



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 191 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Лахно В.Д.

Сверхпроводящие свойства
3D газа ТИ-биполяронов
низкой плотности в
магнитном поле

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Лахно В.Д. Сверхпроводящие свойства 3D газа ТИ-биполяронов низкой плотности в магнитном поле // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 191. 45 с. doi:[10.20948/prepr-2018-191](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-191)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-191>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

В.Д. Лахно

**Сверхпроводящие свойства 3D-газа
ТИ-биполярнон низкой плотности
в магнитном поле**

Москва – 2018

В.Д. Лахно

Сверхпроводящие свойства 3D-газа ТИ-биполяронов низкой плотности в магнитном поле

Рассмотрены термодинамические свойства трёхмерного Бозе-конденсата трансляционно-инвариантных биполяронов (ТИ-биполяронов). Рассчитаны критическая температура, энергия, теплоёмкость и скрытая теплота перехода газа ТИ-биполяронов. Дано обобщение на случай внешнего магнитного поля. Рассчитаны максимальное значение магнитного поля, при котором возможно существование конденсата, лондоновская длина проникновения и температурные зависимости этих величин. Полученные результаты используются для объяснения экспериментов по высокотемпературным сверхпроводникам.

Ключевые слова: трансляционно-инвариантные биполяроны, высокотемпературная сверхпроводимость

V.D. Lakhno

Superconducting properties of a 3D TI-bipolaron gas in magnetic field

Consideration is given to thermodynamical properties of a three-dimensional Bose-condensate of translation-invariant bipolarons (TI-bipolarons). The critical temperature of transition, energy, heat capacity and the transition heat of TI-bipolaron gas are calculated. The generalization of theory on the case of magnetic field is made. Such values as maximum magnetic field when Bose-condensate exists, London penetration depth and their temperature dependencies are calculated. The results obtained are used to explain experiments on high-temperature superconductors.

Key words: translation-invariant bipolarons (TI-bipolarons), high-temperature superconductivity (HTSC)

1. Введение

До открытия высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП) теория Бардина, Купера, Шриффера [1] (БКШ) выполняла роль основополагающей микроскопической теории сверхпроводимости, будучи по существу безальтернативной. Открытие ВТСП выявило трудности теории БКШ при описании различных свойств высокотемпературных сверхпроводников. Это обстоятельство породило большое число теорий, отличных от БКШ, призванных разрешить возникшие затруднения. Обзор различных теорий ВТСП содержится в большом числе работ: с современным состоянием теории и эксперимента можно ознакомиться по книгам и обзорам [2]-[12]. В основе всех содержательных подходов, однако, имеется общее исходное положение – явление бозонизации Ферми-частиц или эффект Купера. Принятие этого положения немедленно приводит к выводу о связи явления сверхпроводимости с явлением конденсации Бозе-Эйнштейна (БЭК). В настоящее время убеждение, что в основе явления сверхпроводимости лежит БЭК, является общепризнанным.

Большим тормозом для построения теории, которая в своей основе должна содержать БЭК, послужило утверждение, сделанное БКШ (см. примечание на стр. 1177 работы [1], а также [14]), о несовместимости их теории с теорией БЭК.

Первое указание на ошибочность такой точки зрения было получено в работе [15], в которой при изучении свойств экситонного газа высокой плотности впервые была продемонстрирована аналогия между теорией БКШ и БЭК. Результаты [15] послужили основой для развития идеи кроссовера – перехода от теории БКШ, которой соответствует предел слабого электрон-фононного взаимодействия (ЭФВ), к теории БЭК, которой соответствует предел сильного ЭФВ [16]-[22]. Считалось, что дополнительным свидетельством правильности такого пути служит теория сильной связи Элиашберга [23]. Согласно [24], в пределе бесконечно сильного ЭФВ эта теория приводит к режиму локальных пар, хотя и сильно отличному от режима БЭК [25].

Попытки построить теорию кроссовера между БКШ и БЭК столкнулись, однако, с непреодолимыми трудностями. Так, например, используя Т-матричный подход, предлагалось построить теорию, в которой бы Т-матрица исходной фермионной системы при увеличении силы ЭФВ переходила бы в Т-матрицу бозонной системы [26]-[31]. Такой переход, однако, оказалось невозможно осуществить даже в случае предельно разбавленных систем. Фактически речь идёт о том, что даже в пределе, когда система состоит только из двух фермионов, оказывается невозможным построить из них однобозонное состояние. В теории ЭФВ эта проблема известна как проблема биполярона.

Причина неудачи теории кроссовера может быть связана со следующим обстоятельством. Как и в теории биполярона, в теории БКШ исходным является гамильтониан Фрёлиха. Для этого гамильтониана доказана важная теорема об аналитичности энергии полярона и биполярона по константе ЭФВ [32]. В теории БКШ делается, однако, очень важное приближение: замена настоящего матричного элемента взаимодействия в гамильтониане Фрёлиха на модельную величину, обрезанный снизу и сверху по фононным импульсам матричный элемент. Эта процедура отнюдь не является безобидной. Как показано в [33], в теории биполярона это приводит к побочным эффектам – существованию локального уровня энергии, отделённого от квазинепрерывного спектра щелью (эффект Купера). Такое решение является изолированным и не обладает свойствами аналитичности по константе связи. В теории БКШ именно такое решение берётся за основу построения теории сверхпроводимости.

В результате, построенная теория и её аналитическое продолжение – теория Элиашберга, сильно искажают реальную картину, в частности, делают невозможным построение теории сверхпроводимости на основе БЭК. Замена истинного матричного элемента на модельный позволяет провести до конца аналитические вычисления. В частности, замена в БКШ истинного взаимодействия на локальное позволила провести вывод феноменологической модели Гинзбурга-Ландау, являющейся также локальной моделью [34]. В действительности, мощь такого подхода трудно переоценить, так как он позволил получить множество согласованных с экспериментом утверждений.

В данной статье предпринята попытка построить теорию ВТСП, основанную на представлении о БЭК ТИ-биполяронов [33], [35]-[38], свободную от приближений, сделанных в [1].

Напомним основные результаты теории ТИ-поляронов и биполяронов, полученные в [33], [35]-[38]. Отметим, что рассмотрение именно ЭФВ не является существенным для теории и может быть обобщено на любой вид взаимодействия, например на взаимодействие электронов со спиновой подсистемой [39].

Ниже мы коснёмся только основных моментов теории ТИ-поляронов и биполяронов, важных для теории ВТСП. Самым главным результатом работ [33], [35]-[38] является построение делокализованных поляронных и биполяронных состояний в пределе сильного ЭФВ. Теория ТИ-биполяронов строится на основе теории ТИ-поляронов [40] и сохраняет справедливость базовых утверждений, доказанных для ТИ-поляронов. Важнейшим из них является теорема об аналитичности свойств основного состояния ТИ-полярона (соответственно ТИ-биполярона) в зависимости от константы ЭФВ α . Главный вывод, вытекающий из этого положения, – отсутствие критического значения ЭФВ α_c , ниже которого биполяронное со-

стояние становится невозможным из-за его распада на независимые поляронные состояния. Другими словами, если существует такое значение α_c , при котором ТИ-биполярное состояние становится энергетически проигрышным относительно распада на отдельные поляроны, то в этой точке ничего не происходит, но при $\alpha < \alpha_c$ состояния становятся метастабильными. Таким образом, во всём интервале изменения α мы можем рассматривать ТИ-биполароны как заряженные бозоны, способные образовывать сверхпроводящий конденсат.

Другим важным свойством ТИ-биполяронов является возможность изменения корреляционной длины во всём диапазоне $[0, \infty]$ в зависимости от параметров гамильтониана [36], [38]. Таким образом, она может быть как много большей (как это имеет место в металлах), так и много меньшей характерного расстояния между электронами в электронном газе (как это имеет место в оксидных керамиках).

Исключительно важное свойство, которым обладают ТИ-поляроны и биполяроны, – наличие энергетической щели между их основным и возбуждённым состояниями (§3).

Перечисленные свойства могут быть использованы для построения микроскопической теории ВТСП на основе теории ТИ-биполяронов.

Статья устроена следующим образом. В §2 в качестве исходного гамильтониана берётся гамильтониан Пекара-Фрёлиха для биполярона в магнитном поле. Кратко приводятся результаты трёх канонических преобразований для этого гамильтониана: Гейзенберга; Ли, Лоу и Пайнса; Боголюбова-Тябликова. В результате в этом разделе получены уравнения, определяющие спектр ТИ-биполярона.

В §3 проанализированы решения уравнений для спектра ТИ-биполярона. Показано, что в спектре имеется щель, отделяющая основное состояние ТИ-биполярона от его возбуждённых состояний, которые образуют квазинепрерывный спектр. Обосновывается представление об идеальном газе ТИ-биполяронов.

С использованием полученного спектра в §4 рассматриваются термодинамические характеристики идеального газа ТИ-биполяронов в отсутствие магнитного поля. Для различных значений параметров, которыми являются фононные частоты, вычислены величины критических температур бозе-конденсации, теплоты перехода в состояние конденсата, теплоёмкости и скачки теплоёмкости в точке перехода.

В §5 рассматривается случай, когда внешнее магнитное поле отлично от нуля. Показано, что токовое состояние в рассматриваемой системе обусловлено существованием сохраняющейся величины – полного импульса электрон-фононной системы в магнитном поле. Сравнение величины полного импульса с феноменологическим подходом позволяет определить такую важную характеристику, как лондоновская глубина проникновения.

Результаты исходной изотропной модели в этом разделе обобщаются на анизотропный случай.

В §6 рассматриваются термодинамические характеристики идеального газа ТИ-биполяронов в присутствии магнитного поля. Показано, что наличие энергетической щели в спектре ТИ-биполяронов делает возможной их бозе-конденсацию в магнитном поле. Вводится представление о максимальном значении напряжённости магнитного поля, при котором бозе-конденсация возможна. Найдены зависимости величины критического магнитного поля от температуры и значения критической температуры от магнитного поля. Показано, что фазовый переход идеального газа ТИ-биполяронов в зависимости от величины магнитного поля может быть как первого, так и бесконечного рода. Дано обобщение на случай анизотропного сверхпроводника. Такое обобщение позволяет провести сравнение полученных результатов с экспериментом, которое даётся в §7.

В §8 рассматриваются скейлинговые соотношения в сверхпроводниках. Даётся вывод формулы Александра и закона Хомеса.

В §9 суммированы полученные результаты.

2. Гамильтониан Пекара-Фрёлиха. Канонические преобразования

При описании биполяронов, следуя [33], [35]-[37], будем исходить из гамильтониана Пекара-Фрёлиха:

$$H = \frac{1}{2m^*} \left(\hat{p}_1 - \frac{e}{c} \vec{A}_1 \right)^2 + \frac{1}{2m^*} \left(\hat{p}_2 - \frac{e}{c} \vec{A}_2 \right)^2 + \sum_k \hbar \omega_k^0 a_k^+ a_k + \sum_k \left(V_k e^{i\vec{k}\vec{r}_1} a_k + V_k e^{i\vec{k}\vec{r}_2} a_k + H.c. \right) + U (|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|), \quad (1)$$

$$U (|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \frac{e^2}{\epsilon_\infty |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|},$$

где $\hat{p}_1, \vec{r}_1, \hat{p}_2, \vec{r}_2$ – импульсы и координаты первого и второго электрона, $\vec{A}_1 = \vec{A}(\vec{r}_1), \vec{A}_2 = \vec{A}(\vec{r}_2)$ – вектор-потенциал внешнего магнитного поля в точках нахождения первого и второго электронов соответственно; a_k^+, a_k – операторы рождения и уничтожения квантов поля с энергией $\hbar \omega_k^0$; m^* – эффективная масса электрона; величина U описывает кулоновское оттал-

кивание между электронами; V_k – функция волнового вектора k :

$$V_k = \frac{e}{k} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_0}{\tilde{\epsilon}V}} = \frac{\hbar\omega_0}{ku^{1/2}} \left(\frac{4\pi\alpha}{V}\right)^{1/2}, \quad u = \left(\frac{2m^*\omega_0}{\hbar}\right)^{1/2}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \frac{e^2u}{\hbar\omega_0\tilde{\epsilon}}, \quad (2)$$

$$\tilde{\epsilon}^{-1} = \epsilon_\infty^{-1} - \epsilon_0^{-1},$$

где e – заряд электрона; ϵ_∞ и ϵ_0 – высокочастотная и статическая диэлектрические проницаемости; α – константа электрон-фононного взаимодействия; V – объём системы.

Ось z выбрана вдоль направления индукции магнитного поля \vec{B} и используется симметричная калибровка:

$$\vec{A}_j = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}_j,$$

для $j = 1, 2$. Для рассматриваемого ниже синглетного состояния биполярона вклад от спинового слагаемого равен нулю.

В системе центра масс гамильтониан (1) примет вид:

$$H = \frac{1}{2M_e} \left(\hat{p}_R - \frac{2e}{c} \vec{A}_R \right)^2 + \frac{1}{2\mu_e} \left(\hat{p}_r - \frac{e}{2c} \vec{A}_r \right)^2 + \sum_k \hbar\omega_k^0 a_k^\dagger a_k + \sum_k 2V_k \cos \frac{\vec{k}\vec{r}}{2} \left(a_k e^{i\vec{k}\vec{R}} + H.c. \right) + U(|\vec{r}|), \quad (3)$$

$$\vec{R} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad M_e = 2m^*, \quad \mu_e = m^*/2,$$

$$\vec{A}_r = \frac{1}{2} B(-y, x, 0), \quad \vec{A}_R = \frac{1}{2} B(-Y, X, 0),$$

$$\hat{p}_R = \hat{p}_1 + \hat{p}_2 = -i\hbar\nabla_{\vec{R}}, \quad \hat{p}_r = (\hat{p}_1 - \hat{p}_2)/2 = -i\hbar\nabla_r,$$

где x, y и X, Y – компоненты векторов \vec{r}, \vec{R} соответственно.

Подвергнем гамильтониан H каноническому преобразованию Гейзенберга [41], [42]:

$$S_1 = \exp i \left(\vec{G} - \sum_k \vec{k} a_k^\dagger a_k \right) \vec{R}, \quad (4)$$

$$\vec{G} = \hat{\vec{P}}_R + \frac{2e}{c} \vec{A}_R, \quad \hat{\vec{P}}_R = \hat{p}_R + \sum_k \hbar\vec{k} a_k^\dagger a_k, \quad (5)$$

где \vec{G} – величина, коммутирующая с гамильтонианом и поэтому являющаяся сохраняющейся величиной, т.е. c -числом, $\hat{\vec{P}}_R$ – полный импульс.

