ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Игнатов А.И., Сазонов В.В.

Стабилизация режима орбитальной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Игнатов А.И., Сазонов В.В. Стабилизация режима орбитальной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 2. 30 с. doi:10.20948/prepr-2018-2
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-2

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

А.И. Игнатов, В.В. Сазонов

СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕЖИМА ОРБИТАЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ БЕЗ НАКОПЛЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА ГИРОСИСТЕМЫ

Москва – 2018

Игнатов А.И., Сазонов В.В.

Стабилизация режима орбитальной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы

Рассматривается движение спутника-гиростата в различных вариантах режима орбитальной ориентации на низкой околоземной орбите. Гиростатический момент создается системой двигателей-маховиков или гиродинов. Учитывается действие на спутник гравитационного и восстанавливающего аэродинамического моментов. Построены законы управления гиростатическим моментом, позволяющие без его накопления поддерживать длительную и достаточно точную ориентацию спутника в окрестности гравитационно устойчивых и неустойчивых положений покоя, существующих в невозмущенной задаче (спутник движется по неизменной круговой орбите и испытывает действие только гравитационного момента, гиростатический момент равен нулю).

Ключевые слова: орбитальная ориентация, гравитационный момент, гиростатический момент, гиросистема, насыщение

Ignatov A.I., Sazonov V.V.

Stabilization of spacecraft orbital orientation mode without saturation of on board gyro system

We consider certain modes of orbital orientation of a spacecraft-gyrostat in a low earth orbit. The gyrostatic momentum is produced by a system of reaction wheels or control moment gyros. Our consideration takes into account the gravitational and restoring aerodynamic torques acing on the spacecraft. We construct the control laws by gyrostatic momentum that allow without its growth to maintain a long and sufficiently accurate orbital orientation of the spacecraft near gravity stable and unstable rest position, taking place in the appropriate unperturbed problem (the spacecraft orbit is circular, gyrostatic momentum is zero, the gravitational torque only affects the spacecraft attitude motion).

Key words: Orbital orientation mode, gravitational torque, gyrostatic momentum, gyro system, saturation

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 17-01-00143а.

1. Введение. Режим орбитальной ориентации искусственного спутника Земли используется для решения ряда целевых задач, в частности, он предпочтителен при проведении космических экспериментов в области микрогравитации [1]. Для поддержания достаточно точной орбитальной ориентации спутника можно использовать различные исполнительные органы системы управления: электроракетные двигатели [2], электромагнитные органы управления [3, 4], а также гиросистему (двигатели-маховики или гиродины) [1, 5]. В данной работе в качестве исполнительного органа системы управления спутника рассматривается гиросистема. При использовании гиросистемы одним из критериев эффективности ее функционирования является скорость накопления гиростатического момента. Эта скорость определяет промежутки времени между разгрузками гиросистемы и должна быть достаточно малой, чтобы обеспечить продолжительные отрезки полета с малым уровнем микроускорений. Ниже рассматриваются законы управления вращательным движением спутника, позволяющие поддерживать его орбитальную ориентацию продолжительное время без насыщения кинетического момента гиросистемы.

2. Уравнения движения спутника. Спутник считаем гиростатом, центр масс которого движется по геоцентрической орбите. Для описания движения спутника будем использовать три правые декартовы системы координат: систему $x_1x_2x_3$, образованную главными центральными осями инерции спутника, орбитальную систему $X_1X_2X_3$ и гринвичскую систему $Y_1Y_2Y_3$.

Несколько упрощая модель, полагаем, что оси системы $x_1x_2x_3$ связаны с характерными элементами конструкции спутника: ось x_1 параллельна его продольной оси, ось x_2 перпендикулярна плоскости солнечных батарей. Базисные орты этой системы обозначим $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Ниже, если не оговорено особо, компоненты векторов и координаты точек относятся к системе $x_1x_2x_3$.

Начало орбитальной системы координат находится в центре масс спутника – точке O. Ось X_3 направлена вдоль геоцентрического радиус-вектора точки O, ось X_2 – вдоль вектора кинетического момента орбитального движения спутника. Базисные орты этой системы обозначим $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$.

Начало гринвичской системы координат – центр Земли, плоскость Y_1Y_2 совпадает с плоскостью экватора, ось Y_1 пересекает гринвичский меридиан, ось Y_3 направлена по оси вращения Земли к Северному полюсу.

