сфере $\|\mathbf{s}\| = 1$ в окрестности точки $\mathbf{s} = 1$. Если $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3)$, то

$$\mathbf{z} = \left(\frac{s_1}{1 + s_0}, \frac{s_2}{1 + s_0}, \frac{s_3}{1 + s_0}\right).$$

Вектор $\mathbf{z}$ имеет простой геометрический смысл – бесконечно малый поворот правой декартовой системы координат, задаваемый вектором $\boldsymbol{\theta} = 4\mathbf{z}$, описывается кватернионом $\mathbf{F}(\mathbf{z}) \approx (1, \boldsymbol{\theta}/2)$. Последнее утверждение формализуется соотношением

$$\mathbf{a} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a} \approx \left(1, \frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right) \circ \mathbf{a} \circ \left(1, -\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right).$$

Здесь $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\theta}$ – произвольные векторы, $|\boldsymbol{\theta}| << 1$. В приведенной формуле и в кватернионных формулах ниже трехмерные векторы рассматриваются как чисто мнимые кватернионы.

Встречающиеся ниже случайные нормированные кватернионы имеют вид $\mathbf{q} = \mathbf{p} \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})$, где $\mathbf{p}$ – неслучайный нормированный кватернион, $\boldsymbol{\xi}$ – случайный трехмерный вектор с нулевым средним значением и ковариационной матрицей K_ξ: $\mathrm{M}\boldsymbol{\xi} = 0$, $K_\xi = \mathrm{M}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$, причем $\mathrm{tr} K_\xi << 1$. В такой ситуации с высокой точностью $\mathrm{M}\mathbf{q} = \mathbf{p}$, а вектор $\boldsymbol{\xi}$ можно считать лежащим в касательном пространстве к трехмерной единичной сфере в точке $\mathbf{p}$.

3. Предварительная оценка кватернионов $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$. Оценить угловую скорость КА можно и по показаниям ЗД. Оценки основаны на кинематических уравнениях

$$2\dot{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{Q}_k \circ \boldsymbol{\Omega}_k \qquad (k = 1, 2). \tag{1}$$

Здесь точкой обозначена производная по времени, $\boldsymbol{\Omega}_k = (\Omega_{k1}, \Omega_{k2}, \Omega_{k3})$ – угловая скорость КА в системе координат $y_1^{(k)} y_2^{(k)} y_3^{(k)}$. Интегрируя одно из соотношений (1) на отрезке $[t_n, t_{n+1}]$, получим (здесь и иногда ниже индекс k для упрощения записи опускаем)

$$\mathbf{Q}(t_{n+1}) - \mathbf{Q}(t_n) = \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{Q}(t) \circ \boldsymbol{\Omega}(t)\, dt \approx \frac{\mathbf{Q}(t_{n+1}) + \mathbf{Q}(t_n)}{4} \circ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \boldsymbol{\Omega}(t)\, dt.$$

Погрешность последнего соотношения в этой цепочке $O(h^3)$. Отсюда находим

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \boldsymbol{\Omega}(t)\, dt \approx 4[\mathbf{Q}(t_{n+1}) + \mathbf{Q}(t_n)]^{-1} \circ [\mathbf{Q}(t_{n+1}) - \mathbf{Q}(t_n)].$$

Погрешность этой формулы также $O(h^3)$.

Последнюю формулу можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{4} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \boldsymbol{\Omega}(t)\, dt = [\mathbf{Q}^{-1}(t_n) \circ \mathbf{Q}(t_{n+1}) + 1]^{-1} \circ [\mathbf{Q}^{-1}(t_n) \circ \mathbf{Q}(t_{n+1}) - 1].$$

При некотором векторе $\mathbf{z}$ нормированный кватернион $\mathbf{Q}^{-1}(t_n) \circ \mathbf{Q}(t_{n+1}) = \mathbf{F}(\mathbf{z})$. В таком случае (см. п. 2)

$$\frac{1}{4} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \boldsymbol{\Omega}(t)\, dt = [\mathbf{F}(\mathbf{z}) + 1]^{-1} \circ [\mathbf{F}(\mathbf{z}) - 1] = \frac{1}{|\mathbf{F}(\mathbf{z}) + 1|^2} [\mathbf{F}(-\mathbf{z}) + 1] \circ [\mathbf{F}(\mathbf{z}) - 1] =$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{F}(\mathbf{z}) + 1|^2} [\mathbf{F}(\mathbf{z}) - \mathbf{F}(-\mathbf{z})] = \mathbf{z}.$$

Полученные соотношения можно записать и так:

$$\mathbf{Q}(t_{n+1})=\mathbf{Q}(t_n)\circ\mathbf{F}\left(\frac{\Delta\boldsymbol{\psi}^{(n+1)}}{4}\right),\quad \Delta\boldsymbol{\psi}^{(n+1)}=\int_{t_n}^{t_{n+1}}\boldsymbol{\Omega}(t)\,dt\,.$$

Выписанные соотношения используются при построении разностной схемы для интегрирования уравнений (1).

Величины

$$\boldsymbol{\Omega}^{(n)}=\left(\Omega_1^{(n)},\Omega_2^{(n)},\Omega_3^{(n)}\right)=\frac{4}{h}\operatorname{Im}\{[\mathbf{Q}^{(n+1)}+\mathbf{Q}^{(n)}]^{-1}\circ[\mathbf{Q}^{(n+1)}-\mathbf{Q}^{(n)}]\}$$

примем в качестве оценок угловой скорости КА в собственной системе координат ЗД в моменты $t_{n+0.5}$ и сопоставим их с величинами $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{(n)}=\left(\hat{\omega}_1^{(n)},\hat{\omega}_2^{(n)},\hat{\omega}_3^{(n)}\right)$ из п.1. Эти два набора величин должны быть связаны определенным образом, поскольку задают одну и ту же векторную функцию в узлах сетки $\{t_{n+0.5}\}$. А именно, с достаточно высокой точностью должны выполняться соотношения

$$\hat{\omega}_i^{(n)}=-\Delta_i+\sum_{j=1}^{3}c_{ij}\Omega_j^{(n)}\qquad(i=1,2,3;\ n=1,2,\ldots,N).\tag{2}$$

Здесь Δ_i – компоненты постоянного вектора смещения в измерениях ДУС в системе координат $x_1x_2x_3$, c_{ij} – элементы матрицы перехода C от системы координат $y_1y_2y_3$ к системе координат $x_1x_2x_3$ (c_{ij} – косинус угла между осями x_i и y_j, матрица C выражается через кватернион $\mathbf{T}$). Для определенности полагаем, что индекс n в обозначении узлов сетки $\{t_{n+0.5}\}$, для которых записаны соотношения (2), принимает значения 1, 2, …, N.

Если на отрезке $t_1\le t\le t_{N+1}$ КА совершал сложное вращение, то для отыскания матрицы C и смещений Δ_i удобно воспользоваться методом наименьших квадратов. Применение этого метода означает принятие следующей гипотезы: разности левых и правых частей соотношений (2) некоррелированы, имеют нулевые математические ожидания и одинаковые дисперсии.

Следуя методу наименьших квадратов, ищем минимум выражения

$$Z=\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}[\hat{\omega}_i^{(n)}-\overline{\omega}_i^{(n)}+\Delta_i]^2,\quad \overline{\omega}_i^{(n)}=\sum_{j=1}^{3}c_{ij}\Omega_j^{(n)}\tag{3}$$

по величинам c_{ij} и Δ_i при условии, что матрица C ортогональна и ее определитель равен 1. Эта задача решается с помощью стандартных процедур вычислительной линейной алгебры [2, 3]. Обозначим решение этой задачи C°, $\boldsymbol{\Delta}^\circ=(\Delta_1^\circ,\Delta_2^\circ,\Delta_3^\circ)^{\mathrm{T}}$.

Чтобы оценить точность найденного решения, линеаризуем в его окрестности рассматриваемую задачу наименьших квадратов. Ведем в этой окрестности независимые параметры ξ_i,θ_i $(i=1,2,3)$: $\Delta_i=\Delta_i^\circ+\xi_i$, $C=E_\theta C^\circ$, где

$$E_\theta = \begin{Vmatrix} 1 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 1 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Величины θ_i представляют собой компоненты вектора бесконечно малого поворота, характеризующего отличие матрицы C от ее оценки C°. Эти компоненты относятся к системе координат $x_1x_2x_3$. Согласно методу наименьших квадратов параметры ξ_i, θ_i образуют случайный вектор $\zeta \in R^6$ с нулевым математическим ожиданием. Ковариационная матрица K_ζ этого вектора выражается через матрицу P системы нормальных уравнений, получающейся линеаризацией исходной задачи по ζ в точке минимума выражения Z, и значение $Z_{\min}$:

$$K_\zeta = \sigma_0^2 P^{-1}, \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{Z_{\min}}{3N-6}}.$$

Здесь σ_0 – стандартное отклонение ошибок выполнения соотношений (2). Стандартные отклонения величин ξ_i и θ_i – квадратные корни из соответствующих диагональных элементов матрицы K_ζ – обозначим $\sigma_{\Delta i}$ и $\sigma_{\theta i}$.

Описанная процедура линеаризации, если ее немного модифицировать, дает альтернативный способ минимизации выражения (3). Матрицу C параметризируем нормированным кватернионом $\mathbf{T} = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ и будем искать минимум выражения (3) по переменным Δ_i, τ_j при условии

$$\tau_0^2 + \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = 1. \tag{4}$$

Минимизация выполнялась методом Гаусса–Ньютона [4]. На каждой итерации этого метода поправки $\Delta\tau_j$ к имеющимся значениям τ_j ищутся в виде

$$\Delta\tau_0 = -\frac{1}{2}(\theta_1\tau_1 + \theta_2\tau_2 + \theta_3\tau_3), \quad \Delta\tau_1 = \frac{1}{2}(\theta_1\tau_0 + \theta_2\tau_3 - \theta_3\tau_2), \tag{5}$$
$$\Delta\tau_2 = \frac{1}{2}(\theta_2\tau_0 + \theta_3\tau_1 - \theta_1\tau_3), \quad \Delta\tau_3 = \frac{1}{2}(\theta_3\tau_0 + \theta_1\tau_2 - \theta_2\tau_1).$$

Параметры θ_i здесь имеют тот же смысл, что и в формуле для E_θ. Поправки к смещениям Δ_i обозначим ξ_i. Вектор поправок $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3)^{\mathrm{T}}$ находится из системы нормальных уравнений

$$\left(\sum_{n=1}^{N} D_n^{\mathrm{T}} D_n \right) \zeta = \sum_{n=1}^{N} D_n^{\mathrm{T}} d_n, \tag{6}$$

$$D_n = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \overline{\omega}_3^{(n)} & -\overline{\omega}_2^{(n)} \\ 0 & -1 & 0 & -\overline{\omega}_3^{(n)} & 0 & \overline{\omega}_1^{(n)} \\ 0 & 0 & -1 & \overline{\omega}_2^{(n)} & -\overline{\omega}_1^{(n)} & 0 \end{Vmatrix}, \quad d_n = \begin{Vmatrix} \hat{\omega}_1^{(n)} - \overline{\omega}_1^{(n)} + \Delta_1 \\ \hat{\omega}_2^{(n)} - \overline{\omega}_2^{(n)} + \Delta_2 \\ \hat{\omega}_3^{(n)} - \overline{\omega}_3^{(n)} + \Delta_3 \end{Vmatrix}.$$

Прибавление найденных поправок $\Delta\tau_j$ к имеющимся значениям τ_j нарушает условие (4), поэтому новый кватернион ориентации нормируется. Внесенные нормировкой изменения уточненных компонент кватерниона являются величинами второго порядка относительно $\Delta\tau_j$. Итерационный процесс заканчивается, когда величина $\|\zeta\|$ становится меньше заданного порога. Начальное приближение $\mathbf{T}=1,\ \Delta_i = 0\ \ (i=1, 2, 3)$ обеспечивает сходимость итераций. Матрица P в формуле для K_ζ – это матрица системы нормальных уравнений (6) в точке минимума Z.

В примерах предварительного оценивания кватернионов $\mathbf{T}_{1,2}$, как и во всех расчетных примерах данной работы, использованы данные измерений ДУС и ЗД, полученные на одном из российских спутников дистанционного зондирования Земли в феврале 2017 г. Использованные для оценивания кватернионов $\mathbf{T}_{1,2}$ данные измерений угловой скорости КА приведены на рис. 1, 2. Рис. 1 построен по данным ДУС и ЗД_1, рис. 2 – по данным ДУС и ЗД_2. В верхней половине рисунков в каждой системе координат изображены две ломаные. Звенья одной из них последовательно соединяют точки $\left(t_{n+0.5}, \Omega_i^{(n)}\right)$, другая проходит через точки $\left(t_{n+0.5}, \hat{\omega}_i^{(n)}\right)$, $n = 1, 2, \ldots N$. В нижней половине рисунков в каждой системе координат изображены ломаная, проходящая через точки $\left(t_{n+0.5}, \hat{\omega}_i^{(n)} + \Delta_i\right)$, и ломаная, проходящая через точки $\left(t_{n+0.5}, \overline{\omega}_i^{(n)}\right)$. На вид эти ломаные очень близки. Чтобы наглядно показать их различие, на рис. 3 изображены разности этих ломаных, т.е. ломаные с вершинами в точках $\left(t_{n+0.5}, \hat{\omega}_i^{(n)} - \overline{\omega}_i^{(n)} + \Delta_i\right)$. Графики в верхней половине рис. 3 относятся к примеру на рис. 1, графики в нижней половине иллюстрируют пример на рис. 2.

Ниже приведены полученные оценки, причем оба указанных выше метода оценивания дали одинаковый результат. В примере на рис. 1 имеем

$$C_1^\circ = \begin{Vmatrix} -0.999999 & -0.001723 & 0.000074 \\ -0.001455 & 0.865925 & 0.500172 \\ -0.000926 & 0.500171 & -0.865926 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{T}_1 = (0.000259,\ -0.000822,\ 0.965900\ \ 0.258915), \quad \sigma_0 = 0.000174\,\text{с}^{-1},$$
$$\sigma_{\Delta 1} = 3.8\cdot 10^{-6}\text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\Delta 2} = 3.9\cdot 10^{-6}\text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\Delta 3} = 3.7\cdot 10^{-6}\text{с}^{-1},$$
$$\sigma_{\theta 1} = 0.063^\circ, \quad \sigma_{\theta 2} = 0.051^\circ, \quad \sigma_{\theta 3} = 0.15^\circ, \quad N = 2196.$$

В примере на рис. 2

$$C_2^{\circ} = \begin{Vmatrix} 0.706820 & 0.353553 & -0.612704 \\ -0.000762 & 0.866523 & 0.499137 \\ 0.707393 & -0.352333 & 0.612745 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{T}_2 = (0.892481, \ -0.238512, \ -0.369783, \ -0.099250), \quad \sigma_0 = 0.000143\,\text{с}^{-1};$$
$$\sigma_{\Delta 1} = 2.6\cdot 10^{-6}\text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\Delta 2} = 2.6\cdot 10^{-6}\text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\Delta 3} = 2.6\cdot 10^{-6}\text{с}^{-1},$$
$$\sigma_{\theta 1} = 0.051^{\circ}, \quad \sigma_{\theta 2} = 0.035^{\circ}, \quad \sigma_{\theta 3} = 0.10^{\circ}, \quad N = 3060.$$

Оценки смещений Δ_i оказались сравнимы и даже меньше стандартных отклонений $\sigma_{\Delta i}$ и поэтому не приводятся.

