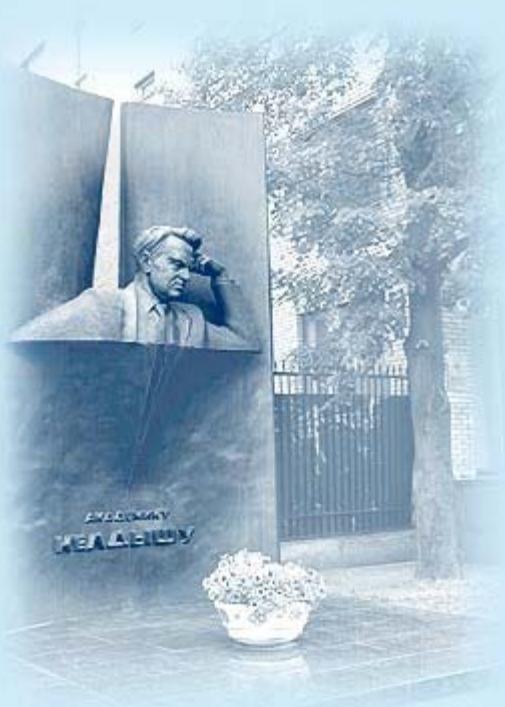




ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 19 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Охитина А.С., [Маштаков Я.В.](#),
[Ткачев С.С.](#)

Оптимизация расположения
двигателей коррекции для
обеспечения разгрузки
маховиков

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Охитина А.С., Маштаков Я.В., Ткачев С.С. Оптимизация расположения двигателей коррекции для обеспечения разгрузки маховиков // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 19. 32 с. doi:[10.20948/prepr-2018-19](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-19)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-19>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.С. Охитина, Я.В. Маштаков, С.С. Ткачев

**Оптимизация расположения
двигателей коррекции
для обеспечения разгрузки маховиков**

Москва — 2018

A.C. Охитина, Я.В. Маштаков, С.С. Ткачев

Оптимизация расположения двигателей коррекции для обеспечения разгрузки маховиков

В работе рассматривается подход к решению задачи расположения двигателей орбитальной коррекции на борту геостационарного космического аппарата. Получены необходимые и достаточные условия, накладываемые на расположение двигателей, обеспечивающие как необходимую коррекцию наклонения орбиты, так и разгрузку избыточного кинетического момента маховиков, накопленного из-за действующих на спутник возмущений.

Ключевые слова: маховик, разгрузка маховиков, реактивный двигатель

A. Okhitina, Y. Mashtakov, S. Tkachev

Optimization of thrusters' location for ensuring the desaturation of the reaction wheels

The paper considers the approach to solve a problem of thrusters location on the geostationary satellite. Necessary and sufficient conditions for thrusters arrangement which guarantee both orbit correction and reaction wheel desaturation are obtained.

Key words: reaction wheel, desaturation, thruster

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 14-11-00621

Введение

В настоящее время одним из наиболее привлекательных классов орбит, использующихся в прикладных и коммерческих целях, являются геостационарные орбиты. Часто они используются, например, для обеспечения телевещания: приемные антенны спутникового телевидения, находящиеся на Земле, не должны все время менять свою ориентацию для отслеживания передающего спутника, так как он всегда находится в одном и том же месте небесной сферы. Помимо телевидения, геостационарные спутники также часто используются для обеспечения связи и дистанционного зондирования Земли.

Необходимо отметить, что геостационарная орбита не является стабильной: под действием внешних возмущений со стороны Луны, Солнца и нецентральности гравитационного поля Земли ее параметры, в частности наклонение, меняются. Для парирования этих возмущений используются реактивные двигатели, которые с некоторой периодичностью дают корректирующие импульсы в узлах возмущенной орбиты (рис. 1).

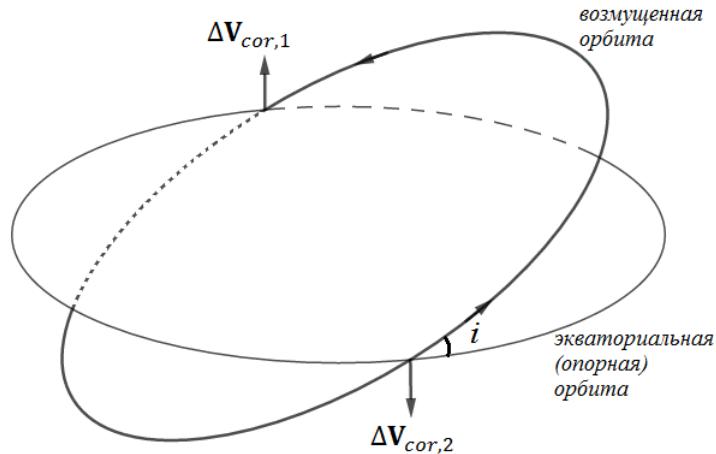


Рис. 1. Экваториальная (опорная) орбита и возмущенная орбита спутника

В случае, когда ось тяги двигателя проходит через центр масс аппарата, двигатели не будут оказывать никакого воздействия на угловое движение. Однако в общем случае ошибки в установке двигателей на корпусе аппарата, а также изменение положения центра масс спутника с течением времени, обусловленное, например, уменьшением количества топлива (рис. 2), приведут к тому, что двигатели начнут влиять на угловое движение спутника. Они будут создавать дополнительные моменты сил, которые в дальнейшем должны будут быть скомпенсированы системой ориентации аппарата.

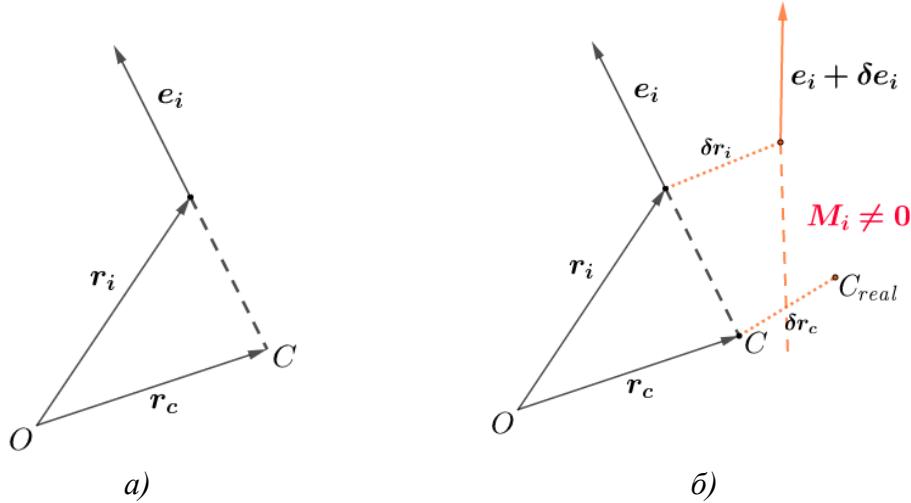


Рис. 2. а) ось тяги двигателя проходит через центр масс С, момент равен нулю;
б) реальное расположение оси тяги двигателя и центра масс спутника (красным)

Как правило, для управления ориентацией используются гироскопические системы: маховики и гиродины. Под действием внешних моментов они накапливают избыточный кинетический момент, который необходимо разгружать. Для этих целей могут быть использованы, например, дополнительные реактивные двигатели разгрузки. Однако, учитывая обязательное наличие двигателей коррекции, логичным вариантом здесь является именно их использование. Для этого, естественно, необходима установка нескольких двигателей, с тем чтобы, управляя временем работы каждого из них, обеспечить выдачу требуемого корректирующего импульса и требуемого для разгрузки момента.

Необходимо отметить, что решаемая в работе задача уже освещалась в литературе. Например, в работах [1, 2] рассматривается задача одновременной разгрузки избыточного кинетического момента и выдачи требуемого корректирующего воздействия. В работе [3] предлагается использовать магнитные катушки и реактивные двигатели для разгрузки маховиков, однако задача расположения самих двигателей там не рассматривается. Основным отличием настоящей работы является учет различных ошибок, возникающих при установке двигателей и влияющих на возможность обеспечения требуемого корректирующего импульса и разгрузки гироскопической системы ориентации.

1. Постановка задачи

В работе рассматривается спутник, оснащенный восемью двигателями коррекции, расположенными на противоположных параллельных гранях аппарата (рис. 3).

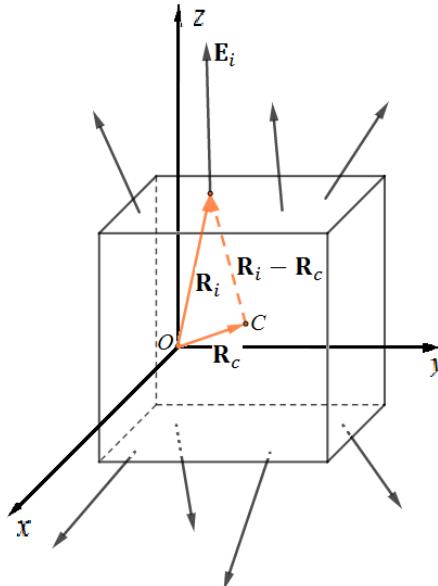


Рис. 3. Спутник с восемью фиксированными двигателями

Будем использовать следующие правые ортонормированные системы координат:

- $OXYZ$ – Орбитальная Система Координат (ОСК). Начало O расположено в центре масс аппарата, ось OZ параллельна нормали к орбите, OX параллельна радиус-вектору спутника
- $Oxyz$ – Связанная со спутником система координат. Ось Oz перпендикулярна граням, на которых установлены двигатели коррекции, оси Ox, Oy выбираются произвольно таким образом, чтобы получившаяся тройка векторов была правой ортогональной.

