ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 18 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Орлов Ю.Н.

О коммутации квантовых операторов первых интегралов гамильтоновых систем

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Орлов Ю.Н. О коммутации квантовых операторов первых интегралов гамильтоновых систем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 18. 15 с. doi:10.20948/prepr-2018-18
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-18

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Ю.Н. Орлов

О коммутации квантовых операторов первых интегралов гамильтоновых систем

Москва — 2018

Орлов Ю.Н.

О коммутации квантовых операторов первых интегралов гамильтоновых систем

В работе анализируется эффект исчезновения интегрируемости гамильтоновой системы с полным набором первых интегралов при линейном квантовании. Исследуются операторы, отвечающие первым интегралам при линейном квантовании. Рассматривается пример интегрируемой динамической системы на плоскости, когда существует возмущение квантовых операторов, такое, что квантовая система становится полностью интегрируемой, а классический предел этих операторов совпадает с классическими первыми интегралами.

Ключевые слова: линейное квантование, первые интегралы, гамильтоновы системы, эквивалентность по Чернову

Orlov Yu.N.

On the commutation of quantum operators of the first integrals of Hamiltonian systems

In this paper the effect of integrability destruction is analyzed for Hamiltonian system with complete set of the first integrals under linear quantization. The operators, corresponding to these integrals, are investigated. The example of integrable two-dimensional dynamical system is considered. The perturbation of quantum operators is analyzed for the case of integrability conservation.

Key words: linear quantization, first integrals, Hamiltonian systems, Chernoff equivalence

Содержание

Постановка задачи 3
1. Пример двумерной интегрируемой динамической системы 6
2. Коммутация первых интегралов 9
3. Эквивалентность по Чернову и квантовая интегрируемость 12
Литература 15

Постановка задачи

Рассматривается динамическая система с гамильтонианом $H(q,p)$, имеющая дополнительный первый интеграл $J(q,p)$ или, как вариант, полный набор независимых первых интегралов. При некотором линейном квантовании получается квантовая система, у которой операторы $\hat{H}$ и $\hat{J}$, соответствующие классическим законам сохранения, в общем случае не коммутируют. Существует ли в таком случае квантование, при котором $[\hat{H},\hat{J}]=0$? Наличие такого квантования позволило бы теоретически предположить, как именно квантуются динамические системы, поскольку на практике это означало бы возможность совместного измерения соответствующих наблюдаемых. Существуют ли интегрируемые динамические системы, которые теряют свойство интегрируемости при любом линейном квантовании? Настоящая работа посвящена изучению этих вопросов.

Пусть $A(q,p)=a(q)p^m, B(q,p)=b(q)p^n$ — классические символы квантовых операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, получаемых при некотором линейном квантовании с ядром $K(q,p|x,y)$, связывающим классический символ с матрицей $\widetilde{A}(x,y)$ оператора $\hat{A}$:

$$\widetilde{A}(x,y)=\int A(q,p)K(q,p|x,y)dqdp\,. \qquad (1)$$

Будем рассматривать класс квантований, задаваемых в одномерном случае ядрами [1]

$$K(q,p|x,y)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_0^1 Q(\tau)\delta(q-\tau x-(1-\tau)y)\exp[ip(x-y)/\hbar]d\tau\,,\quad \int_0^1 Q(\tau)d\tau=1\,. \qquad (2)$$

Постоянная $\hbar$ введена для удобства отслеживания порядка, в котором оператор импульса действует на функцию от координаты. В этом представлении переменной q отвечает оператор умножения на x, а переменной p — оператор дифференцирования $\hat{p}=-i\hbar\partial/\partial x$. Оператор $\hat{A}$ тогда имеет вид

$$A=a(q)p^m \leftrightarrow \hat{A}=\sum_{k=0}^{m}(-i\hbar)^k\,\frac{m!}{k!(m-k)!}\sigma_k a^{(k)}(x)\hat{p}^{m-k}\,,\ \ \sigma_k=\int_0^1 Q(\tau)(1-\tau)^k d\tau\,. \qquad (3)$$

Если в многомерном случае символ $A(q,p)$ имеет вид $A(q,p)=f_{\mathbf{k}}(q)p^{\mathbf{k}}$, где $\mathbf{k}$ – мультииндекс, то при квантовании вида (2) с функцией симметризации

