



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 195 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А.,
Остапенко В.В., Тишкин В.Ф.

Исследование точности
разрывного метода
Галеркина при расчете
решений с ударными
волнами

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Исследование точности разрывного метода Галеркина при расчете решений с ударными волнами / М.Е.Ладонкина [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 195. 20 с. doi:[10.20948/prepr-2018-195](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-195)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-195>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова,
В.В. Остапенко, В.Ф. Тишкин

Исследование точности
разрывного метода Галеркина
при расчете решений
с ударными волнами

Москва — 2018

Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф.

Исследование точности разрывного метода Галеркина при расчете решений с ударными волнами

Изучена точность разрывного метода Галеркина повышенного порядка точности на гладких решениях при расчете по нему разрывных решений квазилинейной гиперболической системы законов сохранения с ударными волнами, распространяющимися с переменной скоростью. В качестве конкретного примера рассмотрена аппроксимация системы законов сохранения теории мелкой воды. На примере этой системы показано, что разрывный метод Галеркина, несмотря на высокую точность на гладких решениях и при локализации ударных волн, снижает свой порядок сходимости до первого порядка в областях влияния ударных волн.

Ключевые слова: гиперболическая система законов сохранения, разрывный метод Галеркина, уравнения теории мелкой воды, порядок интегральной и локальной сходимости.

Marina Eugenievna Ladonkina, Olga Alexandrovna Nekliudova, Vladimir Victorovich Ostapenko, Vladimir Fedorovich Tishkin

Research on the accuracy of the discontinuous Galerkin method in the calculation of solutions with shock waves

The accuracy of the discontinuous Galerkin method of higher-order accuracy on smooth solutions is studied. Calculations were made for discontinuous solutions for a quasilinear hyperbolic system of conservation laws with shock waves propagating with a variable speed. As an example an approximation of the system of conservation laws of the theory of shallow water equations was chosen. It was shown that the discontinuous Galerkin method, in spite of high accuracy on smooth solutions and localization of shock waves, reduces its order of convergence to the first order in the areas of influence of shock waves.

Key words: hyperbolic system of conservation laws, discontinuous Galerkin method, equations of shallow water theory, order of integral and local convergence.

Введение

В классической работе [1], широко известной в связи со схемой распада разрыва, было введено понятие монотонности двухслойной по времени схемы и показано, что среди линейных разностных схем нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации. Развитие теории численных методов сквозного счета для гиперболических систем законов сохранения в значительной степени было направлено на преодоление этого “запрета Годунова”. Были разработаны различные классы как разностных, так и проекционных схем, в которых повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонность (при аппроксимации линейной системы и скалярного закона сохранения) достигались за счет нелинейной коррекции потоков, приводящей к нелинейности этих схем даже при аппроксимации линейного уравнения переноса. Перечислим основные классы таких схем, которые будем сокращенно называть NFC (Nonlinear Flux Correction) схемами: MUSCL-схемы [2], TVD-схемы [3], NED-схемы [4], WENO-схемы [5], CABARET-схемы [6], DG-схемы [7] – схемы разрывного метода Галеркина. Основное достоинство этих схем заключается в том, что они с высокой точностью локализуют ударные волны при отсутствии существенных нефизических осцилляций.

При построении NFC-схем повышенный порядок аппроксимации понимается в смысле тейлоровского разложения на гладких решениях, что не гарантирует повышения точности при расчёте разрывных решений. Несмотря на это, в течение длительного времени преобладала ошибочная точка зрения, что эти схемы должны сохранять повышенную точность (соответствующую порядку их классической аппроксимации) во всех гладких частях рассчитываемых обобщенных решений. Способствовало распространению этого ошибочного мнения то, что в подавляющем числе работ тестирование схем сквозного счета в основном проводится на различных вариантах задачи о распаде разрыва, точное решение которой представляет собой набор простых волн (ударных волн и центрированных волн разрежения), соединённых областями постоянных течений. Такое тестирование позволяет эффективно оценить разрешимость схемой сильных и слабых разрывов, а именно: ширину их размазывания и наличие или отсутствие осцилляций на фронтах ударных волн. Однако оно не может дать информации о реальной точности схемы в областях влияния ударных волн, поскольку точное решение за их фронтами является постоянным. Кроме того, эту точность нельзя оценить при расчёте ударных волн, возникающих при решении скалярного закона сохранения, поскольку в этом случае область влияния устойчивой ударной волны совпадает с линией её фронта.

Для определения точности схемы в областях влияния ударных волн необходимо рассчитывать разрывные решения квазилинейных систем законов сохранения с ударными волнами, распространяющимися с переменной скоростью, за фронтами которых формируется непостоянное решение. Такое решение для систем законов сохранения, как правило, не описывается точными формулами, и для определения скорости сходимости к нему разностного

решения необходимо проведение серии из (как минимум) трёх расчётов на последовательности сжимающихся сеток, что позволяет использовать метод Эйткена для приближенного определения порядка сходимости. В работах [8-11] указанным способом было показано, что различные типы разностных NFC-схем имеют не более чем первый порядок локальной сходимости в областях влияния ударных волн и, тем самым, по существу схемами повышенной точности не являются. Такое снижение порядков сходимости свидетельствует о том, что в этих схемах происходит потеря точности при передаче условий Гюгонио через размазанные фронты ударных волн.

Для непосредственной оценки точности передачи схемой условий Гюгонио необходимо исследовать сходимость интегралов от разностного решения по областям, содержащим фронт ударной волны. Несмотря на то что в схемах сквозного счёта в нескольких узлах в окрестности фронта ударной волны отсутствует локальная сходимость разностного решения к точному и поэтому порядок сходимости разностного решения в сильной норме, содержащей линию разрыва, в принципе не может быть выше первого, для исследования схем повышенного порядка точности интегралы от разностного решения должны быть вычислены как минимум со вторым порядком точности.