4. Определение движения КА по измерениям ДУС и одного ЗД. Кинематическое уравнение движения системы $x_1x_2x_3$ запишем в виде

$$2\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q}\circ\boldsymbol{\omega}. \tag{7}$$

Будем интегрировать это уравнение численно на сетке $\{t'_n\}$ с помощью разностной схемы из п. 3

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n \circ \mathbf{F}\left(\frac{\Delta\boldsymbol{\alpha}^{(n+1)}}{4}\right) \quad \Delta\boldsymbol{\alpha}^{(n+1)} = \boldsymbol{\varphi}^{(n+1)} - \boldsymbol{\varphi}^{(n)} + h\boldsymbol{\Delta}, \tag{8}$$
$$\boldsymbol{\varphi}^{(n)} = \left(\phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}, \phi_3^{(n)}\right) \quad (n = \ldots, 0, 1, 2, \ldots).$$

Член с $\boldsymbol{\Delta} = (\boldsymbol{\Delta}_1, \boldsymbol{\Delta}_2, \boldsymbol{\Delta}_3)$ в правой части формулы для $\Delta\boldsymbol{\alpha}^{(n+1)}$ учитывает тот факт, что измерения ДУС, по которым вычисляются квазиуглы $\phi_i^{(n)}$, содержат постоянные смещения. Расчетный аналог кватерниона $\mathbf{Q}$, задающего ориентацию собственной системы координат ЗД относительно базовой системы, задается формулой $\mathbf{Q} = \mathbf{q}\circ\mathbf{T}$. Значение этого кватерниона в узле t_m сетки $\{t_n\}$ (номера узлов рассматриваемых сеток могут быть не согласованы из-за пропусков измерений ЗД) вычисляется так. Находим полуинтервал $[t'_n, t'_{n+1})$, содержащий t_m: $t'_n \le t_m < t'_{n+1}$, затем вычисляем

$$\Delta\boldsymbol{\alpha}(t_m) = \frac{t_m - t'_n}{h}[\boldsymbol{\varphi}^{(n+1)} - \boldsymbol{\varphi}^{(n)}] + (t_m - t'_n)\boldsymbol{\Delta}, \tag{9}$$
$$\mathbf{q}(t_m) = \mathbf{q}_n \circ \mathbf{F}\left(\frac{\Delta\boldsymbol{\alpha}(t_m)}{4}\right), \quad \mathbf{Q}(t_m) = \mathbf{q}(t_m)\circ\mathbf{T}.$$

Уравнение в вариациях для уравнения (7) имеет вид

$$2\Delta\dot{\mathbf{q}} = \Delta\mathbf{q}\circ\boldsymbol{\omega} + \mathbf{q}\circ\Delta\boldsymbol{\omega}.$$

Его решение удобно представить в виде $\Delta\mathbf{q} = \frac{1}{2}\mathbf{q}\circ\boldsymbol{\theta}$, где $\mathbf{q}$ – решение уравнения (7), $\boldsymbol{\theta}$ – вектор бесконечно малого поворота, определяемый уравнением

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Delta\omega}.$$

Уравнение в вариациях используется для расчета частных производных решения уравнения (7) по начальным условиям и параметрам. Вариацию начального условия $\mathbf{q}(t_*) = \mathbf{q}_*$ нормированного кватерниона будем задавать формулой $\Delta\mathbf{q}_* = (\mathbf{q}_* \circ \boldsymbol{\theta}_*)/2$. Решение начальной задачи $2\Delta\dot{\mathbf{q}} = \Delta\mathbf{q} \circ \boldsymbol{\omega}$, $\Delta\mathbf{q}(t_*) = (\mathbf{q}_* \circ \boldsymbol{\theta}_*)/2$ имеет вид $\Delta\mathbf{q} = (\mathbf{q} \circ \boldsymbol{\theta})/2$, где $\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta} = 0$, $\boldsymbol{\theta}(t_*) = \boldsymbol{\theta}_*$.

Учтем в уравнении (7) в явном виде постоянные смещения в компонентах угловой скорости и запишем это уравнение следующим образом:

$$2\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \circ (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Delta}), \quad \boldsymbol{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3).$$

Рассмотрим для этого уравнения начальную задачу $\mathbf{q}(t_*) = \mathbf{q}_*$. Ее решение обозначим $\widetilde{\mathbf{q}}(t, \boldsymbol{\Delta})$. Производные $\partial\widetilde{\mathbf{q}}(t, \boldsymbol{\Delta})/\partial\Delta_i$ определяются соотношениями

$$2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\widetilde{\mathbf{q}}}{\partial\boldsymbol{\Delta}_i}\right) = \frac{\partial\widetilde{\mathbf{q}}}{\partial\boldsymbol{\Delta}_i} \circ (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Delta}) + \widetilde{\mathbf{q}} \circ \mathbf{e}_i, \quad \frac{\partial\widetilde{\mathbf{q}}(t_*, \boldsymbol{\Delta})}{\partial\boldsymbol{\Delta}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Имеют место формулы $\partial\widetilde{\mathbf{q}}/\partial\Delta_i = (\widetilde{\mathbf{q}} \circ \boldsymbol{\theta}_{\Delta i})/2$, где векторы $\boldsymbol{\theta}_{\Delta i}$ – решения начальных задач $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{\Delta i} + (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Delta}) \times \boldsymbol{\theta}_{\Delta i} = \mathbf{e}_i$, $\boldsymbol{\theta}_{\Delta i}(t_*) = 0$.

Уравнения в вариациях интегрируются на сетке $\{t'_n\}$. Разностную схему построим на примере уравнения

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \mathrm{const}. \tag{10}$$

Интегрируя его на отрезке $[t'_n, t'_{n+1}]$, получим

$$\boldsymbol{\theta}(t'_{n+1}) - \boldsymbol{\theta}(t'_n) = \int_{t'_n}^{t'_{n+1}} \boldsymbol{\theta}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t)\, dt + (t'_{n+1} - t'_n)\mathbf{e}.$$

Заменяя интеграл в правой части приближенной формулой, будем иметь

$$\boldsymbol{\theta}(t'_{n+1}) - \boldsymbol{\theta}(t'_n) = \frac{\boldsymbol{\theta}(t'_n) + \boldsymbol{\theta}(t'_{n+1})}{2} \times \int_{t'_n}^{t'_{n+1}} \boldsymbol{\omega}(t)\, dt + h\mathbf{e}.$$

Погрешность последней формулы $O(h^3)$. Эту формулу, обозначив

$$\boldsymbol{\Delta\alpha}^{(n+1)} = \int_{t'_n}^{t'_{n+1}} \boldsymbol{\omega}(t)\, dt,$$

перепишем в виде

$$\boldsymbol{\theta}(t'_{n+1}) + \frac{\Delta\boldsymbol{\alpha}^{(n+1)}}{2} \times \boldsymbol{\theta}(t'_{n+1}) = \boldsymbol{\theta}(t'_n) - \frac{\Delta\boldsymbol{\alpha}^{(n+1)}}{2} \times \boldsymbol{\theta}(t'_n) + h\mathbf{e} \qquad (11)$$

и будем рассматривать как уравнение относительно $\boldsymbol{\theta}(t'_{n+1})$ при известных остальных входящих в нее величинах. Векторное уравнение относительно $\boldsymbol{\theta}(t'_{n+1})$ имеет вид: $\mathbf{x} + \mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{x}$ – неизвестное, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы. Решение этого уравнения выражается формулой

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}}{1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

Такое решение и разностная схема (11) используются для численного интегрирования уравнения (10). Чтобы учесть смещения в измерениях ДУС, вектор $\Delta\boldsymbol{\alpha}^{(n+1)}$ в (11) следует определить второй формулой (8). Вектор $\boldsymbol{\theta}(t_m)$ при $t_m \in [t'_n, t'_{n+1})$ находится из уравнения (11), в котором $\Delta\boldsymbol{\alpha}^{(n+1)}$ заменен на $\Delta\boldsymbol{\alpha}(t_m)$ из формул (9).

Учитывая вид расчетного аналога измерения ЗД, можно записать соотношение $\mathbf{Q}^{(m)} = \mathbf{q}(t_m) \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_m)$. Кватернион $\mathbf{q}(t_m)$ вычисляется по формулам (8) и (9), $\boldsymbol{\xi}_m$ – ошибка измерения, $|\boldsymbol{\xi}_m| << 1$. Компоненты вектора $\boldsymbol{\xi}_m$ относятся к собственной системе координат ЗД. Формулы для расчета ошибки: $\mathbf{F}(-\boldsymbol{\xi}_m) = [\mathbf{Q}^{(m)}]^{-1} \circ \mathbf{q}(t_m) \circ \mathbf{T} = \left(a_0^{(m)}, a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, a_3^{(m)}\right)$, причем $a_0^{(m)} \approx 1 - 2|\boldsymbol{\xi}_m|^2$ и $\left(a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, a_3^{(m)}\right) \approx -2\boldsymbol{\xi}_m$.

Следуя методу наименьших квадратов, составим выражение

$$\Phi = \sum_{m=1}^{M} \{w_1[a_1^{(m)}]^2 + w_2[a_2^{(m)}]^2 + w_3[a_3^{(m)}]^2\}. \qquad (12)$$

Здесь w_i $(i = 1,2,3)$ – положительные постоянные – веса. В описываемых ниже расчетах принято $w_1 = w_2 = 1$, $w_3 = 0.5$. Суммирование выполняется по моментам t_m, $t_m < t_{m+1}$, попавшим на рассматриваемый отрезок сетки $\{t'_n\}$. Для удобства обозначим этот отрезок $[t'_1, t'_N]$ и будем считать, что $t'_1 < t_1 < t_M < t'_N$.

Найдем минимум Φ по величинам $\mathbf{q}(t'_1)$, $\boldsymbol{\Delta}$ и $\mathbf{T}$. Решение разностного уравнения (8), доставляющее этот минимум, служит реконструкцией вращательного движения КА на отрезке $[t'_1, t'_N]$ и позволяет уточнить оценки $\boldsymbol{\Delta}$ и $\mathbf{T}$, найденные способом п. 3.

Сначала рассмотрим вариант этой задачи без уточнения кватерниона $\mathbf{T}$. Такой вариант представляет самостоятельный интерес – его можно использовать после того, как получена надежная оценка $\mathbf{T}$. Он весьма полезен при анализе обусловленности задачи оценивания $\mathbf{T}$. Его можно использовать и для оценки смещения $\boldsymbol{\Delta}$.

Функционал (12) минимизируется по $\mathbf{q}(t'_1)$ и $\boldsymbol{\Delta}$ при условии $\|\mathbf{q}(t'_1)\| = 1$. Оно обеспечивается способом, использованным в п. 3 при минимизации функционала (3) по кватерниону $\mathbf{T}$. Для простоты письма объединим величины

$\mathbf{q}(t_1')$ и $\mathbf{\Delta}$ в семимерный вектор x и будем рассматривать функционал (12) как функцию $\Phi(x)$. Минимизация Φ по x выполнялась сначала методом **Л**евенберга–**М**арквардта (ЛМ), а затем методом **Г**аусса–**Н**ьютона (ГН) [4]. Метод ЛМ – это метод ГН с простейшей регуляризацией. По этой причине опишем только реализацию метода ГН. На каждой итерации этого метода поправка $\mathbf{\Delta q}(t_1')$ к имеющемуся значению $\mathbf{q}(t_1')$ ищется в виде $\mathbf{\Delta q}(t_1') = [\mathbf{q}(t_1') \circ \boldsymbol{\theta}]/2$, где $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ – вектор бесконечно малого поворота, задающий изменение ориентации системы $x_1x_2x_3$ в окрестности положения $\mathbf{q}(t_1')$. Компоненты θ_i относятся к системе $x_1x_2x_3$. Эти компоненты и поправки δ_i к смещениям Δ_i объединим в вектор $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3)^{\mathrm{T}}$, который находится из системы нормальных уравнений с матрицей $\| C_{ij} \|_{i,j=1}^{6}$ и правой частью $\| D_i \|_{i,=1}^{6}$:

$$C_{ij} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{l=1}^{3} w_l A_{l,i}^{(m)} A_{l,j}^{(m)}, \quad D_i = -\sum_{m=1}^{M} \sum_{l=1}^{3} w_l a_l^{(m)} A_{l,i}^{(m)}, \tag{13}$$

$$\left(A_{1,i}^{(m)}, A_{2,i}^{(m)}, A_{3,i}^{(m)} \right) = \frac{1}{2} \mathrm{Im} \left\{ [\mathbf{Q}^{(m)}]^{-1} \circ \mathbf{q}(t_m) \circ \boldsymbol{\psi}_i(t_m) \circ \mathbf{T} \right\}.$$

Здесь векторные функции $\boldsymbol{\psi}_i(t)$ при $i = 1, 2, 3$ вычисляются с использованием разностной схемы (11) при $\mathbf{e} = 0$ и начальных условиях $\boldsymbol{\psi}_i(t_1') = \mathbf{e}_i$; в случае $i = 4, 5, 6$ схема (11) используется при $\mathbf{e} = \mathbf{e}_i$ и начальных условиях $\boldsymbol{\psi}_i(t_1') = 0$. Во всех этих вариантах вектор $\Delta\boldsymbol{\alpha}^{(n+1)}$ в (11) вычисляется по второй формуле (8). Указанные варианты схемы (11) определяют функции $\boldsymbol{\psi}_i(t)$ на сетке $\{t_n'\}$. Векторы $\boldsymbol{\psi}_i(t_m)$ при $t_m \in [t_n', t_{n+1}')$ находятся из уравнения (11), в котором вместо $\Delta\boldsymbol{\alpha}^{(n+1)}$ использован вектор $\Delta\boldsymbol{\alpha}(t_m)$, заданный первой формулой (9).

С помощью функций $\boldsymbol{\psi}_i(t)$ вариацию кватерниона $\mathbf{q}(t_m)$ вследствие вариаций начального условия $\mathbf{q}(t_1)$ и смещения $\mathbf{\Delta}$ можно записать в виде

$$\Delta\mathbf{q}(t_m) = \frac{1}{2} \mathbf{q}(t_m) \circ \sum_{i=1}^{3} [\theta_i \boldsymbol{\psi}_i(t_m) + \delta_i \boldsymbol{\psi}_{i+3}(t_m)].$$

Отсюда следуют соотношения

$$\Delta a_l^{(m)} = \sum_{i=1}^{3} [A_{l,i}^{(m)} \theta_i + A_{l,i+3}^{(m)} \delta_i] \quad (l = 1, 2, 3),$$

использованные при выводе нормальных уравнений.

Прибавление найденной поправки $\mathbf{\Delta q}(t_1')$ к имеющемуся значению $\mathbf{q}(t_1')$ нарушает условие нормировки, поэтому новый кватернион ориентации нормируется. Внесенные нормировкой изменения уточненных компонент кватерниона являются величинами второго порядка относительно $\mathbf{\Delta q}(t_1')$.

Точность оценки $x_* = \arg\min \Phi(x)$ и ошибки аппроксимации измерений будем характеризовать, следуя методу наименьших квадратов, соответствующими стандартными отклонениями. Последние вычисляются в предположении, что ошибки ξ_m в измерениях некоррелированы, имеют нулевые математические ожидания, а их дисперсии не зависят от m и обратно пропорциональны весам w_i. Вследствие соотношения $\|\mathbf{q}(t_1')\|=1$ оценка x_* имеет вырожденную ковариационную матрицу. Чтобы избежать вырождения и сделать характеризацию ошибок более наглядной, ошибки $\mathbf{\Delta q}(t_1')$ в задании кватернионной компоненты (блока) $\mathbf{q}(t_1')$ вектора x_* представим в виде $\mathbf{\Delta q}(t_1')=[\mathbf{q}(t_1')\circ\boldsymbol{\theta}]/2$, где теперь $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ – случайный вектор бесконечно малого поворота. Величины θ_i имеют нулевые математические ожидания и вместе с ошибками остальных компонент x_* описываются ковариационной матрицей

$$K_x=\sigma^2 C_*^{-1}=\|K_{ij}\|_{i,j=1}^6, \qquad \sigma^2=\frac{\Phi(x_*)}{3M-6}.$$

Здесь σ^2 – оценка единицы веса, C_* – матрица $\|C_{ij}\|$, вычисленная в точке x_*. Точность аппроксимации измерений будем характеризовать стандартным отклонением σ, точность оценки x_* – стандартными отклонениями $\sqrt{K_{jj}}$ $(j=1,2,\ldots 6)$. Стандартные отклонения величин θ_i и Δ_i будем обозначать $\sigma_{\theta i}$, $\sigma_{\Delta i}$ $(i=1,2,3)$.