В результате действия S_1 на оператор поля получим:

$$S_1^{-1} a_k S_1 = a_k e^{-i\vec{k}\vec{R}}, \quad S_1^{-1} a_k^\dagger S_1 = a_k^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{R}}. \quad (6)$$

Соответственно, преобразованный гамильтониан $\tilde{H} = S_1^{-1} H S_1$ примет вид:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2M_e} \left(\vec{G} - \sum_k \hbar \vec{k} a_k^+ a_k - \frac{2e}{c} \vec{A}_R \right)^2 + \frac{1}{2\mu_e} \left(\hat{p}_r - \frac{e}{2c} \vec{A}_r \right)^2 + \sum_k \hbar \omega_k^0 a_k^+ a_k + \sum_k 2V_k \cos \frac{\vec{k}\vec{r}}{2} (a_k + a_k^+) + U(|\vec{r}|). \quad (7)$$

В дальнейшем будем полагать:

$$\vec{G} = 0. \quad (8)$$

Будем искать решения стационарного уравнения Шрёдингера, соответствующего гамильтониану (7), в виде:

$$\Psi_H(r, R) = \phi(R) \psi(r) \quad (9)$$

$$\phi(R) = \exp \left(-i \frac{2e}{\hbar c} \int_0^{\vec{R}} \vec{A}_{R'} d\vec{R}' \right).$$

Явный вид функции $\psi(r)$ приведён в [35]-[38].

Усреднение \tilde{H} по волновой функции $\Psi_H(r, R)$ даёт:

$$\bar{H} = \frac{1}{2M_e} \left(\sum_k \hbar \vec{k} a_k^+ a_k \right)^2 + \sum_k \hbar \tilde{\omega}_k a_k^+ a_k + \sum_k \bar{V}_k (a_k + a_k^+) + \bar{T} + \bar{U} + \bar{\Pi}, \quad (10)$$

где:

$$\bar{T} = \frac{1}{2\mu_e} \left\langle \psi \left| \left(\hat{p}_r - \frac{e}{2c} \vec{A}_r \right)^2 \right| \psi \right\rangle, \quad \bar{U} = \langle \psi | U(r) | \psi \rangle, \quad (11)$$

$$\bar{V}_k = 2V_k \left\langle \psi \left| \cos \frac{\vec{k}\vec{r}}{2} \right| \psi \right\rangle, \quad \bar{\Pi} = \frac{2e^2}{M_e c^2} \langle \phi | A_R^2 | \phi \rangle,$$

$$\hbar \tilde{\omega}_k = \hbar \omega_k^0 + \frac{2\hbar e}{M_e c} \left\langle \phi \left| \vec{k} \vec{A}_R \right| \phi \right\rangle.$$

В дальнейшем в этом разделе будем полагать $\hbar = 1$, $\omega_k^0 = 1$, $M_e = 1$. Из (10) следует, что биполаронный гамильтониан отличается от поляронного гамильтониана заменой в последнем величины V_k на \bar{V}_k и добавлением к поляронному гамильтониану \bar{T} , \bar{U} , $\bar{\Pi}$.

С использованием канонического преобразования Ли, Лоу и Пайнса [43]

$$S_2 = \exp \left\{ \sum_k f_k (a_k^+ - a_k) \right\}, \quad (12)$$

где f_k – вариационные параметры, имеющие смысл величины смещения осцилляторов поля из своих равновесных положений:

$$S_2^{-1} a_k S_2 = a_k + f_k, \quad S_2^{-1} a_k^+ S_2 = a_k^+ + f_k, \quad (13)$$

для гамильтониана \tilde{H} :

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= S_2^{-1} \bar{H} S_2, \\ \tilde{H} &= H_0 + H_1, \end{aligned} \quad (14)$$

получим:

$$\begin{aligned} H_0 &= 2 \sum_k \bar{V}_k f_k + \sum_k f_k^2 \tilde{\omega}_k + \frac{1}{2} \left(\sum_k \vec{k} f_k^2 \right)^2 + \mathcal{H}_0 + \bar{T} + \bar{U} + \bar{\Pi}, \\ \mathcal{H}_0 &= \sum_k \omega_k a_k^+ a_k + \frac{1}{2} \sum_{k,k'} \vec{k} \vec{k}' f_k f_{k'} (a_k a_{k'} + a_k^+ a_{k'}^+ + a_k^+ a_{k'} + a_{k'}^+ a_k), \end{aligned} \quad (15)$$

где:

$$\omega_k = \tilde{\omega}_k + \frac{k^2}{2} + \vec{k} \sum_{k'} \vec{k}' f_{k'}^2. \quad (16)$$

Гамильтониан H_1 содержит линейные, тройные и четверные по операторам рождения и уничтожения члены. Его явный вид приведён в [38], [40].

Далее, как показано в [38], [40], использование канонического преобразования Боголюбова-Тябликова [44] для перехода от операторов a_k^+ , a_k к новым операторам α_k^+ , α_k :

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{k'} M_{1kk'} \alpha_{k'} + \sum_{k'} M_{2kk'}^* \alpha_{k'}^+ \\ a_k^+ &= \sum_{k'} M_{1kk'}^* \alpha_{k'}^+ + \sum_{k'} M_{2kk'} \alpha_{k'}, \end{aligned} \quad (17)$$

в которых \mathcal{H}_0 – диагональный оператор, обращает в ноль математическое ожидание H_1 в отсутствие внешнего магнитного поля. Вклад H_1 в спектр преобразованного гамильтониана, когда магнитное поле отлично от нуля, обсуждается в §3.

В новых операторах α_k^+ , α_k гамильтониан (15) примет вид

$$\tilde{H} = E_{bp} + \sum_k \nu_k \alpha_k^+ \alpha_k,$$

$$E_{bp} = \Delta E_r + 2 \sum_k \bar{V}_k f_k + \sum_k \tilde{\omega}_k f_k^2 + \bar{T} + \bar{U} + \bar{\Pi}, \quad (18)$$

где ΔE_r – так называемая „энергия отдачи“. Общее выражение для $\Delta E_r = \Delta E_r \{f_k\}$ было получено в [40]. Конкретный расчёт энергии основного состояния E_{bp} осуществляется посредством минимизации (18) по f_k и ψ и в отсутствие магнитного поля был проведён в [38], [40].

Заметим, что в теории полярона с нарушенной симметрией диагональный электрон-фононный гамильтониан имеет вид (18) [45]. Этот гамильтониан может быть интерпретирован как гамильтониан полярона и системы связанных с ним перенормированных реальных фононов или как гамильтониан, который обладает спектром квазичастичных возбуждений, определяемым (18) [46]. В последнем случае возбуждённые состояния полярона представляют собой фермиевские квазичастицы.

В случае биполярона ситуация становится качественно отличной, поскольку биполярон является бозе-частицей, чей спектр определяется (18). Очевидно, газ из таких частиц может испытывать конденсацию Бозе-Эйнштейна (БЭК). Трактовка (18) как биполярона и связанных с ним перенормированных фононов не препятствует их (БЭК), поскольку требуемое для БЭК постоянство частиц автоматически выполняется ввиду коммутации полного числа перенормированных фононов с гамильтонианом (18).

Входящие в (17) перенормированные частоты ν_k , согласно [38], [40], [47] определяются уравнением для величины s :

$$1 = \frac{2}{3} \sum_k \frac{k^2 f_k^2 \omega_k}{s - \omega_k^2}, \quad (19)$$

решения которого дают спектр значений $s = \{\nu_k^2\}$.

3. Энергетический спектр ТИ-биполярона

Гамильтониан (18) удобно представить в виде:

$$\tilde{\tilde{H}} = \sum_{n=0,1,2,\dots} E_n \alpha_n^+ \alpha_n, \quad (20)$$

$$E_n = \begin{cases} E_{bp}, & n = 0; \\ \nu_n = E_{bp} + \omega_{k_n}, & n \neq 0; \end{cases} \quad (21)$$

где в случае трёхмерного ионного кристалла \vec{k}_n – вектор с компонентами:

$$k_{n_i} = \pm \frac{2\pi(n_i - 1)}{N_{a_i}}, \quad n_i = 1, 2, \dots, \frac{N_{a_i}}{2} + 1, \quad i = x, y, z, \quad (22)$$

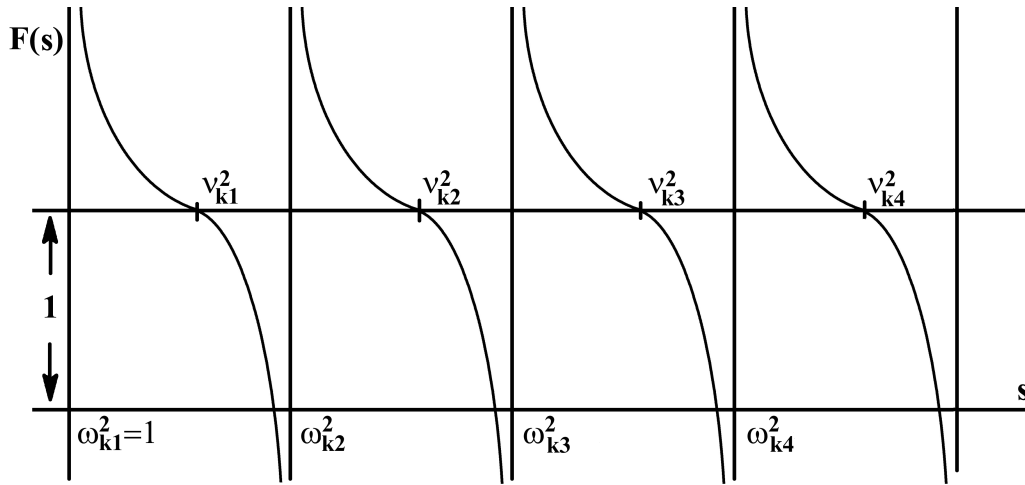


Рис. 1. Графическое решение уравнения (24).

N_{ai} – число атомов вдоль i -ой кристаллографической оси. Докажем справедливость выражения для спектра (20), (21). Поскольку операторы α_n^+ , α_n подчиняются бозевским перестановочным соотношениям:

$$[\alpha_n, \alpha_{n'}^+] = \alpha_n \alpha_{n'}^+ - \alpha_{n'}^+ \alpha_n = \delta_{n,n'}, \quad (23)$$

то их можно считать операторами рождения и уничтожения ТИ-биполяронов. Энергетический спектр ТИ-биполяронов, согласно (19), определяется уравнением:

$$F(s) = 1, \quad (24)$$

где:

$$F(s) = \frac{2}{3} \sum_n \frac{k_n^2 f_{k_n}^2 \omega_{k_n}^2}{s - \omega_{k_n}^2}. \quad (25)$$

Уравнение (24) удобно решать графически (рис. 1):

Из рис. 1. следует, что частоты ν_{k_n} лежат между частотами ω_{k_n} и $\omega_{k_{n+1}}$. Таким образом, спектр ν_{k_n} , как и спектр ω_{k_n} , является квазинепрерывным: $\nu_{k_n} - \omega_{k_n} = O(N^{-1})$, что и доказывает справедливость (20), (21).

Отсюда следует, что спектр ТИ-биполярона имеет щель между основным состоянием E_{bp} и квазинепрерывным спектром, равную ω_0 .

В отсутствие внешнего магнитного поля входящие в выражение для ω_k (16) функции f_k не зависят от направления волнового вектора \vec{k} . При наличии внешнего магнитного поля f_k нельзя считать изотропной величиной, соответственно, нельзя полагать равным нулю последний член в выражении (16) для ω_k . Кроме того, угловая зависимость в спектре ω_k в

магнитном поле содержится и в члене $\tilde{\omega}_k$, входящем в величину ω_k . В силу того, что в рассматриваемой изотропной системе имеется только одно выделенное направление, задаваемое вектором \vec{B} , для ω_k из (16) получим:

$$\omega_{k_n} = \omega_0 + \frac{\hbar^2 k_n^2}{2M_e} + \frac{\eta}{M_e} \left(\vec{B} \vec{k}_n \right), \quad (26)$$

где η – некоторая скалярная величина. Заметим, что вклад H_1 в спектр (26) приводит к зависимости η от $|\vec{k}|$ и $(\vec{k} \vec{B})$. Для слабого магнитного поля в длинноволновом пределе (когда применим гамильтониан Фрёлиха) мы можем пренебречь такой зависимостью и считать η постоянной величиной.

Для магнитного поля, направленного вдоль оси z , выражение (26) можно представить в виде:

$$\omega_{k_n} = \omega_0 + \frac{\hbar^2}{2M_e} (k_{zn} + k_z^0)^2 + \frac{\hbar^2}{2M_e} (k_{xn}^2 + k_{yn}^2) - \frac{\eta^2 B^2}{2\hbar^2 M_e}. \quad (27)$$

Отметим, что формулу (27) можно обобщить на актуальный в дальнейшем анизотропный случай, когда в направлениях k_x и k_y : $M_{ex} = M_{ey} = M_{||}$, а в направлении k_z : $M_{ez} = M_{\perp}$ (§5). Формула (27) в этом случае примет вид:

$$\omega_{k_n} = \omega_0 + \frac{\hbar^2}{2M_{\perp}} (k_{zn} + k_z^0)^2 + \frac{\hbar^2}{2M_{||}} (k_{xn}^2 + k_{yn}^2) - \frac{\eta^2 B^2}{2\hbar^2 M_{\perp}}, \quad (27')$$

если магнитное поле направлено вдоль оси z , и

$$\omega_{k_n} = \omega_0 + \frac{\hbar^2}{2M_{\perp}} k_{zn}^2 + \frac{\hbar^2}{2M_{||}} (k_{xn} + k_{xn}^0)^2 + \frac{\hbar^2}{2M_{||}} k_{yn}^2 - \frac{\eta^2 B^2}{2\hbar^2 M_{||}}, \quad (27'')$$

если магнитное поле направлено по оси x .

Ниже мы рассмотрим случай низкой концентрации ТИ-биполяронов в кристалле. Тогда с хорошей точностью можно рассматривать их как идеальный бозе-газ, свойства которого определяются гамильтонианом (20).