Поэтому в [12, 13] для TVD-схемы формально второго порядка, а в [14] – для трех различных WENO-схем формально пятого порядка, точность передачи схемой условий Гюгонио через фронт ударной волны оценивается путём определения порядка сходимости интеграла от разностного решения (а не от его модуля, как в норме L_1), что соответствует сходимости в соответствующей негативной норме. В [12-14] показано, что в TVD- и WENO-схемах такой порядок интегральной сходимости снижается до первого на интервалах интегрирования, одна из границ которых находится в области влияния ударной волны. Одна из основных причин такого снижения точности заключается в том, что минимаксная коррекция потоков, характерная для этих схем, приводит к снижению гладкости разностных потоков, что, в свою очередь, приводит к снижению порядка аппроксимации ε -условий Гюгонио на фронтах ударных волн [15]. В то же время, как показано в [12, 13], классические немонотонные схемы повышенной точности [11, 16], имеющие аналитические функции численных потоков и, как следствие, с повышенной точностью аппроксимирующие ε -условия Гюгонио, сохраняют повышенный порядок сходимости в негативной норме при интегрировании по областям, содержащим сильные разрывы. В результате эти немонотонные схемы, в отличие от NFC-схем, сохраняют повышенный порядок сходимости в областях влияния ударных волн, несмотря на заметные схемные осцилляции на их фронтах.

В настоящее время для решения широкого класса прикладных задач математической физики часто используется метод Галеркина с разрывными базисными функциями (PMГ) или Discontinuous Galerkin Method (DGM). Данный метод обладает рядом достоинств, присущих как конечно-элементным, так и конечно-разностным аппроксимациям. В частности, он обеспечивает

заданный порядок точности на гладких решениях и может использоваться для сеток произвольной структуры. Это особенно актуально для решения с повышенной точностью сложных разномасштабных физических задач. Кроме того, разрывный метод Галеркина теоретически обоснован. В работах [17,18] подробно исследовано влияние различных лимитеров на точность решения, в случае, пока решение остается гладким.

В данной работе указанными выше методами исследуется реальная точность разрывного метода Галеркина при расчете разрывных решений системы уравнений теории мелкой воды.

Метод оценки интегральной точности разностного решения

Рассмотрим гиперболическую систему квазилинейных законов сохранения

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{u}(x,t)$ – искомая, а $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ – заданная гладкая вектор-функция, содержащая m компонент. Поставим для системы (2.1) задачу Коши с периодическими начальными данными

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{v}(x), \quad \mathbf{v}(x) = \mathbf{v}(x + X), \quad (2.2)$$

где X – заданное положительное число. Предположим, что задача Коши (2.1), (2.2) имеет единственное обобщённое решение $\mathbf{u}(x,t)$, ограниченное при $t > 0$. Пусть $\mathbf{U}^n(x) = \mathbf{U}(x, t_n)$ – численное решение этой задачи, получаемое по явной схеме, заданной на равномерной сетке $t_n = n\tau$, где τ – постоянный шаг сетки по времени.

Зафиксируем временной шаг τ равномерной базисной сетки и рассмотрим последовательность сеточных решений $\mathbf{U}_k^n(x) = \mathbf{U}(x, t_n^k)$ задачи Коши (2.1), (2.2), получаемых по численной схеме на последовательности сжимающихся сеток

$$\{t_n^k\}: t_n^k = n\tau_k, \quad n \geq 0; \quad \tau_k = \frac{\tau}{3^k}, \quad k \geq 0.$$

Выберем момент времени $T = m\tau = 3^k m\tau_k > 0$ и интервал $[a,b]$, для которых зададим интегралы

$$\mathbf{u}(T, a, b) = \int_a^b \mathbf{u}(x, T) dx, \quad \mathbf{U}_k(T, a, b) = \int_a^b \mathbf{U}_k(x, T) dx,$$

где $\mathbf{U}_k(x, T) = \mathbf{U}_k^{3^k m}$. Будем говорить, что на интервале $[a,b]$ последовательность разностных решений \mathbf{U}_k^n с порядком ρ сходится в интегральной норме к точному решению $\mathbf{u}(x,t)$, если с точностью до $o(\tau_k^\rho)$ выполнено условие

$$\delta \mathbf{U}_k(T, a, b) = \mathbf{U}_k(T, a, b) - \mathbf{u}(T, a, b) = \mathbf{C} \tau_k^\rho, \quad (2.3)$$

где вектор-функция \mathbf{C} не зависит от τ_k .

Для приближенного определения порядка интегральной сходимости ρ , в случае, когда точное разрывное решение $\mathbf{u}(x, t)$ заранее неизвестно, достаточно провести три расчета с достаточно малыми шагами $\tau_0 = \tau$, $\tau_1 = \tau/3$, $\tau_2 = \tau/9$ и воспользоваться правилом Рунге. Вычитая из формулы (2.3) эту же формулу, в которой индекс k заменен на $k+1$, получаем

$$\delta \mathbf{U}_{k,k+1}(T, a, b) = \mathbf{U}_k(T, a, b) - \mathbf{U}_{k+1}(T, a, b) = \mathbf{C}(\tau_k^\rho - \tau_{k+1}^\rho). \quad (2.4)$$

Беря отношение модулей равенств (2.4) при $k=1$ и $k=0$, находим

$$\frac{|\delta \mathbf{U}_{1,2}(T, a, b)|}{|\delta \mathbf{U}_{0,1}(T, a, b)|} = \frac{\tau_1^\rho - \tau_2^\rho}{\tau_0^\rho - \tau_1^\rho} = \frac{(\tau/3)^\rho - (\tau/9)^\rho}{\tau^\rho - (\tau/3)^\rho} = \left(\frac{1}{3}\right)^\rho.$$

Отсюда получаем искомую формулу

$$\rho = \rho(T, a, b) = \log_{1/3} \frac{|\delta \mathbf{U}_{1,2}(T, a, b)|}{|\delta \mathbf{U}_{0,1}(T, a, b)|}. \quad (2.5)$$

Методы оценки локальной точности разностного решения

Если предположить, что последовательность численных решений $\mathbf{U}_k(x, T)$ с порядком α сходится в некоторых точках x к точному решению $\mathbf{u}(x, T)$, то порядки такой локальной сходимости, определяемые по формуле, аналогичной (2.5), сильно осциллируют в областях влияния ударных волн [11-13], что не позволяет эффективно оценить их реальные значения. Это означает, что в схемах сквозного счета повышенной точности классическая локальная сходимость отсутствует не только в окрестностях ударных волн, но также и в значительной части их областей влияния. Поэтому локальную точность схемы при расчете разрывных решений будем определять путем вычисления порядков сходимости осредненного разностного решения. Будем рассматривать два вида осреднения.

При первом варианте осредненное разностное решение $\mathbf{U}_k^i(x, T, \varepsilon)$ будем определять соответственно работе [19] по рекуррентной формуле

$$\mathbf{U}_k^i(x, T, \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \mathbf{U}_k^{i-1}(\xi, T, \varepsilon) d\xi, \quad \mathbf{U}_k^0(x, T, \varepsilon) = \mathbf{U}_k(x, T), \quad i = \overline{1, l}, \quad (3.1)$$

где l и ε – заданные параметры осреднения.