Матрицу перехода от орбитальной системы к гринвичской системе обозначим $C = \| c_{ij} \|_{i,j=1}^{3}$, где c_{ij} – косинус угла между осями Y_i и X_j. Элементы этой матрицы выражаются через координаты и компоненты скорости центра масс спутника в гринвичской системе.

Матрицы перехода от системы $x_1x_2x_3$ к системам $X_1X_2X_3$ и $Y_1Y_2Y_3$ обозначим соответственно $A = \| a_{ij} \|_{i,j=1}^{3}$ и $B = \| b_{ij} \|_{i,j=1}^{3}$. Здесь $a_{ij} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_j$, b_{ij} – косинус угла между осями Cy_i и Ox_j. Справедливо соотношение $B = CA$.

Матрицу A параметризируем углами γ, δ и β, которые введем следующим образом. Система $X_1X_2X_3$ может быть переведена в систему $x_1x_2x_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол $\delta+\pi/2$ вокруг оси X_2, 2) на угол β вокруг новой оси X_3, 3) на угол γ вокруг новой оси X_1, совпадающей с осью x_1. Элементы матрицы A выражаются через эти углы с помощью формул

$$a_{11}=-\sin\delta\cos\beta, \qquad a_{12}=\cos\delta\sin\gamma+\sin\delta\sin\beta\cos\gamma,$$

$$a_{21}=\sin\beta, \qquad a_{22}=\cos\beta\cos\gamma,$$

$$a_{31}=-\cos\delta\cos\beta, \qquad a_{32}=-\sin\delta\sin\gamma+\cos\delta\sin\beta\cos\gamma,$$

$$a_{13}=\cos\delta\cos\gamma-\sin\delta\sin\beta\sin\gamma,$$

$$a_{23}=-\cos\beta\sin\gamma,$$

$$a_{33}=-\sin\delta\cos\gamma-\cos\delta\sin\beta\sin\gamma.$$

Уравнения движения спутника состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс спутника, другая – движение относительно центра масс (вращательное движение). Первая подсистема записывается в гринвичской системе координат. Ее переменными служат компоненты геоцентрического радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки O и скорости этой точки $\mathbf{v}$ относительно гринвичской системы [6]. В ней учитываются нецентральность гравитационного поля Земли и сопротивление атмосферы. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16,16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Баллистический коэффициент спутника и параметры атмосферы считаются неизменными на всем интервале интегрирования уравнений движения.

Подсистема уравнений вращательного движения образована уравнениями, выражающими теорему об изменении кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс, кинематическими уравнениями Пуассона для элементов первых двух строк матрицы B и уравнениями, описывающими изменение кинетического момента гиросистемы. В уравнениях, выражающих теорему об изменении кинетического момента, учитываются гравитационный и аэродинамический моменты. Для гравитационного момента существует простое аналитическое выражение [7]. Аэродинамический момент вычислялся в предположении, что спутник имеет форму прямого кругового цилиндра с двумя прикрепленными к нему одинаковыми прямоугольными пластинами – солнечными батареями. Цилиндр имеет радиус R и высоту L, его ось совпадает с осью x_1. Пластины расположены в плоскости x_1x_3 симметрично относительно оси x_1. Стороны пластин параллельны осям x_1 и x_3. Суммарная площадь пластин составляет S_b. Координаты геометрических центров цилиндра и пластин суть $(x_c,0,0)$ и $(x_b,0,0)$. Полагая, что молекулы атмосферы при столкновении с корпусом спутника испытывают абсолютно неупругий удар, формулу аэродинамического момента представим в виде [7]

$$\mathbf{M}_a = \rho_a |\mathbf{v}| (\mathbf{v} \times \mathbf{P}).$$

Здесь ρ_a – плотность атмосферы в точке O, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{v})$ – первый момент фигуры, являющейся проекцией спутника на плоскость Π_{v}, перпендикулярную вектору $\mathbf{v}$. Вектор $\mathbf{P}$ лежит в плоскости Π_{v} и вычисляется относительно проекции на Π_{v} точки O. Формула аэродинамического момента не меняется при замене $\mathbf{P} \to \mathbf{P} + p\mathbf{v}$, где p – произвольный скаляр, поэтому функцию $\mathbf{P}(\mathbf{v})$ можно задать, не связывая себя условием $\mathbf{P} \in \Pi_{\mathrm{v}}$. Компоненты вектора $|\mathbf{v}|\mathbf{P}(\mathbf{v})$ зададим в системе координат $x_1x_2x_3$: $|\mathbf{v}|\mathbf{P} = (p, 0, 0)$, где

$$p = \pi R^2 x_c |\mathrm{v}_1| + S_b x_b |\mathrm{v}_2| + 2RLx_c \sqrt{\mathrm{v}_2^2 + \mathrm{v}_3^2}, \quad \mathbf{v} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3).$$

При выводе выражений для аэродинамического момента не учитывалось возможное взаимное затенение корпуса спутника и солнечных батарей от набегающего аэродинамического потока. Такое упрощение оправдано, поскольку для большинства движений спутника относительная продолжительность отрезков времени, на которых указанное затенение существенно, невелика.