Спутник предполагается стабилизированным в ОСК таким образом, что связанная и орбитальная системы координат совпадают. Как уже говорилось выше, орбита под действием возмущений меняет свои параметры, в частности она перестает быть экваториальной. Чтобы скорректировать наклонение возмущенной орбиты, в ее узлах спутник получает необходимое изменение скорости ΔV либо в направлении оси Oz , либо в противоположном, и, следовательно, наклонение орбиты приводится к нулю.

Помимо выполнения условий на выдачу требуемого импульса, предположим, что необходимо также обеспечить и разгрузку маховиков. Причем требуется учесть, что двигатели коррекции устанавливаются на корпус аппарата с некоторой ошибкой. При этом выражение для момента сил, создаваемого каждым двигателем, может быть вычислено как

$$\mathbf{M}_i = (\mathbf{r}_i + \delta\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c - \delta\mathbf{r}_c) \times (\mathbf{e}_i + \delta\mathbf{e}_i) f = \mathbf{m}_i + \delta\mathbf{m}_i, \quad (1)$$

где \mathbf{r}_i – номинальная точка крепления двигателя (точка приложения тяги), \mathbf{r}_c – номинальное положение центра масс аппарата, \mathbf{e}_i – номинальный орт

направления оси тяги двигателя, f – величина тяги, \mathbf{m}_i – номинальный момент силы, создаваемый двигателем, при помощи δ обозначены соответствующие ошибки. В дальнейшем будут также использованы обозначения

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_i &= \mathbf{r}_i + \delta\mathbf{r}_i, \\ \mathbf{R}_c &= \mathbf{r}_c + \delta\mathbf{r}_c, \\ \mathbf{E}_i &= \mathbf{e}_i + \delta\mathbf{e}_i.\end{aligned}\tag{2}$$

Дополнительным требованием также является возможность обеспечения выдачи требуемого корректирующего импульса и разгрузки избыточного кинетического момента в том числе и при выходе одного из двигателей из строя.

Итак, задача состоит в том, чтобы получить методику подбора направления осей \mathbf{e}_i и положения двигателей коррекции \mathbf{r}_i таким образом, чтобы обеспечить возможность разгрузки маховиков и выдачи требуемого изменения скорости ΔV при всех заданных ограничениях, описанных выше. То есть нужно подобрать номинальные значения \mathbf{e}_i и \mathbf{r}_i , при которых для каждой конкретной реализации условие задачи будет выполнено.

2. Подбор номинальных моментов

2.1 Формализация задачи

Формализуем поставленную задачу – получим необходимые уравнения и опишем заданные ограничения.

Введем следующие параметры:

$\mathbf{h}_{\max} = (h_{x\max} \ h_{y\max} \ h_{z\max})^T$ – максимально допустимый накопленный кинетический момент,

$\mathbf{h}_{oN} = (h_{xN} \ h_{yN} \ h_{zN})^T$ – остаточный кинетический момент в одном узле (где надо создать ΔV_N – приращение скорости, полученное с помощью «верхних» двигателей),

$\mathbf{h}_{oS} = (h_{xS} \ h_{yS} \ h_{zS})^T$ – остаточный кинетический момент в другом узле (где надо создать ΔV_S – приращение скорости, полученное с помощью «нижних» двигателей).

Здесь индексы *N* (*North*) и *S* (*South*) указывают на направления по оси Oz и против нее соответственно.

Пронумеруем 1, 2, 3, 4 двигатели, создающие ΔV_N , а 5, 6, 7, 8 – ΔV_S . Тогда ограничения на максимально допустимый накопленный кинетический момент будут задаваться следующими неравенствами:

$$\begin{aligned}-\mathbf{h}_{\max} &\leq \sum_{i=1}^4 (\mathbf{m}_i + \delta \mathbf{m}_i) t_i + \mathbf{h}_{oN} \leq \mathbf{h}_{\max}, \\ -\mathbf{h}_{\max} &\leq \sum_{j=5}^8 (\mathbf{m}_j + \delta \mathbf{m}_j) t_j + \mathbf{h}_{oS} \leq \mathbf{h}_{\max}.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь t_i – время работы i -го двигателя. Неравенства (3) дополняются ограничениями

$$0 \leq t_i \leq T_{\max}, \quad |\delta \mathbf{m}_i| \leq \delta m_{\max}, \quad |\mathbf{h}_{\max}|, |\mathbf{h}_{oS}|, |\mathbf{h}_{oN}| \leq 0.5 \cdot h_{\max}.$$

Суммарное изменение скорости может быть получено с помощью следующего выражения:

$$\sum_{i=1}^8 e_i t_i \frac{f}{m_s} = \Delta V.$$

Будем рассматривать только задачу коррекции наклонения орбиты. В этом случае будет важным лишь выдать требуемое изменение скорости в узлах орбиты либо вдоль нормали, либо противоположно ей. Таким образом, ограничения на выдачу требуемого приращения скорости записывается в виде

$$\frac{f}{m_s} \left(\sum_{i=1}^4 e_{zi} t_i - \sum_{j=5}^8 e_{zj} t_j \right) = \Delta V,$$

где e_{zi} – проекция соответствующего вектора \mathbf{e}_i на ось Oz , а m_s – масса спутника. Влиянием ошибки направления оси двигателя на выдачу требуемого приращения скорости в дальнейшем пренебрегаем.

Таким образом, получается система:

$$\begin{aligned}-\mathbf{h}_{\max} &\leq \sum_{i=1}^4 (\mathbf{m}_i + \delta \mathbf{m}_i) t_i + \mathbf{h}_{oN} \leq \mathbf{h}_{\max}, \\ -\mathbf{h}_{\max} &\leq \sum_{j=5}^8 (\mathbf{m}_j + \delta \mathbf{m}_j) t_j + \mathbf{h}_{oS} \leq \mathbf{h}_{\max}, \\ \frac{f}{m_s} \left(\sum_{i=1}^4 e_{zi} t_i - \sum_{j=5}^8 e_{zj} t_j \right) &= \Delta V, \\ 0 \leq t_i &\leq T_{\max}, \\ |\delta \mathbf{m}_i| &\leq \delta m_{\max}, \\ |\mathbf{h}_{\max}|, |\mathbf{h}_{oS}|, |\mathbf{h}_{oN}| &\leq 0.5 \cdot h_{\max}.\end{aligned}\quad (4)$$

Итак, задача состоит в том, чтобы обеспечить совместность системы (4) относительно t_i, t_j при любых $\delta \mathbf{m}_i$ и $|\mathbf{h}_{oS}|, |\mathbf{h}_{oN}|$, удовлетворяющих

ограничениям, путем подбора \mathbf{m}_i , \mathbf{m}_j . Векторы \mathbf{m}_i , \mathbf{m}_j , в свою очередь, определяются номинальным расположением двигателей \mathbf{r}_i и осей тяги \mathbf{e}_i с учетом всех ошибок и ограничений.

Полагается, что в каждом узле работает только одна из двух четверок двигателей. Тогда задачу можно решить следующим образом: обеспечим возможность разгрузки маховиков и выдачи ΔV отдельно для каждой из групп двигателей, таким образом, при отказе одного двигателя оставшаяся группа сможет справиться с поставленной задачей, то есть работоспособность системы сохранится. В случае же штатной работы можно распределить нагрузку на обе группы, например равномерно.

Рассмотрим теперь только верхнюю четверку двигателей. Система (4) перепишется тогда следующим образом:

$$\begin{aligned} -\frac{\mathbf{h}_{\max}}{T} \leq \sum_{i=1}^4 (\mathbf{m}_i + \delta\mathbf{m}_i) t_i + \frac{\mathbf{h}_{oN}}{T} &\leq \frac{\mathbf{h}_{\max}}{T}, \\ \sum_{i=1}^4 e_{zi} t_i = p, \\ |\delta\mathbf{m}_i| &\leq \delta m_{\max}, \\ |\mathbf{h}_{\max}|, |\mathbf{h}_{oS}|, |\mathbf{h}_{oN}| &\leq 0.5 \cdot h_{\max}, \\ 0 \leq t_i &\leq T_{\max}. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $p = \frac{\Delta V m_s}{f}$. Для верхних двигателей $e_{zi} \geq 0$ (рис. 4).