Предположим, что в некоторых точках x осредненное разностное решение $U_k^i(x, T, \varepsilon)$ с порядком β сходится к осредненному точному решению $u(x, T, \varepsilon)$, определяемому по формуле, аналогичной (3.1):

$$u^i(x, T, \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} u^{i-1}(\xi, T, \varepsilon) d\xi, \quad u^0(x, T, \varepsilon) = u(x, T), \quad i = \overline{1, l},$$

тогда в таких точках x с точностью до $o(\tau_k^\beta)$ выполнено условие

$$\delta U_k^l(x, T, \varepsilon) = U_k^l(x, T, \varepsilon) - u^l(x, T, \varepsilon) = \bar{c} \tau_k^\beta, \quad (3.2)$$

где вектор-функция \bar{c} не зависит от τ_k .

При втором варианте будем определять осредненное разностное решение $U_k^\omega(x, T, r)$ с ядром осреднения $\omega_r(y)$.

$$U_k^\omega(x, T, r) = \int_{-\infty}^{\infty} U_k(\xi, T) \omega_r(x - \xi) d\xi, \quad (3.3)$$

$$\text{где } \omega_r(y) = r^{-1} \varphi(yr^{-1}), \quad \varphi(z) = \begin{cases} Ce^{(z^2-1)^{-1}}, & |z| < 1, \\ 0, & |z| \geq 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

– ядро осреднения радиуса r .

Кроме того, будем использовать ядро осреднения полиномиального типа

$$\omega_r(y) = r^{-1} \varphi(yr^{-1}), \quad \varphi(z) = \begin{cases} A|z|^3 + Bz^2 + C|z| + D, & \text{при } |z| < 1, \\ 0, & \text{при } |z| \geq 1, \end{cases} \quad (3.5)$$

где коэффициенты A, B, C, D выбираются из условий

$$\varphi(0) = \text{const}, \quad \varphi(1) = \varphi(-1) = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx}(0) = 0.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям предположим, что в некоторых точках x осредненное разностное решение $U_k^\omega(x, T, r)$ с порядком β сходится к осредненному точному решению $u(x, T, r)$, определяемому по формуле, аналогичной (3.3):

$$u^\omega(x, T, r) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, T) \omega_r(x - \xi) d\xi.$$

Обозначим через $\delta\mathbf{U}_k^\gamma(x, T, \sigma)$ разность между осредненными по определенному правилу численным и точным решениями

$$\delta\mathbf{U}_k^\gamma(x, T, \sigma) = \mathbf{U}_k^\gamma(x, T, \sigma) - \mathbf{u}^\gamma(x, T), \quad (3.6)$$

где параметром γ обозначен способ усреднения решения ($\gamma = l$ соответствует первому способу усреднения (3.1), $\gamma = \omega$ – второму способу усреднения с использованием ядра усреднения (3.3)).

Тогда для приближенного определения порядка локальной сходимости β , по аналогии с (2.5), получаем следующую формулу

$$\beta = \beta(x, T, \sigma) = \log_{1/3} \frac{|\delta\mathbf{U}_{1,2}^\gamma(x, T, \sigma)|}{|\delta\mathbf{U}_{0,1}^\gamma(x, T, \sigma)|}, \quad (3.7)$$

в которой

$$\delta\mathbf{U}_{k,k+1}^\gamma(x, T, \sigma) = \mathbf{U}_k^\gamma(x, T, \sigma) - \mathbf{U}_{k+1}^\gamma(x, T, \sigma), \quad k = 0, 1. \quad (3.8)$$

Из формулы (3.8) при $k = 0$ с учетом формулы (3.2) или (3.6) имеем

$$\delta\mathbf{U}_{0,1}^\gamma(x, T, \sigma) = \mathbf{c}(\tau_0^\beta - \tau_1^\beta) = \mathbf{c}\tau^\beta(1 - (1/3)^\beta), \quad (3.9)$$

где $\tau = \tau_0$.

Отсюда с учетом формул (3.2), (3.6) находим

$$\mathbf{c} = \frac{\delta\mathbf{U}_{0,1}^\gamma(x, T, \sigma)}{\tau^\beta(1 - (1/3)^\beta)} = \frac{\delta\mathbf{U}_{0,1}^\gamma(x, T, \sigma)}{\tau^\beta} \left(1 - \frac{|\delta\mathbf{U}_{1,2}^\gamma(x, T, \sigma)|}{|\delta\mathbf{U}_{0,1}^\gamma(x, T, \sigma)|}\right)^{-1}. \quad (3.10)$$

Подставляя это значение вектор-функции \mathbf{c} в формулу (3.2) и (3.6), в которой $k = 0$, получаем следующее приближенное выражение

$$\delta\mathbf{U}^\gamma(x, T, \sigma) = \delta\mathbf{U}_0^\gamma(x, T, \sigma) = \delta\mathbf{U}_{0,1}^\gamma(x, T, \sigma) \left(1 - \frac{|\delta\mathbf{U}_{1,2}^\gamma(x, T, \sigma)|}{|\delta\mathbf{U}_{0,1}^\gamma(x, T, \sigma)|}\right)^{-1} \quad (3.11)$$

для вектора локальных дисбалансов осредненного разностного решения на базисной сетке с временным шагом $\tau = \tau_0$.

А также приведем формулы относительных локальных дисбалансов

$$\Delta V^\gamma(x_i^c, T, \sigma) = \frac{|\delta\mathbf{U}^\gamma(x_i^c, T, \sigma)|}{|\mathbf{U}^\gamma(x_i^c, T, \sigma)|} \quad (3.12)$$

вычисления модуля осредненного точного решения $\mathbf{u}^\gamma(x_i^c, T, \sigma)$ осредненных базисных функций h и q и относительных локальных дисбалансов

$$\Delta w_i^\gamma(x_i^c, T, \sigma) = \frac{|\delta w_i^\gamma(x_i^c, T, \sigma)|}{|w_i^\gamma(x_i^c, T, \sigma)|}, \quad i=1,2, \quad (3.13)$$

вычисления модуля компонент осредненного вектора инвариантов $\mathbf{w}^\gamma(x_i^c, T, \sigma)$ системы (2.1).