$Q_{\mathbf{k}}(\tau)=\prod_{s=1}^{d} Q_s(\tau)$, которая не обязательно симметрична относительно выбора координат, этому символу отвечает оператор

$$\hat{A}=\sum_{\mathbf{m}}(-i\hbar)^{|\mathbf{m}|}\binom{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}\sigma_{\mathbf{k}}\, f_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}\,\hat{p}^{\,\mathbf{k}-\mathbf{m}},\quad \hat{p}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x},$$
$$\sigma_{\mathbf{k}}=\prod_{\mathrm{s}=1}^{\mathrm{d}}\sigma_{k_s}^{(s)},\qquad \sigma_k^{(s)}=\int_0^1 \mathrm{Q_s}(t)(1-t)^k\,dt. \tag{4}$$

Из (3) следует, что оператор $\hat{A}$ можно представить в виде

$$\hat{A}=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-i\hbar)^k}{k!}\sigma_k\left\{\frac{\partial^{2k}A(q,p)}{\partial q^k\partial p^k}\right\}_0, \tag{5}$$

где $\{G\}_0$ обозначает оператор, получаемый из классического символа $G(q,p)$ при квантовании с функцией симметризации $Q(\tau)=\delta(\tau)$. Выражение для коммутатора $[\hat{A},\hat{B}]$ в этих терминах может быть представлено в виде суммы по степеням $(-i\hbar)$ (для простоты записываем выражение в одномерном случае):

$$[\hat{A},\hat{B}]=\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{(-i\hbar)^k}{k!}\sigma_k\left\{\frac{\partial^{2k}A(q,p)}{\partial q^k\partial p^k}\right\}_0,\ \sum_{l=0}^{n}\frac{(-i\hbar)^l}{l!}\sigma_n\left\{\frac{\partial^{2l}B(q,p)}{\partial q^l\partial p^l}\right\}_0\right]=$$
$$=\left(\frac{(-i\hbar)}{1!}+\frac{(-i\hbar)^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial p\partial q}+\frac{(-i\hbar)^3}{3!}\frac{\partial^4}{\partial p^2\partial q^2}\right)\left\{A_pB_q-A_qB_p\right\}_0+$$
$$+\frac{(-i\hbar)^2}{2!}\left\{(2\sigma_1-1)\left(A_{ppq}B_q-A_{qqp}B_p+A_pB_{pqq}-A_qB_{ppq}\right)\right\}_0+ \tag{6}$$
$$+\frac{(-i\hbar)^3}{3!}\left\{(3\sigma_2-1)\left(A_pB_{qqqpp}-A_qB_{pppqq}+A_{pppqq}B_q-A_{qqqpp}B_p\right)+\right.$$
$$+(3\sigma_1-1)\left(A_{pp}B_{qqqp}-A_{qqqp}B_{pp}+A_{pppq}B_{qq}-A_{qq}B_{pppq}\right)+$$
$$\left.+\left(6\sigma_1^2-1\right)\left(A_{qpp}B_{pqq}-A_{qqp}B_{qpp}\right)\right\}_0+o\left(\hbar^3\right).$$

Отсюда следует, что если скобка Пуассона $[A,B]$ классических символов равна нулю, то при всяком эрмитовом квантовании, когда $\sigma_1=1/2$, соответствующий коммутатор имеет порядок не ниже $\hbar^3$, но этот третий порядок в общем случае не исчезает, ибо ни при каком выборе σ_1 выражение в фигурных скобках не обращается в нуль. Это отражает тот факт, что если в классической механике скобка Пуассона величин A и $f(A)$ равна нулю, то в квантовой механике в общем случае $[\hat{A}, \hat{f}(A)] \neq 0$, хотя, конечно, $[\hat{A}, f(\hat{A})] = 0$.

Пусть, например, $B = A^2$. Тогда для эрмитового квантования главный член по $\hbar$ в (6) имеет третий порядок, поскольку классическая скобка Пуассона для такой пары символов равна нулю, а последующий член порядка $\hbar^2$ исчезает при $\sigma_1 = 1/2$, отвечающем эрмитовому квантованию. Тогда имеем из (6):

$$
\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{B}] = \frac{(-i\hbar)^3}{3!} \{ & A_q^2 A_{pppq} - A_p^2 A_{qqqp} + A_p A_{pp} A_{qqq} - A_q A_{qq} A_{ppp} + \\
& + 2A_{pp} A_q A_{qqp} - 2A_{qq} A_p A_{ppq} + 2A_q A_{qp} A_{qpp} - 2A_p A_{pq} A_{qqp} \}_0 + \\
& + \frac{(-i\hbar)^3}{3!} (3\sigma_2 - 1) \{ 2A_p A_{pp} A_{qqq} - 2A_q A_{qq} A_{ppp} + 4A_p^2 A_{qqqp} - 4A_q^2 A_{pppq} + \\
& + 6A_p A_{qq} A_{ppq} - 6A_q A_{pp} A_{qqp} + 12A_p A_{qp} A_{qqp} - 12A_q A_{pq} A_{ppq} \}_0 + o(\hbar^3).
\end{aligned} \tag{7}
$$