Теорема об изменении кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс выражается уравнениями

$$\begin{gathered}
I_1\dot{\omega}_1 + \dot{h}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 + h_3\omega_2 - h_2\omega_3 = \frac{3\mu_E}{r^5}(I_3 - I_2)r_2r_3, \\
I_2\dot{\omega}_2 + \dot{h}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 + h_1\omega_3 - h_3\omega_1 = \frac{3\mu_E}{r^5}(I_1 - I_3)r_1r_3 + \rho_a p\mathrm{v}_3, \\
I_3\dot{\omega}_3 + \dot{h}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 + h_2\omega_1 - h_1\omega_2 = \frac{3\mu_E}{r^5}(I_2 - I_1)r_1r_2 - \rho_a p\mathrm{v}_2.
\end{gathered} \tag{1}$$

Эти уравнения записаны с использованием компонент абсолютной угловой скорости спутника $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, кинетического момента гиросистемы $\mathbf{H} = (h_1, h_2, h_3)$ и радиус-вектора центра масс спутника $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$. Кроме того, в (1) $r = |\mathbf{r}|$, I_i – моменты инерции спутника относительно осей Ox_i $(i = 1, 2, 3)$, μ_E и ω_E – гравитационный параметр Земли и ее угловая скорость, точка над буквой означает дифференцирование по времени t.

Кинематические уравнения Пуассона для первой и второй строк матрицы B имеют вид

$$\begin{aligned}
\dot{b}_{11} &= b_{12}\omega_3 - b_{13}\omega_2 + \omega_E b_{21}, & \dot{b}_{21} &= b_{22}\omega_3 - b_{23}\omega_2 - \omega_E b_{11}, \\
\dot{b}_{12} &= b_{13}\omega_1 - b_{11}\omega_3 + \omega_E b_{22}, & \dot{b}_{22} &= b_{23}\omega_1 - b_{21}\omega_3 - \omega_E b_{12}, \\
\dot{b}_{13} &= b_{11}\omega_2 - b_{12}\omega_1 + \omega_E b_{23}. & \dot{b}_{23} &= b_{21}\omega_2 - b_{22}\omega_1 - \omega_E b_{13}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Третья строка этой матрицы вычисляется как векторное произведение ее первых двух строк. Переменные b_{1i} и b_{2i} зависимы. Они связаны условиями ортогональности матрицы B, которые учитываются при задании начальных условий этих переменных.

Чтобы замкнуть подсистему уравнений вращательного движения спутника, надо добавить к (1) и (2) уравнения, описывающие изменение переменных h_i. Эти уравнения выписаны ниже.

Приведем использованные в расчетах значения параметров описанной модели. Параметры спутника: m=6440 кг, I_1=2600 кгм^2, I_2=11100 кгм^2, I_3= 10900 кгм^2, R= 1.3 м, L= 5.0 м, S_b= 33 м^2, x_b= –1 м, x_c= 0.3 м. Начальные условия движения центра масс спутника задавались в восходящем узле орбиты в момент 12:10:34 по декретному московскому времени 21.09.2007. Начальные элементы орбиты: высота в апогее 450 км, высота в перигее 400 км, наклонение 63.0°, аргумент широты перигея 53.5°, долгота восходящего узла (отсчитывается от точки среднего весеннего равноденствия эпохи даты) 164.0°. Параметры модели атмосферы: $F_{10.7} = F_{81}$ = 150, A_p = 12.

Начальные условия уравнений (1), (2) задавались в тот же момент времени, что и начальные условия орбитального движения. Этот момент служил началом отсчета времени – точкой $t=0$.