4. Статистическая термодинамика газа ТИ-биполяронов низкой плотности в отсутствие магнитного поля

Рассмотрим идеальный бозе-газ ТИ-биполяронов, представляющий собой систему из N -частиц, находящихся в объёме V . Обозначим через N_0 – число частиц в нижнем одночастичном состоянии, а через N' -число частиц в более высоких состояниях. Тогда:

$$N = \sum_{n=0,1,2,\dots} \bar{m}_n = \sum_n \frac{1}{e^{(E_n - \mu)/T} - 1}, \quad (28)$$

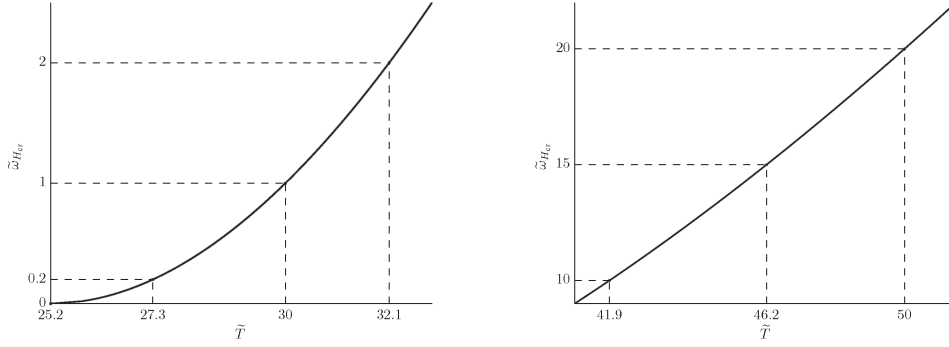


Рис. 2. Решения уравнения (30) с $C_{bp} = 331.35$ и $\tilde{\omega}_i = \{0.2; 1; 2; 10; 15; 20\}$, которым соответствуют \tilde{T}_{c_i} : $\tilde{T}_{c_1} = 27.325$; $\tilde{T}_{c_2} = 30.0255$; $\tilde{T}_{c_3} = 32.1397$; $\tilde{T}_{c_4} = 41.8727$; $\tilde{T}_{c_5} = 46.1863$; $\tilde{T}_{c_6} = 49.9754$.

или:

$$N = N_0 + N', \quad N_0 = \frac{1}{e^{(E_{bp}-\mu)/T} - 1}, \quad N' = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{e^{(E_n-\mu)/T} - 1}. \quad (29)$$

Заменяя в выражении для N' (29) суммирование на интегрирование по квазинепрерывному спектру (20), (21), (27) и полагая в (29) $\mu = E_{bp}$, получим из (28), (29) уравнение для определения критической температуры бозе-конденсации T_c :

$$C_{bp} = f_{\tilde{\omega}_H}(\tilde{T}_c), \quad (30)$$

$$f_{\tilde{\omega}_H}(\tilde{T}_c) = \tilde{T}_c^{3/2} F_{3/2}(\tilde{\omega}_H/\tilde{T}_c), \quad F_{3/2}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^{x+\alpha} - 1},$$

$$C_{bp} = \left(\frac{n^{2/3} 2\pi \hbar^2}{M_e \omega^*} \right)^{3/2}, \quad \tilde{\omega}_H = \frac{\omega_0 - \eta^2 H^2 / 2M_e}{\omega^*}, \quad \tilde{T}_c = \frac{T_c}{\omega^*},$$

где $n = N/V$. В этом разделе мы рассмотрим случай отсутствия магнитного поля: $H = 0$. На рис. 2 приведено графическое решение уравнения (30) для значений параметров $M_e = 2m^* = 2m_0$, где m_0 – масса свободного электрона в вакууме, $\omega^* = 5$ мэВ (≈ 58 К), $n = 10^{21}$ см $^{-3}$ и значений: $\tilde{\omega}_1 = 0.2$; $\tilde{\omega}_2 = 1$; $\tilde{\omega}_3 = 2$; $\tilde{\omega}_4 = 10$; $\tilde{\omega}_5 = 15$; $\tilde{\omega}_6 = 20$; $\tilde{\omega}_H = \tilde{\omega} = \omega_0/\omega^*$, $\omega_{H_{cr}} = \omega_H$ для $\tilde{T} = \tilde{T}_c$.

Из рис. 2 следует, что критическая температура растёт с ростом фоновой частоты ω_0 . Соответствующие выбранным значениям параметров отношения критических температур T_{c_i}/ω_{0i} приведены в таблице 1. Из таблицы 1 следует вывод о том, что критическая температура ТИ-биполярного газа всегда выше, чем в случае идеального бозе-газа (ИБГ). Из рис. 2 также следует, что увеличение концентрации ТИ-биполяронов n будет приводить к увеличению критической температуры, а увеличение массы электрона m^* – к её снижению.

Таблица 1. Рассчитанные значения характеристик бозе-газа
ТИ-биполяронов с концентрацией $n = 10^{21} \text{ см}^{-3}$.

i	0	1	2	3	4	5	6
$\tilde{\omega}_i$	0	0.2	1	2	10	15	20
T_{ci}/ω_{oi}	∞	136.6	30	16	4.2	3	2.5
q_i/T_{ci}	1.3	1.44	1.64	1.8	2.5	2.8	3
$-\Delta(\partial C_{v,i}/\partial \tilde{T})$	0.11	0.12	0.12	0.13	0.14	0.15	0.15
$C_{v,i}(T_c - 0)$	1.9	2.16	2.46	2.7	3.74	4.2	1.6
$(C_s - C_n)/C_n$	0	0.16	0.36	0.52	1.23	1.53	1.8
$n_{bpi} \cdot \text{см}^3$	$16 \cdot 10^{19}$	$9.4 \cdot 10^{18}$	$4.2 \cdot 10^{18}$	$2.0 \cdot 10^{18}$	$1.2 \cdot 10^{17}$	$5.2 \cdot 10^{14}$	$2.3 \cdot 10^{13}$

$\tilde{\omega}_i = \omega_i/\omega^*$, $\omega^* = 5 \text{ мЭВ}$, ω_i – энергия оптического фонона; T_{ci} – критическая температура перехода, q_i – скрытая теплота перехода из конденсатного в надконденсатное состояние; $-\Delta(\partial C_{v,i}/\partial \tilde{T}) = \partial C_{v,i}/\partial \tilde{T} \Big|_{\tilde{T}=\tilde{T}_{ci}+0} - \partial C_{v,i}/\partial \tilde{T} \Big|_{\tilde{T}=\tilde{T}_{ci}-0}$ – скачок теплоёмкости при СП переходе, $\tilde{T} = T/\omega^*$; $C_{v,i}(T_c - 0)$ – теплоёмкость в СП фазе в критической точке; $C_s = C_v(T_c - 0)$, $C_n = C_v(T_c + 0)$. Расчёты проведены для концентрации ТИ-биполяронов $n = 10^{21} \text{ см}^{-3}$ и эффективной массы зонного электрона $m^* = m_0$.
В таблице приведены также значения концентраций ТИ-биполяронов n_{bpi} для ВТСП $YBa_2Cu_3O_7$, исходя из экспериментального значения температуры перехода $T_c = 93 \text{ К}$ (§6).

При $\tilde{\omega} = 0$ результаты переходят в известный предел ИБГ. В частности, из (22) при $\tilde{\omega} = 0$ следует выражение для критической температуры ИБГ:

$$T_c = 3.31 \hbar^2 n^{2/3} / M_e. \quad (31)$$

Подчеркнём, однако, что в (31) входит $M_e = 2m^*$, а не масса биполярона. Это снимает проблему низкой температуры конденсации, возникающей как в теории ПМР, так и в теории ПБР, в которых в выражении (31) фигурирует масса биполярона [48]-[54]. Другой важный результат состоит в том, что критическая температура T_c для выбранных значений параметров значительно превосходит энергию щели ω_0 .

Из (28), (29) следует, что:

$$\frac{N'(\tilde{\omega})}{N} = \frac{\tilde{T}^{3/2}}{C_{bp}} F_{3/2} \left(\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{T}} \right), \quad (32)$$

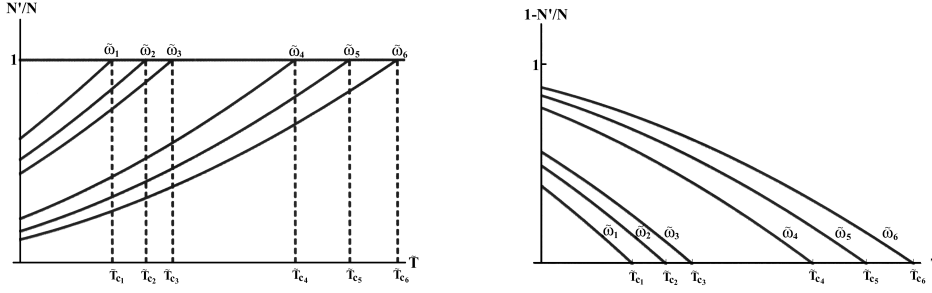


Рис. 3. Температурные зависимости относительного числа надконденсатных частиц N'/N и частиц, находящихся в конденсате $N_0/N = 1 - N'/N$, для значений параметров $\tilde{\omega}_i$, приведённых на рис. 2.

$$\frac{N_0(\tilde{\omega})}{N} = 1 - \frac{N'(\tilde{\omega})}{N}. \quad (33)$$

На рис. 3 приведены температурные зависимости числа надконденсатных частиц N' и числа частиц, находящихся в конденсате N_0 , для вышеуказанных значений параметров $\tilde{\omega}_i$.

Из рис. 3 следует, что, как и следовало ожидать, число частиц в конденсате растёт с увеличением щели ω_i .

Энергия ГИ-биполяронного газа E определяется выражением:

$$E = \sum_{n=0,1,2,\dots} \bar{m}_n E_n = E_{bp} N_0 + \sum_{n \neq 0} \bar{m}_n E_n. \quad (34)$$

С использованием (20), (21) для удельной энергии (т.е. энергии, приходящейся на один ГИ-биполярон) $\tilde{E}(\tilde{T}) = E/N\omega^*$, $\tilde{E}_{bp} = E_{bp}/\omega^*$ из (34) получим:

$$\tilde{E}(\tilde{T}) = \tilde{E}_{bp} + \frac{\tilde{T}^{5/2}}{C_{bp}} F_{3/2} \left(\frac{\tilde{\omega} - \tilde{\mu}}{\tilde{T}} \right) \left[\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{T}} + \frac{F_{5/2} \left(\frac{\tilde{\omega} - \tilde{\mu}}{\tilde{T}} \right)}{F_{3/2} \left(\frac{\tilde{\omega} - \tilde{\mu}}{\tilde{T}} \right)} \right], \quad (35)$$

$$F_{5/2}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{e^{x+\alpha} - 1},$$

где $\tilde{\mu}$ определяется из уравнения:

$$\tilde{T}^{3/2} F_{3/2} \left(\frac{\tilde{\omega} - \tilde{\mu}}{\tilde{T}} \right) = C_{bp}, \quad (36)$$

$$\tilde{\mu} = \begin{cases} 0, & \tilde{T} \leq \tilde{T}_c; \\ \tilde{\mu}(\tilde{T}), & \tilde{T} \geq \tilde{T}_c \end{cases}.$$

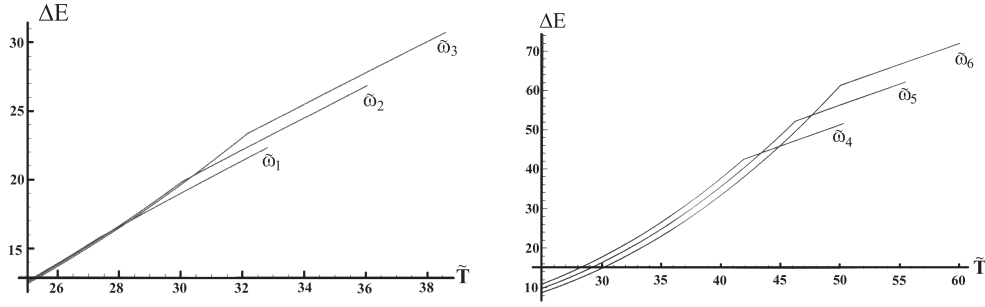


Рис. 4. Температурные зависимости $\Delta E(\tilde{T}) = \tilde{E}(\tilde{T}) - \tilde{E}_{bp}$ для значений параметров $\tilde{\omega}_i$, приведённых на рис. 2,3.

Связь $\tilde{\mu}$ с химическим потенциалом системы μ даётся соотношением $\tilde{\mu} = (\mu - E_{bp})/\omega^*$. Из (35)-(36) также следуют выражения для свободной энергии: $F = -2E/3$ и энтропии $S = -\partial F/\partial T$.

На рис. 4 приведены температурные зависимости $\Delta E = \tilde{E} - \tilde{E}_{bp}$ для вышеуказанных значений параметров ω_i . Точки излома на кривых $\Delta E_i(\tilde{T})$ соответствуют значениям критических температур T_{ci} .

Полученные зависимости позволяют найти теплоёмкость ТИ-биполярного газа: $C_v(\tilde{T}) = d\tilde{E}/d\tilde{T}$. Из (27) для $C_v(\tilde{T})$ при $\tilde{T} \leq \tilde{T}_c$ получим:

$$C_v(\tilde{T}) = \frac{\tilde{T}^{3/2}}{2C_{bp}} \left[\frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{T}^2} F_{1/2} \left(\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{T}} \right) + 6 \left(\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{T}} \right) F_{3/2} \left(\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{T}} \right) + 5 F_{5/2} \left(\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{T}} \right) \right], \quad (37)$$

$$F_{1/2}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{dx}{e^{x+\alpha} - 1}.$$

Из (37) следует известная экспоненциальная зависимость теплоёмкости при низких температурах $C_v \sim \exp(-\omega_0/T)$, обусловленная наличием энергетической щели ω_0 .

На рис. 5 приведены температурные зависимости теплоёмкости $C_v(\tilde{T})$ для вышеуказанных значений параметров $\tilde{\omega}_i$. В таблице 1 для значений параметров $\tilde{\omega}_i$ приведены величины скачков теплоёмкости:

$$\Delta \frac{\partial C_v(\tilde{T})}{\partial \tilde{T}} = \left. \frac{\partial C_v(\tilde{T})}{\partial \tilde{T}} \right|_{\tilde{T}=\tilde{T}_c+0} - \left. \frac{\partial C_v(\tilde{T})}{\partial \tilde{T}} \right|_{\tilde{T}=\tilde{T}_c-0} \quad (38)$$

в точках перехода.

Полученные зависимости позволяют найти скрытую теплоту перехода $q = TS$, S – энтропия надконденсатных частиц. В точке перехода эта величина равна: $q = 2T_c C_v(T_c - 0)/3$, где $C_v(T)$ определяется формулой (37), и для вышеуказанных значений параметров ω_i приведена в Таблице 1.