Приведем примеры оценивания $\mathbf{\Delta q}(t_1')$ и $\mathbf{\Delta}$. В первом примере использованы измерения ЗД$_1$ и ДУС, которые в п. 3 были использованы при оценивании кватерниона $\mathbf{T}_1$ (см. рис. 1). Построенные по измерениям ДУС графики квазиуглов $\phi_i(t)$ $(i=1,2,3)$, $t_1'\le t\le t_N'$ приведены на рис. 4. На рис. 5 приведены графики компонент кватерниона $\mathbf{Q}_1^{(m)}$ для моментов времени t_m, попавших в интервал (t_1',t_N'). Аппроксимация величин $\mathbf{Q}_1^{(m)}$ решением разностной схемы (8), (9) строилась при значении $\mathbf{T}_1$, найденном в п. 3. Минимизация функционала (12) дала следующие результаты:

$$\mathbf{\Phi}(x_*)=3.393\cdot 10^{-5}, \quad \sigma=7.18\cdot 10^{-5}\approx 29.6'',$$
$$\mathbf{q}(t_1)=(0.519566,-0.042702,0.087723,\ -0.848842),$$
$$\Delta_1=1.14\cdot 10^{-6}\text{c}^{-1}, \quad \Delta_2=3.80\cdot 10^{-8}\text{c}^{-1}, \quad \Delta_3=2.44\cdot 10^{-6}\text{c}^{-1},$$
$$\sigma_{\theta 1}=6.1\cdot 10^{-6}, \quad \sigma_{\theta 2}=6.7\cdot 10^{-6}, \quad \sigma_{\theta 3}=8.1\cdot 10^{-6},$$
$$\sigma_{\Delta 1}=2.0\cdot 10^{-8}\text{c}^{-1}, \quad \sigma_{\Delta 2}=2.3\cdot 10^{-8}\text{c}^{-1}, \quad \sigma_{\Delta 3}=2.6\cdot 10^{-8}\text{c}^{-1}.$$

Собственные числа матрицы C_* следующие: 70, 139, 141, $2.62\cdot 10^7$, $4.92\cdot 10^7$, $5.24\cdot 10^7$. Как видим, эта матрица достаточно хорошо обусловлена. Аппроксимация измерений ЗД$_1$ получилась достаточно точной – графики величин $\mathbf{Q}_1^{(m)}$ и аппроксимирующего решения схемы (8), (9) практически совпали. В такой ситуации ошибки аппроксимации целесообразно характеризовать графиками остатков $\theta_i^{(m)} = -2a_i^{(m)}$ $(i = 1, 2, 3)$. Эти графики приведены на рис. 6. Величины $\theta_i^{(m)}$ – компоненты в системе $y_1^{(1)} y_2^{(1)} y_3^{(1)}$ вектора $4\mathbf{F}^{-1}[\mathbf{T}_1^{-1} \circ \mathbf{q}^{-1}(t_m) \circ \mathbf{Q}_1^{(m)}]$, т. е. вектора бесконечно малого поворота, на который надо повернуть эту систему, чтобы перевести ее из расчетного положения $\mathbf{q}(t_m) \circ \mathbf{T}_1$ в положение $\mathbf{Q}_1^{(m)}$. Среднеквадратичное значение величин $\theta_i^{(m)}$ равно 2σ. Как видно из рис. 6, согласование измерений ДУС и ЗД$_1$ заметно ухудшается на участках интенсивного движения КА. Экстремальные значения величин на рисунке намного превосходят паспортную точность ЗД.

Во втором примере рассматриваются измерения ЗД$_2$ и ДУС, по которым в п. 3 оценивался кватернион $\mathbf{T}_2$ (см. рис. 2). Использованные здесь квазиуглы $\phi_i(t)$ – те же, что и предыдущем примере (рис. 4). На рис. 7 приведены графики компонент кватерниона $\mathbf{Q}_2^{(m)}$ для моментов времени $t_m \in (t_1', t_N')$. Минимизация функционала (12) выполнялась при значении $\mathbf{T}_2$, найденном в п. 3, и привела к следующим результатам:

$$\Phi(x_*) = 2.328 \cdot 10^{-4}, \quad \sigma = 1.59 \cdot 10^{-4} \approx 65.7'',$$
$$\mathbf{q}(t_1) = (0.519520, -0.042754, 0.087610, -0.848879),$$
$$\Delta_1 = -3.81 \cdot 10^{-7}\text{с}^{-1}, \quad \Delta_2 = -5.40 \cdot 10^{-8}\text{с}^{-1}, \quad \Delta_3 = -4.16 \cdot 10^{-7}\text{с}^{-1},$$
$$\sigma_{\theta 1} = 1.3 \cdot 10^{-5}, \quad \sigma_{\theta 2} = 1.3 \cdot 10^{-5}, \quad \sigma_{\theta 3} = 1.3 \cdot 10^{-5},$$
$$\sigma_{\Delta 1} = 2.7 \cdot 10^{-8}\text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\Delta 2} = 3.2 \cdot 10^{-8}\text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\Delta 3} = 2.7 \cdot 10^{-8}\text{с}^{-1}.$$

Собственные числа матрицы C_* следующие: 102, 188, 192, $8.70 \cdot 10^7$, $1.48 \cdot 10^8$, $1.72 \cdot 10^8$. Как видим, эта матрица достаточно хорошо обусловлена. Графики величин $\theta_i^{(m)} = -2a_i^{(m)}$ $(i = 1, 2, 3)$ приведены на рис. 8. В данном случае величины $\theta_i^{(m)}$ – компоненты в системе $y_1^{(2)} y_2^{(2)} y_3^{(2)}$ вектора $4\mathbf{F}^{-1}[\mathbf{T}_2^{-1} \circ \mathbf{q}^{-1}(t_m) \circ \mathbf{Q}_2^{(m)}]$.

Теперь рассмотрим случай, когда кватернион $\mathbf{T}$ требуется уточнить. В этом случае минимизация функционала (12) выполняется по $\mathbf{q}(t_1')$, $\mathbf{\Delta}$ и $\mathbf{T}$ с учетом условий нормировки $\|\mathbf{q}(t_1')\| = 1$, $\|\mathbf{T}\| = 1$. Объединим величины $\mathbf{q}(t_1')$, $\mathbf{\Delta}$ и $\mathbf{T}$ в вектор $X \in R^{11}$ и будем рассматривать (12) как функцию $\Phi(X)$. Минимизация Φ по X выполнялась сначала методом ЛМ, а затем методом ГН. Опишем реализацию метода ГН. На каждой итерации этого метода поправки $\Delta\mathbf{q}(t_1')$ и $\Delta\mathbf{T}$ к имеющимся значениям $\mathbf{q}(t_1')$ и $\mathbf{T}$ ищутся в виде

$$\Delta\mathbf{q}(t_1') = \frac{1}{2}\mathbf{q}(t_1') \circ \boldsymbol{\theta}, \quad \Delta\mathbf{T} = \frac{1}{2}\mathbf{T} \circ \boldsymbol{\chi}, \tag{14}$$

где вектор бесконечно малого поворота $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ задает изменение ориентации системы координат $x_1 x_2 x_3$ относительно системы $X_1 X_2 X_3$, а аналогичный вектор $\boldsymbol{\chi}=(\chi_1,\chi_2,\chi_3)$ задает изменение ориентации системы $y_1y_2y_3$ по отношению к системе $x_1x_2x_3$. Величины θ_i, χ_i и поправки δ_i к смещениям Δ_i сводятся в вектор $(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\delta_1,\delta_2,\delta_3,\chi_1,\chi_2,\chi_3)^{\mathrm{T}}$, который находится из системы нормальных уравнений с матрицей $\| C_{ij} \|_{i,j=1}^{9}$ и правой частью $\| D_i \|_{i,=1}^{9}$:

$$C_{ij}=\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{3} w_l A_{l,i}^{(m)} A_{l,j}^{(m)}, \quad D_i=-\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{3} w_l a_l^{(m)} A_{l,i}^{(m)},$$

$$\left(A_{1,i}^{(m)},\, A_{2,i}^{(m)},\, A_{3,i}^{(m)}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{[\mathbf{Q}^{(m)}]^{-1}\circ\mathbf{q}(t_m)\circ\boldsymbol{\psi}_i(t_m)\circ\mathbf{T}\right\} \quad (i=1,2,\ldots 6),$$

$$\left(A_{1,i}^{(m)},\, A_{2,i}^{(m)},\, A_{3,i}^{(m)}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{[\mathbf{Q}^{(m)}]^{-1}\circ\mathbf{q}(t_m)\circ\mathbf{T}\circ\mathbf{e}_{i-6}\right\} \quad (i=7,8,9).$$

Эти соотношения получены с учетом того обстоятельства, что вариацию кватерниона $\mathbf{q}(t_m)\circ\mathbf{T}$ вследствие вариаций начального условия $\mathbf{q}(t_1')$, смещения $\boldsymbol{\Delta}$ и кватерниона $\mathbf{T}$ можно записать в виде

$$\Delta[\mathbf{q}(t_m)\circ\mathbf{T}]=\frac{1}{2}\mathbf{q}(t_m)\circ\left\{\sum_{i=1}^{3}[\theta_i\boldsymbol{\psi}_i(t_m)+\delta_i\boldsymbol{\psi}_{i+3}(t_m)]\right\}\circ\mathbf{T}+\frac{1}{2}\mathbf{q}(t_m)\circ\mathbf{T}\circ\sum_{i=1}^{3}\chi_i\mathbf{e}_i .$$

Расчет матрицы и правой части системы нормальных уравнений выполнялся по той же схеме, что при неизменном кватернионе $\mathbf{T}$. Прибавление поправок $\Delta\mathbf{q}(t_1')$ и $\Delta\mathbf{T}$ к имеющимся значениям $\mathbf{q}(t_1')$ и $\mathbf{T}$ сопровождалось нормировкой полученных кватернионов.

Точность оценки $X_*=\arg\min\Phi(X)$ характеризовалась соответствующими стандартными отклонениями. Ошибки $\Delta\mathbf{q}(t_1')$ и $\Delta\mathbf{T}$ в задании кватернионных компонент $\mathbf{q}(t_1')$ и $\mathbf{T}$ вектора X_* представлялись в виде (14), где теперь $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ и $\boldsymbol{\chi}=(\chi_1,\chi_2,\chi_3)$ – случайные векторы бесконечно малого поворота. Величины θ_i, χ_i имеют нулевые математические ожидания и вместе с ошибками остальных компонент x_* описываются ковариационной матрицей

$$K_X=\sigma^2 C_*^{-1}=\| K_{ij} \|_{i,j=1}^{9}, \qquad \sigma^2=\frac{\Phi(X_*)}{3M-9}.$$

Здесь σ^2 – оценка единицы веса, C_* – матрица $\| C_{ij} \|$, вычисленная в точке X_*. Точность аппроксимации измерений будем характеризовать стандартным отклонением σ, точность оценки X_* – стандартными отклонениями $\sqrt{K_{jj}}$ $(j=1,2,\ldots 9)$. Стандартные отклонения величин θ_i, Δ_i и χ_i обозначим $\sigma_{\theta i}$, $\sigma_{\Delta i}$, $\sigma_{\chi i}$ $(i=1,2,3)$.

В качестве примера оценим величины $\mathbf{q}(t_1')$, $\boldsymbol{\Delta}$ и $\mathbf{T}_1$ по данным, приведенным на рис. 4, 5. Минимизация функционала $\Phi(X)$ дала следующие результаты:

$$\Phi(X_*) = 3.318\cdot 10^{-5}, \quad \sigma = 7.10\cdot 10^{-5} \approx 29.3'',$$
$$\mathbf{q}(t_1) = (0.519501, -0.042739, 0.087820, \ -0.848870),$$
$$\Delta_1 = 9.81\cdot 10^{-7}\text{с}^{-1}, \quad \Delta_2 = -2.09\cdot 10^{-7}\text{с}^{-1}, \quad \Delta_3 = 2.58\cdot 10^{-6}\text{с}^{-1},$$
$$\mathbf{T}_1 = (0.000270, \ -0.000891, \ 0.965871 \ 0.259020),$$
$$\sigma_{\theta 1} = 1.9\cdot 10^{-5}, \quad \sigma_{\theta 2} = 2.1\cdot 10^{-5}, \quad \sigma_{\theta 3} = 6.3\cdot 10^{-5},$$
$$\sigma_{\Delta 1} = 3.6\cdot 10^{-8}\text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\Delta 2} = 6.6\cdot 10^{-8}\text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\Delta 3} = 3.1\cdot 10^{-8}\text{с}^{-1},$$
$$\sigma_{\chi 1} = 1.9\cdot 10^{-5}, \quad \sigma_{\chi 2} = 4.0\cdot 10^{-5}, \quad \sigma_{\chi 3} = 5.2\cdot 10^{-5}.$$

Собственные числа матрицы C_*: 0.617, 7.76, 8.85, 139, 275, 275, $2.62\cdot 10^7$, $4.92\cdot 10^7$, $5.24\cdot 10^7$. Собственный вектор этой матрицы, отвечающий ее минимальному собственному числу 0.617, имеет вид

$$(0.0608, 0.1338, 0.6954, 0.0001, -0.0006, 0.0000, 0.0663, -0.4148, 0.5642)^{\mathrm{T}}.$$

По сравнению со случаем фиксированного $\mathbf{T}_1$ минимум функционала (12) уменьшился незначительно, аппроксимация измерений ЗД$_1$ практически не улучшилась – ср. значения σ и графики величин $\theta_i^{(n)} = -2a_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, 3)$ на рис. 6 и 9. При этом обусловленность матрицы нормальных уравнений существенно ухудшилась. В приведенном выше собственном векторе компоненты с достаточно большими абсолютными величинами есть в блоках $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\chi}$. Такая же ситуация имеет место для собственных векторов, отвечающих собственным числам 7.76 и 8.85. По этой причине величина $\mathbf{q}(t_1')$ уточняется с меньшей точностью, чем в примере с фиксированным $\mathbf{T}_1$. Точность определения кватерниона $\mathbf{T}_1$ оказалась сравнима с точностью определения $\mathbf{q}(t_1')$. Причина ухудшения обусловленности матрицы C_* и снижения точности определения $\mathbf{q}(t_1')$ – не очень интенсивное вращательное движение КА. Уточнение кватерниона $\mathbf{T}_1$ мало изменило его значение, найденное в п. 3. Это изменения адекватно описываются величинами $\sigma_{\chi i}$ $(i = 1, 2, 3)$.