3. Пассивная гравитационная ориентация спутника. Чтобы пояснить этот режим вращательного движения, упростим уравнения (2), отбросив второстепенные факторы. Предположим, что орбита спутника – круговая и неизменна в абсолютном пространстве, на спутник действует один лишь гравитационный момент и собственный кинетический момент гиросистемы (гиростатический момент спутника) равен нулю. В этом случае уравнения (1), (2) можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered}
I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = 3\omega_0^2 (I_3 - I_2) a_{32} a_{33}, \\
I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = 3\omega_0^2 (I_1 - I_3) a_{31} a_{33}, \\
I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = 3\omega_0^2 (I_2 - I_1) a_{31} a_{32};
\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}
\dot{\gamma} = \omega_1 - \mathrm{tg}\beta(\omega_2\cos\gamma - \omega_3\sin\gamma), \quad \dot{\delta} = \frac{\omega_2\cos\gamma - \omega_3\sin\gamma}{\cos\beta} - \omega_0, \\
\dot{\beta} = \omega_2\sin\gamma + \omega_3\cos\gamma.
\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь ω_0 – среднее движение спутника (орбитальная частота), величины a_{3i} выражаются через углы γ, δ и β по указанным выше формулам.

Ограничимся рассмотрением 8 (из 24) стационарных решений системы (3), (4) задаваемых соотношениями

$$\sin\gamma = \sin\delta = \beta = 0, \quad \omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = \omega_0\cos\gamma, \tag{5}$$

$$\cos\gamma = \cos\delta = \beta = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = -\omega_0\sin\gamma. \tag{6}$$

Эти решения описывают положения равновесия (покой) спутника в орбитальной системе координат [7]. При выполнении неравенств $I_1 < I_3 < I_2$ решения (5) являются устойчивыми, а решения (6) – неустойчивыми [7].

Каждое устойчивое стационарное решение (5) можно использовать для реализации режима пассивной трехосной гравитационной ориентации спутника. Такой режим удобен при неуправляемом полете спутника. Для определенности рассмотрим устойчивое стационарное решение

$$\gamma = \delta = \beta = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 - \omega_0 = \omega_3 = 0. \tag{7}$$

В этом решении оси Ox_1 и Ox_2 совпадают с осями $-OX_3$ и OX_2 соответственно.

Уравнения (1), (2) в этом разделе рассматриваем при $h_1 = h_2 = h_3 = 0$, остальные параметры оставляем без изменений. В этом случае уравнения (1), (2) не имеют решений, описывающих покой в орбитальной системе координат. Однако в силу непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий и параметров эти уравнения допускают решения, которые после пересчета переменных b_{1i} и b_{2i} в углы γ, δ и β оказываются близки положению покоя (6). Такие решения можно выбирать из условия минимума функционала [1]

$$\Phi = \int_0^T \sum_{i=1}^3 \left(\omega_i - \omega_0 \sum_{j=1}^3 c_{j2} b_{ji} \right)^2 dt. \tag{8}$$

Здесь ω_0 – среднее движение спутника в начальный момент времени, значение T равно нескольким орбитальным периодам $2\pi / \omega_0$. Чтобы пояснить смысл функционала (8), представим его в эквивалентной форме

$$\Phi = \int_0^T \sum_{i=1}^3 \left(\omega_i - \omega_0 a_{2i} \right)^2 dt.$$

Теперь его можно рассматривать и на решениях системы (3), (4) полагая величины a_{2i} выраженными в функции углов γ, δ и β. В частности, $\Phi = 0$ для положения покоя (7) и $\Phi > 0$ на решениях, лежащих в окрестности этого положения и не совпадающих с ним. Интеграл в (8) можно заменить суммой

$$\Phi' = \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^3 \left[\omega_i(n\tau) - \omega_0 \sum_{j=1}^3 c_{j2}(n\tau) b_{ji}(n\tau) \right]^2, \quad \tau = \frac{T}{N},$$

где N – достаточно большое число. В описываемых расчетах были взяты $T = 4\pi / \omega_0$, $N = 80$. Минимизация Φ' по начальным условиям решения системы (1), (2) проводилась методом Гаусса–Ньютона. Для расчета частных производных решения по начальным условиям интегрировались соответствующие уравнения в вариациях, в которых отбрасывались члены, характеризующие аэродинамический момент.