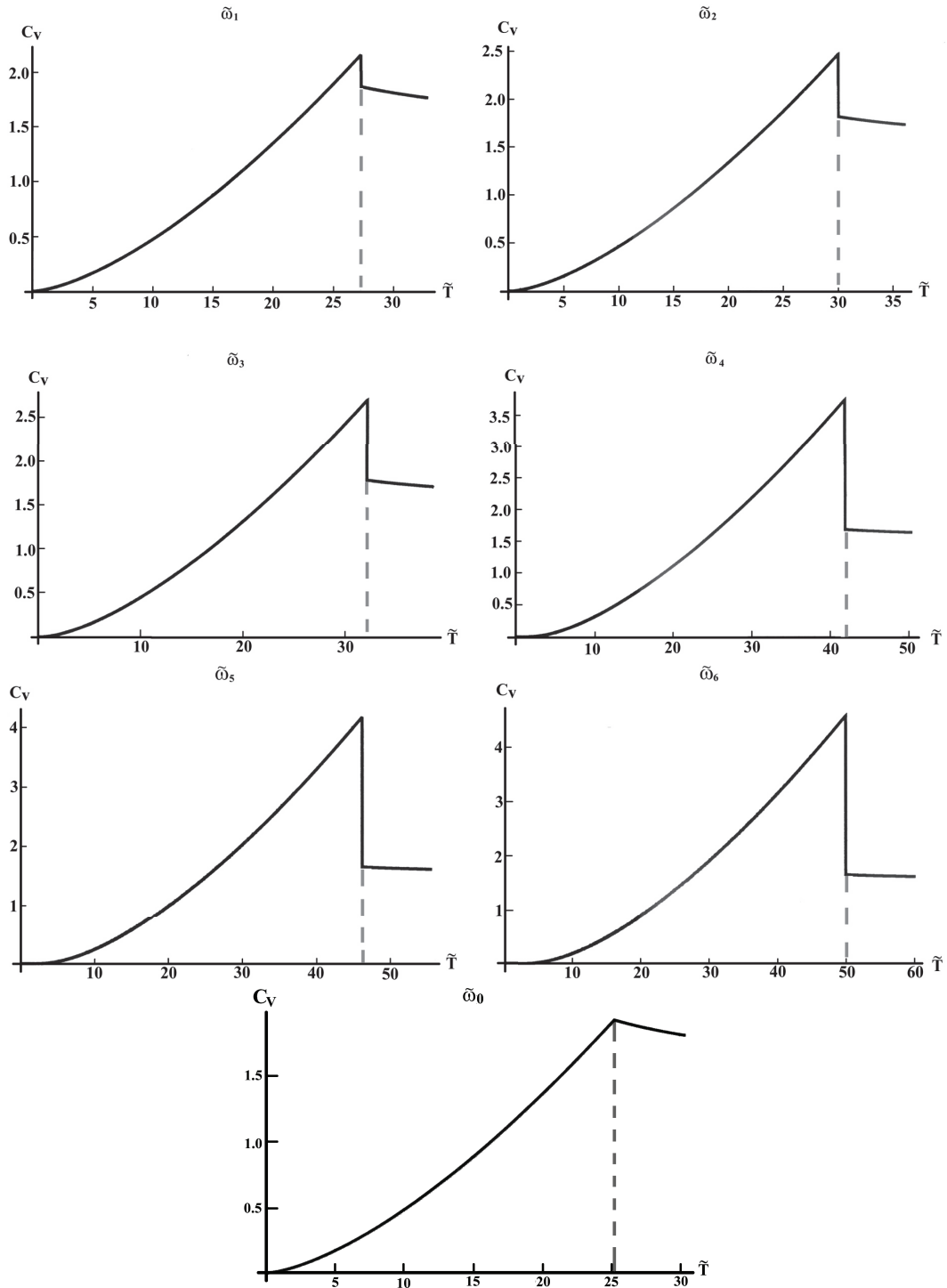


Рис. 5. Температурные зависимости теплоёмкости для различных значений параметров ω_i : $\omega_0 = 0$; $\tilde{T}_{c_0} = 25.2445$; $C_v(\tilde{T}_{c_0}) = 1.925$; $\omega_1 = 0.2$; $\tilde{T}_{c_1} = 27.325$; $C_v(\tilde{T}_{c_1} - 0) = 2.162$; $C_v(\tilde{T}_{c_1} + 0) = 1.868$; $\omega_2 = 1$; $\tilde{T}_{c_2} = 30.0255$; $C_v(\tilde{T}_{c_2} - 0) = 2.465$; $C_v(\tilde{T}_{c_2} + 0) = 1.812$; $\omega_3 = 2$; $\tilde{T}_{c_3} = 32.1397$; $C_v(\tilde{T}_{c_3} - 0) = 2.699$; $C_v(\tilde{T}_{c_3} + 0) = 1.777$; $\omega_4 = 10$; $\tilde{T}_{c_4} = 41.8727$; $C_v(\tilde{T}_{c_4} - 0) = 3.740$; $C_v(\tilde{T}_{c_4} + 0) = 1.6779$; $\omega_5 = 15$; $\tilde{T}_{c_5} = 46.1863$; $C_v(\tilde{T}_{c_5} - 0) = 4.181$; $C_v(\tilde{T}_{c_5} + 0) = 1.651$; $\omega_6 = 20$; $\tilde{T}_{c_6} = 49.9754$; $C_v(\tilde{T}_{c_6} - 0) = 4.560$; $C_v(\tilde{T}_{c_6} + 0) = 1.633$.

5. Токовые состояния ТИ-биполярного газа

Как известно, отсутствие магнитного поля в объёме сверхпроводника обусловлено существованием компенсирующих это поле поверхностных токов. Так, из условия (8) следует, что:

$$\vec{\mathcal{P}}_R = -\frac{2e}{c}\vec{A}_R, \quad (39)$$

т.е. в сверхпроводнике существует незатухающий ток \vec{j} :

$$\vec{j} = 2en_0\vec{\mathcal{P}}_R/M_e^* = -\frac{4e^2n_0}{M_e^*c}\vec{A}_R, \quad (40)$$

(где M_e^* – эффективная масса биполярона), приводящий к эффекту Мейснера, где n_0 – концентрация сверхпроводящих носителей тока $n_0 = N_0/V$. Сравнивая (40) с известным феноменологическим выражением для поверхностного тока \vec{j}_S [56]:

$$\vec{j}_S = -\frac{c}{4\pi\lambda^2}\vec{A}, \quad (41)$$

и полагая $\vec{A} = \vec{A}_R$, из равенства $\vec{j} = \vec{j}_S$ из (40), (41) получим известное выражение для лондоновской глубины проникновения λ :

$$\lambda = \left(\frac{M_e^*c^2}{16\pi e^2n_0} \right)^{1/2}. \quad (42)$$

Равенство «микроскопического» выражения для тока (40) его «макроскопическому» значению не может быть точным. Соответственно, равенство $\vec{A} = \vec{A}_R$ также является приближённым, так как \vec{A}_R – представляет собой вектор-потенциал в точке, где находится центр масс двух электронов, в то время как в теории Лондонов \vec{A} – это вектор-потенциал в точке, где находится частица. По этой причине более реальным было бы считать рассматриваемые величины пропорциональными. В этом случае выражение для глубины проникновения имеет вид:

$$\lambda = \text{const} \left(\frac{M_e^*c^2}{16\pi e^2n_0} \right)^{1/2}, \quad (42')$$

где постоянный множитель в (42') должен определяться из сравнения с экспериментом.

Выражение (39) было получено в случае изотропной эффективной массы носителей тока. В действительности оно имеет более общий характер

и не изменяется при учёте анизотропии эффективных масс. Так, например, в слоистых ВТСП материалах кинетическая энергия носителей тока в гамильтониане (1) должна быть заменена выражением:

$$T_a = \frac{1}{2m_{\parallel}^*} \left(\hat{P}_{1\parallel} - \frac{e}{c} \vec{A}_1 \right)^2 + \frac{1}{2m_{\parallel}^*} \left(\hat{P}_{2\parallel} - \frac{e}{c} \vec{A}_2 \right)^2 + \frac{1}{2m_{\perp}^*} \left(\hat{P}_{1\perp} - \frac{e}{c} \vec{A}_{1z} \right)^2 + \frac{1}{2m_{\perp}^*} \left(\hat{P}_{2\perp} - \frac{e}{c} \vec{A}_{1z} \right)^2, \quad (43)$$

где $\hat{P}_{1,2\parallel}$, $\vec{A}_{1,2\parallel}$ – операторы импульса и вектора-потенциала в плоскостях слоёв (ab-плоскостях); $\hat{P}_{1,2\perp}$, $\vec{A}_{1,2\perp}$ – соответствующие величины в перпендикулярном плоскостям направлении (вдоль оси c); m_{\parallel}^* , m_{\perp}^* – эффективные массы в плоскостях и в перпендикулярном направлении.

В результате преобразования:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x, & \tilde{y} &= y, & \tilde{z} &= \gamma z \\ \tilde{A}_{\tilde{x}} &= A_x, & \tilde{A}_{\tilde{y}} &= A_y, & \tilde{A}_{\tilde{z}} &= \gamma^{-1} A_z, \\ \hat{\tilde{P}}_{\tilde{x}} &= \hat{P}_x, & \hat{\tilde{P}}_{\tilde{y}} &= P_y, & \tilde{P}_{\tilde{z}} &= \gamma^{-1} P_z, \end{aligned} \quad (44)$$

где $\gamma^2 = m_{\perp}^*/m_{\parallel}^*$, γ – параметр анизотропии, кинетическая энергия \tilde{T}_a оказывается изотропной. Отсюда следует, что: $\hat{\tilde{P}}_R + (2e/c) \vec{\tilde{A}}_{\tilde{R}} = 0$. Тогда из (44) следует, что соотношение (39) оказывается справедливым и в анизотропном случае. Из сказанного следует, что:

$$\vec{P}_{R\parallel} = -\frac{2e}{c} \vec{A}_{R\parallel}, \quad \vec{P}_{R\perp} = -\frac{2e}{c} \vec{A}_{R\perp},$$

$$\vec{j}_{\parallel} = 2en_0 \mathcal{P}_{R\parallel} / M_{e\parallel}^*, \quad \vec{j}_{\perp} = 2en_0 \vec{\mathcal{P}}_{R\perp} / M_{e\perp}^*. \quad (45)$$

Магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости слоёв, будет индуцировать токи, текущие в плоскости слоёв. При проникновении в образец такое поле будет затухать вдоль плоскости слоёв. Обозначим лондоновскую длину проникновения для магнитного поля, перпендикулярного плоскости слоёв (H_{\perp}), через λ_{\perp} , а для магнитного поля, параллельного плоскости слоёв (H_{\parallel}) – через λ_{\parallel} .

Отсюда вытекают выражения для лондоновских длин проникновения магнитного поля в образец:

$$\lambda_{\perp} = \left(\frac{M_{e\perp}^* c^2}{16\pi e^2 n_0} \right)^{1/2}, \quad \lambda_{\parallel} = \left(\frac{M_{e\parallel}^* c^2}{16\pi e^2 n_0} \right)^{1/2}. \quad (46)$$

Для λ_{\parallel} и λ_{\perp} часто используют также обозначения λ_{ab} и λ_c соответственно. Из (46) следует, что :

$$\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{\parallel}} = \left(\frac{M_{e\perp}^*}{M_{e\parallel}^*} \right)^{1/2} = \gamma^*. \quad (47)$$

Из (46) также следует, что лондоновская длина проникновения зависит от температуры:

$$\lambda^2(0)/\lambda^2(T) = n_0(T)/n_0(0). \quad (48)$$

В частности, при $\omega = 0$ с использованием (31) получим:

$\lambda(T) = \lambda(0) (1 - (T/T_C)^{3/2})^{-1/2}$. Сравнение полученной зависимости с другими подходами даётся в §7.

Обычно считается, что Бозе-система становится сверхпроводящей вследствие взаимодействия между частицами. Существование щели в спектре ТИ-биполярнов может приводить к их конденсации даже в отсутствие взаимодействия между частицами, и критерий сверхтекучести Ландау

$$v < \hbar\omega_0/\mathcal{P} \quad (49)$$

может выполняться даже для невзаимодействующих частиц. Из условия (49) вытекает выражение для максимальной величины плотности тока $j_{\max} = env_{\max}$:

$$j_{\max} = en_0 \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{M_e^*}}. \quad (50)$$

В заключение этого раздела отметим, что все сказанное относилось к локальной электродинамике. Соответственно, выражения, полученные для λ , справедливы только при условии $\lambda \gg \xi$, где ξ – корреляционная длина, определяющая характерный размер пары, т.е. характерный масштаб изменения волновой функции $\psi(r)$ в (9). Это условие, как правило, выполняется в ВТСП материалах. В обычных сверхпроводниках выполняется обратное неравенство. Нелокальное обобщение электродинамики сверхпроводников было сделано Пиппардом [57], согласно которому связь между \vec{j}_S и \vec{A} в выражении (41) может быть записана в виде:

$$\vec{j}_S = \int \hat{Q}(r - r') \vec{A}(r') dr', \quad (51)$$

где Q – некоторый оператор, радиус действия которого обычно полагается равным ξ . В пределе $\xi \gg \lambda$ это приводит к увеличению абсолютного значения длины проникновения магнитного поля в сверхпроводник, которое становится равным $(\lambda^2 \xi)^{1/3}$ [56].

6. Термодинамические свойства ТИ-биполярного газа в магнитном поле

То, что бозе-конденсация идеального бозе-газа в магнитном поле невозможна, [58] не означает, что механизм БЭК нельзя использовать при описании сверхпроводимости в магнитном поле. Это следует из того факта, что в объёме сверхпроводника магнитное поле тождественно равно нулю. В то же время, отвлекаясь от проблемы сверхпроводимости, нет никаких препятствий рассматривать бозе-газ помещённым в магнитное поле. Представляет интерес исследовать этот вопрос применительно к газу из ТИ-биполяронов.

Прежде всего отметим, что из выражения для $\tilde{\omega}_H$, даваемого (30), следует, что при $\omega_0 = 0$ бозе-конденсация ТИ-биполяронов оказывается невозможной, если $H \neq 0$. Для обычного идеального заряженного бозе-газа этот вывод был впервые сделан в [58]. Вследствие того, что в спектре ТИ-биполяронов имеется щель между основным и возбуждёнными состояниями (§3), для газа ТИ-биполяронов этот вывод при $\omega_0 \neq 0$ становится несправедлив.

Из выражения для $\tilde{\omega}_H$ (30) следует, что существует максимальная величина магнитного поля H_{max} , равная:

$$H_{max}^2 = \frac{2\omega_0 \hbar^2 M_e}{\eta^2}. \quad (52)$$

При $H > H_{max}$ ¹ однородное сверхпроводящее состояние невозможно. С использованием (52) для $\tilde{\omega}_H$ (30) получим:

$$\tilde{\omega}_H = \tilde{\omega} \left(1 - H^2/H_{max}^2\right). \quad (53)$$

Для заданной температуры обозначим $H_{cr}(T)$ величину магнитного поля, при которой сверхпроводимость исчезает. Этому значению поля, согласно (53), соответствует $\tilde{\omega}_{H_{cr}}$:

$$\tilde{\omega}_{H_{cr}}(T) = \tilde{\omega} \left(1 - H_{cr}^2(T)/H_{max}^2\right). \quad (54)$$

Температурная зависимость величины $\tilde{\omega}_{H_{cr}}(T)$ может быть найдена из уравнения (30):

$$C_{bp} = \tilde{T}^{3/2} F_{3/2} \left(\tilde{\omega}_{H_{cr}}(\tilde{T})/\tilde{T} \right). \quad (55)$$

¹Как это следует из (16), величина η состоит из двух частей: $\eta = \eta' + \eta''$. Величина η' определяется интегралом, входящим в выражение для $\tilde{\omega}_k$ (11). По этой причине η' зависит от формы поверхности образца. Величина η'' определяется суммой, входящей в выражение для ω_k (16), и слабо зависит от формы поверхности образца. Отсюда следует, что величина η может меняться при изменении формы поверхности образца и тем самым приводить к изменению величины H_{max} .