В качестве второго примера оценки $\mathbf{T}$ приведем оценки $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{q}(t_1')$ и $\boldsymbol{\Delta}$ по отрезку данных, приведенных на рис. 4, 7. Минимизация функционала $\Phi(X)$ на этом отрезке дала следующие результаты:

$$\Phi(X_*) = 2.018\cdot 10^{-4}, \quad \sigma = 1.48\cdot 10^{-4} \approx 61.2'',$$
$$\mathbf{q}(t_1) = (0.519865, -0.042220, 0.087687, \ -0.848686),$$
$$\Delta_1 = -2.93\cdot 10^{-7}\text{с}^{-1}, \quad \Delta_2 = -1.79\cdot 10^{-7}\text{с}^{-1}, \quad \Delta_3 = -3.74\cdot 10^{-7}\text{с}^{-1},$$
$$\mathbf{T}_2 = (0.892207, \ -0.238924, \ -0.370086, \ -0.099592)$$
$$\sigma_{\theta 1} = 4.0\cdot 10^{-5}, \quad \sigma_{\theta 2} = 3.0\cdot 10^{-5}, \quad \sigma_{\theta 3} = 8.6\cdot 10^{-5},$$
$$\sigma_{\Delta 1} = 2.6\cdot 10^{-8}\text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\Delta 2} = 3.1\cdot 10^{-8}\text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\Delta 3} = 2.5\cdot 10^{-8}\text{с}^{-1},$$
$$\sigma_{\chi 1} = 8.7\cdot 10^{-5}, \quad \sigma_{\chi 2} = 2.0\cdot 10^{-5}, \quad \sigma_{\chi 3} = 4.0\cdot 10^{-5}.$$

Собственные числа матрицы C_*: 1.23, 26.7, 40.6, 214, 388, 399, $8.70\cdot 10^7$, $1.48\cdot 10^8$, $1.72\cdot 10^8$. Собственный вектор этой матрицы, отвечающий ее минимальному собственному числу 1.23, имеет вид

$$(0.2721, 0.1508, 0.6381, 0.0000, -0.0001, 0.0000, -0.6476, 0.0191, -0.2764)^{\mathrm{T}}.$$

Минимум функционала (12) по сравнению со случаем фиксированного $\mathbf{T}_2$ уменьшился незначительно, аппроксимация измерений ЗД$_2$ улучшилась незначительно – см. графики величин $\theta_i^{(n)} = -2a_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, 3)$ на рис. 8 и 10, обусловленность матрицы нормальных уравнений существенно ухудшилась. В приведенном собственном векторе компоненты с достаточно большими абсолютными величинами есть в блоках $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\chi}$. Такая же ситуация имеет место для собственных векторов, отвечающих собственным числам 26.7 и 40.6. По этой причине величина $\mathbf{q}(t_1')$ уточняется с меньшей точностью, чем в примере с фиксированным $\mathbf{T}_2$. Точность определения кватернионов $\mathbf{q}(t_1')$ и $\mathbf{T}_2$ примерно одинакова. Причина ухудшения обусловленности матрицы C_* и снижения точности определения $\mathbf{q}(t_1')$ та же, что и в предыдущем примере – не очень интенсивное вращательное движение КА (в примерах рассматривалось одно и то же движение КА, использовались одни и те же измерения ДУС, но измерения разных ЗД). Уточнение кватерниона $\mathbf{T}_2$ мало изменило его значение, найденное в п. 3.

5. Определение движения КА по измерениям ДУС и двух ЗД. Если измерения ЗД$_1$ и ЗД$_2$ согласованы друг с другом, то при реконструкции движения КА целесообразно использовать показания обоих ЗД совместно. Это повысит точность реконструкции. При совместной обработке кватернионы $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ будем считать известными. Реконструкция движения в этом случае сводится к минимизации функционала $\Phi_\Sigma = \Phi_1 + \Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 имеют вид (12) и охватывают соответственно измерения ЗД$_1$ и ЗД$_2$. Матрица и правая часть системы нормальных уравнений составляются из блоков матриц и правых частей систем (13), отвечающих отдельным датчикам.

Проверка согласованности измерений ЗД$_1$ и ЗД$_2$ сводилась к изучению зависимости от времени параметров взаимной ориентации их собственных систем координат. Обозначим $\mathbf{e}_3^{(k)}$ орты осей $y_3^{(k)}$ $(k = 1, 2)$. Эти оси – оптические оси объективов ЗД$_{1,2}$, поэтому их направления в пространстве определяются существенно (примерно на порядок) точнее направления осей $y_1^{(k)}$ и $y_2^{(k)}$. Положим $\gamma(t_m) = \arccos[\mathbf{e}_3^{(1)}(t_m)\cdot \mathbf{e}_3^{(2)}(t_m)]$. Угол $\gamma(t_m)$ определен только в тех узлах сетки $\{t_n\}$, для которых имеются показания обоих ЗД. Обозначим через $\langle x\rangle$ и $\mathrm{RMS}(x)$ среднее и среднеквадратичное значения какой-либо функции $x(t)$ на сетке $\{t_n\}\subset(t_1', t_N')$. Рис. 11 содержит графики отклонений $\cos\gamma(t_m) - \langle\cos\gamma\rangle$ и

$\gamma(t_m)-\langle\gamma\rangle$ для движения КА, представленного на рис. 5, 7. В этом примере $\langle\cos\gamma\rangle = -0.280413$, $\langle\gamma\rangle = 106.28^\circ$, $\mathrm{RMS}(\Delta\cos\gamma) = 1.6\cdot10^{-5}$, $\mathrm{RMS}(\boldsymbol{\Delta}\gamma) = 3.41''$.

Кватернион перехода $\boldsymbol{\Lambda}_{12}$ от системы $y_1^{(2)}y_2^{(2)}y_3^{(2)}$ к системе $y_1^{(1)}y_2^{(1)}y_3^{(1)}$ можно вычислить двумя способами: по формуле $\boldsymbol{\Lambda}'_{12} = \mathbf{T}_1^{-1}\circ\mathbf{T}_2$ и по формулам

$$\boldsymbol{\Lambda}''_{12} = \|\mathbf{D}\|^{-1}\mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = \sum_m [\mathbf{Q}_1^{(m)}]^{-1}\circ\mathbf{Q}_2^{(m)}.$$

В последней формуле суммирование выполняется по тем значениям m, для которых имеются показания обоих ЗД и $t_m \in (t'_1, t'_N)$. Имеем

$$\boldsymbol{\Lambda}'_{12} = (-0.382443, 0.000796, -0.800307, -0461785),$$

$$\boldsymbol{\Lambda}''_{12} = (-0.382591, 0.001087, -0.800129, -0.461970),$$

$$\|\boldsymbol{\Lambda}'_{12} - \boldsymbol{\Lambda}''_{12}\| = 0.00042.$$

Более детальную информацию о согласованности измерений ЗД$_1$ и ЗД$_2$ можно получить, изучая отклонения одномоментных оценок $\boldsymbol{\Lambda}_{12}^{(m)} = [\mathbf{Q}_1^{(m)}]^{-1}\circ\mathbf{Q}_2^{(m)}$ от усредненного значения $\boldsymbol{\Lambda}''_{12}$. Такие отклонения удобно описывать векторами бесконечно малого поворота $\boldsymbol{\beta}^{(m)} = 4\mathbf{F}^{-1}\{\boldsymbol{\Lambda}_{12}^{(m)}\circ[\boldsymbol{\Lambda}''_{12}]^{-1}\}$. Компоненты вектора $\boldsymbol{\beta}^{(m)} = \left(\beta_1^{(m)}, \beta_2^{(m)}, \beta_3^{(m)}\right)$ относятся к системе $y_1^{(1)}y_2^{(1)}y_3^{(1)}$. Графики компонент этого вектора приведены на рис. 12. Как видно из этого рисунка и рис. 11, согласование измерений ЗД ухудшается, если КА совершает достаточно интенсивное вращательное движение.

Результаты минимизации функционала Φ_Σ на рассматриваемом движении КА при $w_1 = w_2 = 1$, $w_3 = 0.01$ следующие

$$\Phi_\Sigma(x_*) = 4.304\cdot10^{-4}, \quad \sigma = 1.65\cdot10^{-4} \approx 68.2'',$$
$$\mathbf{q}(t_1) = (0.519625, -0.042665, 0.087679, -0.848812),$$
$$\Delta_1 = -6.81\cdot10^{-7}\,\text{с}^{-1}, \quad \Delta_2 = 4.95\cdot10^{-7}\,\text{с}^{-1}, \quad \Delta_3 = -1.00\cdot10^{-7}\,\text{с}^{-1},$$
$$\sigma_{\theta1} = 1.1\cdot10^{-5}, \quad \sigma_{\theta2} = 1.1\cdot10^{-5}, \quad \sigma_{\theta3} = 1.4\cdot10^{-5},$$
$$\sigma_{\Delta1} = 2.8\cdot10^{-8}\,\text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\Delta2} = 3.6\cdot10^{-8}\,\text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\Delta3} = 3.2\cdot10^{-8}\,\text{с}^{-1}.$$

Собственные числа матрицы нормальных уравнений в точке минимума Φ_Σ следующие: 122, 213, 361, $6.67\cdot10^7$, $1.54\cdot10^8$, $2.11\cdot10^8$. Эта матрица достаточно хорошо обусловлена. Графиками остатков $\theta_i^{(m)} = -2a_i^{(m)}$ $(i = 1, 2, 3)$ для обоих ЗД приведены на рис. 13, 14. Сопоставление этих рисунков с рис. 6, 8 – 10 показывает, что совместная обработка двух ЗД ухудшает аппроксимацию их измерений с помощью принятой математической модели. Ухудшение аппроксимации на рис. 13, 14 по сравнению с рис. 6, 8 – 10 хорошо согласуется с рассогласованиями измерений ЗД$_1$ и ЗД$_2$, представленными на рис. 11, 12.

6. Моделирование реконструкции и прогноза вращательного движения КА в реальном времени. Алгоритмы, описанные в пп. 4, 5, можно использовать для моделирования определения движения КА в реальном времени. Длинный отрезок данных измерений ЗД$_{1,2}$ и приращений квазиуглов разбивается на смежные непересекающиеся отрезки длиной, например, 10 с. Значения кватернионов $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ считаются известными и неизменными. Движение КА на полученной совокупности коротких отрезков определяется последовательно. На очередном коротком отрезке минимизируется функционал Φ_Σ. Найденное в результате минимизации решение разностной схемы (8) является реконструкцией (аппроксимацией) фактического вращательного движения КА на этом отрезке. Затем посредством вычислений по схеме (8) найденное решение продолжается на следующий отрезок, в вычислениях используются приращения квазиуглов на новом отрезке и смещения $\mathbf{\Delta}$, найденные на предыдущем отрезке. Тем самым моделируется прогноз движения КА. Прогнозные значения кватернионов $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ на сетке $\{t_n\}$ сравниваются с данными измерений. Тем самым находится оценка точности прогноза. Затем на новом отрезке минимизируется функционал Φ_Σ, и т. д. На некоторых коротких отрезках часть или даже все измерения ЗД$_{1,2}$ могут отсутствовать. Тогда в качестве реконструкции движения следует использовать соответствующий прогноз.

В принципе такую последовательную обработку измерений можно организовать и на борту КА. При достаточно точном прогнозе оценка состояния КА будет доступна практически в каждый момент времени поступления измерений ДУС.

В качестве примера приведем результаты реконструкции описанным способом движения КА, рассмотренного выше. Обработка выполнялась на последовательности смежных отрезков времени длиной по 10 с при фиксированных $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$, найденных в п. 3. На рис. 15, 16 приведены результаты, полученные посредством минимизации функционала Φ_Σ на каждом таком отрезке. Здесь изображены графики компонент векторов $\boldsymbol{\theta}^{(m)} = 4\mathbf{F}^{-1}[\mathbf{T}_k^{-1} \circ \mathbf{q}^{-1}(t_m) \circ \mathbf{Q}_k^{(m)}]$, иллюстрирующие ошибки аппроксимации измерений ЗД$_1$ $(k=1)$ и ЗД$_2$ $(k=2)$. На рис. 17, 18 приведены аналогичные графики, характеризующие ошибки аппроксимации измерений **ЗД**$_{1,2}$ решениями разностной схемы (8), (9), построенными в режиме прогноза. В подписях к рис. 15 – 18 приведены количественные оценки точности аппроксимации. Здесь использованы следующие обозначения: $\langle\theta_k\rangle$ – среднее значение последовательности $\{\theta_k^{(m)}\}_m$, $\mathrm{med}|\theta_k - \langle\theta_k\rangle|$ – медиана последовательности $\{|\theta_k^{(m)} - \langle\theta_k\rangle|\}_m$ $(k=1,2,3)$. В данном случае медиана более адекватно характеризует ошибки аппроксимации, чем их среднеквадратичное отклонение. Для нормально распределенных величин стандартное отклонение примерно в 1.5 раза больше медианы их модулей, а в общем случае медиана менее чувствительна к наличию сравнительно малого числа больших отклонений.

Сравнение рис. 15, 16 или 17, 18 с рис. 6, 8 показывает, что при новом способе определения движения ошибки аппроксимации измерений $ЗД_{1,2}$ значительно уменьшились. Этот результат соответствует известному эмпирическому правилу, что аппроксимация движения какого-либо объекта решениями его уравнений движения, построенных на совокупности коротких смежных интервалов измерений, оказывается заметно точнее аппроксимации одним решением, построенным для объединенного длинного интервала. Такую последовательную обработку длинных рядов измерений можно использовать для контроля других способов реконструкции вращательного движения КА.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-01-143).

Литература

1. Shuster M.D. A survey of attitude representation // The Journal of the Astronautical Sciences. 1993. Vol. 41. No. 4. P. 439-517.
2. Сазонов В.В., Комаров М.М., Полежаев В.И., Никитин С.А., Ермаков М.К., Стажков В.М., Зыков С.Г., Рябуха С.Б., Асеведо Х., Либерман Е. Микроускорения на орбитальной станции "Мир" и оперативный анализ гравитационной чувствительности конвективных процессов тепло-массо-переноса // Космические исследования. 1999. Т.37. № 1. С. 86-101.
3. Панкратов В.А., Сазонов В.В. Проверка согласованности данных измерений магнитометров, установленных на борту ИСЗ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. № 42. С. 1-16.
4. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.
5. Аванесов Г.А., Красиков В.А., Никитин А.В., Сазонов В.В. Оценка точности определения параметров ориентации системы координат астроизмерительного прибора БОКЗ-М по экспериментальным данным // Космические исследования. 2015. Т. 53. № 4. С. 292-305.

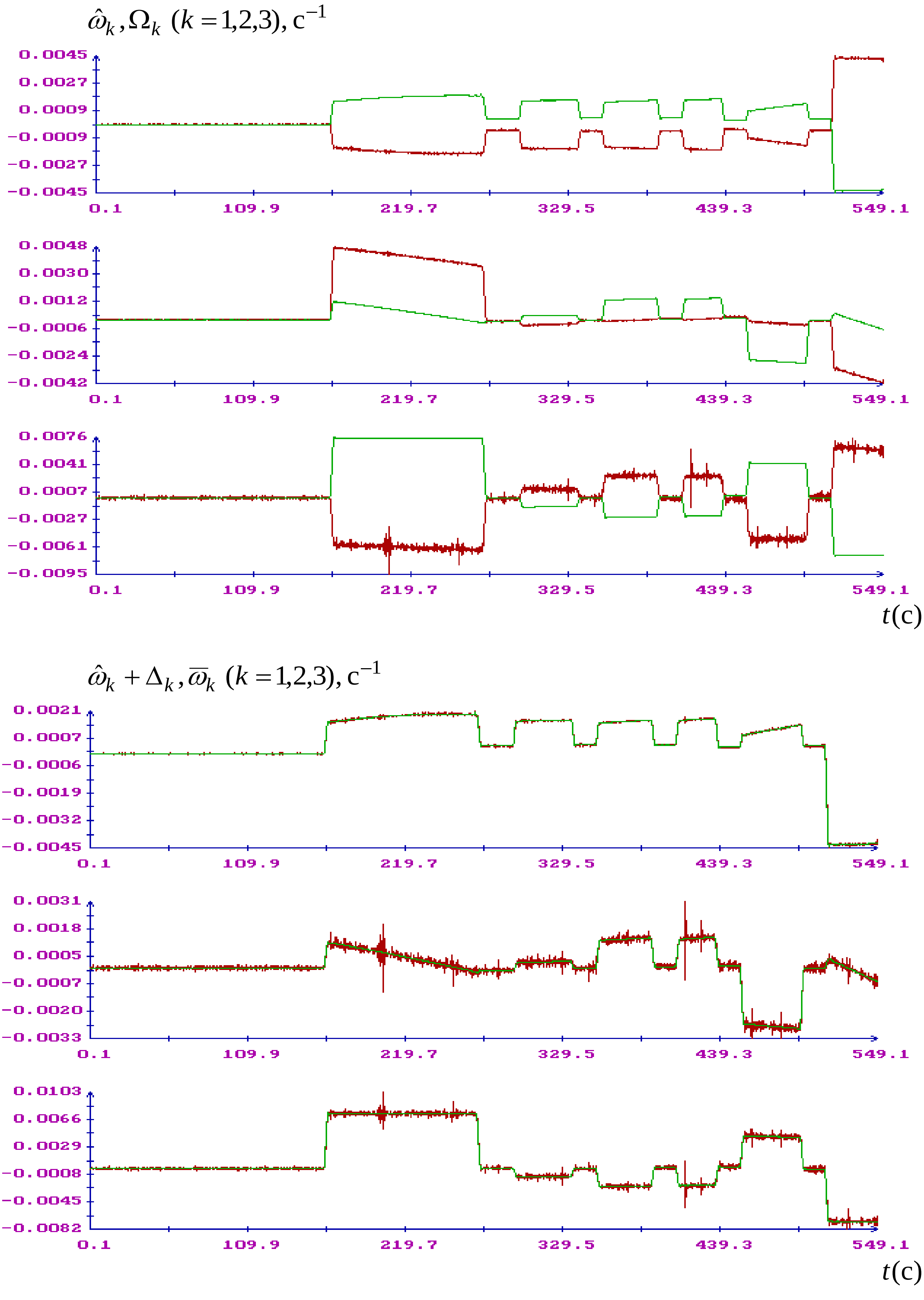

Рис. 1. $N = 2196$. Зеленые линии – измерения ДУС $\hat{\omega}_k$ и $\hat{\omega}_k + \Delta_k$, красные линии – оценки величин $\mathbf{\Omega}_k$ и $\overline{\omega}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ по данным ЗД$_1$, $\sigma_0 = 0.000174\,\text{c}^{-1}$.