В первой фигурной скобке в (7) выделены члены, связанные с первым моментом функции симметризации, равным $\sigma_1 = 1/2$. Во второй фигурной скобке стоят члены, связанные со вторым моментом функции симметризации, который может быть, вообще говоря, любым. Для квантования Вейля $\sigma_2 = 1/4$. Важно, что ни при каком σ_2 слагаемые в (7) тождественно не обращаются в нуль, что видно из следующего представления:

$$
\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{B}] = \frac{(-i\hbar)^3}{3!} \{ & (5 - 12\sigma_2)(A_q^2 A_{pppq} - A_p^2 A_{qqqp}) + \\
& + (6\sigma_2 - 1)(A_p A_{pp} A_{qqq} - A_q A_{qq} A_{ppp}) + \\
& + (8 - 18\sigma_2)(A_{pp} A_q A_{qqp} - A_{qq} A_p A_{ppq}) + \\
& + (14 - 36\sigma_2)(A_q A_{qp} A_{qpp} - A_p A_{pq} A_{qqp}) \}_0 + o(\hbar^3).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Таким образом, операторы от функций одного и того же классического символа в общем случае не коммутируют. Менее тривиальным является то, что не коммутируют в общем случае и операторы, соответствующие независимым первым интегралам полностью интегрируемой динамической системы. Отметим, что во многих физических задачах классические законы сохранения аддитивны по координатам и импульсам, так что соответствующие операторы не зависят от квантования и, естественно, коммутируют между собой. Ниже строится пример динамической системы, квантовая динамика которой не наследует свойства полной интегрируемости ни при каком линейном квантовании.

1. Пример двумерной интегрируемой динамической системы

Рассмотрим гамильтонову систему на плоскости с декартовыми координатами x, y, задаваемую гамильтонианом с разделенными переменными

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \Phi(x,y). \tag{9}$$

При некотором потенциале $\Phi(x,y)$ система (9) имеет независимый первый интеграл $J(q,p)$ четвертого порядка по импульсам, в котором, однако, координаты и импульсы не разделены, так что при квантовании могут ожидаться нетривиальные эффекты, связанные с порядком действия некоммутирующих операторов $\hat{q}$ и $\hat{p}$:

$$J(q,p) = \frac{1}{4}p_x^4 + u(x,y)p_x^2 + f(x,y)p_x p_y + r(x,y). \tag{10}$$

Построим некоторые динамические системы такого вида. Условие $[H,J]=0$ позволяет найти связь между функциями Φ, f, u, r. Вычисляя скобку Пуассона и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях мономов $p_x^k p_y^m$, получаем (нижним индексом обозначены производные по координатам):

$$\begin{aligned} &f_y = 0; \\ &f_x + u_y = 0; \\ &\Phi_x - u_x = 0; \\ &f\Phi_x = r_y; \\ &f\Phi_y + 2\Phi_x u = r_x. \end{aligned} \tag{11}$$

Из первого уравнения системы (11) следует, что коэффициент f зависит только от x, а тогда из второго уравнения получается, что коэффициент u линейно зависит от y: $u(x,y) = -yf_x + D(x)$, где $D(x)$ – некоторая не определенная пока произвольная функция от x. Из третьего уравнения системы (11) следует, что потенциал Φ равен коэффициенту u с точностью до произвольной функции F, зависящей только от y: $\Phi(x,y) = u(x,y) + F(y)$.

Итак:

$$\begin{aligned} &f = f(x); \\ &u = -yf_x(x) + D(x); \\ &\Phi = u + F(y). \end{aligned} \tag{12}$$

Преобразуем четвертое уравнение системы (11) с учетом соотношений (12). Поскольку $\Phi_x = u_x$ и из второго уравнения системы (12) следует, что $u_x = -yf_{xx} + D_x$, то $r_y = f\Phi_x = fu_x = -yff_{xx} + D_x f$. Из полученного соотношения следует, что коэффициент $r(x,y)$ определяется выражением

$$r = -\frac{1}{2}y^2 ff_{xx} + yfD_x + R, \tag{13}$$

где R есть произвольная функция, зависящая только от x. Дифференцируя это выражение по x и подставляя полученный результат в последнее уравнение системы (11), в котором Φ и u заменены соответствующими выражениями из (12), получаем

$$\begin{aligned} r_x &= -\frac{y^2}{2}\left(f_x f_{xx} + ff_{xxx}\right) + yf_x D_x + yfD_{xx} + R_x = \\ &= -ff_x + F_y f + 2y^2 f_x f_{xx} - 2yf_x D_x - 2yf_{xx}D + 2DD_x. \end{aligned} \tag{14}$$