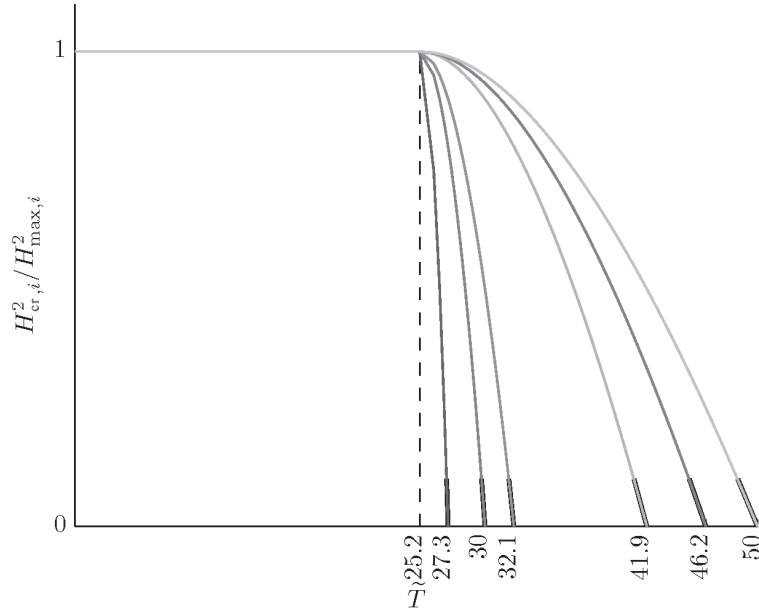


Рис. 6. Температурная зависимость $H_{cr,i}^2/H_{max,I}^2$ на интервале $[0; T_{c,i}]$ для значений параметров $\tilde{\omega}_i$, данные на рис. 2.

Она имеет вид, приведённый на рис. 2.

С использованием (52) и температурной зависимости, приведённой на рис. 2, можно найти температурную зависимость $H_{cr}(\tilde{T})$:

$$\frac{H_{cr}^2(\tilde{T})}{H_{max}^2} = 1 - \omega_{H_{cr}}(\tilde{T})/\tilde{\omega}. \quad (56)$$

Для $\tilde{T} \leq \tilde{T}_{ci}$ эти зависимости приведены на рис. 6.

Согласно рис. 6, $H_{cr}(\tilde{T})$ достигает своего максимума при конечной температуре $\tilde{T}_c(\tilde{\omega} = 0) \leq \tilde{T}_c(\omega_{0i})$. Из рис. 6 следует, что при температуре ниже чем $\tilde{T}_c(\tilde{\omega} = 0) = 25.24$ дальнейшее понижение температуры уже не изменяет величины критического поля $H_{cr}(\tilde{T})$ независимо от величины щели $\tilde{\omega}$.

Введём также понятие температуры перехода $T_c(H)$ в магнитном поле H . На рис. 7 приведены зависимости $T_c(H)$, вытекающие из рис. 6 и определяемые соотношениями:

$$C_{bp} = \tilde{T}_{c,i}^{3/2}(H) F_{3/2} \left(\tilde{\omega}_{H,i} / \tilde{T}_{c,i}(H) \right), \quad \tilde{\omega}_{H,i} = \tilde{\omega}_{H=0,i} \left[1 - H^2 / H_{max,i}^2 \right]. \quad (57)$$

Из рис. 7 следует, что критическая температура перехода $\tilde{T}_c(H)$ изменяется скачком при достижении магнитным полем значения $H_{max,i}$.

Для решения вопроса о типе фазового перехода в магнитном поле будем исходить из известного соотношения, связывающего свободные энер-

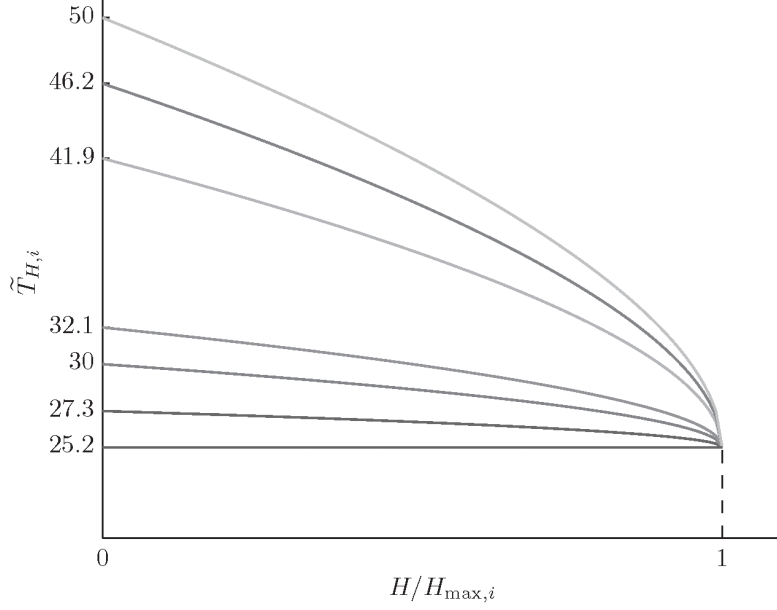


Рис. 7. Зависимость критической температуры перехода $\tilde{T}_{H,i}$ от магнитного поля H для значений параметров $\tilde{\omega}_i$, используемых для Рис. 2.

гии в сверхпроводящем и нормальном состояниях:

$$F_S + \frac{H^2}{8\pi} = F_N, \quad (58)$$

где F_S и F_N – свободные энергии единицы объёма сверхпроводящего и нормального состояний соответственно:

$$F_S = \frac{N}{V} E_{bp}(H=0) - \frac{2}{3} \Delta E(\omega_{H=0}) \frac{N}{V}, \quad (59)$$

$$F_N = \frac{N}{V} E_{bp}(H) - \frac{2}{3} \Delta E(\omega_H) \frac{N}{V}, \quad (60)$$

где $\Delta E = E - E_{bp}$, $E = \omega^* \tilde{E}$, где \tilde{E} определяется формулой (35). Дифференцируя (56) по температуре и учитывая, что $S = -\partial F/\partial T$, для теплоты перехода q получим:

$$q = T(S_N - S_S) = -T \partial(F_N - F_S)/\partial T = -T \frac{H_{cr}}{4\pi} \frac{\partial H_{cr}}{\partial T}. \quad (61)$$

Соответственно, для разности энтропий $S_S - S_N$ получим:

$$S_S - S_N = \frac{H_{cr}}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{cr}}{\partial T} \right) = \frac{H_{max}^2}{8\pi\omega^*} (\tilde{S}_S - \tilde{S}_N). \quad (62)$$

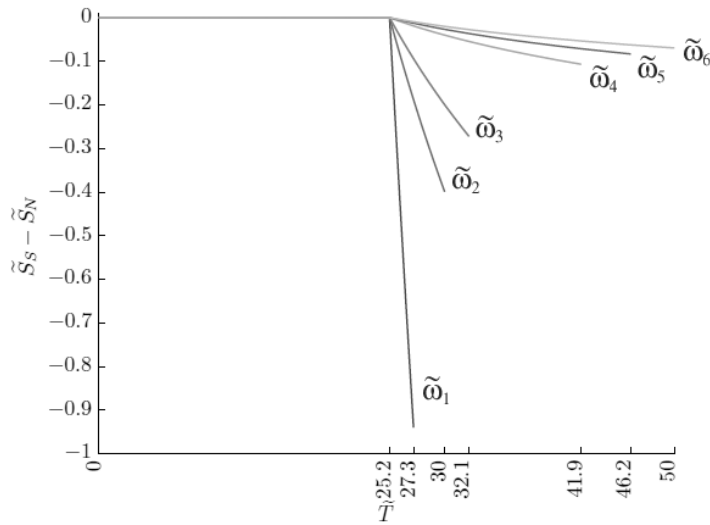


Рис. 8. Температурные зависимости разностей энтропий в сверхпроводящем и нормальном состояниях для параметров $\tilde{\omega}_i$, используемых для рис. 6, 7.

На рис. 8 показана зависимость разности энтропий (62) от температуры для различных значений критических температур ($\tilde{\omega}_i$), приведённых на рис. 2. Представленные на рис. 8 зависимости могут показаться странными, по крайней мере в двух отношениях:

1. В теории БКШ и теории Гинзбурга-Ландау в самой критической точке T_c разность энтропий в соответствии с формулой Рутгерса обращается в ноль. На рис. 8 энтропия является монотонной функцией \tilde{T} и не обращается в ноль при $T = T_c$.

2. Во-вторых по абсолютной величине разность $|\tilde{S}_S - \tilde{S}_N|$ при приближении к предельной точке $\tilde{T}_c = 25.2$, которая соответствует значению $\tilde{\omega} = 0$, казалось бы, должна не возрастать, а уменьшаться, обращаясь в ноль при $\tilde{\omega} = 0$.

Что касается второго пункта, то это действительно имеет место для $|S_S - S_N|$, поскольку величина максимального поля H_{max} и, соответственно, множителя $H_{max}^2/8\pi$, связывающего величины $S_S - S_N$ и $\tilde{S}_S - \tilde{S}_N$ при $\tilde{\omega} = 0$ обращается в ноль.

Что касается первого пункта, то, как будет показано ниже, формула Рутгерса для бозе-конденсата ТИ-биполяронов оказывается неприменимой.

В Таблице 2 приводятся значения величины $\tilde{S}_S - \tilde{S}_N$ для значений критических температур, соответствующих различным значениям $\tilde{\omega}_{H_{cr,i}}$.

Полученные результаты приводят к ряду фундаментальных следствий:

1. Кривая зависимости $H_{cr}(T)$ (рис. 6) имеет нулевую производную,

$dH_{cr}(T)/dT = 0$ при $T = 0$. Этот результат находится в соответствии с теоремой Нернста, согласно которой энтропия, определяемая (61) при $T = 0$, равна нулю.

2. Согласно рис. 6, $H_{cr}(T)$ – это монотонно спадающая с увеличением T кривая при $T > T_c(\tilde{\omega} = 0)$, а при $T \leq T_c(\tilde{\omega} = 0)$ – постоянная величина. Отсюда следует, что $\partial H_{cr}(T)/\partial T < 0$ при $T > T_c(\tilde{\omega} = 0)$. Следовательно, в интервале температур $[T_c(\tilde{\omega} = 0), T_c(\tilde{\omega})]$ $S_S < S_N$, а в интервале $[0, T_c(\tilde{\omega} = 0)]$ $S_S = S_N$.

Отсюда следуют важные выводы:

1. Переход в интервале $[0, T_c(\tilde{\omega} = 0)]$ происходит без поглощения или выделения скрытой теплоты, т.к. в этом случае $S_S = S_N$. То есть экспериментально он будет виден как фазовый переход второго рода. В действительности, в области $[0, T_c(\tilde{\omega} = 0)]$, фазовый переход в сверхпроводящее состояние является фазовым переходом бесконечного рода, поскольку в этой области производные любого порядка от разности свободных энергий $F_S - F_N$, согласно (58) и рис. 6, обращаются в ноль.

2. Переход в магнитном поле из сверхпроводящего в нормальное состояние в интервале $[T_c(\tilde{\omega} = 0), T_c(\tilde{\omega})]$, которому соответствует $S_S < S_N$, происходит с поглощением скрытой теплоты. Наоборот, при переходе в этом интервале из нормального в сверхпроводящее состояние скрытая теплота выделяется. Фазовый же переход в интервале $[0, T_c(\tilde{\omega} = 0)]$ не сопровождается поглощением или выделением скрытой теплоты, являясь фазовым переходом бесконечного рода.

С учётом того, что удельная теплоёмкость вещества определяется формулой $C = T(\partial S/\partial T)$, разность удельных теплоёмкостей сверхпроводящего и нормального состояния, согласно (62), запишется в виде:

$$C_S - C_N = \frac{T}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial H_{cr}}{\partial T} \right)^2 + H_{cr} \frac{\partial^2 H_{cr}}{\partial T^2} \right]. \quad (63)$$

Из этого соотношения обычно получают известную формулу Рутгерса полагая в (63) критическое поле $H_{cr}(T_c) = 0$ при $T = T_c$ и оставляя в скобке в правой части (63) только первый член:

$$(C_S - C_N)_R = \frac{T_c}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{cr}}{\partial T} \right)_{T_c}^2. \quad (64)$$

Легко, однако, видеть, что в точке $T = T_c$ величина $\omega_{H_{cr}}$, определяемая рис. 2, для всех значений температуры имеет конечную производную по T и, следовательно, согласно (56), бесконечную производную $\partial H_{cr}/\partial T$ при $T = T_c$. Таким образом, второй член в квадратной скобке (63) обращается в $-\infty$, оставляя эту скобку конечной величиной. В результате, правильное выражение для разности теплоёмкостей рассматриваемой нами модели

бозе-газа должно определяться формулой:

$$C_S - C_N = \frac{T}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial T^2} H_{cr}^2(T) = \frac{H_{max}^2}{8\pi\omega^*} (\tilde{C}_S - \tilde{C}_N), \quad (65)$$

$$\tilde{C}_S - \tilde{C}_N = \tilde{T} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{T}^2} \left(H_{cr}^2(\tilde{T}) / H_{max}^2 \right).$$

В Таблице 2 приводятся значения величины $\tilde{C}_S - \tilde{C}_N$ для значений критических температур, соответствующих различным значениям $\tilde{\omega}_{H_{cr},i}$. Сравнение скачков теплоёмкости, приведённых на рис. 5, с выражением (65) позволяет вычислить величину H_{max} . Полученные таким образом значения H_{max} для различных значений $\tilde{\omega}_i$ приведены в Таблице 2. Эти значения однозначно определяют значения постоянных η в формулах (27'), (27").