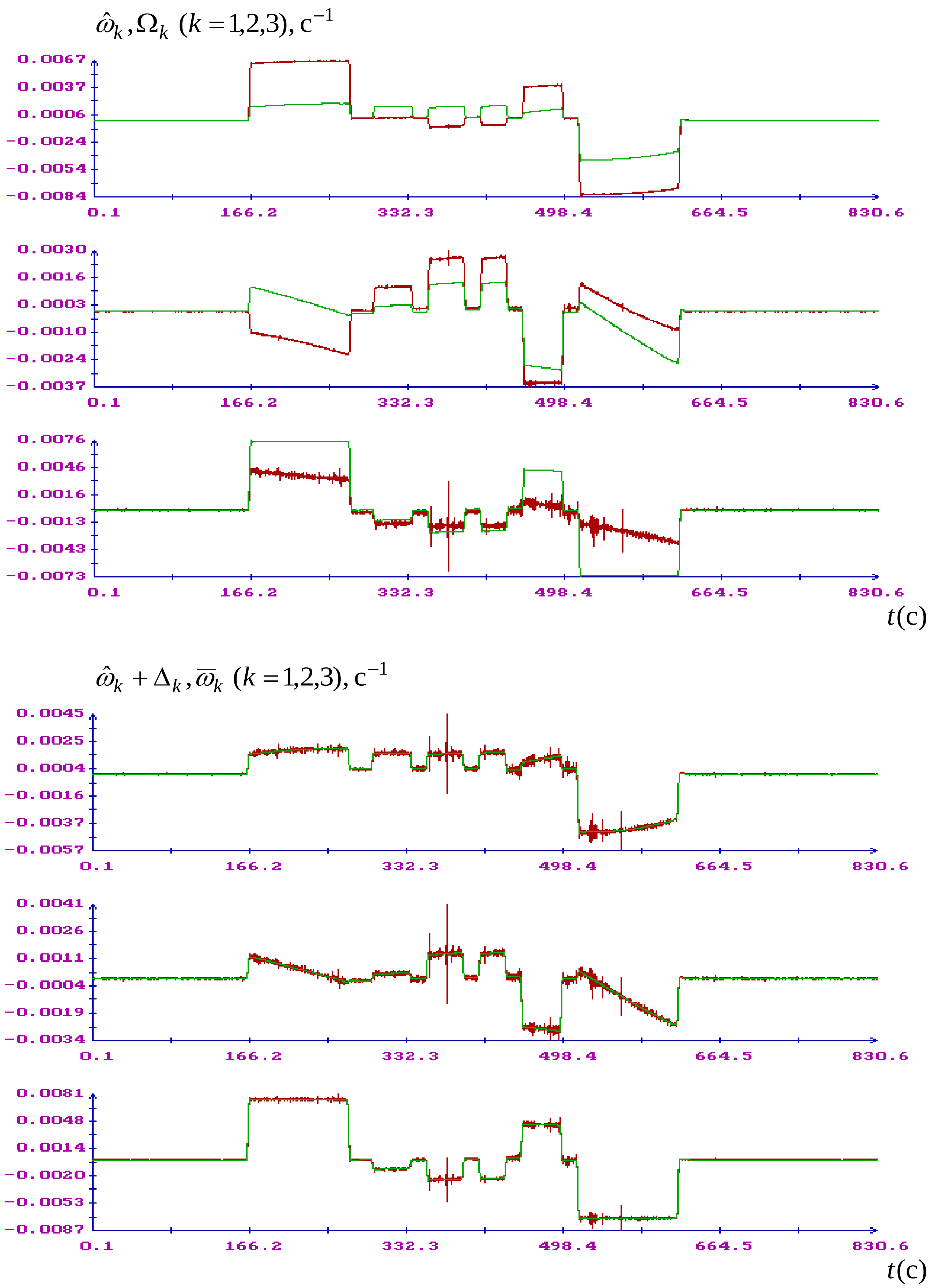

Рис. 2. $N=3060$. Зеленые линии – измерения ДУС $\hat{\omega}_k$ и $\hat{\omega}_k+\Delta_k$, красные линии – оценки величин $\mathbf{\Omega}_k$ и $\overline{\omega}_k$ $(k=1,2,3)$ по данным $ЗД_2$, $\sigma_0=0.000143$с$^{-1}$.

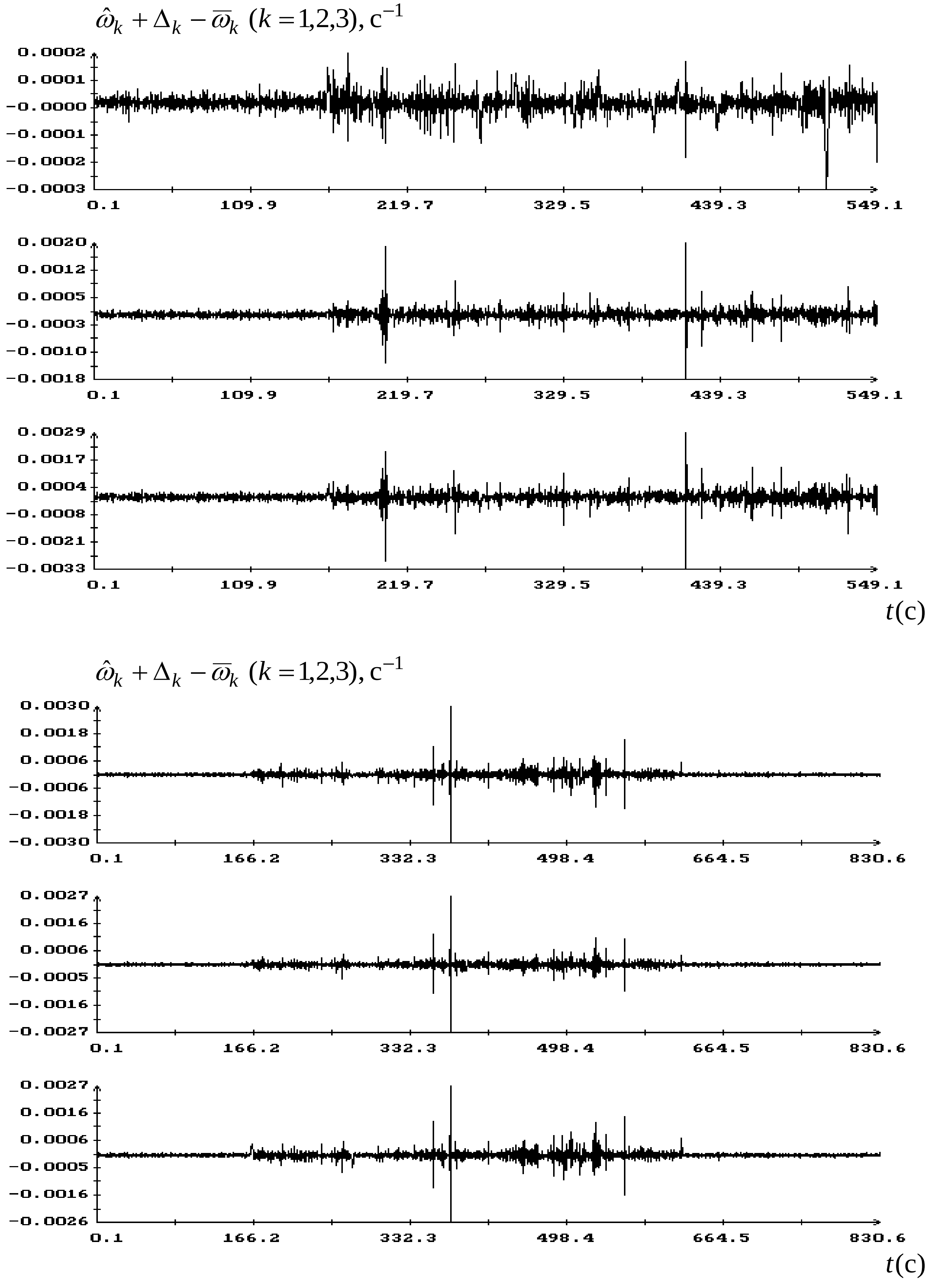

Рис. 3. Рассогласования компонент угловой скорости, измеренных ДУС и рассчитанных по показаниям ЗД. Графики в верхней половине иллюстрируют рассогласования с показаниями ЗД$_1$, в нижней половине – с показаниями ЗД$_2$.

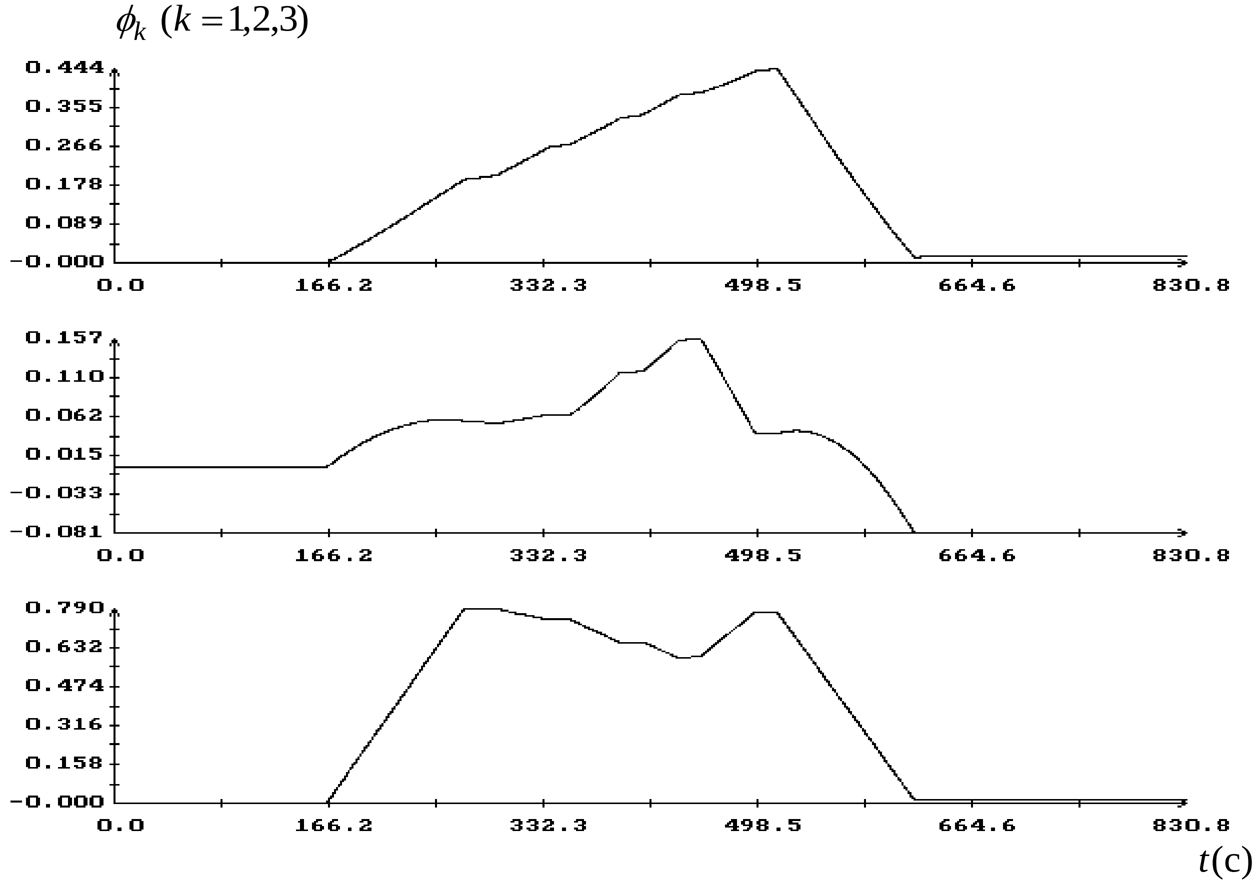

Рис. 4. Квазиуглы, найденные по измерениям ДУС.

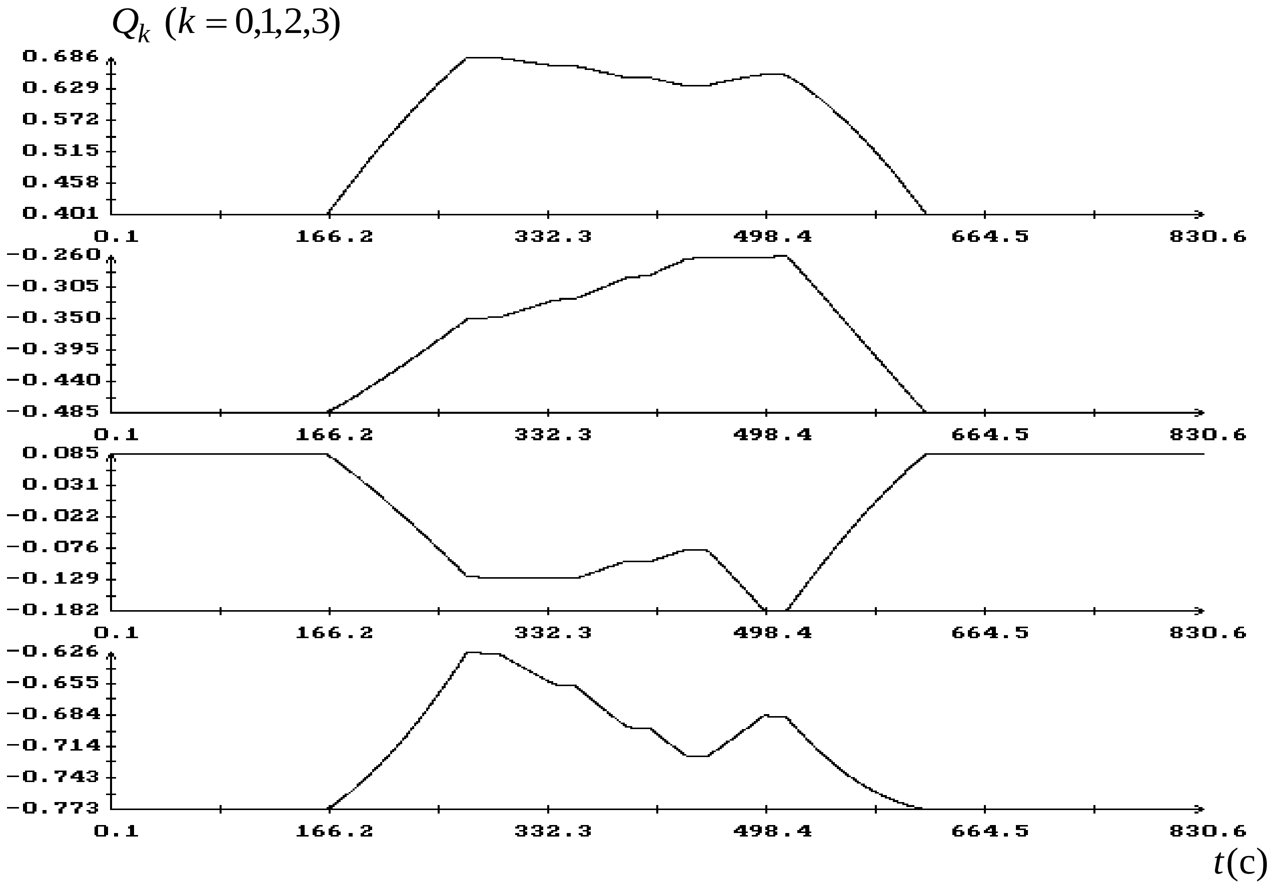

Рис. 5. Измерения ЗД$_1$.