Решения уравнений (1), (2), доставляющие локальный минимум функционалу Φ' и близкие положению покоя (6), представлены на рис. 1, 2. Здесь приведены графики зависимости от времени углов γ, δ, β и компонент угловой скорости ω_i $(i = 1, 2, 3)$. Положение спутника в орбитальной системе координат в момент времени $t = 0$ задается углами $\gamma = 0.06°$, $\delta = 1.34°$, $\beta = -0.07°$. Начальная угловая скорость спутника: $\omega_1 = -1.35 \cdot 10^{-5}$ °/с, $\omega_2 = 0.0655$ °/с, $\omega_3 = 8.68 \cdot 10^{-6}$ °/с. Графики построены на интервале времени 8 суток. Слабая неустойчивость режимов пассивной гравитационной ориентации (см. графики функции $\gamma(t)$ и $\beta(t)$) связана с дестабилизирующим действием аэродинамического момента. Колебания спутника вызваны изменением плотности атмосферы и эллиптичностью орбиты. К сожалению, в полной мере использовать возможности режима пассивной гравитационной ориентации не удается из-за неизбежных ошибок в задании начальных условий. Эти ошибки приводят к колебаниям в окрестности требуемого движения, амплитуда которых возрастает из-за дестабилизирующего действия аэродинамического момента.

4. Орбитальная ориентация спутника. Орбитальной ориентацией спутника будем называть его движение, близкое заданному положению покоя в орбитальной системе координат. В случае спутника из раздела 2 технически доступные реализации гиростатического момента $\mathbf{H} = (h_1, h_2, h_3)$ не могут обеспечить существование решений уравнений (1), (2), описывающих точный покой в орбитальной системе, но они могут обеспечить решения, близкие к покою, т.е. орбитальную ориентацию. Рассмотрим простейшие способы таких реализаций.

Уравнения, описывающие изменение величин h_i запишем в виде

$$\dot{h}_1 = h_2\omega_3 - h_3\omega_2 - m_1, \quad \dot{h}_2 = h_3\omega_1 - h_1\omega_3 - m_2, \qquad (9)$$
$$\dot{h}_3 = h_1\omega_2 - h_2\omega_1 - m_3,$$

где m_i – компоненты управляющего момента $\mathbf{M_c}$, приложенного к корпусу спутника со стороны гиросистемы. Подстановка этих уравнений в систему (1) приводит ее к виду

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = \frac{3\mu_E}{r^5}(I_3 - I_2)r_2 r_3 + m_1,$$
$$I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = \frac{3\mu_E}{r^5}(I_1 - I_3)r_1 r_3 + \rho_a p \mathrm{v}_3 + m_2, \qquad (10)$$
$$I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = \frac{3\mu_E}{r^5}(I_2 - I_1)r_1 r_2 - \rho_a p \mathrm{v}_2 + m_3.$$

Рассмотрим систему уравнений (2), (10) и выберем момент $\mathbf{M_c}$ так, чтобы эта система допускала установившиеся решения, в которых матрица $A = C^{\mathrm{T}}B$ была бы близка к заданной постоянной матрице A_0, а величины $|h_i|$ возрастали бы по возможности медленнее. Такой момент будем искать в виде

$$\mathbf{M}_c = -\xi^2 \hat{I}\boldsymbol{\theta} - 2\xi\hat{I}(\boldsymbol{\omega} - \omega_0\mathbf{E}_2), \tag{11}$$

где $\hat{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$, ξ – положительный параметр, $\boldsymbol{\theta} = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ – вектор, компоненты которого определены соотношением

$$\left\| \begin{matrix} 0 & -\vartheta_3 & \vartheta_2 \\ \vartheta_3 & 0 & -\vartheta_1 \\ -\vartheta_2 & \vartheta_1 & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}(A_0^T A - A^T A_0) \tag{12}$$

с матрицей $A = C^{\mathrm{T}} B$. Формула (11) подразумевает, что на спутнике установлены датчики угловых скоростей и ориентации, по измерениям которых формируется закон управления (10). В случае $|\boldsymbol{\theta}| << 1$ вектор $\boldsymbol{\theta}$ играет роль вектора бесконечно малого поворота, и выполнено соотношение $\boldsymbol{\omega} - \omega_0\mathbf{E}_2 \approx \dot{\boldsymbol{\theta}}$.

Рассмотрим систему (2), (9)–(12). Параметр ξ возьмем настолько большим, чтобы характерное время действия на спутник управляющего момента было существенно меньше аналогичного времени для гравитационного и аэродинамического моментов. Если двумя последними моментами пренебречь, принять орбиту круговой, а величину $\boldsymbol{\theta}$ малой, то эту систему, линеаризовав ее по $\boldsymbol{\theta}$, можно привести к виду

$$\ddot{\vartheta}_i + 2\xi\dot{\vartheta}_i + \xi^2\vartheta_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Выписанные уравнения асимптотически устойчивы. Следовательно, согласно теореме об устойчивости периодических и установившихся движений при постоянно действующих возмущениях [8], можно ожидать, что асимптотически устойчив и режим орбитальной ориентации. При подходящем выборе параметра ξ возмущенное движение спутника в окрестности положения, задаваемого матрицей A_0, будет затухать за требуемое время.