Таблица 2. Величины H_{max} разностей энтропий $\tilde{S}_S - \tilde{S}_N$ и разностей теплоёмкостей $\tilde{C}_S - \tilde{C}_V$ в сверхпроводящем и нормальном состояниях, определяемых соотношениями (62) и (65), представлены для температур перехода \tilde{T}_{C_i} , для тех же значений $\tilde{\omega}_{H_{cr},i}$, что и на Рис. 2.

i	$\tilde{\omega}_{H_{cr},i}$	\tilde{T}_{C_i}	$\tilde{S}_S - \tilde{S}_N$	$\tilde{C}_S - \tilde{C}_V$	$H_{max} \cdot 10^{-3}, \text{Oe}$
0	0	25.2445	0	0	0
1	0.2	27.325	-0.939995	-11.5415	2.27
2	1	30.0255	-0.39909	-2.17594	7.78
3	2	32.1397	-0.272182	-1.04802	13.3
4	10	41.8727	-0.106679	-0.187327	47.1
5	15	46.1863	-0.0831709	-0.121063	64.9
6	20	49.9754	-0.0694586	-0.0888433	81.5

Из сказанного следует, что температурное разложение Гинзбурга-Ландау для критического поля вблизи критической температуры T_c неприменимо для бозе-конденсата ГИ-биполяронов. Поскольку температурная зависимость $H_{cr}(T)$ определяет температурные зависимости всех термодинамических величин, то этот вывод справедлив для всех таких величин. Как было отмечено во введении, этот вывод является следствием того, что теория БКШ в силу своей неаналитичности по константе связи ни при каких условиях не переходит в теорию биполяронного конденсата.

Выше был рассмотрен изотропный случай. В анизотропном случае из формул (27'), (27'') следует, что:

$$H_{max}^2 = H_{max \perp}^2 = \frac{2\omega_0 M_{\perp} \hbar^2}{\eta^2}, \quad \vec{B} \parallel \vec{c}, \quad (66)$$

- т.е. в случае, когда магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости слоёв, и :

$$H_{max}^2 = H_{max \parallel}^2 = \frac{2\omega_0 M_{\parallel} \hbar^2}{\eta^2}, \quad \vec{B} \perp \vec{c}, \quad (67)$$

-в случае, когда магнитное поле лежит в плоскости слоёв. Из (66),(67) следует, что:

$$\frac{H_{max \perp}^2}{H_{max \parallel}^2} = \sqrt{\frac{M_{\perp}}{M_{\parallel}}} = \gamma. \quad (68)$$

Из (56),(67), (68) для критического поля $H_{cr}(\tilde{T})$ в перпендикулярном и параллельном к плоскости слоёв направлениях получим:

$$H_{cr \parallel, \perp}(\tilde{T}) = H_{max \parallel, \perp} \sqrt{1 - \tilde{\omega}_{H_{cr}}(\tilde{T})/\tilde{\omega}}. \quad (69)$$

Из (69) следует, что отношения $H_{cr \parallel}(\tilde{T})/H_{cr \perp}(\tilde{T})$ не зависят от температуры. Сравнение полученных зависимостей с экспериментом проводится в §7.

7. Сравнение с экспериментом

На рис. 4 показаны типичные зависимости $E(\tilde{T})$. Из них следует, что в точке перехода энергия является непрерывной функцией \tilde{T} . Это означает, что на сам переход энергию затрачивать не надо и переход является фазовым переходом 2-рода в полном соответствии с экспериментом. В то же время переход бозе-частиц из конденсатного состояния в надконденсатное связан с энергозатратами, которые определяются величиной q (§4, Таблица 1), определяющей скрытую теплоту перехода бозе-газа, что делает такой переход фазовым переходом 1-рода.

Рассмотрим в качестве примера ВТСП $YBa_2Cu_3O_7$ с температурой перехода $90 \div 93$ К, объёмом элементарной ячейки $0.1734 \cdot 10^{-21}$ см³, концентрация дырок $n \cong 10^{21}$ см⁻³. Согласно оценкам [59] энергия Ферми равна: $\varepsilon_F = 0.37$ эВ. Концентрацию ТИ-биполяронов в $YBa_2Cu_3O_7$ найдём из уравнения (29):

$$\frac{n_{bp}}{n} C_{bp} = f_{\tilde{\omega}}(\tilde{T}_c), \quad (70)$$

с $\tilde{T}_c = 1.6$. В Таблице 1 приводятся значения $n_{bp,i}$ для значений параметров $\tilde{\omega}_i$, приведённых в §4. Из Таблицы 1 следует, что $n_{bp,i} \ll n$. Таким образом, только малая часть носителей тока находится в биполярном состоянии, что оправдывает рассматриваемое нами приближение газа ТИ-биполяронов низкой плотности. Уровни энергии таких ТИ-биполяронов лежат вблизи поверхности Ферми и описываются волновой функцией:

$$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_F\vec{r}}\varphi(\vec{r}), \quad (71)$$

которая приводит к замене величины \bar{T} , фигурирующей в (10), на:

$$\bar{T} = -2 \langle \varphi | \Delta_r | \varphi \rangle + 2k_F^2, \quad (72)$$

то есть к отсчёту энергии от уровня Ферми (последний член в правой части (72) в размерных единицах равен $2\varepsilon_F$, где $\varepsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m^*$).

Согласно излагаемому подходу, для возникновения сверхпроводимости необходимо образование спаренных состояний. Условие образования таких состояний имеет вид:

$$E_{bp} < 0, \quad (73)$$

где E_{bp} – энергия ТИ-биполярона [33]. Условие (73) определяет величину псевдощели:

$$\Delta_1 = |E_{bp}|. \quad (74)$$

При $\Delta_1 \gg \omega_0$ величина псевдощели может намного превышать как T_c , так и энергию щели (т.е. ω_0). Из выражения для спектра E_{bp} и E_p (20)-(21) вытекает, что угловая зависимость $\Delta_1(\vec{k})$ полностью определяется симметрией изоэнергетической поверхности фононного волнового вектора \vec{k} . Ранее к этому выводу пришёл Беннет [60], доказавший, что основным источником анизотропии сверхпроводящих свойств является угловая зависимость фононного спектра, хотя определённый вклад вносит и анизотропия поверхности Ферми.

Из сказанного следует, что образование псевдощели – это фазовый переход, при понижении температуры предшествующий последующему фазовому переходу в сверхпроводящее состояние. Последние эксперименты [61] также свидетельствуют в пользу этого утверждения.

В работе [36] был проведён расчёт корреляционной длины для ТИ-биполяронов. Согласно [36], в ВТСП материалах её величина может меняться от нескольких ангстрем до нескольких десятков ангстрем, что также находится в согласии с экспериментом.

Особый интерес представляет определить характерную энергию фононов, ответственных за образование ТИ-биполяронов и сверхпроводящих свойств оксидных керамик. С этой целью воспользуемся сравнением рассчитанных значений скачков теплоёмкостей с экспериментальными данными.

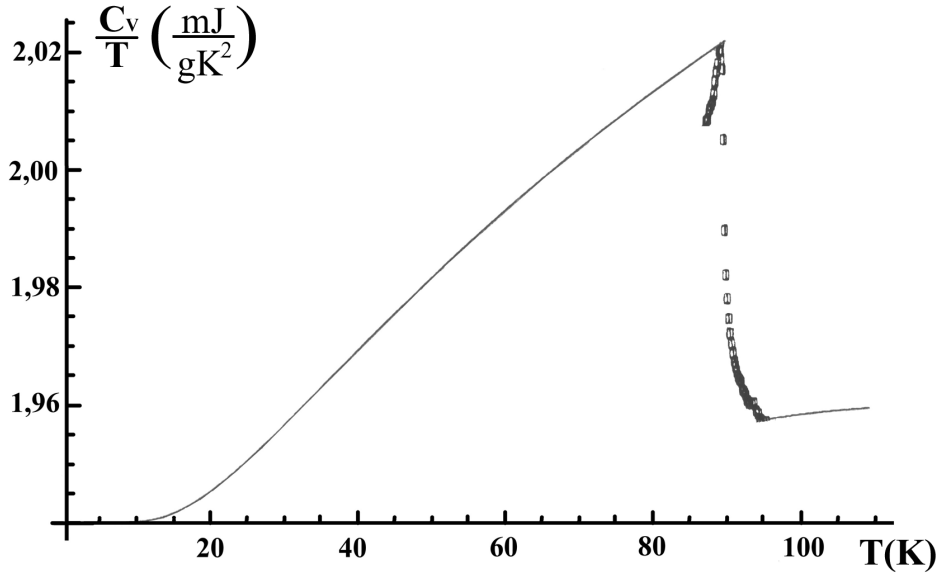


Рис. 9. Сравнение теоретической (сплошная линия) и экспериментальной [62] (прерывистая линия) зависимостей в области скачка теплоёмкости.

Как известно, в теории БКШ скачок теплоёмкости равен:

$$(C_S - C_n)/C_n = 1.43 ,$$

где C_S – теплоёмкость в сверхпроводящей фазе, а C_n – в нормальной фазе, и не зависит от параметров модельного гамильтониана. Как следует из численных расчётов, приведённых на рис. 9 и в Таблице 1, в отличие от теории БКШ, величина скачка зависит от фоновой частоты. Таким образом, изложенный подход предсказывает существование изотопического эффекта для скачка теплоёмкости.

Как следует из рис. 9, скачок теплоёмкости, вычисленный теоретически (§4), совпадает с экспериментальным значением в $YBa_2Cu_3O_7$ [62], при $\tilde{\omega} = 1.5$, то есть при $\omega = 7.5$ мэВ. Это соответствует концентрации ТИ-биполяронов $n_{bp} = 2.6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Таким образом, в отличие от широко распространённого мнения, что в оксидных керамиках за сверхпроводимость ответственны высокоэнергетичные фононы (с энергией $70 \div 80$ мэВ [63]), в действительности за сверхпроводимость в ВТСП материалах должны быть ответственны мягкие фононные моды.

Отметим, что при расчёте температуры перехода считалось, что эффективная масса M_e в уравнении (30) не зависит от направления волнового вектора, то есть был рассмотрен изотропный случай.

В анизотропном случае, выбирая в качестве координатных главные оси вектора \vec{k} , получим величину $(M_{ex}M_{ey}M_{ez})^{1/3}$ вместо эффективной массы M_e . В слоистых ВТСП материалах значения эффективных масс, лежащих в плоскости слоёв M_{ex} , M_{ey} , близки по величине. Полагая в этом слу-

чае $M_e = M_{ex} = M_{ey} = M_{||}$, $M_{ez} = M_{\perp}$, получим вместо величины C_{bp} , определяемой (30), величину $\tilde{C}_{bp} = C_{bp}/\gamma$, $\gamma^2 = M_{\perp}/M_{||}$ – параметр анизотропии. Таким образом, анизотропия эффективных масс даёт для концентрации n_{bp} величину $\tilde{n}_{bp} = \gamma n_{bp}$. Следовательно, учёт анизотропии может на порядок и более увеличить оценку концентрации ТИ-биполяронов. Если для $YBa_2Cu_3O_7$ принять оценку $\gamma^2 = 30$ [63], то для концентрации ТИ-биполяронов получим: $\tilde{n}_{bp} = 1.4 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, что оставляет в силе общий вывод: в рассматриваемом случае лишь малая часть носителей тока находится в ТИ-биполярном состоянии. Ситуация может измениться, если параметр анизотропии очень велик. Так, например, в слоистых ВТСП $Bi-Sr-Ca-Cu-O$ параметр анизотропии $\gamma > 100$, соответственно концентрация ТИ-биполяронов в этих соединениях может быть одного порядка с полной концентрацией носителей тока.

Другой важный вывод, к которому приводит учёт анизотропии эффективных масс, – зависимость температуры перехода T_c не от n_{bp} и $M_{||}$ по отдельности, а только от их отношения, что непосредственно следует из (30). Это явление известно как закон Уемуры. В следующем разделе будет получено более общее соотношение, известное как формула Александрова, частным случаем которой является закон Уемуры.

В числе экспериментов, в которых участвует внешнее магнитное поле, важнейшую роль играют эксперименты по измерению лондоновской глубины проникновения λ . В $YBa_2Cu_3O_7$ для λ при $T = 0$ в работе [64] было получено $\lambda_{ab} = 150 \div 300 \text{ нм}$, $\lambda_c = 800 \text{ нм}$. Такой же порядок этих величин приводится в большом числе работ [65]-[68]. В работе [67] (см. также ссылки в этой статье) показано, что анизотропия длин λ_a и λ_b в купратных плоскостях в зависимости от типа кристаллической структуры может составлять 30%. Если принять получаемое в большинстве работ значение $\lambda_a = 150 \text{ нм}$ и $\lambda_c = 800 \text{ нм}$, то для параметра анизотропии, согласно (47), получим $\gamma \approx 30$ – значение, обычно используемое для кристаллов $YBa_2Cu_3O_7$.

Температурная зависимость $\lambda^2(0)/\lambda^2(T)$ изучалась во многих работах (см. [68] и ссылки в ней). На рис. 10 показано сравнение различных кривых для $\lambda^2(0)/\lambda^2(T)$. В работе [68] показано, что в высококачественных кристаллах $YBa_2Cu_3O_7$ температурная зависимость $\lambda^2(0)/\lambda^2(T)$ хорошо аппроксимируется простой зависимостью $1 - t^2$, $t = T/T_c$. На рис. 11 показано сравнение экспериментальной зависимости $\lambda^2(0)/\lambda^2(T)$ с теоретической зависимостью:

$$\frac{\lambda^2(0)}{\lambda^2(T)} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \frac{F_{3/2}(\omega/T)}{F_{3/2}(\omega/T_c)}, \quad (75)$$

вытекающей из (48), (33), (32). Таким образом, имеется хорошее согласие между экспериментом и теоретической зависимостью (75).