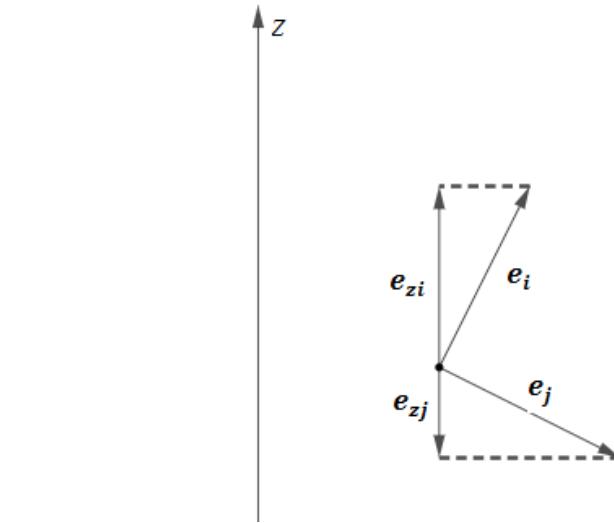


Рис. 4. Проекции ортов направления тяги двигателей на ось Oz для $i=1..4, j=5..8$

Сделаем теперь существенно упрощающее предположение, что все двигатели одинаковые в смысле выдачи ΔV , то есть проекция оси тяги на Oz для всех двигателей одинаковая и каждый двигатель вносит равный вклад в

выдачу ΔV . В этом случае будет накладываться лишь ограничение на общее время работы всех двигателей

$$\sum_{i=1}^4 t_i = T = \frac{P}{e_z}.$$

Неравенства в системе (5) фактически означают, что ограничения на кинетический момент лежат внутри куба $-\frac{\mathbf{h}_{\max}}{T}, \frac{\mathbf{h}_{\max}}{T}$. На рис. 5 этот куб изображен серым цветом.

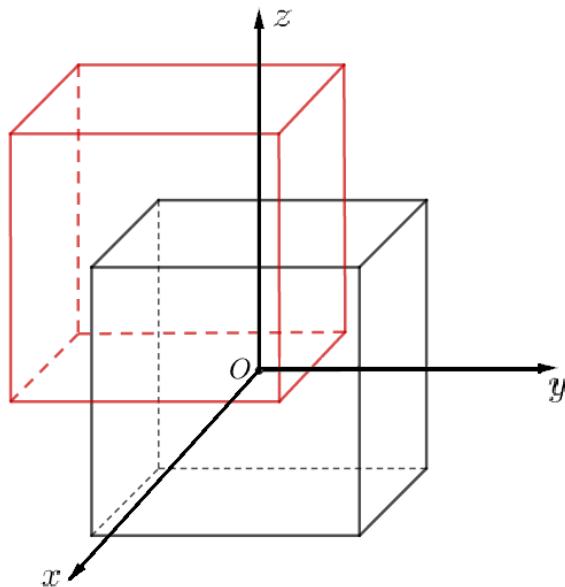


Рис. 5. Область допустимых кинетических моментов

Красным цветом показан куб, ограничивающий пространство допустимого суммарного изменения кинетического момента, то есть область, в которой может находиться изменение кинетического момента, обусловленное работой реактивных двигателей $\Delta \mathbf{H}_N = \sum_{i=1}^4 \mathbf{M}_i \tau_i$, где $\tau_i = \frac{t_i}{T}$ и $\sum_{i=1}^4 \tau_i = 1$. Положение красного куба в пространстве кинетических моментов зависит от начальных условий, которые могут быть произвольными в заданном диапазоне, причем начало координат обязательно должно лежать либо внутри красного куба, либо на его границе. Поэтому для обеспечения разгрузки маховиков необходимо обеспечить возможность выдачи приращения кинетического момента $\Delta \mathbf{H}_N$ в некоторой сфере с центром в нуле. Иными словами, для любых η ($0 \leq \eta \leq 1$) и любого заданного направления \mathbf{k}_N должен существовать набор таких τ_i , что

$$\sum_{i=1}^4 \mathbf{M}_i \tau_i = \xi \mathbf{k}_N,$$

где ξ – некоторая положительная константа.

Рассмотрим более внимательно область всех возможных моментов, которые можно создать в первом узле. Они задаются выражением

$$\Delta \mathbf{H}_N = \sum_{i=1}^4 \mathbf{M}_i \tau_i = \xi \mathbf{k}_N, \quad \sum_{i=1}^4 \tau_i = 1.$$

Видно, что полученная область является выпуклой оболочкой векторов \mathbf{M}_i и представляет собой тетраэдр. Таким образом, для обеспечения возможности выдачи нужного кинетического момента необходимо сделать так, чтобы в получившейся тетраэдр могла быть вписана некоторая сфера ненулевого радиуса с центром в начале координат.

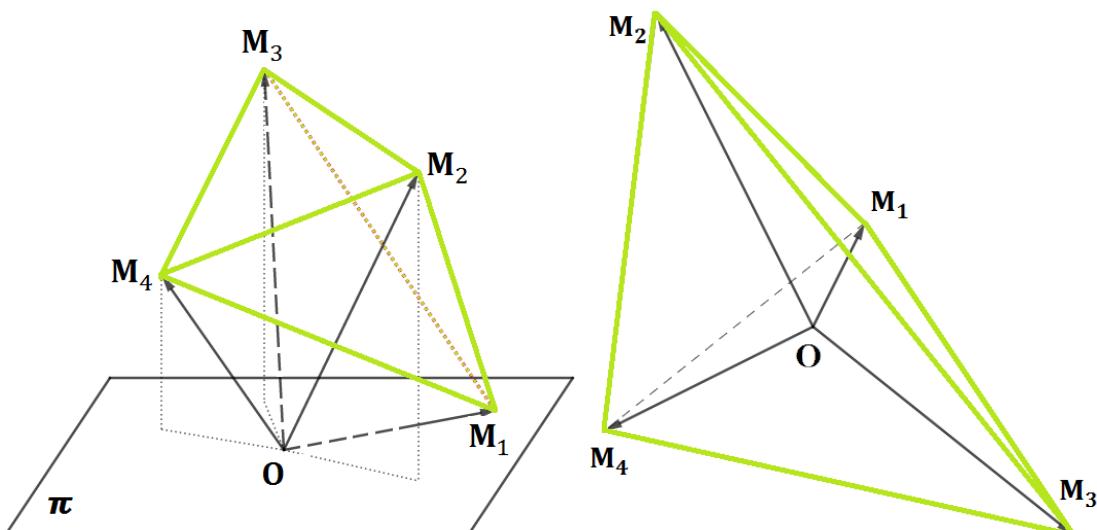


Рис. 6. Выпуклые оболочки \mathbf{M}_i (зеленым)

На рис. 6 показаны два возможных варианта расположения начала координат относительно выпуклой оболочки векторов \mathbf{M}_i . Слева на рис. 6 точка \mathbf{O} не попадает в тетраэдр. В этом случае построить сферу ненулевого радиуса внутри тетраэдра с центром в нуле невозможно. Для правого тетраэдра, показанного на рис. 6, это является возможным.

Итак, для того чтобы оказалось возможным построить сферу ненулевого радиуса внутри тетраэдра, необходимо и достаточно, чтобы начало координат принадлежало выпуклой оболочке, построенной на векторах \mathbf{M}_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Для этого, во-первых, должна иметь решение система

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_1\lambda_1 + \mathbf{M}_2\lambda_2 + \mathbf{M}_3\lambda_3 + \mathbf{M}_4\lambda_4 &= 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 1, \\ \lambda_i &> 0.\end{aligned}$$

Она представляет собой условие принадлежности начала координат выпуклой оболочке $\mathbf{M}_i, i = 1, 2, 3, 4$. Строгое неравенство $\lambda_i > 0$ исключает попадание начала координат на грань. Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{(\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4)}{\Delta}, \quad \lambda_2 = \frac{(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4)}{\Delta}, \\ \lambda_3 &= -\frac{(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_4)}{\Delta}, \quad \lambda_4 = \frac{(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3)}{\Delta},\end{aligned}$$

где $\Delta = -(\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4) + (\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4) - (\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_4) + (\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3)$.

Для обеспечения положительности $\lambda_i > 0$, необходимо и достаточно, чтобы либо

$$\begin{aligned}(\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4) &< 0, \\ (\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4) &> 0, \\ (\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_4) &< 0, \\ (\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3) &> 0;\end{aligned}\tag{6}$$

либо необходимо поменять все знаки на противоположные (это приведет также к изменению знака Δ , а значит, знак λ_i останется положительным). Далее, не ограничивая общности, будем рассматривать только первый случай.

Так как $\mathbf{M}_i, i = \overline{1, 4}$ есть лишь конкретная реализация, то нужно гарантировать выполнение неравенств (6) для любых возможных отклонений $\delta \mathbf{m}_i$. Условия

$$\begin{aligned}(\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4) &< 0, \\ (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4) &> 0, \\ (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_4) &< 0, \\ (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3) &> 0,\end{aligned}\tag{7}$$

накладываемые на \mathbf{m}_i , являются необходимыми для обеспечения выполнения (6).

2.2. Геометрическая интерпретация

Условия (6) имеют достаточно простую геометрическую интерпретацию. Так как совокупность отклонений представляет собой шар с центром в конце

соответствующего вектора номинального момента, то для того, чтобы выполнялись (6), достаточно

- 1) исключить пересечение этих сфер (т.е. исключить возможность реализации равных векторов, т.к. их наличие приводит к тому, что одно из неравенств (6) обнуляется),
- 2) исключить возможность того, что найдется такая прямая, которая проходит через начало координат и концы векторов (т.е. исключить возможность реализации коллинеарных векторов, что также приведет к обнулению одного из неравенств (6)),
- 3) исключить пересечение каждой из сфер с плоскостями, образованными парами остальных векторов (т.е. исключить возможность реализации компланарных векторов).