Закон управления (10) в общем случае обеспечивает поддержание режима ориентации, но не обеспечивает малую скорость возрастания величин $|h_i|$. Чтобы уменьшить эту скорость, матрицу A_0 следует задавать углами γ, δ и β из окрестности значений, определяемых соотношениями (4). При специальном выборе матрицы A_0 можно получить минимальную скорость роста величин $|h_i|$. Приемлемая матрица A_0 находится усреднением на отрезке $0 \le t \le T$ матрицы $A(t)$ в режиме пассивной гравитационной ориентации, построенном минимизацией функционала Φ'. Усреднение здесь означает отыскание ортогональной матрицы A_0, доставляющей минимум функционалу

$$\Psi = \int_0^T \mathrm{tr}\Big([A(t) - A_0]^T [A(t) - A_0] \Big) dt. \tag{13}$$

В режиме пассивной гравитационной ориентации $A(t) \approx A_0$, и с помощью вектора $\boldsymbol{\theta}$ выписанный функционал можно представить в виде

$$\Psi \approx 2\int_0^T [\vartheta_1^2(t) + \vartheta_3^2(t) + \vartheta_3^2(t)]dt .$$

Минимизация выражения (13) выполняется по углам углами γ, δ и β, параметризирующим матрицу A_0, методом Гаусса–Ньютона.

Пример использования закона (10) при таком выборе A_0 приведен на рис. 3–5. Здесь приведены графики решения системы (2), (9)–(12) при $\xi = 0.01\,\text{с}^{-1}$ и матрице A_0, которая была получена усреднением матрицы $A(t)$ для режима пассивной гравитационной ориентации (п. 3 и рис. 1, 2) в случае $T = 2$ суток. Начальные условия решения: $B(0) = C(0)A_0$, $h_i(0) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ и

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) - \omega_0 = \omega_3(0) = 0.01\,°/\text{с} . \tag{14}$$

Матрица A_0 задается углами $\gamma = -0.002°$, $\delta = 0.801°$, $\beta = -0.005°$; начальные компоненты угловой скорости учитывают ошибки в их реализации (при выставке начальных условий вращательного движения спутника ошибка в задании угловой скорости наиболее существенна). Графики построены на интервалах времени 8 суток. В левой части рисунков в укрупненном масштабе изображен начальный участок каждого графика, иллюстрирующий переходной процесс. В данном примере этот процесс обусловлен ошибками в задании начальной угловой скорости. Графики в правой части рисунков иллюстрируют движение спутника в установившемся режиме после окончания переходного процесса. Колебания спутника в установившемся режиме вызваны изменением плотности атмосферы вдоль орбиты и эллиптичностью последней. Следует отметить весьма медленное накопление собственного кинетического момента гиросистемы в построенном решении. Это – следствие специального выбора матрицы A_0.

Для сравнения на рис. 6 – 8 приведены аналогичные графики, полученные в результате интегрирования системы (2), (8) с законом управления [5]

$$\mathbf{M}_c = \xi^2 \hat{I}\left(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \times \mathbf{e}_1\right) - 2\xi \hat{I}(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2) . \tag{15}$$

Этот закон – вариант закона (10), (11) с матрицей A_0, задаваемой углами γ, δ и β из (6). Он обеспечивает орбитальную ориентацию спутника в окрестности положения равновесия (6). Интегрирование проводилось для начальных условий (14) и $\gamma = \delta = \beta = 0$, $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ при $\xi = 0.01\text{с}^{-1}$. Сравнивая полученные результаты видим, что использование закона управления (10) при подходящем выборе матрицы A_0 позволяет уменьшить величину накопленного за 8 суток полета гиростатического момента спутника примерно в 23 раза по сравнению с гиростатическим моментом, накопленным за аналогичный период времени при использовании закона (15).

В данном случае использование матрицы A_0 представляет методический интерес. Расчет ее изменения в реальном времени сложен хотя бы из-за необходимости учета влияния аэродинамического момента на вращательное движение спутника. Однако в знании матрицы A_0 нет необходимости. Поддержание достаточно точной орбитальной ориентации можно обеспечить без накопления гиростатического момента.