Описание разрывного метода Галеркина

Для применения разрывного метода Галеркина на равномерной прямоугольной сетке $x_i = i\Delta$, $t_n = n\tau$; $\Delta, \tau = const$, зададим следующую систему базисных функций

$$\varphi_{i,k}(x) = \begin{cases} \phi_k(x), & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}], \end{cases}$$

где $\phi_k(x) = ((x - x_i^c) / \Delta)^k$, $x_i^c = (x_i + x_{i+1}) / 2$. Приближенное решение системы уравнений (2.1) будем искать в виде полинома степени p

$$\mathbf{U}_i(x, t) = \sum_{k=0}^p \mathbf{U}_{ik} \phi_k(x) \quad (4.1)$$

с зависящими от времени коэффициентами $\mathbf{U}_{ik} = \mathbf{U}_{ik}(t)$.

Умножая систему (2.1) на базисную функцию $\varphi_{i,l}(x)$ и выполняя интегрирование по x на отрезке $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, получаем следующую формулу

$$\int_{I_i} \mathbf{u}_t \phi_l dx - \int_{I_i} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \phi_l' dx + \mathbf{f}(\mathbf{u}) \phi_l \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = 0, \quad (4.2)$$

Заменяя в первых двух слагаемых уравнения (4.2) функцию $\mathbf{u}(x, t)$ на функцию $\mathbf{U}_i(x, t)$, а в третьем слагаемом – дифференциальные потоки $\mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t))$, где $j = i, i+1$, на численные потоки $\mathbf{F}_j = \Phi(\mathbf{U}_{j-1}(x_j^-), \mathbf{U}_j(x_j^+))$, в которых $x_j^\pm = x_j \pm 0$, получаем формулировку разрывного метода Галеркина

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{I_i} \mathbf{U}_i \phi_l dx - \int_{I_i} \mathbf{f}(\mathbf{U}_i) \phi_l' dx + \mathbf{F}_{i+1} \phi_l(x_{i+1}^-) - \mathbf{F}_i \phi_l(x_i^+) = 0. \quad (4.3)$$

В настоящей работе применяются численные потоки Русанова–Лакса–Фридрихса [20,21], в которых функция $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ определяется по формуле

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}) - A(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{y} - \mathbf{x})), \quad A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_m (|\lambda_m(\mathbf{x})|, |\lambda_m(\mathbf{y})|),$$

где λ_m – собственные значения матрицы Якоби $\mathbf{f}_{\mathbf{u}}$ системы (2.1).

Из уравнения (4.3) с учетом формулы (4.1) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{U}_{ki}}{dt} = \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{R}_i, \quad \mathbf{R}_i = \int_{I_i} \mathbf{f}(\mathbf{U}_i) \phi_l' dx - \mathbf{F}_{i+1} \phi_l(x_{i+1}^-) + \mathbf{F}_i \phi_l(x_i^+), \quad (4.4)$$

для вычисления коэффициентов \mathbf{U}_{ki} , где \mathbf{A}_i^{-1} – матрица, обратная к матрице $\mathbf{A}_i = (a_{kl}^i)$, коэффициенты которой определяются по формуле $a_{kl}^i = \int_{I_i} \phi_k(x) \phi_l(x) dx$. Система

(4.4) решается явным методом Рунге–Кутты третьего порядка, в котором временной шаг τ выбирается из условия устойчивости Куранта

$$\tau = \frac{z\Delta}{\max_{m,j,n} |\lambda_m(\mathbf{U}_{j+1/2}^n)|},$$

где $z \in (0,1)$ – коэффициент запаса.

В приводимых далее расчетах используются полиномы (4.1) первого порядка, для которых $p = 1$.

Для обеспечения монотонности численного решения, полученного данным методом, необходимо вводить ограничители потоков, в особенности в том случае, если решение содержит сильные разрывы. В настоящей работе мы применяем ограничитель Кокбурна [7,17,18], который широко используется в прикладных многомерных расчетах, проводимых на сетках произвольной структуры. В случае когда решение (4.1) ищется в виде линейных по x функций

$$\mathbf{U}_i^n(x) = \mathbf{U}_{i0}^n + \mathbf{U}_{i1}^n \frac{x - x_i^c}{\Delta},$$

действие этого ограничителя приводит к тому, что каждая компонента U_{i1}^n векторного коэффициента \mathbf{U}_{i1}^n в формуле (4.4) заменяются на величину

$$V_{i1}^n = M \left[U_{i1}^n, \alpha(U_{i+1,0}^n - U_{i0}^n), \alpha(U_{i0}^n - U_{i-1,0}^n) \right], \quad (4.5)$$

где $U_{j_0}^n$ – соответствующие компоненты векторов $U_{j_0}^n$, $\alpha \in [1, 2]$ – эвристический параметр, выбираемый в результате тестовых расчетов, M – классический оператор $\min \text{mod}$, действие которого определяется по формуле

$$M[u_1, u_2, u_3] = s \min(|u_1|, |u_2|, |u_3|),$$

где $s = \text{sign}(u_i)$ при условии, что все числа u_i имеют одинаковый знак и $s = 0$, если это условие не выполнено.

Задача Коши для уравнений теории мелкой воды

В качестве конкретной гиперболической системы (2.1) выберем систему уравнений первого приближения теории мелкой воды [22], для которой

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} q \\ q^2/h + g h^2/2 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

где h , q и $u = q/h$ – глубина, расход и горизонтальная скорость жидкости, g – ускорение свободного падения. Рассмотрим для системы (2.1), (5.1) задачу Коши с периодическими начальными данными

$$u(x, 0) = a \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (5.2)$$

$$h(x, 0) = \frac{(u(x, 0) + b)^2}{4g} = \frac{1}{4g} \left(a \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right) + b \right)^2, \quad (5.3)$$

которым соответствуют следующие начальные значения инвариантов

$$w_1(x, 0) = -b = \text{const}, \quad w_2(x, 0) = 2u + b,$$

где $w_1 = u - 2c$, $w_2 = u + 2c$, $c = \sqrt{gh}$, $X = 10$, $a = 2$, $b = 10$.

Точное решение задачи (5.1)-(5.3) моделируется численным расчётом по DG-методу [7] на мелкой сетке с шагом $\Delta = 0.001$. Профили глубины, получаемые в этих расчётах на отрезке $[0, X]$ длины периода, показаны сплошными линиями на рис. 1а и 1б на моменты времени $t_1 = 0.5$ и $t_2 = 1$.