Первое условие выполняется, если

$$|\mathbf{m}_i - \mathbf{m}_j| > 2\delta m, \quad \delta m = \max_i(|\delta \mathbf{m}_i|), \quad i = \overline{1, 4}. \quad (8)$$

Для анализа второго и третьего условий рассмотрим рис. 7 и рис. 8. На рисунках показаны два шара с центрами с радиус-векторами \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 , представляющие собой все возможные значения векторов $\mathbf{M}_1 = \mathbf{m}_1 + \delta m \boldsymbol{\varepsilon}_1$ и $\mathbf{M}_2 = \mathbf{m}_2 + \delta m \boldsymbol{\varepsilon}_2$, где $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2$ – единичные векторы вдоль направлений $\delta \mathbf{m}_1, \delta \mathbf{m}_2$ соответственно. Случай, когда \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 коллинеарны, возникает, если начало координат лежит внутри закрашенных областей (рис. 8), то есть такую ситуацию нужно исключить.

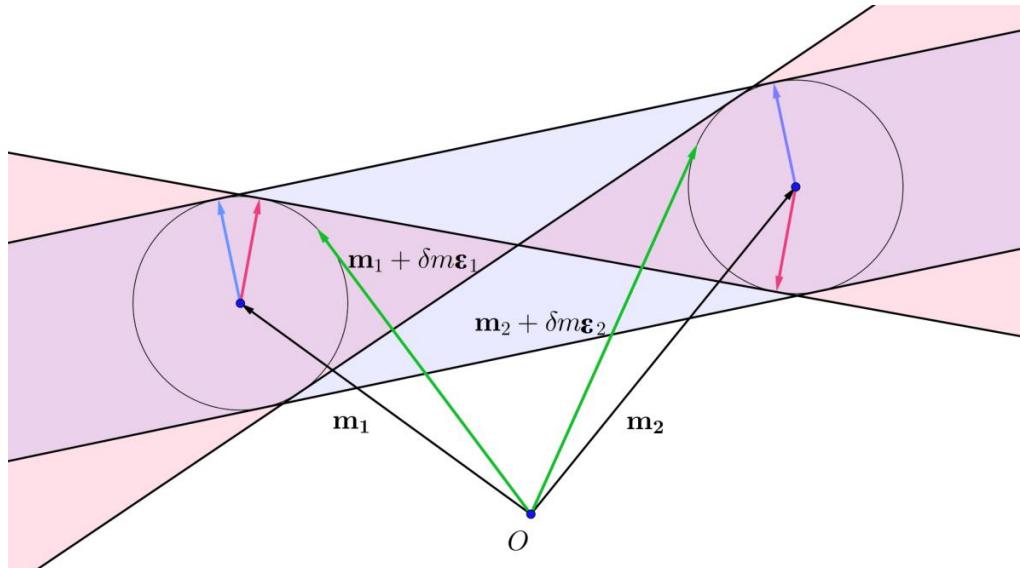


Рис. 7. «Хорошая» ситуация

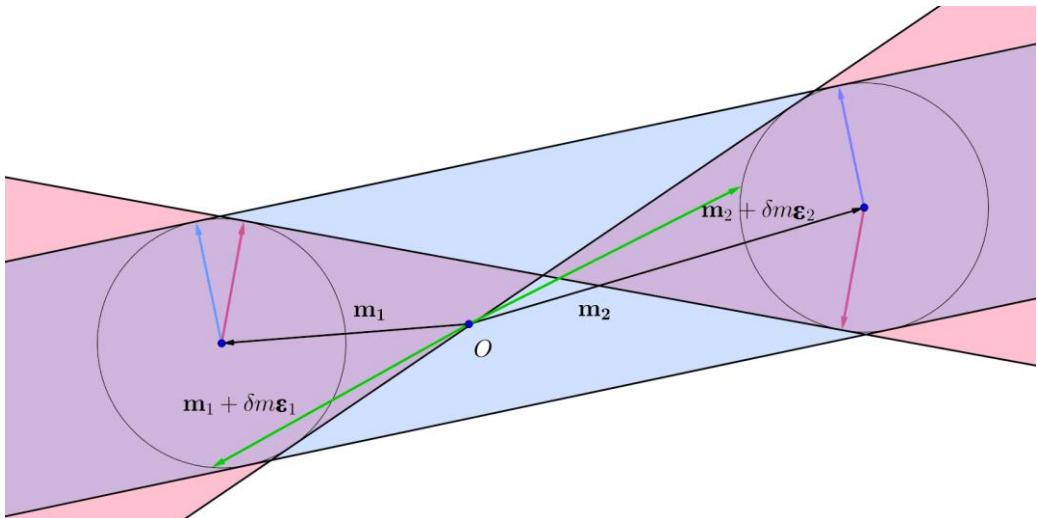


Рис. 8. «Плохая» ситуация

Для нахождения третьего условия нужно найти расстояние от одного вектора до ближайшей касательной плоскости к двум сферам (с центрами на концах двух других векторов), проходящей через начало координат.

В дальнейшем для определенности возьмем первые три вектора. Нормаль к указанной плоскости определяется так:

$$(\mathbf{m}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \delta m) \times (\mathbf{m}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \delta m) = k \mathbf{n}. \quad (9)$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2$ – векторы из центров соответствующих сфер к точке касания, $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \pm \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \pm \mathbf{n}$, $k = |(\mathbf{m}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \delta m) \times (\mathbf{m}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \delta m)|$. Всего возможно четыре варианта таких касательных плоскостей. В итоге (9) можно переписать в виде

$$(\mathbf{m}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \delta m) \times (\mathbf{m}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \delta m) = k \mathbf{n},$$

$$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_1 \times (\pm \mathbf{n}) \delta m + (\pm \mathbf{n}) \times \mathbf{m}_2 \delta m + (\pm \mathbf{n}) \delta m \times (\pm \mathbf{n}) \delta m = k \mathbf{n},$$

или $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 + (\pm \mathbf{m}_1) \times \mathbf{n} \delta m + (\mp \mathbf{m}_2) \times \mathbf{n} \delta m = k \mathbf{n},$

$$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 + (\pm \mathbf{m}_1 \mp \mathbf{m}_2) \times \mathbf{n} \delta m = k \mathbf{n}.$$

Или, введя обозначения $\mathbf{a} = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$, $\mathbf{b} = (\pm \mathbf{m}_1 \mp \mathbf{m}_2)$; $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab$,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{n} \delta m = k \mathbf{n}. \quad (10)$$

Так как векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} ортогональны, то для решения (10) можно ввести следующий базис:

$$\gamma_b = \frac{\mathbf{b}}{b}, \quad \gamma_a = \frac{\mathbf{a}}{a}, \quad \gamma_{ba} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{a}}{ab}.$$

Тогда

$$\mathbf{n} = n_b \boldsymbol{\gamma}_b + n_a \boldsymbol{\gamma}_a + n_{ba} \boldsymbol{\gamma}_{ba},$$

$$\mathbf{a} = a \boldsymbol{\gamma}_a,$$

$$\mathbf{b} \times \boldsymbol{\gamma}_b = 0,$$

$$\mathbf{b} \times \boldsymbol{\gamma}_a = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{a}}{a} = b \boldsymbol{\gamma}_{ba},$$

$$\mathbf{b} \times \boldsymbol{\gamma}_{ba} = \mathbf{b} \times \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{a}}{ab} = \frac{\mathbf{b}(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{ab} - \frac{\mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{b})}{ab} = \frac{\mathbf{a}b^2}{ab} = -b \frac{\mathbf{a}}{a} = -b \boldsymbol{\gamma}_a.$$

В этом случае (10) перепишется в виде

$$a \boldsymbol{\gamma}_a + b \delta m (n_a \boldsymbol{\gamma}_{ba} - n_{ba} \boldsymbol{\gamma}_a) = k (n_b \boldsymbol{\gamma}_b + n_a \boldsymbol{\gamma}_a + n_{ba} \boldsymbol{\gamma}_{ba}).$$

Сопоставляя коэффициенты при одинаковых базисных векторах, получим

$$\text{при } \boldsymbol{\gamma}_b : n_b = 0,$$

$$\text{при } \boldsymbol{\gamma}_a : a - b n_{ba} \delta m = k n_a,$$

$$\text{при } \boldsymbol{\gamma}_{ba} : b n_a \delta m = k n_{ba}.$$

Отсюда

$$n_b = 0,$$

$$n_{ba} = \frac{ab \delta m}{k^2 + \delta m^2 b^2},$$

$$n_a = \frac{ak}{k^2 + \delta m^2 b^2}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{n} = \frac{\delta m}{k^2 + \delta m^2 b^2} \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \frac{k}{k^2 + \delta m^2 b^2} \mathbf{a}.$$

Найдем k . Для этого возведем обе части (9) в квадрат и учтем, что $|\mathbf{n}|^2 = 1$.

$$k^2 = a^2 + 2\delta m (\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{n}) + |\mathbf{b} \times \mathbf{n}|^2 \delta m^2.$$