5. Орбитальная ориентации спутника в окрестности устойчивого положения равновесия без накопления гиростатического момента. Сначала реализуем такую ориентацию в простейшей ситуации. Орбиту примем круговой и неизменной в абсолютном пространстве, из приложенных к спутнику внешних механических моментов будем учитывать только гравитационный. Теорему об изменении кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс запишем в виде

$$
\begin{gathered}
I_1\dot{\omega}_1+\dot{h}_1+\left(I_3-I_2\right)\omega_2\omega_3+h_3\omega_2-h_2\omega_3=3\omega_0^2\left(I_3-I_2\right)a_{32}a_{33}\,,\\
I_2\dot{\omega}_2+\dot{h}_2+\left(I_1-I_3\right)\omega_1\omega_3+h_1\omega_3-h_3\omega_1=3\omega_0^2\left(I_1-I_3\right)a_{31}a_{33}\,,\\
I_3\dot{\omega}_3+\dot{h}_3+\left(I_2-I_1\right)\omega_1\omega_2+h_2\omega_1-h_1\omega_2=3\omega_0^2\left(I_2-I_1\right)a_{31}a_{32}\,.
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Выписанные уравнения дополним уравнениями (4), (9) и выберем момент $\mathbf{M}_c$ таким образом, чтобы полученная система имела стационарные решения, задаваемые формулами (5) и $h_1=h_2=h_3=0$. Примем простой вариант

$$
\mathbf{M}_c=\hat{K}_h\mathbf{H}-\hat{K}_\omega(\boldsymbol{\omega}-\omega_0\mathbf{e}_2)\,,
\tag{17}
$$

где $\hat{K}_\omega=\mathrm{diag}(k_{\omega1},k_{\omega2},k_{\omega3})$, $\hat{K}_h=\mathrm{diag}(k_{h1},k_{h2},k_{h3})$, $k_{\omega i}$, k_{hi} – постоянные величины. Для определенности рассмотрим стационарное решение (7). Исследуем его устойчивость. Система (4), (9), (16), (17), линеаризованная в окрестности этого решения, имеет вид

$$
\dot{\mathbf{z}}_1=Q_1\mathbf{z}_1,\quad \dot{\mathbf{z}}_2=Q_2\,\mathbf{z}_2\,,
\tag{18}
$$

$$
\mathbf{z}_1=\left(\omega_2-\omega_0,\quad \delta,\quad h_2\right)^T,\qquad \mathbf{z}_2=\left(\omega_1,\quad \omega_3,\quad \gamma,\quad \beta,\quad h_1,\quad h_3\right)^T,
$$

$$
Q_1=\begin{Vmatrix}
-\dfrac{k_{\omega2}}{I_2} & \dfrac{3\omega_0^2\left(I_1-I_3\right)}{I_2} & \dfrac{k_{h2}}{I_2}\\[2ex]
1 & 0 & 0\\[2ex]
k_{\omega2} & 0 & -k_{h2}
\end{Vmatrix},
$$

$$Q_2 = \begin{Vmatrix} -\dfrac{k_{\omega 1}}{I_1} & \dfrac{\omega_0\left(I_2 - I_3\right)}{I_1} & 0 & 0 & \dfrac{k_{h1}}{I_1} & 0 \\ \dfrac{\omega_0\left(I_1 - I_2\right)}{I_3} & -\dfrac{k_{\omega 3}}{I_3} & 0 & \dfrac{3\omega_0^2\left(I_1 - I_2\right)}{I_3} & 0 & \dfrac{k_{h3}}{I_3} \\ 1 & 0 & 0 & -\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{\omega 1} & 0 & 0 & 0 & -k_{h1} & -\omega_0 \\ 0 & k_{\omega 3} & 0 & 0 & \omega_0 & -k_{h3} \end{Vmatrix}.$$

Значения коэффициентов $k_{\omega i}$, k_{hi} выберем таким образом, чтобы корни характеристического полинома системы (18) лежали в левой полуплоскости комплексного переменного достаточно далеко от мнимой оси. Точнее, критерием качества закона управления (17) будем считать степень устойчивости системы (18) – взятую с обратным знаком действительную часть самого правого корня ее характеристического полинома. В данном случае этот полином разлагается на полиномы третьего и шестого порядков, являющихся характеристическими полиномами первой и второй подсистем (18).