Отсюда следует, что F_y есть многочлен второй степени, так что

$$F(y) = ay + by^2 + cy^3. \tag{15}$$

Здесь a, b, c – произвольные постоянные. Далее, приравнивая в (14) коэффициенты при одинаковых степенях y, получаем уравнения для последовательного определения трех неизвестных функций f, D, R:

$$ff_{xxx} + 5f_x f_{xx} = -6cf; \tag{16}$$
$$fD_{xx} + 3f_x D_x + 2Df_{xx} = 2bf_x; \tag{17}$$
$$R_x = -ff_x + af + 2DD_x. \tag{18}$$

Имеются следующие частные примеры решений уравнения (16).

1. При $c \neq 0$ уравнение (16) имеет частное решение

$$f = -\frac{c}{16}x^3. \tag{19}$$

2. При $c = 0$ можно найти общее решение уравнения (16), поскольку оно приводится к виду $\frac{d}{dx}\left(f^5 f_{xx}\right) = 0$, то есть $f_{xx} = \frac{C}{f^5}$.

<u>2-a</u>. $C = 0$. Тогда $f = f_0 + f_1 x$, что приводит к задаче с разделяющимися переменными. В этом случае динамическая система (9-10) является системой с разделяющимися переменными. Соответствующие квантовые операторы не зависят от правила квантования и коммутируют между собой. Этот случай далее не рассматривается.

<u>2-b</u>. $C = A^2 > 0$. Тогда уравнение (16) интегрируется в квадратурах:

$$f_x(x) = A\sqrt{B^4 - \frac{1}{f^4}},\ B \neq 0. \qquad (20)$$

Решение уравнения (20) дает неявную зависимость $f(x)$ через эллиптические интегралы:

$$AB^3(x - x_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2} E\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{B^4 f^4 - 1}}{Bf}, \qquad (21)$$
$$\varphi = \arccos(1/Bf).$$

где

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

<u>2-c</u>. $C = -A^2 < 0$. Наряду с решением вида (21) имеется также решение

$$f(x) = (3A(x - x_0))^{1/3}. \qquad (22)$$

После этого из (17-18) находятся остальные функции, определяющие гамильтониан (9) и дополнительный инвариант (10).

Исследуем далее динамические системы для случаев (19) и (22).

Для решения (19) уравнение (17) приводится к виду

$$x^3 D_{xx} + 9x^2 D_x + 12xD = 6bx^2. \qquad (23)$$

При $b \neq 0$ у уравнения (23) имеется частное решение

$$D(x) = 2bx/7. \qquad (24)$$

Для решения (24) интеграл уравнения (18) имеет вид

$$R(x) = \frac{4b^2}{49} x^2 - \frac{ac}{64} x^4 - \frac{c^2}{2 \cdot 16^2} x^6. \qquad (25)$$

Если же $b = 0$, то (23) становится уравнением Эйлера

$$x^2 D_{xx} + 9xD_x + 12D = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$D(x) = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x^6}, \qquad (26)$$

где α, β – произвольные постоянные. После этого из (18) находим

$$R(x) = \frac{6\beta^2}{7x^{14}} + \frac{8\alpha\beta}{5x^{10}} + \frac{2\alpha^2}{3x^6} - \frac{ac}{64} x^4 - \frac{c^2}{2 \cdot 16^2} x^6. \qquad (27)$$

В простейшем варианте построенного решения для случая (19), когда $a=0,\ D(x)=0$, первые интегралы динамической системы (9-10) имеют вид

$$H=\frac{1}{2}\left(p_x^2+p_y^2\right)+\frac{3c}{16}yx^2+cy^3,$$
$$J=\frac{p_x^4}{4}+\frac{3c}{16}p_x^2yx^2-\frac{cx^3}{16}p_xp_y-\frac{c^2x^6+6c^2x^4y^2}{512}. \tag{28}$$

Заметим, что в (28) $c=const$ – произвольная постоянная, не равная нулю.