Распишем подробнее второе и третье слагаемые, стоящие справа в этом выражении

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{n}) &= (\mathbf{a}, b(n_a \gamma_{ba} - n_{ba} \gamma_a)) = \\
&= \left(\mathbf{a}, b \left(\frac{ak}{k^2 + \delta m^2 b^2} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{a}}{ab} - \frac{ab \delta m}{k^2 + \delta m^2 b^2} \frac{\mathbf{a}}{a} \right) \right) = \\
&= \left(\mathbf{a}, b \left(\frac{k}{k^2 + \delta m^2 b^2} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{a}}{b} - \frac{b \delta m}{k^2 + \delta m^2 b^2} \mathbf{a} \right) \right) = \\
&= -a^2 b^2 \frac{\delta m}{k^2 + \delta m^2 b^2}; \\
|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|^2 &= \left| b \left(\frac{k}{k^2 + \delta m^2 b^2} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{a}}{b} - \frac{b \delta m}{k^2 + \delta m^2 b^2} \mathbf{a} \right) \right|^2 = \\
&= \frac{1}{(k^2 + \delta m^2 b^2)^2} |k \mathbf{b} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} b^2 \delta m|^2 = \\
&= \frac{k^2 a^2 b^2 - a^2 b^4 \delta m^2 - 2k(\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \mathbf{a}) b^2 \delta m}{(k^2 + \delta m^2 b^2)^2} = \\
&= \frac{a^2 b^2 (k^2 - b^2 \delta m^2)}{(k^2 + \delta m^2 b^2)^2} = \\
&= \frac{a^2 b^2}{k^2 + \delta m^2 b^2}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$k^2 = a^2 - a^2 b^2 \frac{\delta m^2}{k^2 + \delta m^2 b^2}.$$

Решив это уравнение относительно k , получаем, что

$$k^2 = 0 \text{ или } k^2 = a^2 - \delta m^2 b^2.$$

Случай $k^2 = 0$ не подходит, так как в этом случае векторное произведение $(\mathbf{m}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \delta m) \times (\mathbf{m}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \delta m)$ и соответствующее смешанное произведение обнуляется, что противоречит (6). Рассмотрим случай $k^2 = a^2 - \delta m^2 b^2$.

1) Пусть

$$a^2 - \delta m^2 b^2 > 0, \quad (11)$$

тогда $k = \sqrt{a^2 - \delta m^2 b^2}$. С учетом этого

$$\mathbf{n} = \frac{\delta m}{a^2} \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \frac{\sqrt{a^2 - \delta m^2 b^2}}{a^2} \mathbf{a}. \quad (12)$$

Расстояние от конца вектора \mathbf{m}_3 до построенной плоскости должно быть больше радиуса сферы δm , т.е.

$$(\mathbf{m}_3, \mathbf{n}) > \delta m. \quad (13)$$

2) Рассмотрим теперь случай

$$a^2 - \delta m^2 b^2 < 0. \quad (14)$$

Запишем уравнение цилиндра (см. рис. 7, рис. 8 и рис. 9). В этом случае $\mathbf{b} = \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2$ или $\mathbf{b} = \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1$. Ось цилиндра задается направляющим вектором $\mathbf{q} = \frac{\mathbf{b}}{b}$. Точка \mathbf{r} лежит на цилиндре с радиусом δm , если $|(\mathbf{m}_1 - \mathbf{r}) \times \mathbf{q}| = \delta m$.

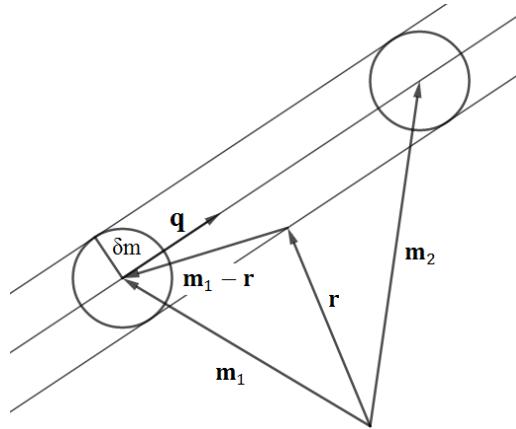


Рис. 9. Цилиндр, описанный около сфер

Тогда начало координат лежит внутри цилиндра, если

$$|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{q}| < \delta m$$

или

$$|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{b}| < b\delta m.$$

Так как $|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{b}| = |\mathbf{m}_1 \times (\pm \mathbf{m}_1 \mp \mathbf{m}_2)| = |\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2| = |\mathbf{a}|$, тогда

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}| &< b\delta m, \\ a^2 &< b^2 \delta m^2. \end{aligned}$$

Отсюда получается условие (14).

Теперь запишем уравнение конуса (см. рис. 7, рис. 8 и рис. 10), каждая направляющая которого является касательной к сферам и проходит через середину отрезка, соединяющего их центры. В этом случае $\mathbf{b} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$ или $\mathbf{b} = -\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2$.

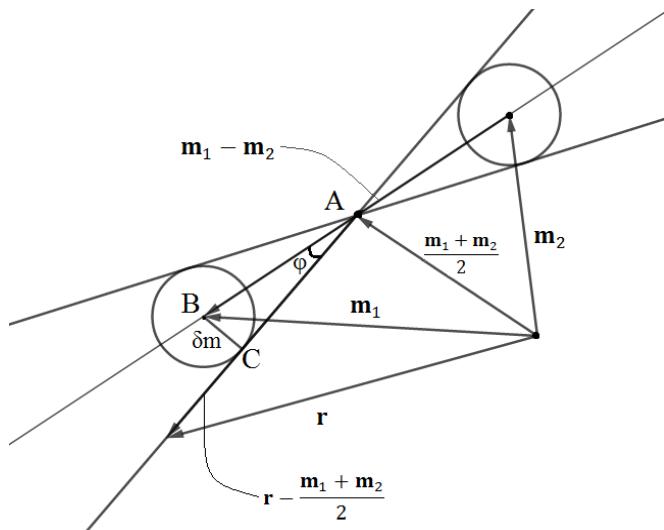


Рис. 10. Конус, описанный около сфер

Рассмотрим единичный вектор, задающий направление оси конуса $\frac{\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2}{|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|}$, а также вектор его образующей $\mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2}{2}$. Точка \mathbf{r} будет принадлежать поверхности цилиндра, если угол между этими векторами будет равен φ (рис. 10) и который может быть найден при помощи радиусов окружностей δm и расстояния между центрами этих окружностей $\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2$.

Найдем косинус угла φ из прямоугольного треугольника ABC (рис. 10):

$$\cos \varphi = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 - BC^2}}{AB} = \frac{\sqrt{\frac{|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|^2}{4} - \delta m^2}}{\frac{|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|}{2}}.$$

Найдем скалярное произведение описанных выше векторов:

$$\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2}{2}, \frac{\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2}{|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|} \right) = \left| \mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2}{2} \right| \cdot 1 \cdot \cos \varphi,$$

$$\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2}{2}, \frac{\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2}{|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|} \right) = \left| \mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2}{2} \right| \sqrt{\frac{\frac{|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|^2}{4} - \delta m^2}{\frac{|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|}{2}}}.$$

Таким образом, уравнение конуса (рис. 10) в векторном виде может быть записано следующим способом:

$$\frac{\left\langle \mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2}{2}, \frac{\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2}{|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|} \right\rangle}{\left| \mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2}{2} \right|} = \frac{\sqrt{\frac{|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|^2}{4} - \delta m^2}}{\frac{|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|}{2}}.$$

Модуль скалярного произведения появляется из-за того, что нужно описать два конуса, иными словами, модуль косинуса угла между высотой конуса и вектором из центра в точку конуса должен быть равен заданной величине.

Начало координат лежит внутри одного из конусов, если

$$\begin{aligned} & \frac{\left\langle -\frac{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2}{2}, \frac{\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2}{|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|} \right\rangle}{\frac{|\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2|}{2}} > \frac{\sqrt{\frac{|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|^2}{4} - \delta m^2}}{\frac{|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|}{2}}, \\ & \left\langle -\frac{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2}{2}, \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2 \right\rangle > |\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2| \sqrt{\frac{|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|^2}{4} - \delta m^2}, \\ & \frac{1}{2} |(-\mathbf{m}_1^2 + \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_2^2)| > |\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2| \sqrt{\frac{|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|^2}{4} - \delta m^2}, \\ & \frac{1}{2} (\mathbf{m}_2^2 - \mathbf{m}_1^2) > |\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2| \sqrt{\frac{|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|^2}{4} - \delta m^2}, \\ & (\mathbf{m}_2^2 - \mathbf{m}_1^2)^2 > |\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2|^2 (|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|^2 - 4\delta m^2). \end{aligned}$$

Преобразуем отдельно следующее выражение:

$$\begin{aligned} |\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2|^2 |\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2|^2 &= (\mathbf{m}_1^2 + \mathbf{m}_2^2 + 2(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2))(\mathbf{m}_1^2 + \mathbf{m}_2^2 - 2(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)) = \\ &= \mathbf{m}_1^4 + \mathbf{m}_1^2 \mathbf{m}_2^2 - 2\mathbf{m}_1^2 (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) + \mathbf{m}_1^2 \mathbf{m}_2^2 + \mathbf{m}_2^4 - 2\mathbf{m}_2^2 (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) + \\ &+ 2\mathbf{m}_1^2 (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) + 2\mathbf{m}_2^2 (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) - 4(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)^2 = \\ &= \mathbf{m}_1^4 + \mathbf{m}_2^4 + 2\mathbf{m}_1^2 \mathbf{m}_2^2 - 4(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)^2 = (\mathbf{m}_1^2 + \mathbf{m}_2^2)^2 - 4(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & (\mathbf{m}_2^2 - \mathbf{m}_1^2)^2 > (\mathbf{m}_1^2 + \mathbf{m}_2^2)^2 - 4(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)^2 - 4\delta m^2 |\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2|^2, \\ & -4\mathbf{m}_1^2 \mathbf{m}_2^2 > -4(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)^2 - 4\delta m^2 |\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2|^2, \\ & \mathbf{m}_1^2 \mathbf{m}_2^2 - (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)^2 < \delta m^2 |\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2|^2, \end{aligned}$$

$$|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|^2 < \delta m^2 |\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2|^2,$$

$$a^2 < b^2 \delta m^2.$$

Отсюда условие нахождения начала координат внутри получается аналогичным (14).