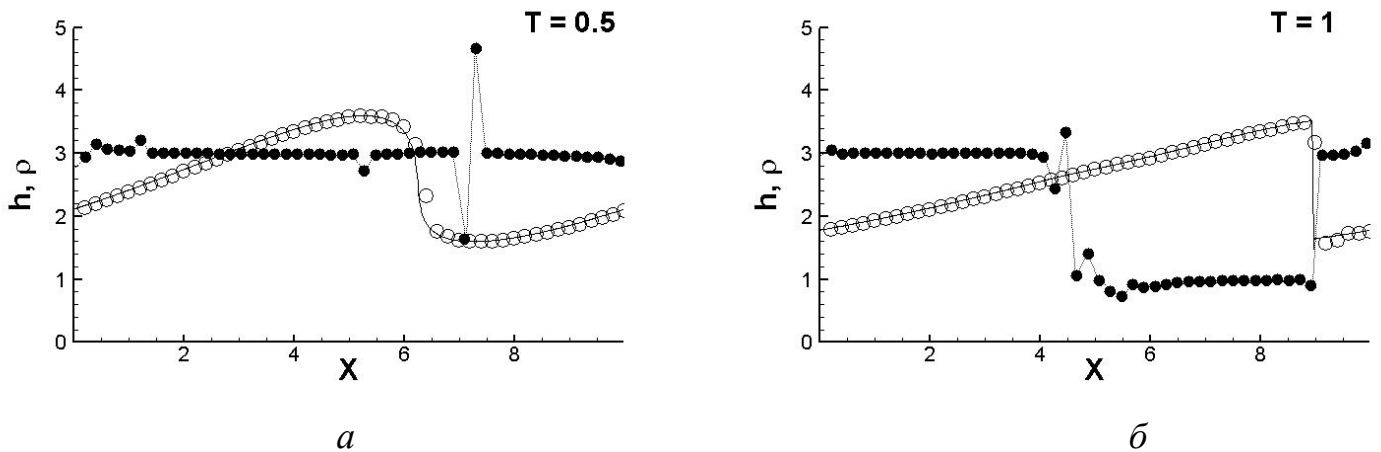
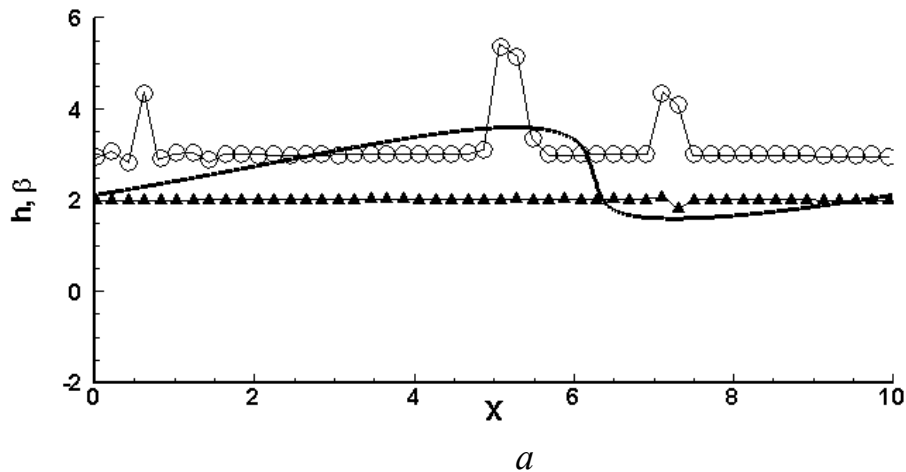


Рис. 1. Результаты расчетов на момент времени а) $T = 0.5$, б) $T = 1.0$: профили глубины h , получаемые при расчете на сетке с пространственным шагом $\Delta = 0.001$ (сплошная линия, моделирующая точное решение); кружки – значения глубины h , получаемые при расчете на сетке с шагом $\Delta = 0.2$; точки – порядки интегральной сходимости.

Из этих расчётов следует, что при $t \approx 0.5$ (рис. 1, а) в результате градиентной катастрофы в точке $x \approx 6$ отрезка $[0, X]$ формируется прерывная волна, распространяющаяся в положительном направлении оси x .

При $t = 1$ (рис. 1, б) эта прерывная волна достигает точки $x \approx 9$ и за её фронтом образуется область влияния (след волны) лежащая внутри интервала $(4, 9)$. Аналогичные прерывные волны образуются на всех отрезках $[iX, (i+1)X]$, $i \in \mathbb{R}$.



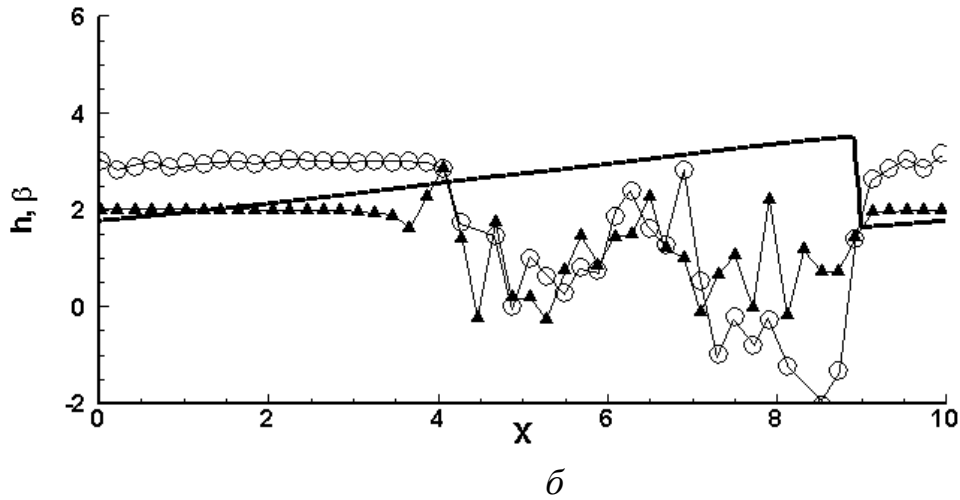


Рис.2. Результаты расчетов на моменты времени а) $T = 0.5$, б) $T = 1.0$: сплошная линия – профили глубины h , получаемые при расчете на сетке с пространственным шагом $\Delta = 0.001$, кружки – порядки локальной сходимости $\beta(x_j, T, \varepsilon)$, определяемые по формулам (3.1), (3.7) где $\varepsilon = 3\Delta$, $l=1$; треугольники – порядки локальной сходимости $\beta(x_j, T, \varepsilon)$, где $\varepsilon = 3\Delta$, $l=5$.