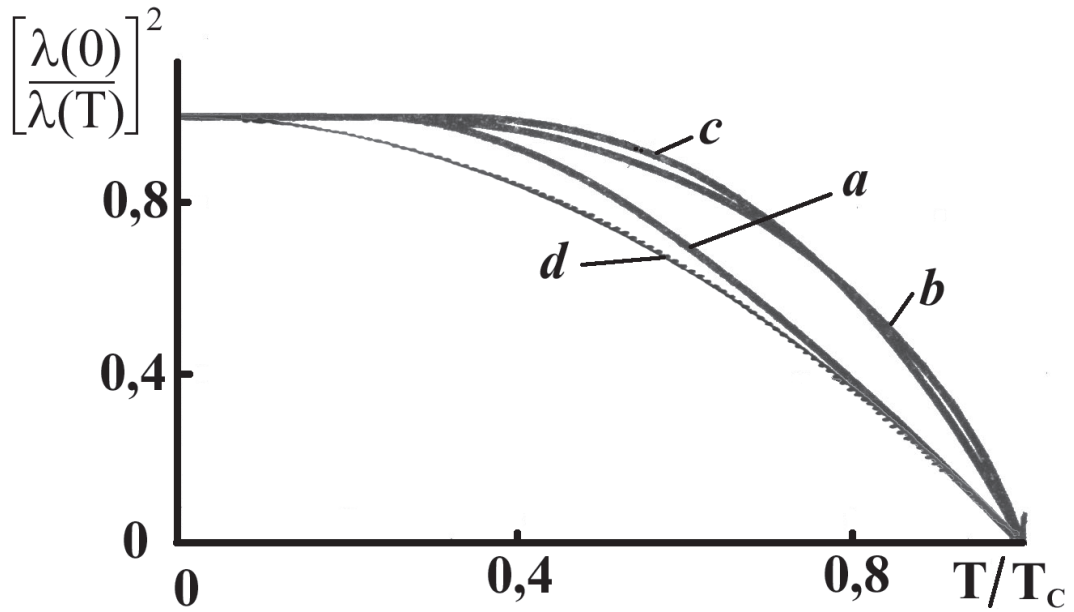


Рис. 10. Глубина проникновения магнитного поля согласно теории БКШ (*a* – локальное приближение, *b* – нелокальное приближение); эмпирическое правило $\lambda^{-2} \sim 1 - (T/T_c)^4$ (*c*) [69]; в $YBa_2Cu_3O_7$ (*d*) [68].

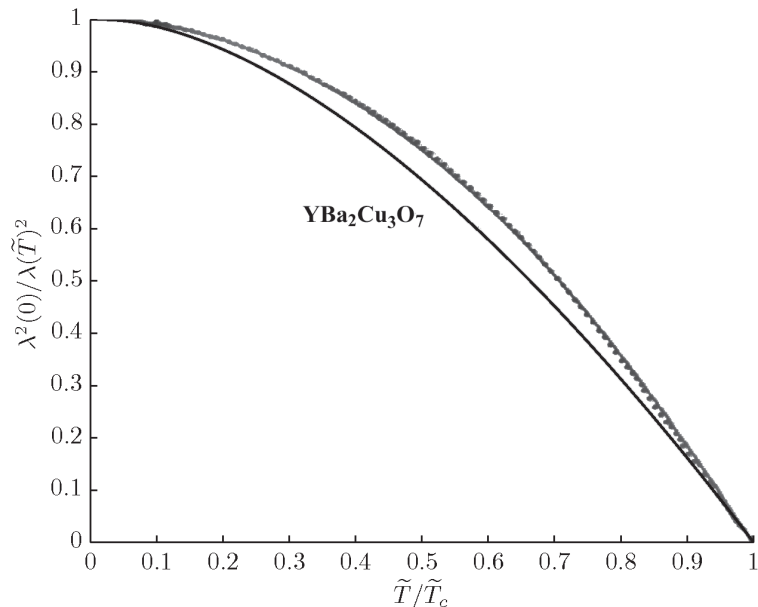


Рис. 11. Сравнение теоретической зависимости $\lambda^2(0)/\lambda^2(\tilde{T})$ (сплошная линия), полученной в данной статье, с экспериментальной зависимостью [68] (точечная кривая).

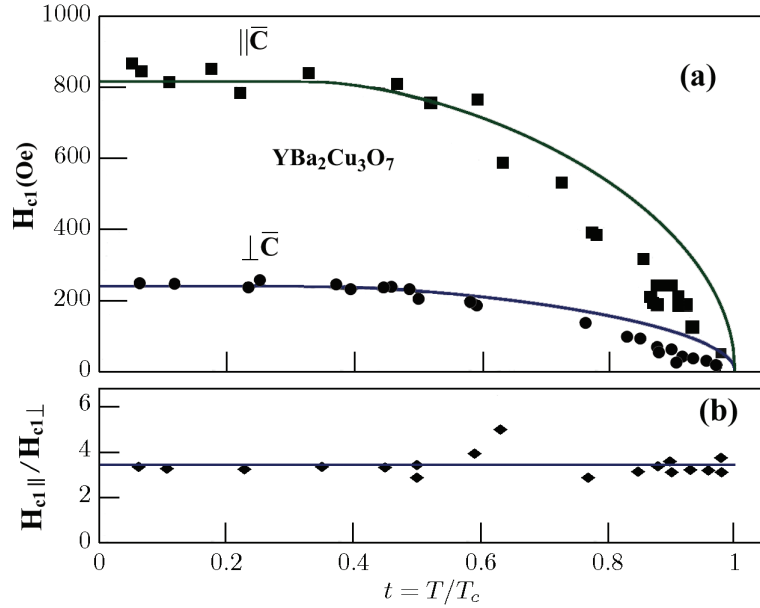


Рис. 12. Сравнение рассчитанных (непрерывные кривые) и экспериментальных значений H_{c1} (квадраты, круги, ромбы [70]) для случаев $\parallel \vec{c}$ и $\perp \vec{c}$.

Разработанная теория позволяет провести сравнение с экспериментом температурной зависимости величины критического магнитного поля в $YBa_2Cu_3O_7$ [70]. Поскольку построенная в §6 теория описывает однородное состояние газа ТИ-биполяронов, то рассматриваемое критическое поле соответствует однородной мейснеровской фазе. В работе [70] для такого поля используется обозначение H_{c1} , которое связано с обозначениями §6 соотношениями: $H_{c1} = H_{cr}$, $H_{c1||} = H_{cr\perp}$, $H_{c1\perp} = H_{cr||}$. Для сравнения с экспериментом используем ранее полученные значения параметров для $YBa_2Cu_3O_7$: $\tilde{\omega} = 1.5$, $\tilde{\omega}_c = 1.6$. На рис. 12 показано сравнение экспериментальных зависимостей $H_{c1\perp}(T)$ и $H_{c1||}(T)$ [70] с теоретическими зависимостями (69), где для $H_{max||,\perp}(T)$ взяты экспериментальные значения: $H_{max||} = 240$, $H_{max\perp} = 816$. Приведённые на рис. 12 результаты подтверждают вывод (§6) о независимости отношений $H_{cr\perp}(T)/H_{cr||}(T)$ от температуры.

Из соотношений (47),(66),(67) следует, что:

$$(\gamma^*)^2 = \frac{M_{\perp}^*}{M_{||}^*} \propto \frac{\lambda_{\perp}^2}{\lambda_{||}^2}; \quad \frac{H_{max\perp}^2}{H_{max||}^2} = \gamma^2 = 11.6. \quad (76)$$

Выбор для параметра анизотропии значения $\gamma^2 = 11.6$, определяемого соотношениями (76), отличается от значения $(\gamma^*)^2 = 30$, использованного выше. Это различие, по-видимому, обусловлено различием анизотропий поляронных эффективных масс $M_{||,\perp}^*$ и электронных зонных масс

$m_{\parallel,\perp}^*$.

8. Скейлинговые соотношения

Скейлинговые соотношения играют важную роль в теории сверхпроводимости, способствуя поиску новых высокотемпературных сверхпроводников с рекордными параметрами. Такие соотношения могут быть обобщением большого числа экспериментов, не имея при этом надёжного теоретического обоснования, или быть выведены исходно из не очень надёжного теоретического построения, но впоследствии иметь очень широкое экспериментальное подтверждение. В качестве примера можно привести закон Уемуры, рассмотренный в предыдущем разделе.

Изложенная теория позволяет дать естественное объяснение некоторым важным скейлинговым соотношениям. В частности, в этом разделе будет дан вывод формулы Александра [71], [72] и скейлингового закона Хомеса.

Формула Александра. Как было отмечено выше (§7), в анизотропном случае формула (70) приобретает вид:

$$\tilde{T}_c = F_{3/2}^{-2/3}(\tilde{\omega}/\tilde{T}_c) \left(\frac{n_{bp}}{M_{\parallel}} \right) \frac{2\pi\hbar^2}{M_{\perp}^{1/3}\omega^*}. \quad (77)$$

Удобно перейти в формуле (77) от трудно измеряемых в эксперименте величин n_{bp} , M_{\parallel} , M_{\perp} к величинам, непосредственно измеряемым экспериментально:

$$\lambda_{ab} = \left[\frac{M_{\parallel}}{16\pi n_{bp}e^2} \right]^{1/2}, \quad \lambda_c = \left[\frac{M_{\perp}}{16\pi n_{bp}e^2} \right]^{1/2}, \quad R_H = \frac{1}{2en_{bp}}, \quad (78)$$

где $\lambda_{ab} = \lambda_{\parallel}$, $\lambda_c = \lambda_{\perp}$ – лондоновские длины проникновения в плоскости слоёв и перпендикулярном направлении соответственно; R_H – постоянная Холла. В выражениях (78) скорость света полагается равной единице: $c = 1$. С использованием соотношений (78), из (77) получим:

$$k_B T_c = \frac{2^{1/3}}{8} F_{3/2}^{-2/3}(\tilde{\omega}/\tilde{T}_c) \frac{\hbar^2}{e^2} \left(\frac{eR_H}{\lambda_{ab}^4 \lambda_c^2} \right)^{1/3}. \quad (79)$$

В формуле (79) величина eR_H измеряется в см^3 , λ_{ab} , λ_c – в см, T_c – в кельвинах.

Учитывая, что в большинстве ВТСП материалов $\tilde{\omega} \approx \tilde{T}_c$ и что функция $F_{3/2}(\tilde{\omega}/\tilde{T}_c)$ мало меняется вблизи $\tilde{\omega} = \tilde{T}_c$, с использованием значения $F_{3/2}(1) = 0.428$ из (79) для T_c получим:

$$T_c \cong 8.7 \left(\frac{eR_H}{\lambda_{ab}^4 \lambda_c^2} \right)^{1/3}. \quad (80)$$

Формула (80) отличается от формулы Александрова [71], [72] лишь численным коэффициентом, равным в [71], [72] 1,64. Как показано в [71], [72], формула (80) практически без исключений правильно описывает связь между параметрами для всех известных ВТСП материалов. Из (77) следует, что ранее обсуждавшееся соотношение Уемуры [73], [74] является частным случаем формулы (80).

Из (79), (80) в изотропном случае следует также известный закон линейной зависимости T_c от обратной величины квадрата лондоновской длины проникновения.

Закон Хомеса. Закон Хомеса утверждает, что для сверхпроводящих материалов выполняется скейлинговое соотношение [75], [76]:

$$\rho_S = C \sigma_{DC}(T_c) T_c, \quad (81)$$

где ρ_S – плотность сверхтекучей компоненты при $T = 0$, $\sigma_{DC}(T_c)$ – проводимость постоянного тока при $T = T_c$, C – постоянная, равная $\approx 35 \text{ см}^{-2}$ для обычных сверхпроводников и для ВТСП материалов для тока, текущего в плоскости слоёв.

Входящая в (81) величина ρ_S связана с плазменной частотой ω_p известным соотношением $\rho_S = \omega_p^2$ [77]. ($\omega_p = \sqrt{4\pi n_S e_S^2 / m_S^*}$, где n_S – концентрация сверхпроводящих носителей тока; m_S^* , e_S – масса и заряд сверхпроводящих носителей тока). Используя это соотношение, соотношение $\sigma_{DC} = e_n^2 n_n \tau / m_n^*$, где n_n – концентрация носителей тока при $T = T_c$, m_n^* , e_n – масса и заряд носителей тока при $T = T_c$, и соотношение $\tau \sim \hbar / T_c$, где τ – минимальное планковское время для рассеяния электронов в критической точке [77], из (81), в предположении $e_S = e_n$, $m_S = m_n$, получим:

$$n_S(0) \cong n_n(T_c). \quad (82)$$

В рассматриваемом нами сценарии бозе-конденсации ТИ-биполяронов закон Хомеса в форме (82) становится почти очевидным. Действительно, при $T = T_c$ ТИ-биполяроны являются стабильными состояниями (их развал происходит при температуре, равной энергии псевдощели, которая намного превышает T_c). Их концентрация при $T = T_c$ равна n_n , и, стало быть, эти биполяроны при $T = T_c$ начинают образовывать конденсат, концентрация которого $n_S(T)$ достигает максимума $n_S(0) = n_n(T_c)$ при $T = 0$ (т.е. когда биполяроны полностью переходят в сконденсированное состояние), что соответствует соотношению (82). Отметим, что в рамках теории БКШ объяснить закон Хомеса представляется практически невозможным.

9. Заключение

В данной статье представлены выводы, вытекающие из последовательного трансляционно-инвариантного рассмотрения ЭФВ. Спаривание электронов при любой константе связи, основанное на таком рассмотрении, приводит к представлению о ТИ-поляронах и ТИ-биполяронах. Будучи бозонами, ТИ-биполярны могут испытывать бозе-конденсацию, приводящую к сверхпроводимости. Перечислим основные результаты, к которым приводит такой подход.

Прежде всего, изложенная теория снимает проблему большой величины эффективной массы биполярона (§4). Как следствие, снимаются формальные ограничения на величину критической температуры перехода. Теория количественно объясняет такие термодинамические свойства ВТСП, как наличие (§4) и величину (§7) скачка теплоёмкости, отсутствующего в теории бозе-конденсации идеального газа. Теория объясняет наличие большого отношения ширины псевдощели к T_c (§7). Теория объясняет небольшую величину корреляционной длины [36]. Теория объясняет наличие в ВТСП материалах щели и псевдощели (§7). Соответственно, изотопический эффект автоматически вытекает из выражения (30), в котором в качестве щели фигурирует фононная частота ω_0 . Вывод о зависимости температуры перехода T_c от отношения $n_{bp}/M_{||}$ (§7) коррелирует с универсальным для всех ВТСП материалов законом Александрова-Уемуры (§8). Показано, что скейлинговый закон Хомеса является естественным следствием изложенной теории (§8). Развитая теория объясняет широкую совокупность явлений в магнитном поле (§6). В частности:

1. Показано, что наличие щели в спектре ТИ-биполяронов делает возможной их конденсацию в магнитном поле.

2. Показано, что существует критическое значение магнитного поля, при превышении которого бозе-конденсация становится невозможной.

3. Полученная температурная зависимость критического магнитного поля находится в хорошем согласии с экспериментом.

Вместе с тем изложенная теория показывает неприменимость: 1. формулы Рутгерса для описания бозе-конденсации ТИ-биполяронов; 2. разложения Гинзбурга-Ландау для описания бозе-конденсации ТИ-биполяронов.

Теория предсказывает такие явления, как:

1. Изотопический эффект для скачка теплоёмкости при переходе из нормальной фазы в сверхпроводящую фазу.

2. Возможность существования в магнитном поле при низких температурах фазового перехода бесконечного рода.

3. Тожественность энергетической щели с фононной частотой.

4. Существование сверхпроводящих ТИ-биполяронов с концентраци-

ей значительно меньшей общей концентрации носителей тока.