Таким образом, при $a^2 - b^2 \delta m^2 < 0$ начало координат попадает и в конус, и в цилиндр, что является недопустимым, следовательно, возможен лишь случай $a^2 - b^2 \delta m^2 > 0$ и, значит, $k = \sqrt{a^2 - \delta m^2 b^2}$, а условие (13) является достаточным для того, чтобы условия (6) выполнялись при любых возможных реализациях.

Итак, с помощью условий (7) и геометрической интерпретации представляется возможным найти конфигурацию номинальных моментов, удовлетворяющих всем ограничениям.

2.3 Альтернативный подход

Опишем другой способ обеспечения выполнения условий (6). Поставим следующую оптимизационную задачу:

$$\Phi = (\mathbf{m}_1, \mathbf{n})^2 + (\mathbf{m}_2, \mathbf{n})^2 + (\mathbf{m}_3, \mathbf{n})^2 \Rightarrow \min_{\mathbf{n}},$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (15)$$

То есть нужно найти такую плоскость, проходящую через начало координат, чтобы суммы квадратов расстояний от трех точек до нее были минимальными. Очевидно, что для выполнения (6) достаточно $\Phi > 3\delta m^2$.

Запишем функцию Лагранжа оптимизационной задачи:

$$L = (\mathbf{m}_1, \mathbf{n})^2 + (\mathbf{m}_2, \mathbf{n})^2 + (\mathbf{m}_3, \mathbf{n})^2 - \lambda(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1).$$

Тогда задача на условный экстремум (15) даст следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial n_x} = 2m_{1x}(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}) + 2m_{2x}(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}) + 2m_{3x}(\mathbf{m}_3, \mathbf{n}) - 2\lambda n_x = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_y} = 2m_{1y}(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}) + 2m_{2y}(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}) + 2m_{3y}(\mathbf{m}_3, \mathbf{n}) - 2\lambda n_y = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_z} = 2m_{1z}(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}) + 2m_{2z}(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}) + 2m_{3z}(\mathbf{m}_3, \mathbf{n}) - 2\lambda n_z = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1 = 0.$$

Заметим, что первые три уравнения системы (16) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\mathbf{m}_1(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}) + \mathbf{m}_2(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}) + \mathbf{m}_3(\mathbf{m}_3, \mathbf{n}) - \lambda \mathbf{n} = 0.$$

Домножив это уравнение скалярно на \mathbf{n} , получим $\lambda = \Phi$. То есть задача сводится к нахождению минимального собственного значения матрицы системы (16), которая имеет вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_1^T + \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_2^T + \mathbf{m}_3 \mathbf{m}_3^T,$$

и его сравнению с $3\delta m^2$. Использование этого подхода затруднено отсутствием конечных соотношений в общем случае, но с помощью этого способа построения можно достаточно быстро проверить, подходит ли предложенное расположение векторов или нет.

3. Установка двигателей

После получения конфигурации номинальных моментов \mathbf{m}_i , обеспечивающей разгрузку маховиков, можно найти положение каждого двигателя на верхней (для верхних четырех двигателей) панели спутника, а также направление их осей тяги. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_i &= \mathbf{r}_{ic} \times \mathbf{e}_i f, \\ r_{ic,z} &= \rho, \\ e_{i,z} &= \frac{m_s \Delta V_{max}}{f T_{max}}, \\ |\mathbf{e}_i| &= 1, \end{aligned} \tag{17}$$

где $\mathbf{r}_{ic} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c$ – положение двигателя относительно центра масс, ΔV_{max} – максимальное изменение скорости, которое может понадобиться для коррекции орбиты. Ограничение на компоненту z радиус-вектора возникает из-за того, что расстояние от центра масс до верхней панели спутника фиксировано и одинаково для всех двигателей.

Перепишем систему (17) в следующем виде (опустим индексы i , ic и max):

$$\begin{aligned}
r_y \frac{\Delta V}{aT} - \rho e_y f &= m_x, \\
\rho e_x f - r_x \frac{\Delta V}{aT} &= m_y, \\
r_x e_y f - r_y e_x f &= m_z, \\
e_x^2 + e_y^2 + \left(\frac{\Delta V}{afT} \right)^2 &= 1.
\end{aligned} \tag{18}$$

Обозначим $\frac{\Delta V}{aT} = c$, тогда из первых двух уравнений системы (18) следует, что

$$\begin{aligned}
r_y &= \frac{m_x + \rho e_y f}{c}, \\
r_x &= \frac{m_y + \rho e_x f}{c}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Первые три уравнения системы (18) равносильны тому, что $(\mathbf{m}, f\mathbf{e}) = \mathbf{0}$, то есть

$$m_x e_x f + m_y e_y f + m_z e_z f = 0. \tag{20}$$

Отсюда выразим e_x :

$$e_x = \frac{-m_z c - m_y e_y f}{m_x f}. \tag{21}$$

Подставим теперь выражение (21) в четвертое уравнение системы (18) и решим полученное квадратное относительно e_y уравнение:

$$e_y = \frac{-m_y m_z c \pm m_x \sqrt{(m_x^2 + m_y^2) f^2 - (m_x^2 + m_y^2 + m_z^2) c^2}}{(m_x^2 + m_y^2) f}. \tag{22}$$

Тогда

$$e_x = \frac{-m_x m_z c \mp m_y \sqrt{(m_x^2 + m_y^2) f^2 - (m_x^2 + m_y^2 + m_z^2) c^2}}{(m_x^2 + m_y^2) f}. \tag{23}$$

После того, как e_x и e_y найдены, r_x и r_y можно получить из уравнений (19).

Таким образом, получено два симметричных относительно оси Oz решения системы (17):

$$\begin{aligned}
e_x &= \frac{-m_x m_z c \mp m_y \sqrt{(m_x^2 + m_y^2) f^2 - (m_x^2 + m_y^2 + m_z^2) c^2}}{(m_x^2 + m_y^2) f}, \\
e_y &= \frac{-m_y m_z c \pm m_x \sqrt{(m_x^2 + m_y^2) f^2 - (m_x^2 + m_y^2 + m_z^2) c^2}}{(m_x^2 + m_y^2) f}, \\
e_z &= \frac{\Delta V}{afT}, \\
r_x &= \frac{m_y + \rho e_x f}{c}, \\
r_y &= \frac{m_x + \rho e_y f}{c}, \\
r_z &= \rho.
\end{aligned} \tag{24}$$

Стоит отметить, что в выражениях для e_x и e_y подкоренное выражение должно быть неотрицательно, то есть

$$(m_x^2 + m_y^2) f^2 \geq (m_x^2 + m_y^2 + m_z^2) c^2.$$

Так как $e_z = \frac{c}{f}$, то это означает, что

$$|e_z| \leq \sqrt{\frac{m_x^2 + m_y^2}{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}}.$$

Иными словами, невозможно создавать большой момент сил относительно оси Oz и одновременно обеспечивать высокую эффективность выдачу требуемого приращения скорости.