Увеличение шаблона осреднения (ε) (рис. 2, а,б) приводит к незначительному изменению амплитуды в области осцилляций. Увеличение количества осреднений с $l=1$ до $l=5$ приводит к сглаживанию функции порядка локальной сходимости $\beta(x, T, \varepsilon)$. Следует отметить, что при $l>1$ порядок почти всюду стал равен 2. Такая же ситуация наблюдается и в момент времени $T=1.0$ в областях $0 \leq x \leq 4, x \geq 9$. Этот факт легко объясняется. При решении разрывным методом Галеркина с линейными базисными функциями при первом усреднении мы получаем порядок локальной сходимости точно, так как интегрирование по методу трапеций, по одной центральной точке в ячейке, соответствует точному вычислению интеграла от линейной функции. При последующих усреднениях численное интегрирование, выполненное по формуле трапеций, не позволяет получить порядок точности выше второго.

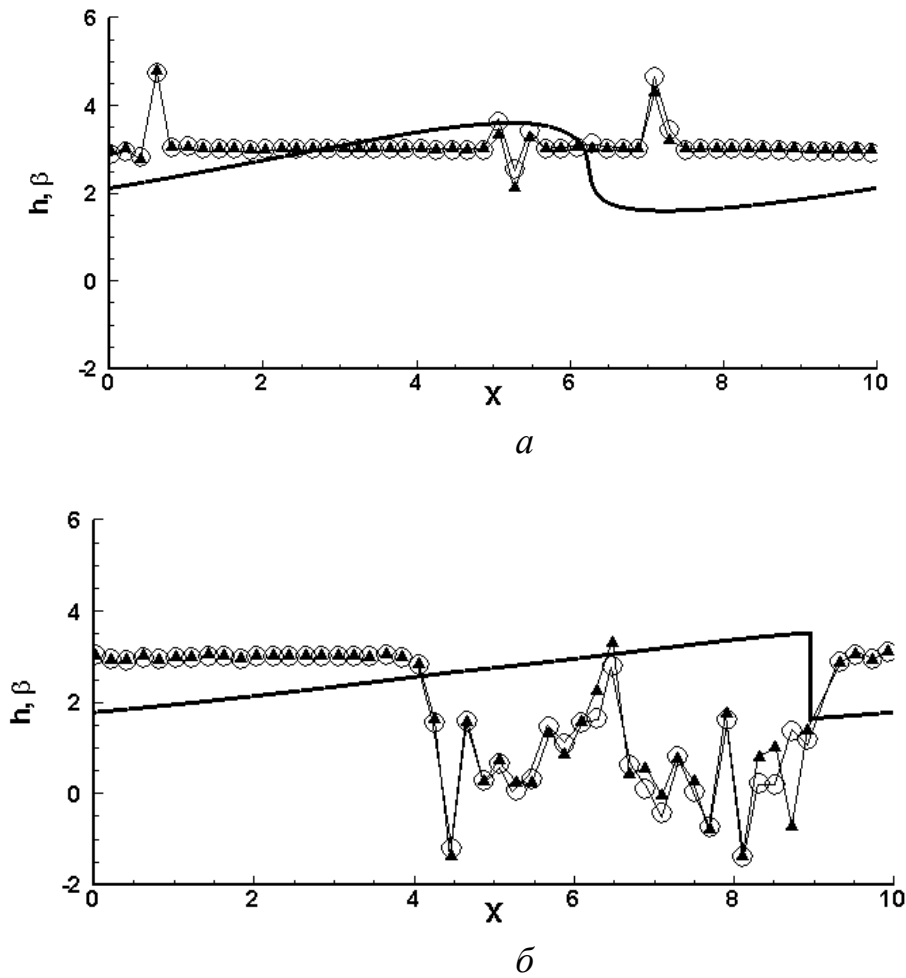


Рис.3. Результаты расчетов на моменты времени а) $T = 0.5$, б) $T = 1$: сплошная линия – профили глубины h , получаемые при расчете на сетке с пространственным шагом $\Delta = 0.001$; кружки – порядки локальной сходимости $\beta(x_j, T, r)$, полученные с экспоненциальным ядром усреднения, где $r = 7\Delta$; треугольники – порядки локальной сходимости $\beta(x_j, T, r)$, полученные с полиномиальным ядром усреднения, где $r = 7\Delta$.

На рис. 3, а, б показаны порядки локальной сходимости, полученные по формуле (3.7) с использованием различных ядер усреднения: экспоненциальным (3.4) и полиномиальным (3.5). Так как принципиального различия в результатах не наблюдается, далее приводим результаты, полученные только с экспоненциальным ядром усреднения.