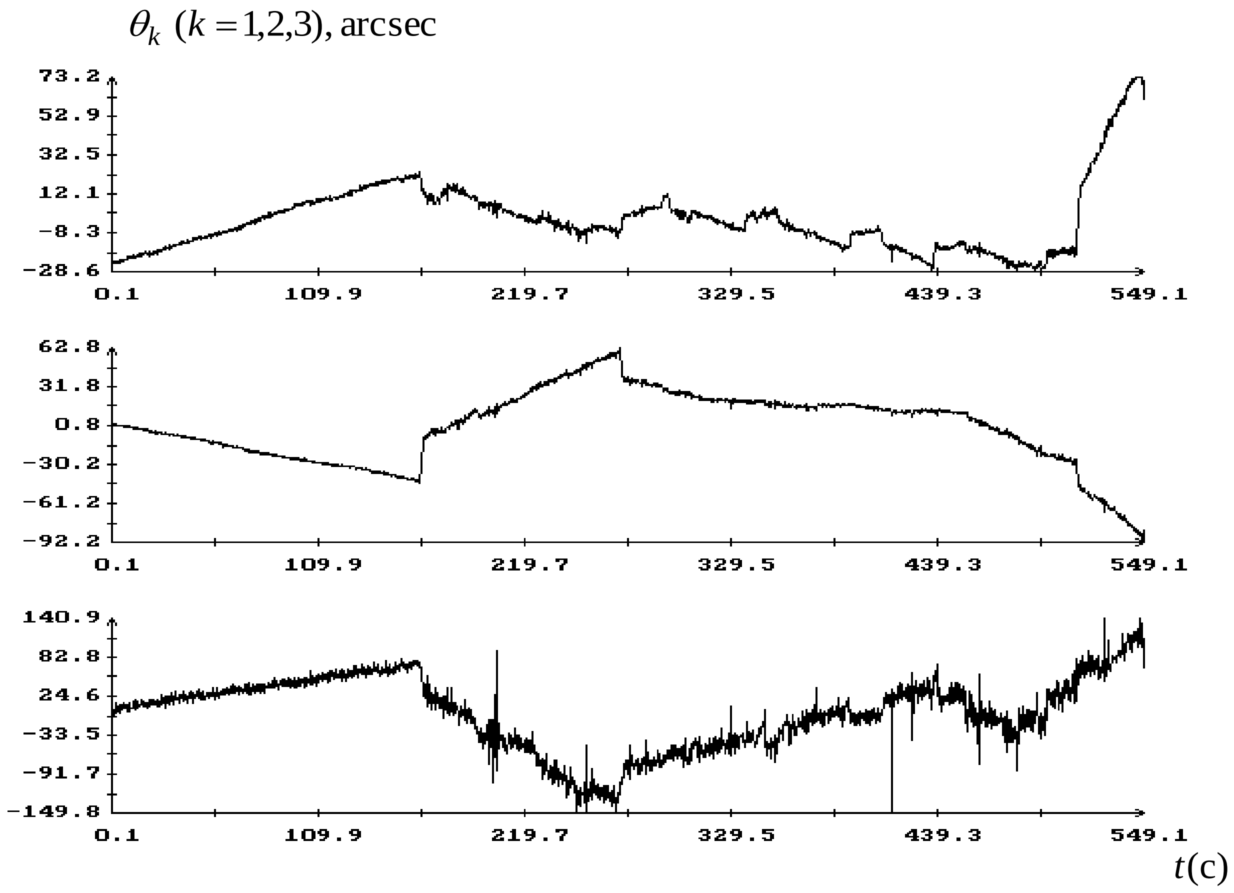

Рис. 6. Ошибки аппроксимации данных измерений ЗД$_1$, $\sigma = 29.6''$.

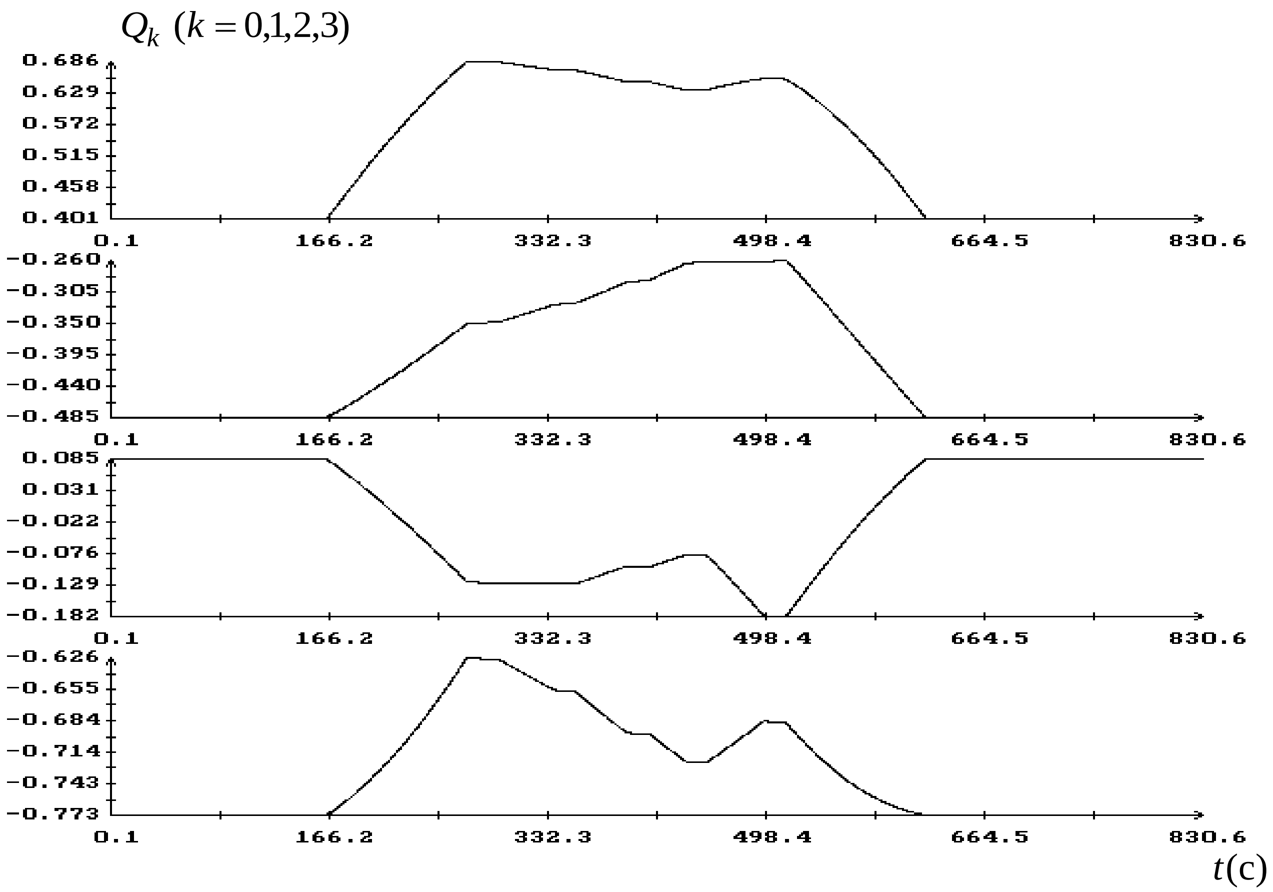

Рис. 7. Измерения ЗД$_2$.

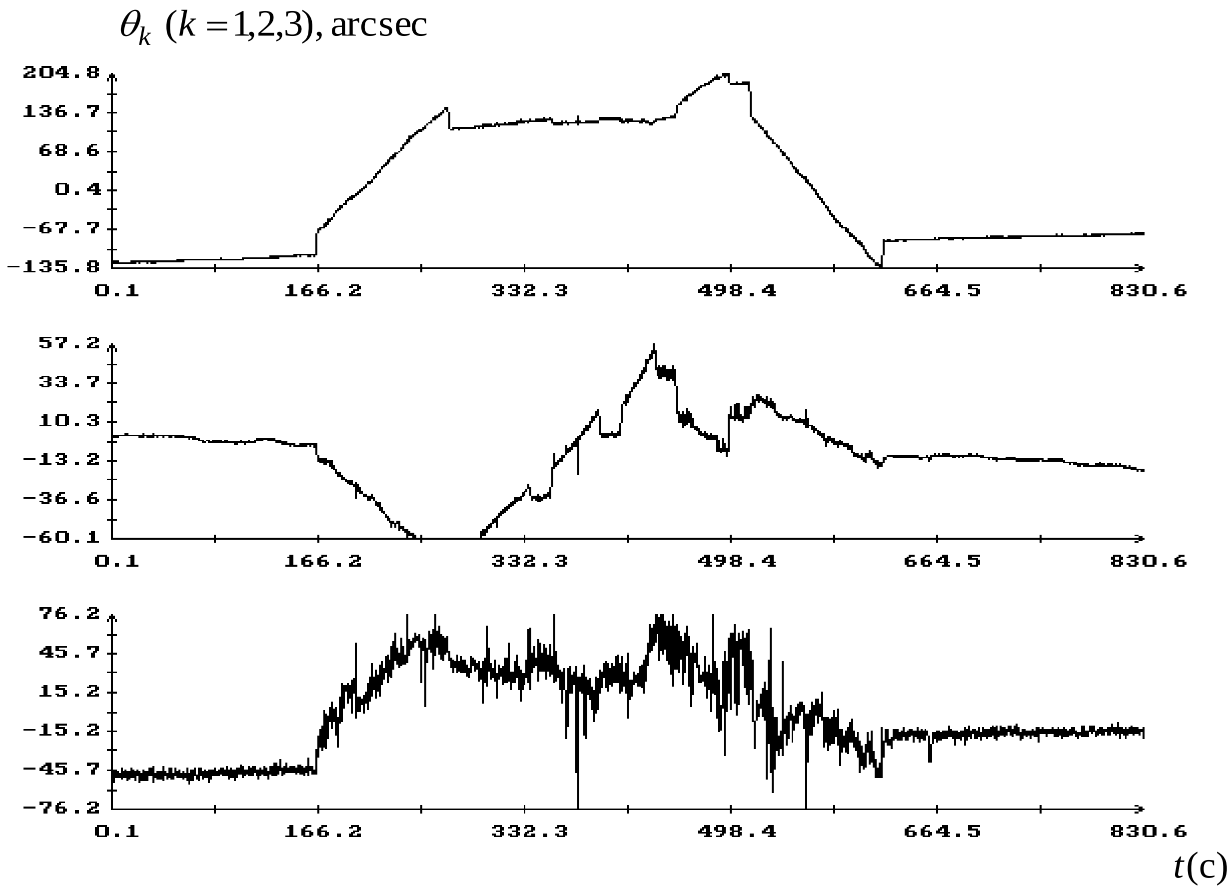

Рис. 8. Ошибки аппроксимации данных измерений ЗД$_2$, $\sigma = 65.7''$.

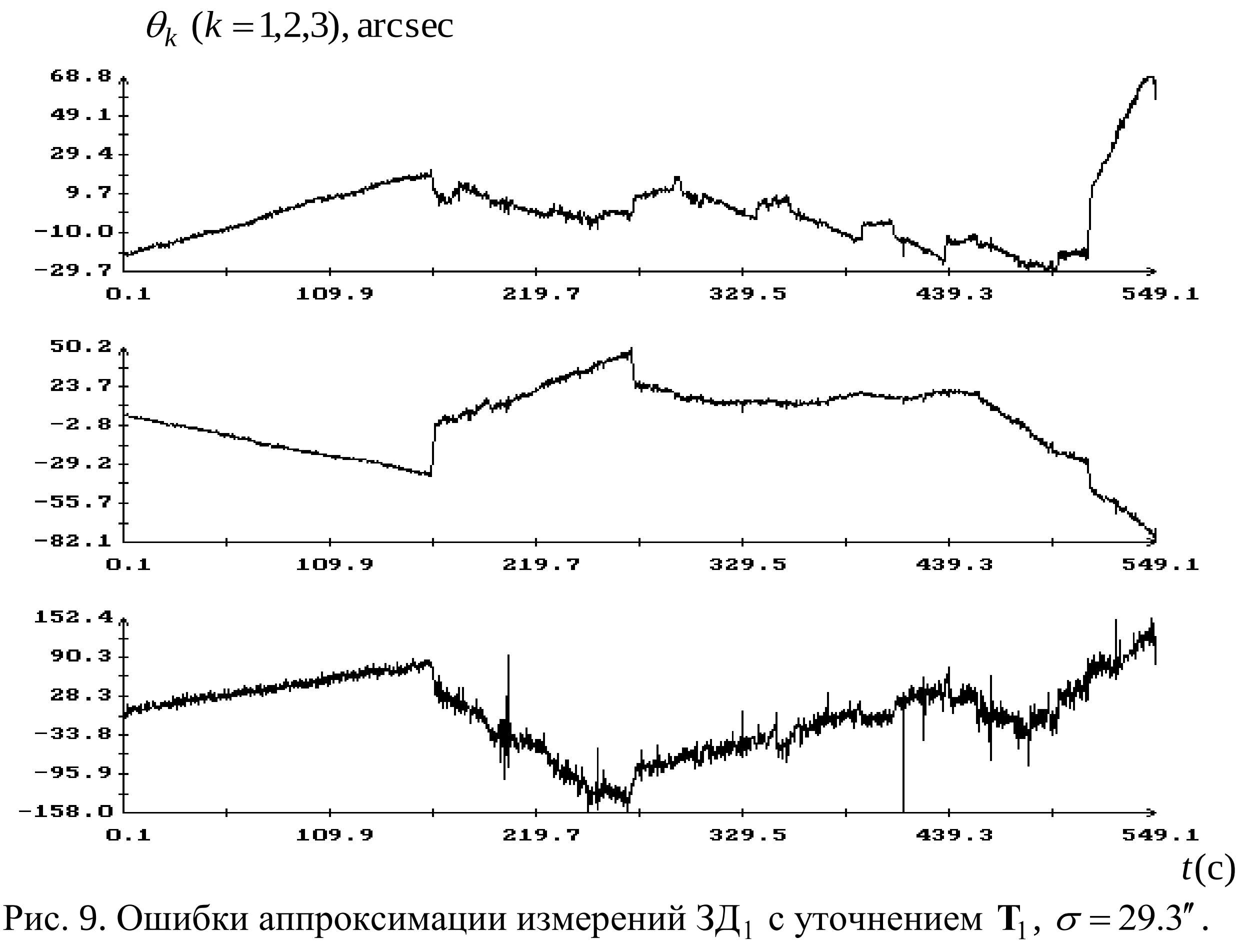

Рис. 9. Ошибки аппроксимации измерений ЗД$_1$ с уточнением $\mathbf{T}_1$, $\sigma = 29.3''$.