Применение развитой теории к 1D и 2D системам приводит к качественно новым результатам, поскольку наличие щели в спектре ТИ-би-поляронов автоматически снимает расходимости при малых импульсах, присущих теории идеального бозе-газа. Важным следствием этого является существование сверхпроводящей фазы в однородных 1D и 2D системах [78].

Библиографический список

1. J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, Theory of Superconductivity // Phys. Rev. 108, 1175 (1957).
2. J.R. Schrieffer, Theory of Superconductivity: Westview Press, Oxford, UK, (1999).
3. T. Moria, K. Ueda, Spin fluctuations and high temperature superconductivity // Adv. Phys. 49, 556 (2000).
4. K.P. Sinha, S.L. Kakani, Fermion local charged boson model and cuprate superconductors // PNAS 72, 153 (2002).
5. A.S. Alexandrov, Theory of Superconductivity from weak to strong coupling: IoP publishing, Bristol, UK, (2003).
6. D. Manske, Theory of Unconventional Superconductors: Springer, Heidelberg, Germany, (2004).
7. K.H. Benneman, J.B. Ketterson (eds.), Superconductivity: Conventional and Unconventional Superconductors 1-2: Springer, New-York, Berlin, (2008).
8. O. Gunnarsson, O. Rösch, Interplay between electron-phonon and coulomb interactions in cuprates // Journ. of Phys. 20, 043201 (2008).
9. S.L. Kakani, S. Kakani, Superconductivity: Anshan, Kent, UK, (2009).
10. N.M. Plakida, High Temperature Cuprate Superconductors: Experiment, Theory and Applications: Springer, Heidelberg, Germany, (2010).
11. L.N. Cooper, D. Feldman (eds.), BCS: 50 years: World Sci. Publ. Co, Singapore, (2011).
12. T. Tohyama, Recent progress in physics of high-temperature superconductors // Jap. J. Appl. Phys. 51, 010004 (2012).

13. I. Askerzade, *Unconventional Superconductors: anisotropy and multiband effects*: Springer, Berlin, Germany, (2012).
14. J. Bardeen, Developments of concepts in superconductivity // *Physics Today* 16, 19 (1963).
15. L.V. Keldysh, A.N. Kozlov, Collective Properties of Excitons in Semiconductors // *Sov. Phys. JETP* 27, 521 (1968); <http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/e/index/e/27/3/p521?a=list>
16. D.M. Eagles, Possible Pairing without Superconductivity at Low Carrier Concentrations in Bulk and Thin-Film Superconducting Semiconductors // *Phys. Rev.* 186, 456 (1969).
17. P. Nozières, S. Schmitt-Rink, Propagation of Second sound in a superfluid Fermi gas in the unitary limit // *J. Low Temp. Phys* 59, 195 (1985).
18. V.M. Loktev, Mechanisms of high-temperature superconductivity of Copper oxides // *Fizika nizkih temperatur* 22, 3 (1996).
19. M. Randeria, Precursor Pairing Correlations and Pseudogaps // *Varena Lectures*, arXiv:cond-mat/9710223 [cond-mat.str-el], (1997).
20. Y.J. Uemura, Bose-Einstein to BCS crossover picture for high-T_c cuprates // *Physica C: Superconductivity* 282-287(1), 194 (1997).
21. M. Drechsler, W. Zwerger, Crossover from BCS-superconductivity to Bose-condensation // *Ann. Phys.* 1, 15 (1992).
22. A. Griffin, D.W. Snoke, S. Stringari (eds.), *Bose-Einstein Condensation*: Cambridge U.P., New-York, (1996).
23. G.M. Eliashberg, Interactions between Electrons and Lattice Vibrations in a Superconductor // *Sov. Phys. JETP* 11, 696 (1960).
24. F. Marsiglio, J.P. Carbotte, Gap function and density of states in the strong-coupling limit for an electron-boson system // *Phys. Rev. B* 43, 5355 (1991).
25. R. Micnas, J. Ranninger, S. Robaszkiewicz, Superconductivity in narrow-band systems with local nonretarded attractive interactions // *Rev. Mod. Phys.* 62, 113 (1990).
26. W. Zwerger (ed.), *The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas Lecture Notes in Physics*: Springer, Berlin, Heidelberg, (2012).
27. I. Bloch, J. Dalibard, W. Zwerger, Many-body physics with ultracold gases // *Rev. Mod. Phys.* 80, 885 (2008).

28. S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, Theory of ultracold atomic Fermi gases // *Rev. Mod. Phys.* 80, 1215 (2008).
29. Q. Chen, J. Stajic, S. Tan, K. Levin, BCS-BEC crossover: From high temperature superconductors to ultracold superfluids // *Phys. Rep.* 412, 1 (2005).
30. W. Ketterle, M.W. Zwierlein, Making, probing and understanding ultracold Fermi gases in *Ultra-cold Fermi gases*, M. Inguscio, W. Ketterle, C. Salomon, eds., p.95 IOS Press, Amsterdam, (2007).
31. P. Pieri, G.C. Strinati, Strong-coupling limit in the evolution from BCS superconductivity to Bose-Einstein condensation // *Phys. Rev. B* 61, 15370 (2000).
32. B. Gerlach, H. Löwen, Analytical properties of polaron systems or: Do polaronic phase transitions exist or not? // *Rev. Mod. Phys.* 63, 63 (1991).
33. В.Д. Лахно, Трансляционно-инвариантная теория полярона (биполярона) и проблема квантования в окрестности классического решения. // *ЖЭТФ*, 143, №6, 1033-1038 (2013).
34. L.P. Gor'kov, Microscopic derivation of the Ginzburg-Landau equations in the theory of superconductivity // *Sov. Phys. JETP* 9, 1364 (1959).
35. В.Д. Лахно, Энергия и критическое значение параметра ионной связи трёхмерного биполярона большого радиуса // *ЖЭТФ*, 137, №5, 926-931 (2010).
36. V.D. Lakhno, On the cutoff parameter in the translation-invariant theory of the strong coupling polaron. (response to comments [8] on the paper V.D. Lakhno) // *Solid State Communications*, 152, №19, 1855-1856 (2012).
37. Н.И.Каширина , В.Д.Лахно , А.В.Тулуб, Теорема вириала и проблема основного состояния в теории полярона // *ЖЭТФ*, 141, №5, 994-996 (2012).
38. В.Д. Лахно, Анзац Пекара и проблема сильной связи в теории полярона // *УФН*, 185, 317-331 (2015).
39. В.Д.Лахно, Усиление спиновых волн в магнитных кристаллах // *Успехи физических наук* 166, №7, 717-742 (1996).
40. A.V. Tulub, Slow Electrons in Polar Crystals // *Sov. Phys. JETP* 14, 1301 (1962); <http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/e/index/r/41/6/p1828?a=list>

41. W. Heisenberg, Die selbstenergie des elektrons // Z. Phys. 65, 4 (1930).
42. L. Rosenfeld, Über eine mögliche Fassung des Diracschen Programms zur Quantenelektrodynamik und deren formalen Zusammenhang mit der Heisenberg-Paulischen Theorie // Z. Phys. 76, 729 (1932).
43. T.D. Lee, F. Low, D. Pines, The motion of electrons in a polar crystal // Phys. Rev. 90, 297 (1953).
44. S.V. Tyablikov, Methods in the Quantum Theory of Magnetism: Plenum Press, New York, (1967).
45. S.J. Miyake, Bound Polaron in the Strong-coupling Regime in *Polarons and Applications*, V.D. Lakhno, ed., Wiley, Leeds, 219 (1994).
46. И.Б.Левинсон, Э.И.Рашба, Пороговые явления и связанные состояния в поляронной проблеме // УФН, 111, 683-718, (1973)
47. M. Porsch, J. Röseler, Recoil Effects in the Polaron Problem // Phys. Status Solidi B 23, 365 (1967).
48. A.S. Alexandrov, N. Mott, Polarons & Bipolarons: World Sci. Pub. Co, Singapore (1996).
49. А.С Александров, А.Б.Кребс, Полярны в высокотемпературных сверхпроводниках // УФН 162, 1 (1992).
50. R.A. Ogg Jr., Superconductivity in solid metal-ammonia solutions // Phys. Rev. 70, 93 (1946).
51. В.Л.Винецкий, Э.А.Пашицкий, Сверхтекучесть заряженного бозе-газа и биполяронный механизм сверхпроводимости // Украинский физич.журн. 20, 338 (1975).
52. Э.А.Пашицкий, В.Л.Винецкий, Плазмонный и биполяронный механизмы высокотемпературной сверхпроводимости // Письма в ЖЭТФ, Приложения, 46, 124 (1987).
53. D. Emin, Formation, motion, and high-temperature superconductivity of large bipolarons // Phys. Rev. Lett. 62, 1544 (1989).
54. В.Л.Винецкий, Р.И.Каширина, Э.А.Пашицкий, Биполяронные состояния в ионных кристаллах и проблема высокотемпературной сверхпроводимости // Украинский физич.журн. 37, 77 (1992).
55. D. Emin, In-plane conductivity of a layered large-bipolaron liquid // Phyl. Mag. 95, 918 (2015).

56. V.V. Schmidt, The Physics of Superconductors, P. Muller, A.V. Ustinov eds.: Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, (1997).
57. A.B. Pippard, Field variation of the superconducting penetration depth // Proc. Roy. Soc. (London) A203, 210 (1950).
58. M.R. Schafroth, Superconductivity of a Charged Ideal Bose Gas // Phys. Rev. 100, 463 (1955).
59. Л.П.Горьков, Н.Б.Копнин, Высокотемпературные сверхпроводники с точки зрения эксперимента // УФН 156, 117 (1988).
60. A.J. Bennet, Theory of the anisotropic energy gap in super conducting lead // Phys. Rev. 140, A1902 (1965).
61. R. He, M. Hashimoto, H. Karapetyan et al, From a Single-Band Metal to a High-Temperature Superconductor via Two Thermal Phase Transitions // Science 331, 1579 (2011).
62. N. Overend, M.A. Howson, I.D. Lawrie, 3D X-Y scaling of the specific heat of $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ single crystals // Phys. Rev. Lett. 72, 3238 (1994).
63. A. Marouchkine, Room-Temperature Superconductivity: Cambridge Int. Sci. Publ., Cambridge, (2004).
64. W. Buckel, R. Kleiner, Superconductivity: Fundamentals and Applications: Wiley-VCH, Weinheim, 2-nd Edition, (2004).
65. J. Edstam, H.K. Olsson, London penetration depth of YBCO in the frequency range 80-700 GHz // Physica B 194-196, Part 2, 1589-1590 (1994).
66. C. Panagopoulos, J.R. Cooper, T. Xiang, Systematic behavior of the in-plane penetration depth in d-wave cuprates // Phys. Rev. B 57, 13422 (1998).
67. T. Pereg-Barnea, P.J. Turner, R. Harris, G.K. Mullins, J.S. Bobowski, M. Raudsepp, Ruixing Liang, D.A. Bonn, W.N. Hardy, Absolute values of the London penetration depth in $YBa_2Cu_3O_6 + y$ measured by zero field ESR spectroscopy on Gd doped single crystals // Phys. Rev. B 69, 184513 (2004).
68. D.A. Bonn, Ruixing Liang, T.M. Riseman, D.J. Baar, D.C. Morgan, Kuan Zhang, P. Dosanjh, T.L. Duty, A. MacFarlane, G.D. Morris, J.H. Brewer, W.N. Hardy, C. Kallin, A.J. Berlinsky, Microwave determination of the quasiparticle scattering time in $YBa_2Cu_3O_{6.95}$ // Phys. Rev. B 47, 11314 (1993).

69. O. Madelung, Festkörpertheorie I, II: Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1972).
70. Dong-Ho Wu, S. Sridhar, Pinning forces and lower critical fields in $YBa_2Cu_3O_y$ crystals: Temperature dependence and anisotropy // Phys. Rev. Lett. 65, 2074 (1990).
71. A.S. Alexandrov, Comment on “Experimental and Theoretical Constraints of Bipolaronic Superconductivity in High T_c Materials: An Impossibility” // Phys. Rev. Lett. 82, 2620 (1999).
72. A.S. Alexandrov, V.V. Kabanov, Parameter-free expression for superconducting T_c in cuprates // Phys. Rev. B 59, 13628 (1999).
73. Y.J. Uemura, G.M. Luke, B.J. Sternlieb, J.H. Brewer, J.F. Carolan, W.N. Hardy, R. Kadono, J.R. Kempton, R.F. Kiefl, S.R. Kreitzman, P. Mulhern, T.M. Riseman, D.Ll. Williams, B.X. Yang, S. Uchida, H. Takagi, J. Gopalakrishnan, A.W. Sleight, M.A. Subramanian, C.L. Chien, M.Z. Cieplak, Gang Xiao, V.Y. Lee, B.W. Statt, C.E. Stronach, W.J. Kossler, X.H. Yu, Universal correlations between T_c and ns/m (carrier density over effective mass) in high- T_c cuprate superconductors. // Phys. Rev. Lett. 62, 2317 (1989).
74. Y.J. Uemura, L.P. Le, G.M. Luke, B.J. Sternlieb, W.D. Wu, J.H. Brewer, T.M. Riseman, C.L. Seaman, M.B. Maple, M. Ishikawa, D.G. Hinks, J.D. Jorgensen, G. Saito, H. Yamochi, Basic similarities among cuprate, bismuthate, organic, Chevrel-phase, and heavy-fermion superconductors shown by penetration-depth measurements // Phys. Rev. Lett. 66, 2665 (1991).
75. C.C. Homes, S.V. Dordevic, M. Strongin, D.A. Bonn, Ruixing Liang, W.N. Hardy, Seiki Komiya, Yoichi Ando, G. Yu, N. Kaneko, X. Zhao, M. Greven, D.N. Basov, T. Timusk, A universal scaling relation in high-temperature superconductors // Nature 430, 539 (2004).
76. J. Zaanen, Superconductivity: why the temperature is high // Nature 430, 512 (2004).
77. J. Erdmenger, P. Kerner, S. Müller, Towards a holographic realization of Homes’ law // J. High Energy Phys. 10, 21 (2012).
78. V.D. Lakhno, A Translation invariant bipolaron in the Holstein model and superconductivity // SpringerPlus 5:1277 (2016); DOI 10, 1186/s40064-016-2975-x.

Оглавление

1. Введение	3
2. Гамильтониан Пекара-Фрёлиха. Канонические преобразования	6
3. Энергетический спектр ТИ-биполярона	10
4. Статистическая термодинамика газа ТИ-биполяронов низкой плотности в отсутствие магнитного поля	12
5. Токовые состояния ТИ-биполяронного газа	18
6. Термодинамические свойства ТИ-биполяронного газа в магнитном поле	21
7. Сравнение с экспериментом	27
8. Скейлинговые соотношения	33
9. Заключение	35
Библиографический список	36