4. Распределение времени работы двигателей

После расстановки двигателей, а в дальнейшем и при эксплуатации аппарата можно вычислить уже реализованное значение для моментов сил:

$$\mathbf{M}_i = (\mathbf{r}_i + \delta\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c - \delta\mathbf{r}_c) \times (\mathbf{e}_i + \delta\mathbf{e}_i) f = \mathbf{m}_i + \delta\mathbf{m}_i.$$

Необходимо распределить время работы между двигателями таким образом, чтобы они могли выдать необходимое изменение скорости вдоль оси Oz . Запишем для этого неравенство, описывающее ограничение на кинетический момент:

$$\begin{aligned} -\frac{\mathbf{h}_{\max}}{T} \leq \sum_{i=1}^4 \mathbf{M}_i \tau_i + \frac{\mathbf{h}_{oN}}{T} \leq \frac{\mathbf{h}_{\max}}{T}, \quad \mathbf{M}_i = \mathbf{m}_i + \delta \mathbf{m}_i, \\ \sum_{i=1}^4 \tau_i = 1, \quad \tau_i = \frac{t_i}{T} \geq 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Перепишем эту систему в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 \leq \mathbf{M}_{14} \tau_1 + \mathbf{M}_{24} \tau_2 + \mathbf{M}_{34} \tau_3 \leq \mathbf{C}_2, \\ \tau_4 = 1 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3, \\ \tau_i \geq 0, i = \overline{1, 4}. \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= -\frac{\mathbf{h}_{\max}}{T} - \frac{\mathbf{h}_{oN}}{T} - \mathbf{M}_4, \\ \mathbf{C}_2 &= \frac{\mathbf{h}_{\max}}{T} - \frac{\mathbf{h}_{oN}}{T} - \mathbf{M}_4, \\ \mathbf{M}_{i4} &= \mathbf{M}_i - \mathbf{M}_4, \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} C_{1x} \\ C_{1y} \\ C_{1z} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} M_{14x} & M_{24x} & M_{34x} \\ M_{14y} & M_{24y} & M_{34y} \\ M_{14z} & M_{24z} & M_{34z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} C_{2x} \\ C_{2y} \\ C_{2z} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

$$\tau_4 = 1 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3, \quad \tau_i \geq 0, i = \overline{1, 4}.$$

После решения системы неравенств получим следующую область возможных времен τ_i :

$$\max(0, \boldsymbol{\sigma}_1) \leq \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} \leq \min(\boldsymbol{\sigma}_2, 1), \tag{28}$$

$$\tau_4 = 1 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3,$$

где

$$\boldsymbol{\sigma}_j = \begin{pmatrix} \sigma_{jx} \\ \sigma_{jy} \\ \sigma_{jz} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2.$$

Система (26) легко решается численно, в явном же виде это решение довольно громоздко. Конечный вид решения – область в пространстве τ_i , описываемая (28). Уточним лишь, что σ_1 и σ_2 зависят от начальных условий и от конкретной реализации \mathbf{M}_i , $i = \overline{1,4}$.

5. “Обнуление” горизонтальной компоненты скорости

В предыдущих разделах рассматривалась возможность сообщения аппарату нужного приращения скорости по вертикали, при этом не имело значения, какая у него будет скорость в горизонтальном направлении (в плоскости орбиты). Но оставлять без внимания данный вопрос нельзя, так как накопление скорости по горизонтали может привести к изменению большой полуоси, эксцентриситета или фазы орбиты, которое в дальнейшем нужно будет корректировать, затрачивая дополнительную энергию.

Поставим следующую оптимизационную задачу с тремя ограничениями типа неравенств и одним ограничением равенством на время работы двигателей:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^4 (e_{i,x} \tau_i) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^4 (e_{i,y} \tau_i) \right)^2 \rightarrow \min, \\ & \mathbf{U} \leq \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} \leq \mathbf{W}, \\ & \tau_4 = 1 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \max(0, \sigma_1), \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = \min(\sigma_2, 1).$$

Запишем функцию Лагранжа для этой задачи:

$$\begin{aligned} L = & (e_{14,x} \tau_1 + e_{24,x} \tau_2 + e_{34,x} \tau_3 + 1)^2 + (e_{14,y} \tau_1 + e_{24,y} \tau_2 + e_{34,y} \tau_3 + 1)^2 + \mu_1 (\tau_1 - W_1) \\ & + \mu_2 (\tau_2 - W_2) + \mu_3 (\tau_3 - W_3) - v_1 (\tau_1 - U_1) - v_2 (\tau_2 - U_2) - v_3 (\tau_3 - U_3). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \tau_1} &= 2e_{14,x}(e_{14,x}\tau_1 + e_{24,x}\tau_2 + e_{34,x}\tau_3 + 1) + \\ &\quad + 2e_{14,y}(e_{14,y}\tau_1 + e_{24,y}\tau_2 + e_{34,y}\tau_3 + 1) + \mu_1 - \nu_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \tau_2} &= 2e_{24,x}(e_{14,x}\tau_1 + e_{24,x}\tau_2 + e_{34,x}\tau_3 + 1) + \\ &\quad + 2e_{24,y}(e_{14,y}\tau_1 + e_{24,y}\tau_2 + e_{34,y}\tau_3 + 1) + \mu_2 - \nu_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \tau_3} &= 2e_{34,x}(e_{14,x}\tau_1 + e_{24,x}\tau_2 + e_{34,x}\tau_3 + 1) + \\ &\quad + 2e_{34,y}(e_{14,y}\tau_1 + e_{24,y}\tau_2 + e_{34,y}\tau_3 + 1) + \mu_3 - \nu_3 = 0.\end{aligned}$$

Условия дополняющей нежесткости:

$$\begin{aligned}\mu_1(\tau_1 - W_1) &= 0, \quad \mu_2(\tau_2 - W_2) = 0, \quad \mu_3(\tau_3 - W_3) = 0, \\ \nu_1(\tau_1 - U_1) &= 0, \quad \nu_2(\tau_2 - U_2) = 0, \quad \nu_3(\tau_3 - U_3) = 0, \\ \mu_k &\geq 0, \quad \nu_k \geq 0, \quad k = \overline{1, 3}.\end{aligned}$$

Поставленная задача может быть решена численно. При этом из найденных экстремумов можно будет определить минимум путем подстановки в функционал. Решение в общем виде выписать не представляется возможным, так как в зависимости от начальных данных минимуму будут соответствовать разные случаи.

6. Пример

Рассмотрим в качестве возможной конфигурации куб с вершинами в точках

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_1 &= \begin{pmatrix} l \\ l \\ -l \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m}_2 = \begin{pmatrix} -l \\ l \\ l \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m}_3 = \begin{pmatrix} l \\ -l \\ l \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m}_4 = \begin{pmatrix} -l \\ -l \\ -l \end{pmatrix}, \\ \mathbf{m}_5 &= \begin{pmatrix} l \\ l \\ l \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m}_6 = \begin{pmatrix} -l \\ l \\ -l \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m}_7 = \begin{pmatrix} -l \\ -l \\ l \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m}_8 = \begin{pmatrix} l \\ -l \\ -l \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

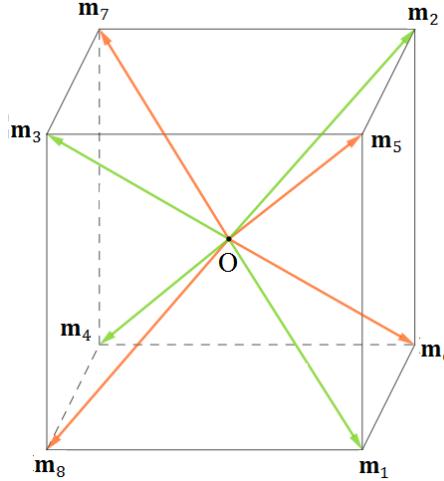


Рис. 11. Пример расположения двигателей;
зеленым цветом изображены двигатели, создающие ΔV_N (приращение скорости по оси Oz), красным – ΔV_S (приращение скорости против оси Oz)

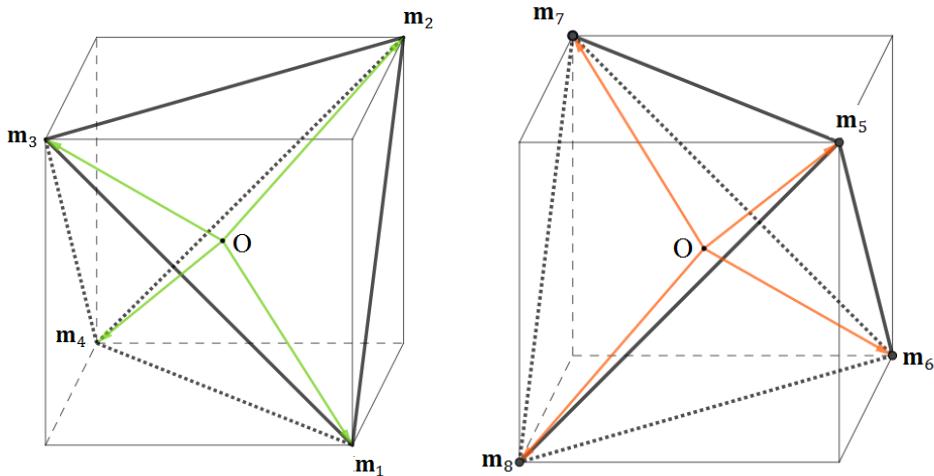


Рис. 12. Выпуклые оболочки $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_4$ (слева) и $\mathbf{m}_5, \dots, \mathbf{m}_8$ (справа)

Найдем условия на l . Условия (7) удовлетворяются по построению. Проверим (8) и (13). В силу симметричности достаточно проверить одну тройку векторов. Рассмотрим $i = 1, 2, 3$.

$$\mathbf{b} = \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2 = \begin{pmatrix} 2l \\ 0 \\ -2l \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = \begin{pmatrix} 2l^2 \\ 0 \\ 2l^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8l^3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{n} = \frac{\delta m}{a^2} \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \frac{\sqrt{a^2 - \delta m^2 b^2}}{a^2} \mathbf{a}, \quad a^2 = 8l^4, \quad b^2 = 8l^2.$$

Тогда

$$\mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{l^2 - \delta m^2}}{2l} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\delta m}{l} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{m}_3, \mathbf{n}) = \sqrt{2}\sqrt{l^2 - \delta m^2} - \delta m > \delta m.$$

Отсюда следует, что $l > \sqrt{3}\delta m$. Это же условие обеспечивает выполнение (11). Условие (8) выполняется при $l > \frac{1}{\sqrt{2}}\delta m$. Таким образом, условия $l > \sqrt{3}\delta m$ достаточно для того, чтобы начало координат при всех возможных реализациях принадлежало выпуклой оболочке векторов.