Рассмотрим теперь решение (22), полагая для простоты $x_0=0$, а также и $F=0,\ D(x)=0$. Тогда $u=\Phi=-Ay/f^2(x),\ R=-f^2(x)/2$. В итоге имеем

$$H=\frac{1}{2}\left(p_x^2+p_y^2\right)-yf_x(x),\quad f(x)=(3Ax)^{1/3};$$
$$J=\frac{1}{4}p_x^4-yf_x(x)p_x^2+f(x)p_xp_y-\frac{1}{2}y^2f(x)f_{xx}(x)-\frac{1}{2}f^2(x). \tag{29}$$

Здесь $A=const\neq 0$.

Рассмотрим теперь, как обстоит дело с коммутацией квантовых операторов первых интегралов систем (28) и (29) при линейном квантовании вида (2).

2. Коммутация первых интегралов

В результате квантования и последующей коммутации операторов $\hat{H}=\hat{A},\quad \hat{J}=\hat{B}$ получаем с учетом (6) ненулевой результат в третьем порядке по $\hbar$. Заметим, что для случая (28) члены четвертого и более старших порядков по $\hbar$ в коммутаторе $[\hat{H},\hat{J}]$ отсутствуют, так что выражение (6) является точным.

Имеем для системы (28) при произвольном эрмитовом квантовании:

$$[\hat{H},\hat{J}]=\frac{(-i\hbar)^3}{3!}\left(\frac{1}{2}H_{p_xp_x}J_{xxxp_x}+(3\sigma_2-1)\frac{1}{2}H_{p_x}J_{xxxp_xp_x}\right)_0=-\frac{(-i\hbar)^3}{16}c\hat{p}_y. \tag{30}$$

Таким образом, коммутатор (30) отличен от нуля, т.е. в данном примере операторы, отвечающие первым интегралам классической динамической системы, оказываются некоммутирующими, причем результат (30) не зависит от выбора правила квантования (2). В связи с этим возникает вопрос: можно ли так «подправить» операторы первых интегралов в квантовой области, чтобы возмущенная квантовая система стала интегрируемой, а при переходе к классической механике первые интегралы остались бы прежними? Иными словами, существуют ли такие возмущенные операторы

$$\hat{H}' = \hat{H} + \varepsilon\hat{U},\ \hat{J}' = \hat{J} + \varepsilon\hat{V}, \tag{31}$$

для которых $\varepsilon \to 0$ при $\hbar \to 0$, и такие, что $[\hat{H}', \hat{J}'] = 0$?

Не обсуждая здесь неочевидный физический смысл такого возмущения и понимая предел $\hbar \to 0$ как результат построения классических символов, которые при квантовании (2) перейдут в операторы (31) и в которых (символах) после формального перехода к пределу $\hbar \to 0$ останутся только невозмущенные символы H и J, рассмотрим принципиальную возможность устранения эффекта потери интегрируемости в квантовой системе.

Структуру требуемого возмущения можно понять из анализа выражения (6). Если ε будет иметь первый порядок по $\hbar$, то из первой строки выражения (6), преобразованной в соответствии с (31) к виду

$$\left(\frac{(-i\hbar)}{1!} + \frac{(-i\hbar)^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial p\partial q} + \frac{(-i\hbar)^3}{3!}\frac{\partial^4}{\partial p^2\partial q^2}\right)\left\{H'_p J'_q - H'_q J'_p\right\}_0 =$$

$$= \left(\frac{(-i\hbar)}{1!} + \frac{(-i\hbar)^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial p\partial q} + \frac{(-i\hbar)^3}{3!}\frac{\partial^4}{\partial p^2\partial q^2}\right)\left\{H_p J_q - H_q J_p\right\}_0 +$$

$$+ \hbar\left(\frac{(-i\hbar)}{1!} + \frac{(-i\hbar)^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial p\partial q} + \frac{(-i\hbar)^3}{3!}\frac{\partial^4}{\partial p^2\partial q^2}\right)\left\{H_p V_q - H_q V_p + U_p J_q - J_p U_q\right\}_0 +$$

$$+ \hbar^2\left(\frac{(-i\hbar)}{1!} + \frac{(-i\hbar)^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial p\partial q} + \frac{(-i\hbar)^3}{3!}\frac{\partial^4}{\partial p^2\partial q^2}\right)\left\{U_p V_q - U_q V_p\right\}_0 =$$

$$= \hbar\left(\frac{(-i\hbar)}{1!} + \frac{(-i\hbar)^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial p\partial q} + \frac{(-i\hbar)^3}{3!}\frac{\partial^4}{\partial p^2\partial q^2}\right)\left\{H_p V_q - H_q V_p + U_p J_q - J_p U_q\right\}_0 +$$

$$+ \hbar^2\left(\frac{(-i\hbar)}{1!} + \frac{(-i\hbar)^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial p\partial q} + \frac{(-i\hbar)^3}{3!}\frac{\partial^4}{\partial p^2\partial q^2}\right)\left\{U_p V_q - U_q V_p\right\}_0,$$