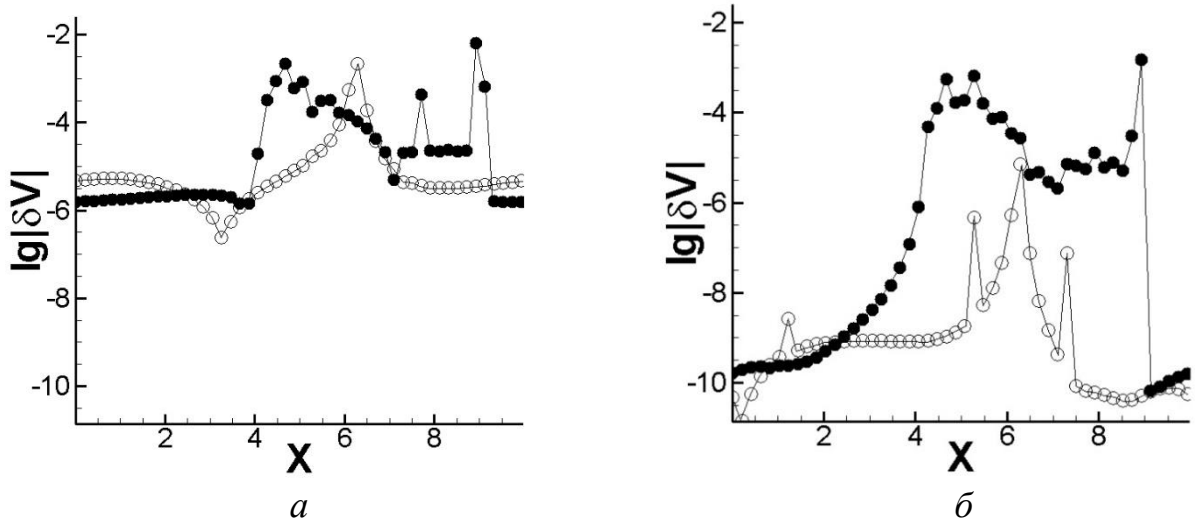


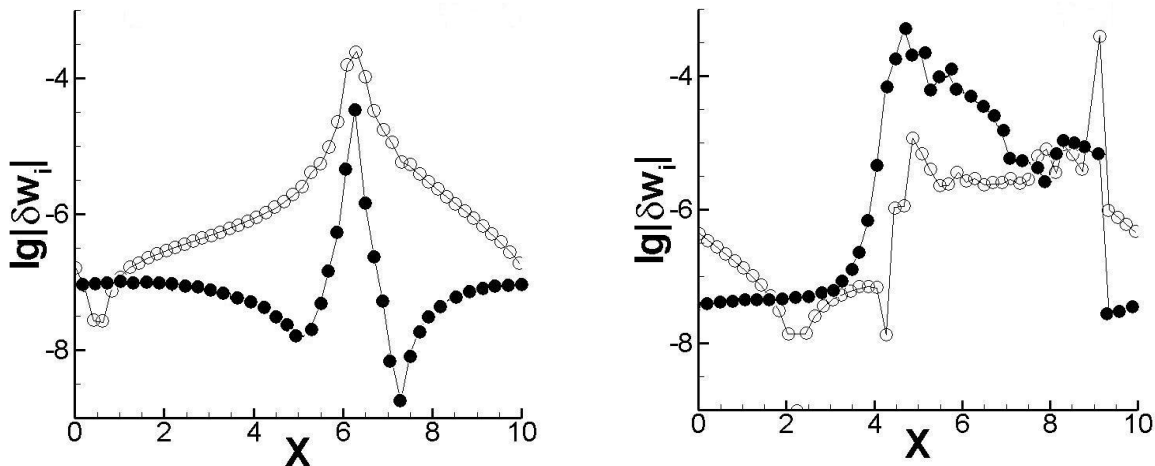
Рис.4. Относительные локальные дисбалансы.

Кружки соответствуют моменту времени $T = 0.5$; точки соответствуют моменту времени $T = 1$;

а) усреднение $\delta V^l(x_j, T, \varepsilon)$ (3.11), где $\varepsilon = 3\Delta$, $l=5$;

б) усреднение с экспоненциальным ядром усреднения $\delta V^\omega(x_j, T, r)$, где $r = 7\Delta$.

На рис. 4, а, б в логарифмической шкале приведены относительные локальные дисбалансы (3.12) вычисления модуля осредненного точного решения $u^r(x_i^c, T, r)$ осредненных базисных функций h и q . Локальные дисбалансы δU^r , входящие в формулы (3.12), вычислялись по формуле (3.1) (рис.4, а) и по формулам (3.3), (3.4) (рис.4, б). Поведение графиков относительных локальных дисбалансов в обоих случаях идентично. Некоторое количественное отличие объясняется способом интегрирования при усреднении.



а б

Рис.5. Относительные локальные дисбалансы (3.13) инвариантов w_1 (точки) и w_2 (кружки) на моменты времени а) $T = 0.5$ и б) $T = 1$. $\Delta w^l(x_j, T, \varepsilon)$, где $\varepsilon = 3\Delta$, $l=5$.

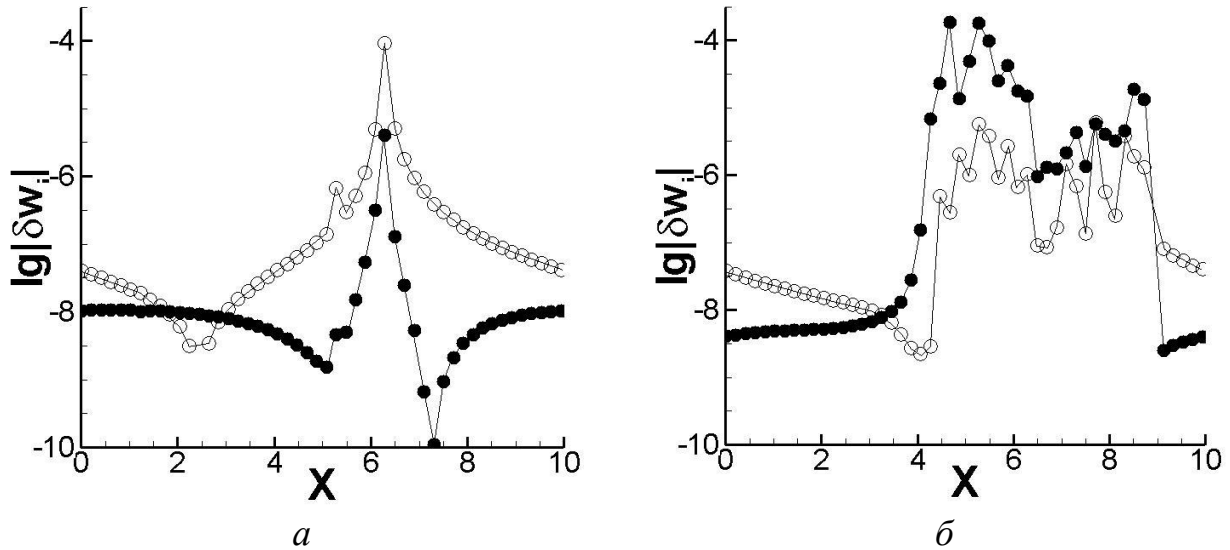


Рис.6. Относительные локальные дисбалансы (3.13) инвариантов w_1 (точки) и w_2 (кружки) на моменты времени а) $T = 0.5$ и б) $T = 1$. $\Delta w^\omega(x_i, T, r)$, $r = 7\Delta$.

На рис. 5, а, б и 6, а, б в логарифмической шкале приведены относительные локальные дисбалансы (3.13) вычисления модуля компонент осредненного вектора инвариантов $\mathbf{w}^\omega(x_i^c, T, r)$ системы (5.1). Локальные дисбалансы δw_i^ω , входящие в формулы (3.13), вычислялись по формуле (3.8) (3.1) (рис.5) и по формулам (3.8), (3.3), (3.4) (рис.6). Вне зависимости от способа осреднения относительные локальные дисбалансы инвариантов практически совпадают. Наблюдается некоторое качественное отличие в области влияния ударной волны, внутри интервала $[4,9]$, которое обусловлено способом осреднения, но на картину в целом это отличие не влияет.