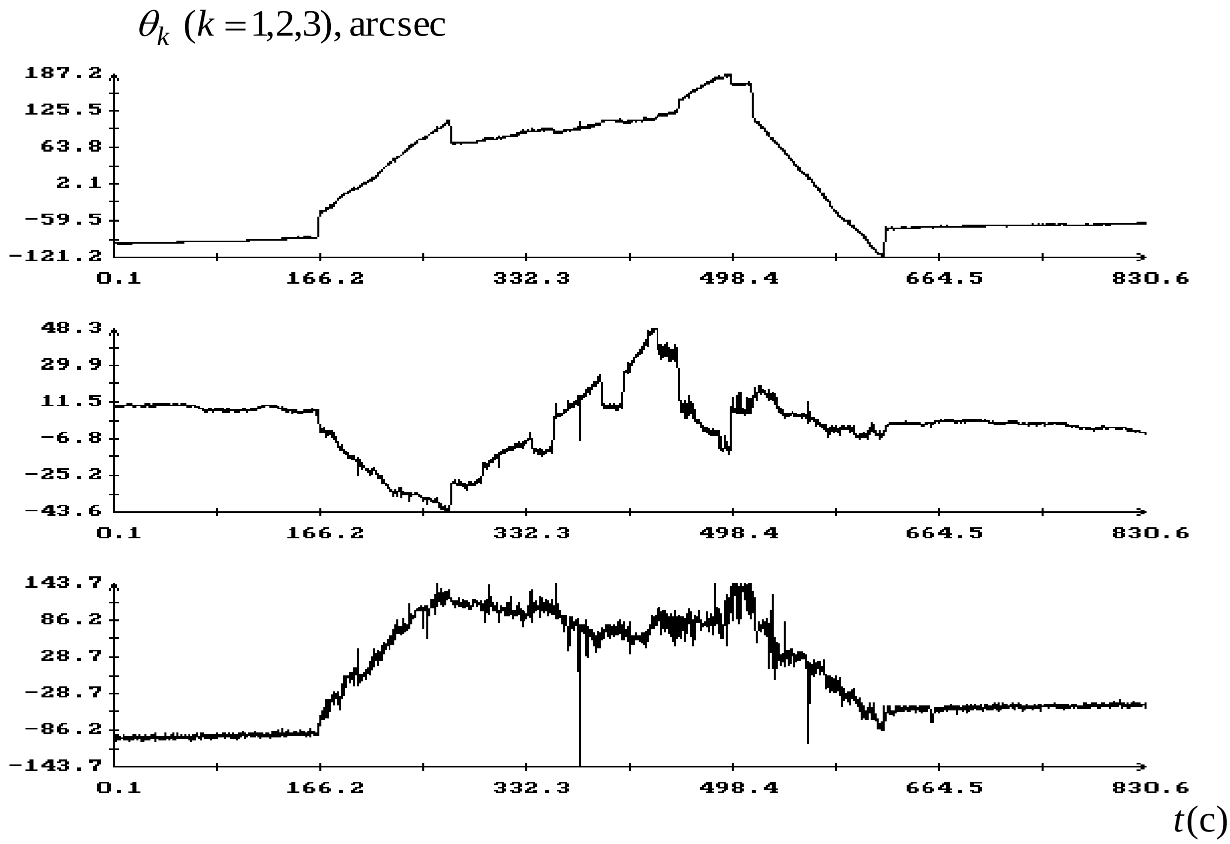

Рис. 10. Ошибки аппроксимации измерений ЗД$_2$ с уточнением $\mathbf{T}_2$, $\sigma = 61.2''$.

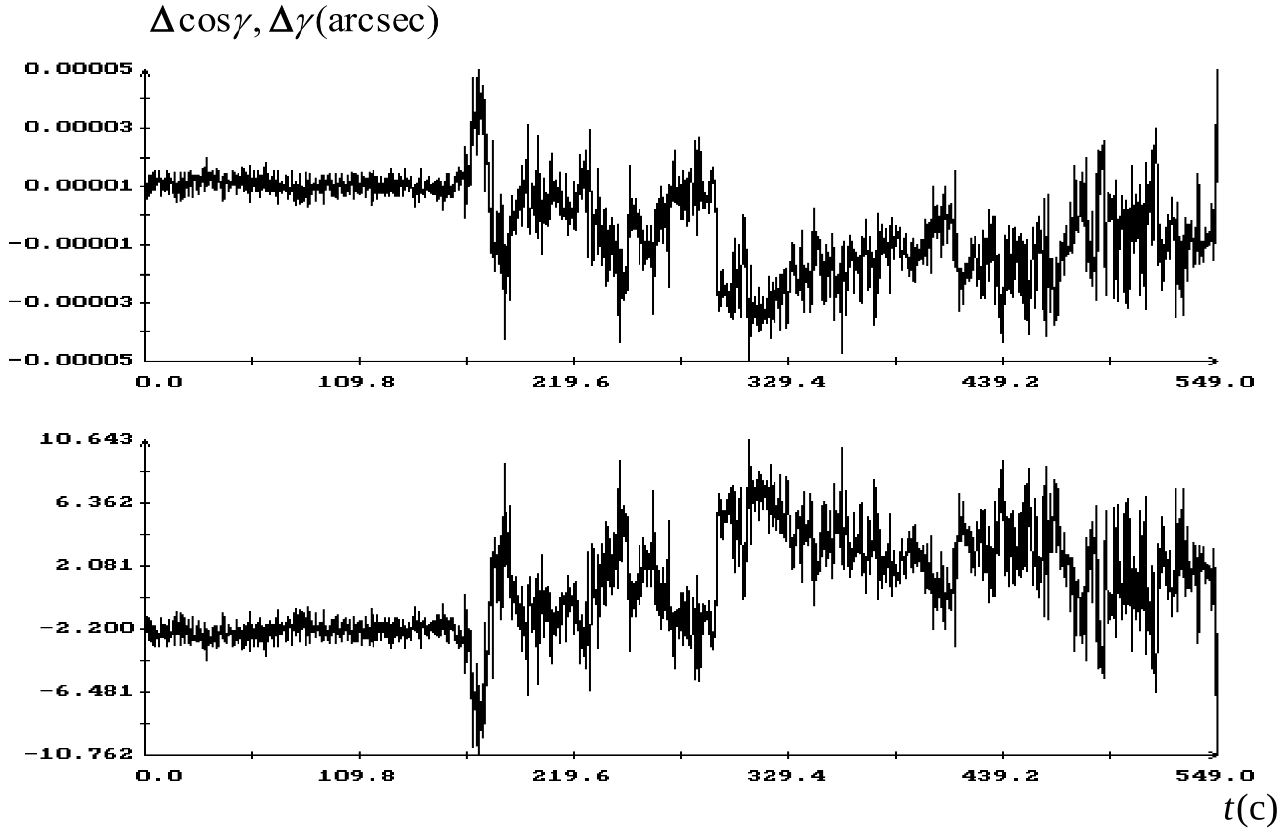

Рис. 11. Верхний график: $\Delta\cos\gamma = \cos\gamma(t_m) - \langle\cos\gamma\rangle$, $\langle\cos\gamma\rangle = -0.280413$, $\mathrm{RMS}(\Delta\cos\gamma) = 1.6\cdot10^{-5}$, нижний график: $\mathbf{\Delta}\gamma = \gamma(t_m) - \langle\gamma\rangle$, $\langle\gamma\rangle = 106.28°$, $\mathrm{RMS}(\mathbf{\Delta}\gamma) = 3.41''$.

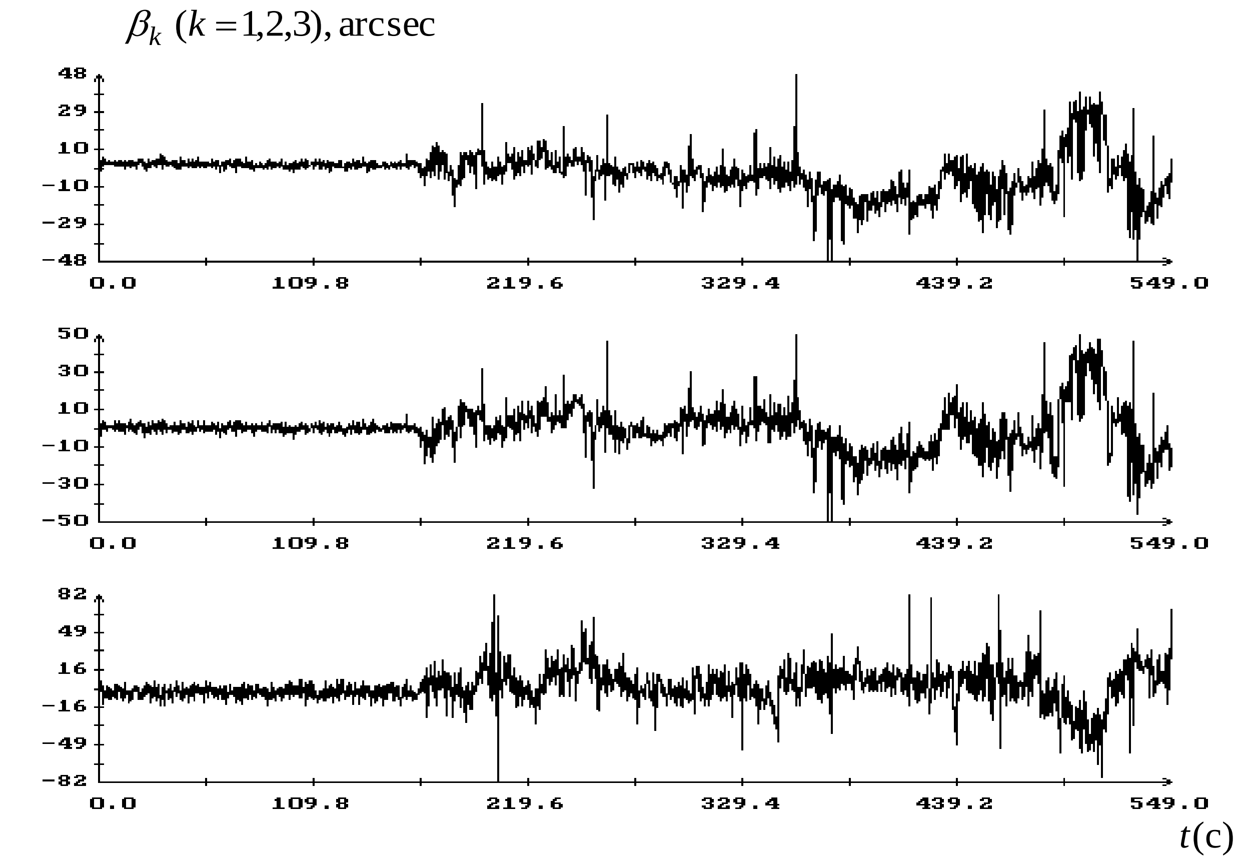

Рис. 12. Вектор $\boldsymbol{\beta}^{(m)}$, $\mathrm{RMS}(\beta_1)=10.5''$, $\mathrm{RMS}(\beta_2)=11.5''$, $\mathrm{RMS}(\beta_3)=14.8''$.

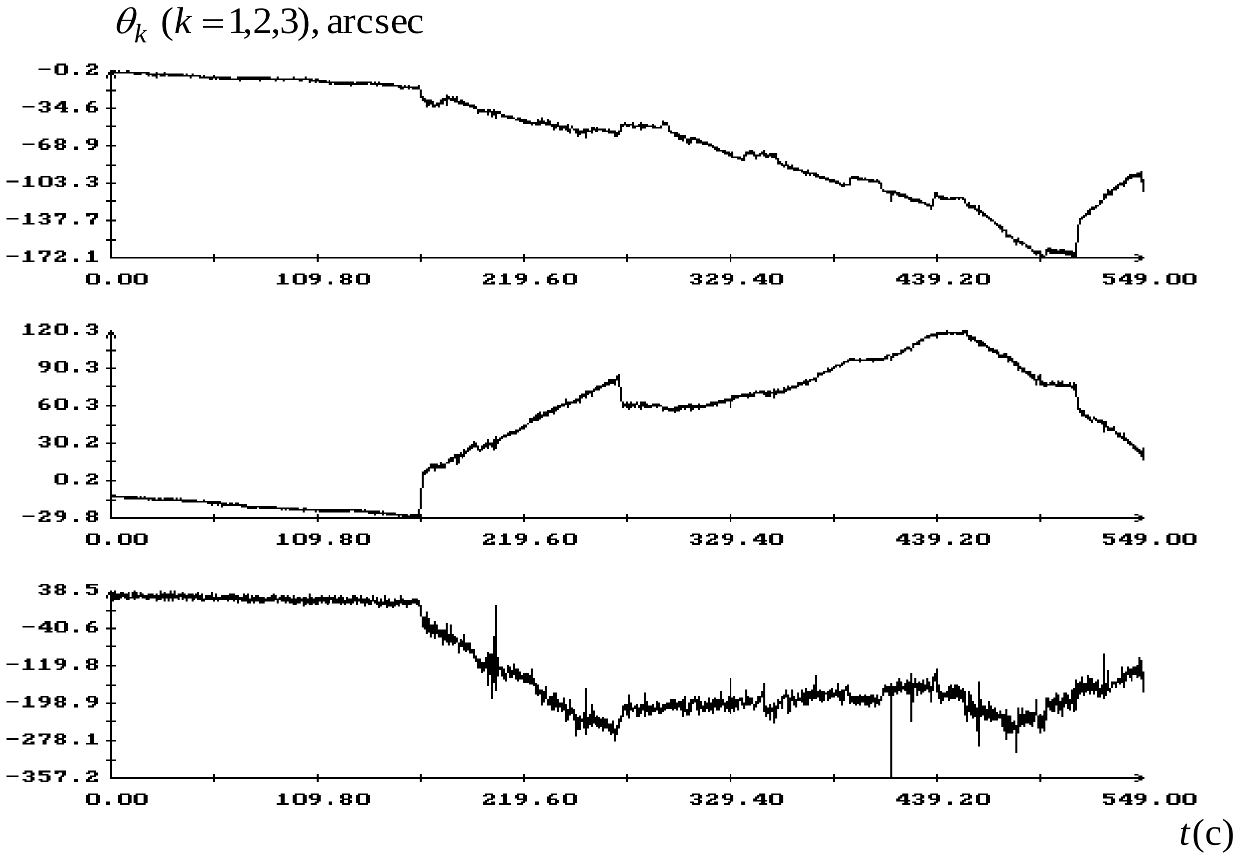

Рис. 13. Совместная обработка измерений ЗД$_{1,2}$. Ошибки аппроксимации измерений ЗД$_1$.

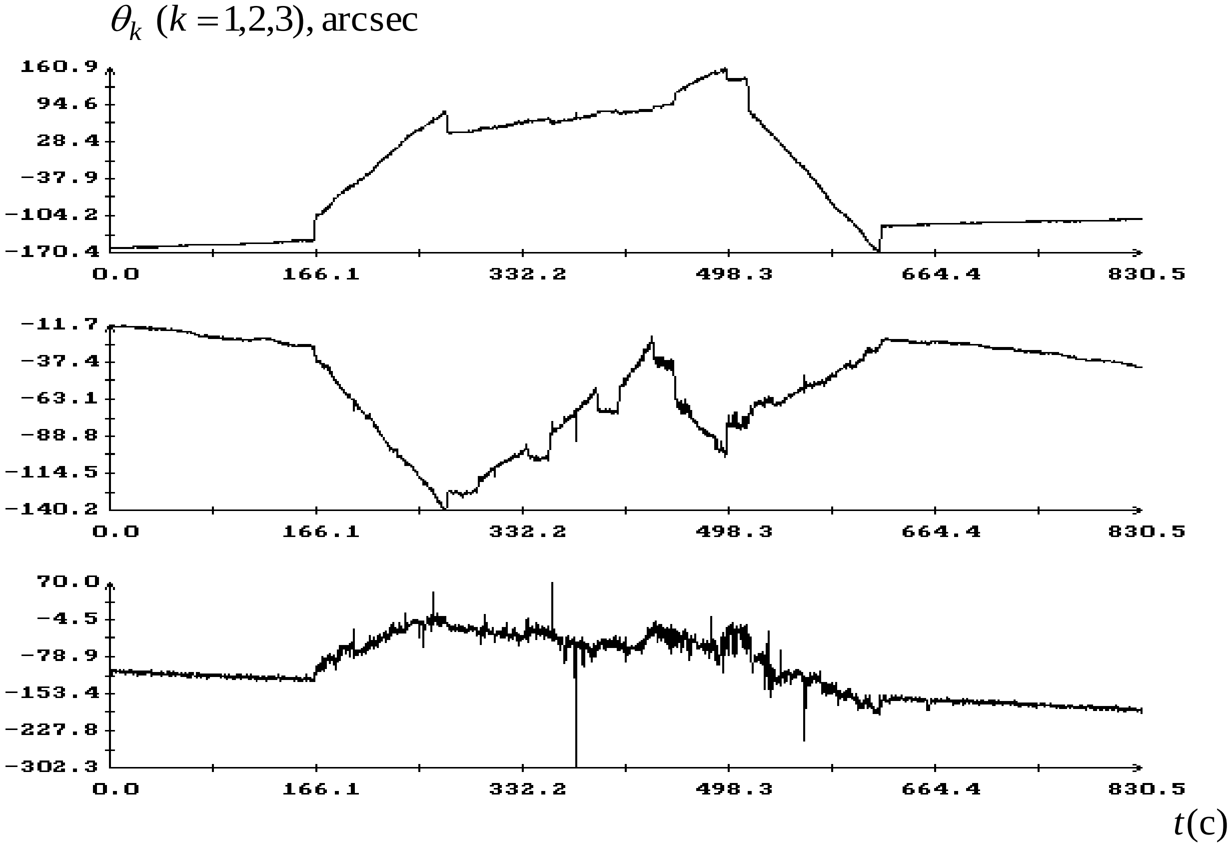

Рис. 14. Совместная обработка измерений ЗД$_{1,2}$. Ошибки аппроксимации измерений ЗД$_2$.