следует, что во всяком случае появится член порядка $\hbar^2$ вида
$\hbar^2\left\{H_p V_q - H_q V_p + U_p J_q - J_p U_q\right\}_0$,
причем члены этого порядка отсутствуют в выражении (30), так что указанный член должен обратиться в нуль. Следовательно, возмущение должно иметь более высокий порядок по $\hbar$. Очевидно, что возмущение ε не может иметь порядок $\hbar^3$ или выше, так как тогда его вклад в коммутатор (6) будет иметь более высокий порядок, по крайней мере $\hbar^4$, а таких членов в данном случае в этом коммутаторе нет. Следовательно, остается единственная возможность

$\varepsilon = (-i\hbar)^2$. Соответствующий член порядка $\hbar^3$, возникающий от такой поправки в коммутаторе (6), имеет вид

$$[\hat{H}', \hat{J}'] = [\hat{H}, \hat{J}] + (-i\hbar)^3 \{H_p V_q - H_q V_p + U_p J_q - J_p U_q\}_0 =$$
$$= -\frac{(-i\hbar)^3}{16} c\hat{p}_y + (-i\hbar)^3 \{H_p V_q - H_q V_p + U_p J_q - J_p U_q\}_0,$$

что по условию должно обратиться в нуль. Из равенства операторов следует равенство их символов. Это означает, что требуется найти две дифференцируемые функции U и V от координат и импульсов, сумма скобок Пуассона которых с двумя данными функциями H и J равна заданной функции. Отсюда следует, что функции U и V должны удовлетворять условию

$$\frac{c}{16} p_y \equiv H_p V_q - H_q V_p + U_p J_q - J_p U_q. \tag{32}$$

Очевидно, простейшим частным решением уравнения (32) является вариант

$$V = \frac{c}{16} y, \; U = 0. \tag{33}$$

Следовательно, оператор

$$\hat{J}' = \hat{J} + (-i\hbar)^2 \frac{cy}{16} \tag{34}$$

коммутирует с оператором Гамильтона $\hat{H}$ и в пределе $\hbar \to 0$ дает первый интеграл J. Однако квантование при этом не будет линейным, то есть не будет определяться ядром вида (2). Можно в таком случае считать, что возмущение относится не к операторам, а к правилу квантования.

Для примера (29) коммутатор $[\hat{H}, \hat{J}]$ имеет вид (здесь $c = (3A)^{1/3}$):

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{J}] &= (-i\hbar)^3 \left\{ \frac{1}{2} p_y f_{xxx} - 2 y p_x f_{xxxx} \left(3\sigma_2 - \frac{1}{2} \right) \right\}_0 = \\ &= \frac{5c}{27} (-i\hbar)^3 x^{-11/3} \left(x p_y + \frac{16}{3} (6\sigma_2 - 1) y p_x \right)_0. \end{aligned} \tag{35}$$

Этот коммутатор тоже отличен от нуля при любом квантовании вида (2). При некотором специальном квантовании, когда $\sigma_2 = 1/12$, для этих операторов тоже существует возмущение вида (31), когда новая квантовая система будет интегрируемой:

$$\hat{H}' = \hat{H}, \quad \hat{J}' = \hat{J} - (-i\hbar)^2 \frac{5c}{27} y x^{-8/3}. \tag{36}$$

Вопрос о том, для каждой ли интегрируемой динамической системы существует такое возмущение правила квантования, что получающаяся квантовая система также будет интегрируемой, а при $\hbar \to 0$ будет получаться исходная классическая система, остается открытым.

3. Эквивалентность по Чернову и квантовая интегрируемость

Проблему квантовой интегрируемости интересно рассмотреть с точки зрения применимости к интегрируемым системам концепции эквивалентных по Чернову оператор-функций. В основе исследований лежит теорема Чернова [2], устанавливающая сходимость определенного итерационного процесса к полугруппе, которая представляет решение задачи Коши.