Найдем положение каждого двигателя и направление оси тяги. Рассмотрим верхние четыре двигателя, для нижних двигателей будет симметричная расстановка на нижней панели спутника.

Зададим, для примера, следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} r_{ic,z} &= \rho = 0.5 \text{ м}, \\ e_{i,z} &= 0.8, \\ f &= 100 \text{ мН}, \\ \delta m &= 0.087 \text{ Н} \cdot \text{м}, \\ r_{ic,x}, r_{ic,y} &< 1 \text{ м}, \quad i = \overline{1, 4}. \end{aligned} \tag{29}$$

В силу симметричности конфигурации номинальных моментов для двигателей выполняется, что

$$\begin{aligned} e_{1,x} &= e_{2,x} = -e_{3,x} = -e_{4,x} = e_x, \\ e_{1,y} &= -e_{2,y} = e_{3,y} = -e_{4,y} = e_y, \\ e_x &= \frac{8 \cdot 10^{-2} l \mp \sqrt{2 \cdot 10^{-2} l^2 - 1.92 \cdot 10^{-2} l^2}}{2 \cdot 10^{-1} l} \approx 0.4 \mp 0.14, \\ e_y &\approx 0.4 \pm 0.14. \end{aligned}$$

Выберем $e_x = 0.54$ и $e_y = 0.26$, тогда

$$\begin{aligned} r_{ic,x} &= \frac{\pm l \pm 2.7 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10^{-2}}, \\ r_{ic,y} &= \frac{\pm l \pm 1.3 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10^{-2}}. \end{aligned} \tag{30}$$

С учетом ограничений $r_x, r_y < 1 \text{ м}$ и $l > \sqrt{3}\delta m$ из (30) получаем оценку на l :

$$0.15 < l < 0.53. \tag{31}$$

Выберем $l = 0.3$, тогда из соотношений (30) получим следующее расположение двигателей и направления осей тяги (см. Табл. 2).

Табл.2

$r_{i,x}$	$r_{i,y}$	$r_{i,z}$	$e_{i,x}$	$e_{i,y}$	$e_{i,z}$
0.7125	0.5375	0.5	0.54	0.26	0.8
0.7125	-0.5375	0.5	0.54	-0.26	0.8
-0.7125	0.5375	0.5	-0.54	0.26	0.8
-0.7125	-0.5375	0.5	-0.54	-0.26	0.8

С учетом полученных результатов функция Лагранжа в задаче оптимизации горизонтальной компоненты скорости аппарата для рассматриваемого примера будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
 L = & \left(e_x(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 - 1 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \right)^2 + \\
 & + \left(e_y(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3 - 1 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \right)^2 + \mu_1(\tau_1 - W_1) + \\
 & + \mu_2(\tau_2 - W_2) + \mu_3(\tau_3 - W_3) - v_1(\tau_1 - U_1) - v_2(\tau_2 - U_2) - v_3(\tau_3 - U_3) = \\
 = & \left(e_x(2\tau_1 + 2\tau_2 - 1) \right)^2 + \left(e_y(2\tau_1 + 2\tau_3 - 1) \right)^2 + \\
 & + \mu_1(\tau_1 - W_1) + \mu_2(\tau_2 - W_2) + \mu_3(\tau_3 - W_3) - \\
 & - v_1(\tau_1 - U_1) - v_2(\tau_2 - U_2) - v_3(\tau_3 - U_3).
 \end{aligned}$$

Будем искать решение во внутренней области, т.е. случай, когда $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = v_1 = v_2 = v_3 = 0$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \tau_1} = & 4e_x(2\tau_1 + 2\tau_2 - 1) + 4e_y(2\tau_1 + 2\tau_3 - 1) = 0, \\
 \frac{\partial L}{\partial \tau_2} = & 4e_x(2\tau_1 + 2\tau_2 - 1) = 0, \\
 \frac{\partial L}{\partial \tau_3} = & 4e_y(2\tau_1 + 2\tau_3 - 1) = 0.
 \end{aligned}$$

Решая полученную систему, получим, что

$$\begin{aligned}
 \tau_1 = \tau_4 = & \frac{1}{2} - \tau_3, \\
 \tau_2 = \tau_3.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Функционал при этом обращается в нуль.

Таким образом, осталось так выбрать τ_3 , чтобы оно удовлетворяло начальным условиям, наложенным на допустимый кинетический момент, то

есть τ_3 должно попадать в область (28). В силу (32) следует брать τ_3 таким, чтобы выполнялись неравенства

$$\mathbf{U} \leq \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \tau_3 \\ \tau_3 \\ \tau_3 \end{pmatrix} \leq \mathbf{W},$$

то есть нужно найти пересечение интервалов $\left(\frac{1}{2} - W_1, \frac{1}{2} - U_1\right)$, (U_2, W_2) и (U_3, W_3) .

Для примера возьмем следующие ограничения на кинетический момент:

$$T = 3600c,$$

$$\mathbf{h}_{\max} = (6 \quad 6 \quad 6)^T,$$

$$\mathbf{h}_{oN} = (0 \quad 0.1 \quad 0)^T.$$

Так как $\delta m = \max_i(|\delta \mathbf{m}_i|) = 0.87$ ($i = \overline{1, 4}$), возьмем следующие векторы $\delta \mathbf{m}_i$:

$$\delta \mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \delta \mathbf{m}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.001 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \delta \mathbf{m}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.001 \end{pmatrix}, \quad \delta \mathbf{m}_4 = \begin{pmatrix} 0.005 \\ 0.005 \\ 0.005 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 0.0301 \\ 0.03 \\ -0.03 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} -0.03 \\ 0.0301 \\ 0.03 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 0.03 \\ -0.03 \\ 0.0301 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_4 = \begin{pmatrix} -0.0295 \\ -0.0295 \\ -0.0295 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0.293 \\ 0.293 \\ 0.293 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 0.297 \\ 0.297 \\ 0.297 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{14} = \begin{pmatrix} 0.596 \\ 0.595 \\ -0.005 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{24} = \begin{pmatrix} -0.005 \\ 0.596 \\ 0.595 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{34} = \begin{pmatrix} 0.595 \\ -0.005 \\ 0.596 \end{pmatrix}.$$

В матричном виде (с учетом (27)):

$$\begin{pmatrix} 0.293 \\ 0.293 \\ 0.293 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0.596 & -0.005 & 0.595 \\ 0.595 & 0.596 & -0.005 \\ -0.005 & 0.595 & 0.596 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0.297 \\ 0.297 \\ 0.297 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0.249836 \\ 0.247307 \\ 0.247307 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0.252647 \\ 0.250117 \\ 0.250117 \end{pmatrix}.$$

Итак, если выбрать $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 0.25$ (то есть время работы двигателей $t_i = 15$ мин, $i = \overline{1, 4}$), то рассматриваемая реализация будет обеспечивать разгрузку маховиков, а также изменение скорости по горизонтали будет оставаться равным 0.

Заключение

Рассмотрена задача поиска конфигурации расположения двигателей коррекции, при котором гарантированно происходит выдача требуемого изменения скорости аппарата и разгрузка маховиков при заданных начальных условиях, ограничениях и ошибках установки. Получена геометрическая интерпретация, наглядно описывающая требования к расположению векторов моментов сил, создаваемых двигателями коррекции. Найдена область возможных времен работы двигателей, удовлетворяющая условиям задачи, а также область времен работы двигателей, которые минимизируют горизонтальную компоненту скорости. Приведен пример, показывающий работу алгоритма при заданных начальных численных параметрах и ограничениях.

Благодарности

Авторы выражают благодарность А.В. Овчинникову за плодотворное участие в обсуждениях постановки задачи и полученных результатов, а также М.Ю. Овчинникову за внимание к работе и полезные замечания.

Работа поддержана грантом РНФ № 14-11-00621

Список литературы

1. Давыдов А.А., Игнатов А.И., Сазонов В.В. Применение реактивных двигателей для управления поступательным движением КА одновременно с разгрузкой кинетического момента электромеханических исполнительных органов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. № 82. С. 1-21.
2. Платонов В.Н. Одновременное управление движением центра масс и вокруг центра масс при маневрах космических аппаратов на геостационарной и высокоэллиптических орбитах с использованием электроприводных двигателей // Космическая техника и технологии. 2013. № 1. С. 58–67.
3. Chen X. et al. Optimal Combined Reaction-Wheel Momentum Management for Earth-Pointing Satellite // J. Guid. Control. Dyn. 1999. Vol. 22, № 4. P. 543–550.

Содержание

Введение	3
1. Постановка задачи.....	4
2. Подбор номинальных моментов.....	6
2.1 <i>Формализация задачи</i>	6
2.2. <i>Геометрическая интерпретация</i>	11
2.3 <i>Альтернативный подход</i>	19
3. Установка двигателей	20
4. Распределение времени работы двигателей	22
5. “Обнуление” горизонтальной компоненты скорости	24
6. Пример.....	25
Заключение	30
Благодарности	30
Список литературы	31