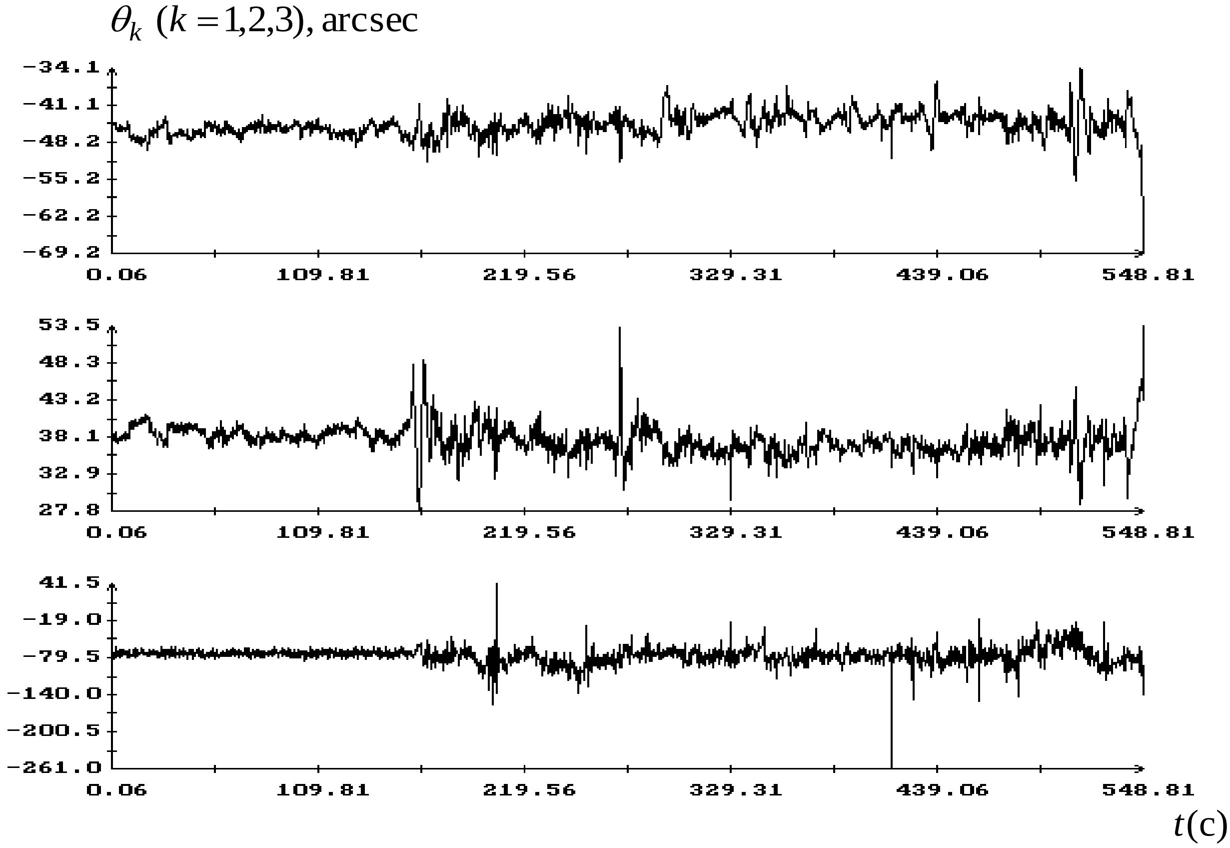

Рис. 15. Ошибки аппроксимации измерений ЗД$_1$ при обработке: $\{\langle\theta_k\rangle\}$ = {– 44.9", 37.6", – 74.9"}, $\{\mathrm{med}|\,\theta_k - \langle\theta_k\rangle\,|\}$ = {1.30", 1.07", 6.67"}.

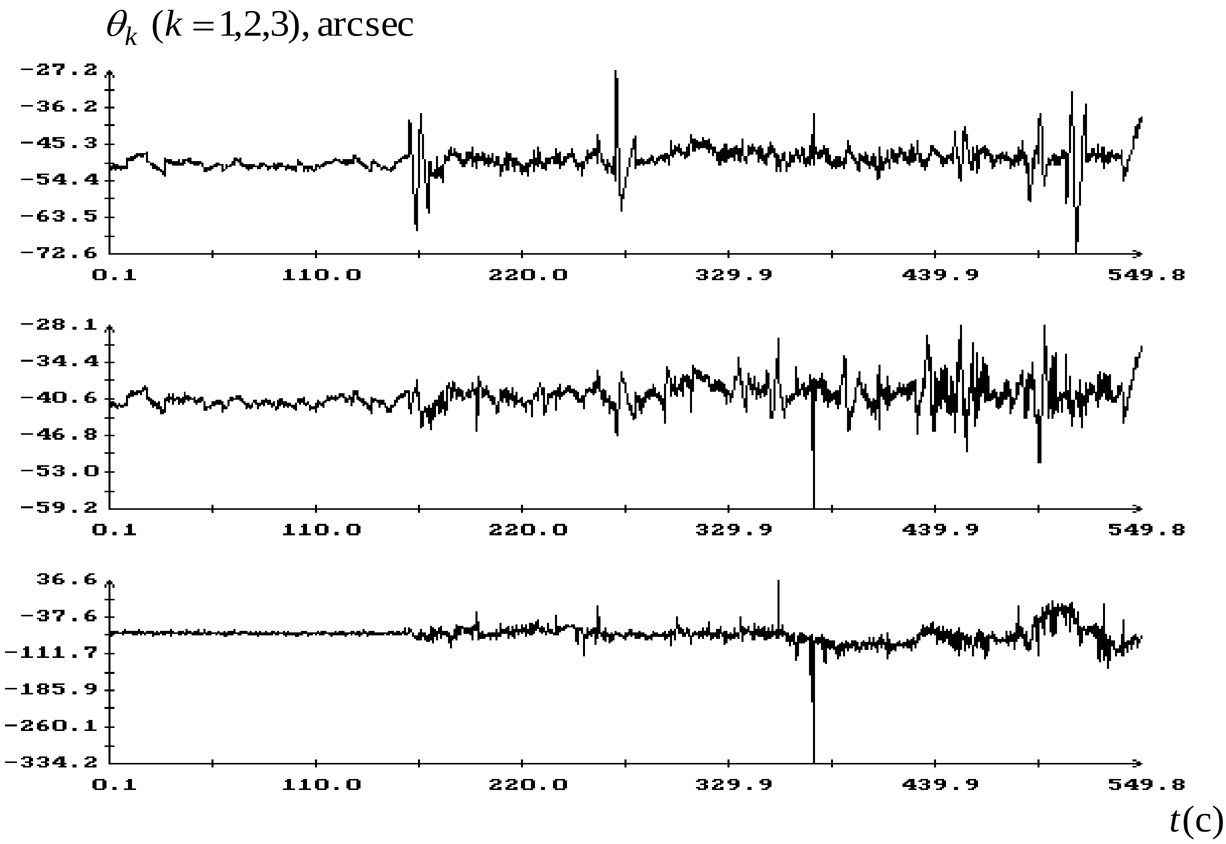

Рис. 16. Ошибки аппроксимации измерений ЗД$_2$ при обработке:
$\{\langle\theta_k\rangle\} = \{-49.4'', -40.2'', -71.2''\}$, $\{\mathrm{med}|\,\theta_k - \langle\theta_k\rangle\,|\} = \{1.31'',\ 1.13'',\ 5.06''\}$.

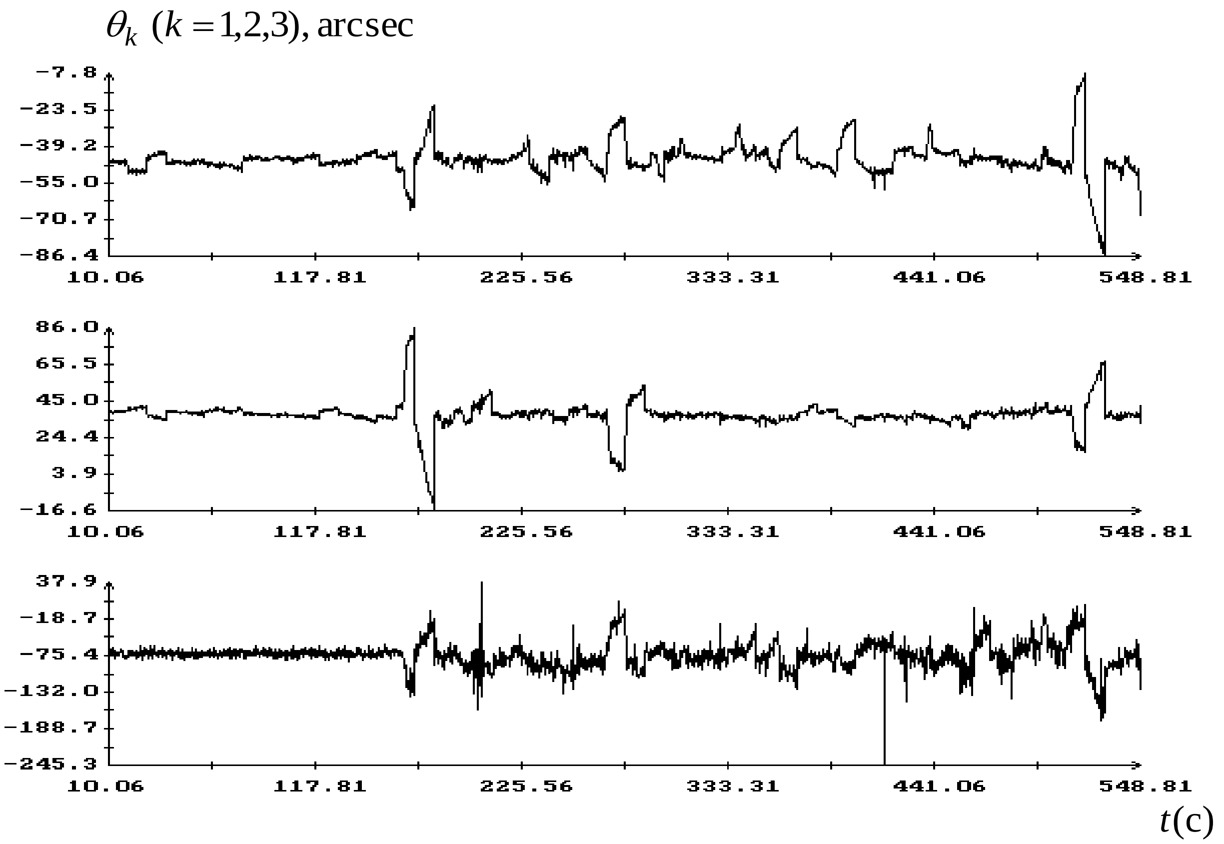

Рис. 17. Ошибки аппроксимации измерений ЗД$_1$ при прогнозе:
$\{\langle\theta_k\rangle\} = \{-44.9'',\ 37.2'', -74.4\}$, $\{\mathrm{med}|\,\theta_k - \langle\theta_k\rangle\,|\} = \{2.26'',\ 1.70'',\ 8.13''\}$.

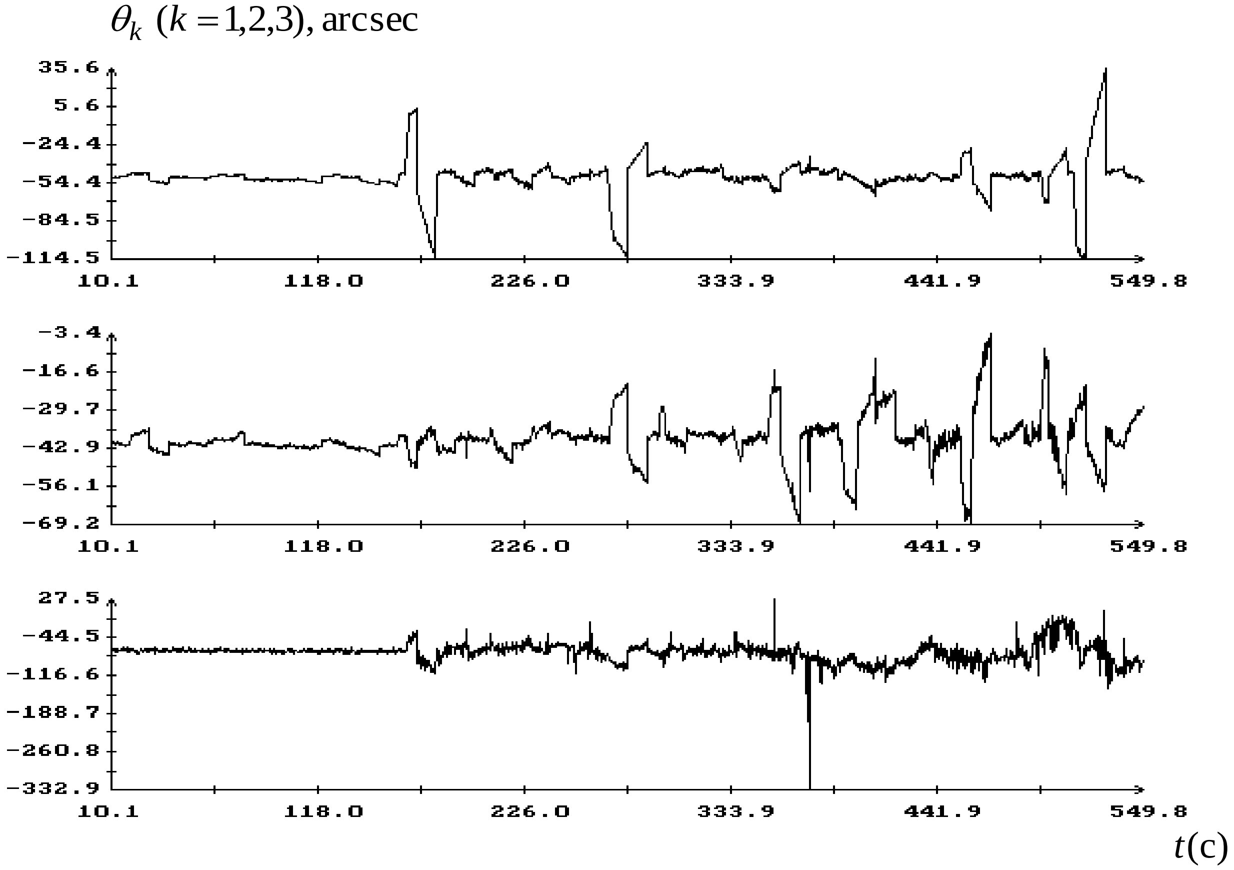

Рис. 18. Ошибки аппроксимации измерений ЗД$_2$ при прогнозе:
$\{\langle\theta_k\rangle\} = \{-49.6'', -40.1'', -71.1''\}$, $\{\text{med}|\,\theta_k - \langle\theta_k\rangle\,|\} = \{2.89'',\ 2.26'',\ 6.34''\}$.