Теорема Чернова (Chernoff, 1968, [2]). Пусть X *– банахово пространство,* $B(X)$ *– банахово пространство линейных ограниченных операторов в* X *и пусть функция* $F: R_+ \to B(X)$ *удовлетворяет условию* $F(0) = I$*, непрерывна в сильной операторной топологии и удовлетворяет оценке при некотором α≥0:* $\|F(t)\|_{B(X)} \le e^{at}, t \ge 0$*. Тогда, если оператор* $F'(0)$ *замыкаем и его замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов* $U(t), t > 0$*, то* $\forall u \in X, \forall T > 0$ *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0;T]} \left\| \left(U(t) - (F(t/n))^n \right) u \right\|_X = 0. \tag{37}$$

Интерес к применению теоремы Чернова для построения генераторов полугрупп связан с возможностью получения решения соответствующих уравнений в явном виде. Строгое определение эквивалентности по Чернову было дано О.Г. Смоляновым в [3] и обобщено на несколько более широкий класс операторов в [4].

Определение эквивалентности [3, 4]. Пусть X *– банахово пространство,* $B(X)$ *– банахово пространство линейных ограниченных операторов в* X*,* $\Pi(X)$ *– множество сильно непрерывных отображений* F *полуоси* $[0, +\infty)$ *в банахово пространство B(X), удовлетворяющих условию* $F(0) = I$*. Тогда операторнозначные функции* $F, G \in \Pi(X)$ *называются эквивалентными по Чернову, если для любого* $T > 0$ *и любого* $u \in X$ *выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0;T]} \left\| \left((F(t/n))^n - (G(t/n))^n \right) u \right\|_X = 0. \tag{38}$$

На основе этого определения в [4—7] были построены примеры эквивалентных по Чернову операторов, отвечающих статистической смеси генераторов полугрупп. Теоретическое обобщение описываемого подхода позволило дать следующее определение обобщенного среднего значения случайной полугруппы.

Определение математического ожидания случайной полугруппы ([4]). Сильно непрерывная однопараметрическая полугруппа U *ограниченных линейных преобразований банахова пространства* X *является обобщенным средним значением случайной полугруппы* ξ*, если полугруппа* U *эквивалентна по Чернову математическому ожиданию* $M\xi$.

В работе [4] были доказаны теоремы об эквивалентности по Чернову для средних значений случайных полугрупп, в которых сформулированы достаточные условия того, чтобы эти средние значения, не будучи сами полугруппами, порождали полугруппу, эквивалентную им по Чернову.

Теорема об эквивалентности для суммы генераторов ([4]). Пусть $\{\hat{H}_n\}$ *– последовательность генераторов сильно непрерывных полугрупп в банаховом пространстве* X*. Пусть* $\{p_n\}$ *– последовательность неотрицательных чисел, сумма ряда из которых равна единице. Пусть также существует линейное подпространство* $D \subset X$*, являющееся существенной областью определения каждого из генераторов* $\hat{H}_n$, $n \in N$*, и такое, что для любого* $x \in D$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n \|\hat{H}_n x\|_X$ *сходится. Тогда, если оператор* $\hat{H}$ *определен на* D *формулой* $\hat{H}x = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \hat{H}_n x$ *и такой, что замыкание оператора* $\hat{H}$ *является генератором сильно непрерывной полугруппы* $\hat{U} = e^{t\hat{H}}$, $t \ge 0$*, то среднее значение* $\hat{F}(t)$ *случайной полугруппы* $\hat{U}_n = e^{t\hat{H}_n}$*, определяемое формулой* $\hat{F}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{t\hat{H}_n}$, $t \ge 0$*, эквивалентно по Чернову полугруппе* $\hat{U} = e^{t\hat{H}}$.

Аналогично формулируется и вторая теорема об эквивалентности, применяемая тогда, когда усреднение случайных полугрупп проводится по некоторой счетно-аддитивной мере, заданной на σ-алгебре подмножеств некоторого множества E.

Теорема об эквивалентности для счетно-аддитивной меры ([4]). Пусть $\{\hat{H}_\varepsilon, \varepsilon \in E\}$ *– операторнозначная функция на множестве* E*, на* σ*-алгебре подмножеств* 2^E *которого задана неотрицательная нормированная счетно-аддитивная мера* μ*, такая, что ее значениями являются генераторы сильно непрерывных сжимающих полугрупп в банаховом пространстве* X*. Пусть существует линейное подпространство* $D \subset X$*, являющееся существенной областью определения каждого из генераторов* $\hat{H}_\varepsilon$ *и такое, что для любого* $x \in D$ *интеграл* $\int_E \|\hat{H}_\varepsilon x\|_X \, d\mu(\varepsilon)$ *сходится. Тогда, если оператор* $\hat{H}$ *определен* *на D формулой* $\hat{H}x = \int\limits_E \hat{H}_\varepsilon x d\mu(\varepsilon)$ *и такой, что замыкание оператора* $\hat{H}$ *является генератором сильно непрерывной полугруппы* $\hat{U} = e^{t\hat{H}}$, $t \geq 0$, *то среднее значение случайной полугруппы* $\hat{F}(t) = \int\limits_E e^{t\hat{H}_\varepsilon} d\mu(\varepsilon)$, $t \geq 0$ *эквивалентно по Чернову полугруппе* $\hat{U} = e^{t\hat{H}}$.