Результаты численных расчетов

Кружками на рис. 1, а и 1, б, а изображены результаты расчета по DG-схеме на сетке с пространственным шагом $\Delta = 0.2$. Из рис. 1, б следует, что DG-схема с высокой точностью локализует ударную волну при отсутствии нефизических осцилляций на ее фронте. Точками на рис. 1 показаны порядки интегральной сходимости $\rho(T, x_i, X)$, определяемые по формуле (2.5), а на рис. 2 и 3, — порядки локальной сходимости $\beta(x_i^c, T, r)$.

Расчеты интегральных и локальных порядков сходимости, а также относительных локальных дисбалансов проводились на базисной сетке с пространственным шагом $\Delta = 0.0135$, что соответствует 740 пространственным

ячейкам сетки на отрезке $[0, X]$ длины периода. На рис. 1-6 результаты этих расчетов показаны для каждого 15-го пространственного узла $i = 15j$ разностной сетки.

На рис. 1,2 видно, что в момент времени $T = 0.5$, когда ударная волна еще не сформировалась, DG-схема имеет третий порядок как интегральной, так и локальной сходимости почти во всей расчетной области. Всплески локальной сходимости на рис. 2, а при $x \approx 5.2$ и $x \approx 7.4$ связаны с тем, что DG-схема, подобно TVD-схемам [9], может снижать порядок сходимости в окрестностях экстремумов точного решения. На рис. 1, б видно, что DG-схема, подобно TVD-схемам и WENO-схемам [15-18], имеет первый порядок интегральной сходимости на отрезках $[x_i, X]$, правая граница которых расположена перед ударной волной, а левая граница — за ударной волной, в области ее влияния. В результате порядок локальной сходимости в области влияния ударной волны также снижается (рис. 2, б). При этом значения локальных порядков β сильно осциллируют, что, возможно, связано с повышенным (третьим) порядком точности DG-схемы на гладких решениях.

Снижение точности DG-схемы в области влияния ударной волны приводит к тому, что в этой области возрастают значения локальных дисбалансов (3.11) и (3.12) осредненного разностного решения (рис. 4). Причем максимальное возрастание происходит не только на правой границе области влияния, которая примыкает к фронту ударной волны, но и в окрестности ее левой границы, где точное решение является достаточно гладким. Как показано в [13-15], аналогичное снижение точности на границе области влияния ударной волны, противоположной ее фронту, демонстрируют и другие разностные схемы повышенной точности, как типа TVD, так и немонотонные схемы с гладкими функциями численных потоков, такие как схема Лакса-Вендроффа, схема Русанова, схема МакКормака и компактная схема. Возможно, причина этого заключается в том, что в точном решении задачи Коши (2.1), (5.1)-(5.3) из малой окрестности точки градиентной катастрофы выходят расходящиеся характеристики первого семейства, распространяющиеся в расширяющейся окрестности левой границы области влияния ударной волны и переносящие в эту окрестность значения инварианта w_1 . Поэтому такое снижение точности разностных схем сквозного счета аналогично снижению их точности при расчете центрированных волн разрежения [23].

Заключение

В работе исследована точность разрывного метода Галеркина второго порядка аппроксимации на гладких решениях при расчете по нему разрывных решений квазилинейной гиперболической системы законов сохранения с ударными волнами, распространяющимися с переменной скоростью. Изучены

интегральные и локальные порядки точности с различными способами осреднения решения. Показано, что результаты не зависят от способа осреднения. В качестве конкретного примера рассмотрена аппроксимация системы законов сохранения теории мелкой воды. На примере этой системы показано, что разрывный метод Галеркина, несмотря на высокую точность на гладких решениях и при локализации ударных волн, снижает свой порядок сходимости до первого порядка в областях влияния ударных волн.

Список литературы

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб., 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
2. Van Leer B. Toward the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. № 1. P. 101–136.
3. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys., 1983. V. 49. P. 357–393.
4. Nessyahu H., Tadmor E. Non-oscillatory Central Differencing for Hyperbolic Conservation Laws // J. Comput. Phys., 1990. V. 87. N. 2. P. 408–463.
5. Jiang G.S., Shu C.W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys., 1996. V. 126. P. 202–228.
6. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов // М.: Изд. МГУ, 2013.
7. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations // Lecture Notes in Mathematics, 1998. V. 1697. P. 151-268.

8. *Остапенко В.В.* О сходимости разностных схем за фронтом нестационарной ударной волны // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1997. Т. 37. № 10. С. 1201–1212.
9. *Casper J., Carpenter M.H.* Computational consideration for the simulation of shock-induced sound // SIAM J. Sci. Comput., 1998. V. 19. № 1. P. 813–828.
10. *Engquist B., Sjögreen B.* The convergence rate of finite difference schemes in the presence of shocks // SIAM J. Numer. Anal., 1998. V. 35. P. 2464–2485.
11. *Остапенко В.В.* О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2000. Т. 40. № 12. С. 1857–1874.
12. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О сходимости разностных схем сквозного счёта // Докл. АН., 2010. Т. 433. № 5. С. 599–603.
13. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О реальной точности разностных схем сквозного счёта // Матем. моделир., 2013. Т. 25. № 9. С. 63–74.
14. *Михайлов Н.А.* О порядке сходимости разностных схем WENO за фронтом ударной волны // Матем. моделир., 2015. Т. 27. № 2. С. 129–138.
15. *Остапенко В.В.* О конечно-разностной аппроксимации условий Гюгонио на фронте ударной волны, распространяющейся с переменной скоростью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1998. Т. 38. №8. С.1355-1367.
16. *Русанов В.В.* Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счёта разрывных решений // Докл. АН СССР., 1968. Т. 180. № 6. С. 1303–1305.
17. *Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф.* Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2012. № 34. С.31.
18. *Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф.* Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Мат. модел., 2012. Т.24. №12. С.124-128.
19. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О монотонности и точности схемы КАБАРЕ при расчете обобщенных решений с ударными волнами // Вычислительные технологии, 2018, Т.23, №2, С. 37-54.
20. *Русанов В.В.* Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1961. Т.1. №2. С. 267- 279.
21. *Lax P.D.* Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. // Communications on Pure and Applied Mathematics., 1954 V.7. №1. P. 159 -193.
22. *Стокер Дж.Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959
23. *Остапенко В.В.* О сильной монотонности нелинейных разностных схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1998. Т. 38. № 7. С. 1170-1185.

Оглавление

Введение	3
Метод оценки интегральной точности разностного решения	5
Методы оценки локальной точности разностного решения	6
Описание Разрывного метода Галеркина	9
Задача Коши для уравнений теории мелкой воды	11
Результаты численных расчетов	17
Заключение	18
Список литературы	18