Применительно к задачам, рассмотренным в предыдущих разделах, описанную технику можно попытаться применить следующим образом. Пусть, например, параметр c в (28) является случайным, так что при некотором квантовании, переводящем $H \to \hat{H}_c$, а $J \to \hat{J}'_c$, где $\hat{J}'_c$ определяется согласно (34) так, чтобы $[\hat{H}, \hat{J}'_c] = 0$, получается случайная квантовая интегрируемая система:

$$\begin{gathered}\hat{H}_c = \frac{1}{2}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right) + \frac{3c}{16} yx^2 + cy^3, \\ \hat{J}'_c = \frac{\hat{p}_x^4}{4} + \frac{3cyx^2}{16}\hat{p}_x^2 + (-i\hbar)\frac{3cyx}{8}\hat{p}_x + (-i\hbar)^2\frac{3c}{8}\sigma_2 y - \\ -\frac{cx^3}{16}\hat{p}_x\hat{p}_y - (-i\hbar)\frac{3cx^2}{8}\hat{p}_y - \frac{c^2x^6 + 6c^2x^4y^2}{512} + (-i\hbar)^2\frac{cy}{16}.\end{gathered} \tag{39}$$

Пусть задана некоторая мера $\mu(c)$, так что существует

$$\hat{H}_{avr} = \int \hat{H}_c d\mu(c) = \frac{1}{2}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right) + \frac{3\bar{c}}{16} yx^2 + \bar{c}y^3 = \hat{H}_{\bar{c}}, \quad \bar{c} = \int c d\mu(c). \tag{40}$$

Согласно вышеприведенной теореме об эквивалентности, средний гамильтониан (40), являющийся просто гамильтонианом (39) при среднем значении параметра c, порождает полугруппу, эквивалентную по Чернову математическому ожиданию соответствующих полугрупп. При каждом конкретном значении c система (39) интегрируема, но можно ли таковой считать систему, полученную в результате усреднения? Поскольку в оператор дополнительного первого интеграла в (39) параметр c входит не только линейно, но и квадратично и в общем случае $\int c^2 d\mu(c) \neq \bar{c}^2$, то получается, что $\int \hat{J}'_c d\mu(c) \neq \hat{J}'_{\bar{c}}$. Поэтому средняя квантовая динамическая система в смысле эквивалентности по Чернову может в общем случае потерять свойство интегрируемости. Под средней квантовой динамической системой понимается совокупность средних операторов ее первых интегралов.

Определение интегрируемости в среднем. Квантовая динамическая система, обладающая набором коммутирующих операторов, отвечающих символам классических первых интегралов и зависящих от случайного параметра, называется интегрируемой в среднем, если средние значения этих операторов также коммутируют между собой.

В этом случае полугруппа, порождаемая средним гамильтонианом, эквивалентна по Чернову средней полугруппе, с которой можно ассоциировать среднюю в вышеуказанном смысле динамическую систему.

Литература

1. Орлов Ю.Н. Основы квантования вырожденных динамических систем. – М.: МФТИ, 2004. – 236 с.
2. Chernoff P. Note on product formulas for operator semigroups // J. Funct. Anal., 84, 1968. P. 238-242.
3. Smolyanov O.G., Weizsacker H., Wittin O. Chernoff's theorem and discrete time approximation of Brownian motion on manifolds // Potential Anal., 26, 2007. P. 1-29.
4. Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Формулы Фейнмана как метод усреднения случайных гамильтонианов // Труды МИРАН, 2014. Т. 285. С. 232-243.
5. Бутко Я.А., Смолянов О.Г. Формулы Фейнмана в стохастической и квантовой динамике / В сб. Современные проблемы математики и механики, 6, № 1, 2011. С. 61-75.
6. Борисов Л.А., Орлов Ю.Н. Анализ зависимости конечнократных аппроксимаций равновесной матрицы плотности гармонического осциллятора и функции Вигнера от правила квантования // ТМФ, 2015. Т.184, №1. С. 106-116.
7. Борисов Л.А., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж. Формулы Фейнмана для усреднения полугрупп, порождаемых операторами типа Шредингера // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 57. – 23 с.