Полином третьего порядка зависит только от коэффициентов k_{h2} и $k_{\omega 2}$. Выберем их так, чтобы этот полином имел трехкратный действительный $-\alpha$, где $\alpha > 0$ – степень устойчивости. Получаем

$$k_{h2} = \frac{\alpha}{3}, \quad k_{\omega 2} = \frac{8}{3} I_2 \alpha, \quad \alpha = \omega_0 \sqrt{\frac{I_3 - I_1}{I_2}}.$$

Из приведенных соотношений видно, что максимальная степень устойчивости первой подсистемы (18) определяется только моментами инерции спутника и высотой его орбиты. Для рассматриваемого спутника $\omega_0 = 1.125 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$, $\alpha = 9.73 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$, $k_{h2} = 3.24 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$, $k_{\omega 2} = 28.75$ Нмс.

Полином шестого порядка содержит только коэффициенты k_{h1}, k_{h3}, $k_{\omega 1}$ и $k_{\omega 3}$. Примем их значения $k_{h1} = k_{h3} = 3.00 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$, $k_{\omega 1} = 78.00$ Нмс, $k_{\omega 3} = 26.16$ Нмс. Корни полинома при этом равны

$$-3.25 \cdot 10^{-4} \pm 1.01 \cdot 10^{-3}\sqrt{-1}\ \text{с}^{-1}, \quad -3.28 \cdot 10^{-4} \pm 1.42 \cdot 10^{-3}\sqrt{-1}\ \text{с}^{-1},$$
$$-1.40 \cdot 10^{-3}\ \text{с}^{-1}, \quad -0.03\ \text{с}^{-1}.$$

Таким образом, закон управления (17) с указанными значениями параметров k_{hi}, $k_{\omega i}$ обеспечивает асимптотическую устойчивость стационарного решения (7) системы (4), (9), (16), (17). Пример использования этого закона в более сложном случае системы (2), (9), (10) (17) (или эквивалентной ей системы (1), (2), (9), (17)) приведен на рис. 9–11. Здесь изображены графики ее решения с начальными условиями (14) и $\gamma(0)=\delta(0)=\beta(0)=0$, $h_1(0)=h_2(0)=$ $=h_3(0)=0$ на интервале времени 140 суток. В левой части рисунков для каждого фазовой переменной исследуемой системы приведен график переходного процесса. Левые графики охватывают отрезок времени 4 часа, примыкающий к начальной точке $t=0$. Графики в правой части рисунков иллюстрируют движение спутника в режиме, установившемся после окончания переходного процесса. Результаты расчетов показывают, что закон управления (17) обеспечивает устойчивую орбитальную ориентацию спутника, и гиростатический момент при этом остается ограниченным. Изменение амплитуды колебаний фазовых переменных на рис. 9–11, а также постоянное смещение угла δ на рис. 9, вызвано сопротивлением атмосферы, зависящим от положения Солнца относительно плоскости орбиты спутника. Это положение меняется из-за прецессии плоскости орбиты с угловой скоростью ~5°/сутки.

Достоинством закона управления (17) (и похожего закона в [1]) является сравнительная простота – для его реализации не нужна информация об ориентации спутника. Недостатки закона (17): он поддерживает орбитальную ориентацию только в окрестности устойчивого положения равновесия, характеризующая этот закон степень устойчивости ограничена. Последний недостаток можно устранить, введя в (17) слагаемое $\hat{K}_a(\mathbf{e}_2\times\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_3\times\mathbf{e}_1)$ с подходящей матрицей $\hat{K}_a=\mathrm{diag}(k_{a1},k_{a2},k_{a3})$. Способ выбора этой матрицы аналогичен способу, рассмотренному в следующем разделе.

6. Орбитальная ориентации спутника в окрестности неустойчивого положения равновесия без накопления гиростатического момента. Закон управления гиростатическим моментом возьмем в виде

$$\mathbf{M}_c=\hat{K}_a\left(\mathbf{e}_2\times\mathbf{E}_3+\mathbf{E}_2\times\mathbf{e}_3\right)-\hat{K}_\omega\left(\boldsymbol{\omega}-\omega_0\mathbf{E}_2\right)+\hat{K}_h\mathbf{H}, \tag{19}$$

где матрицы $\hat{K}_a$, $\hat{K}_\omega$ и $\hat{K}_h$ имеют вид и смысл, указанный в предыдущем разделе. Сначала рассмотрим этот закон в упрощенной ситуации: орбиту спутника считаем круговой и неизменной в абсолютном пространстве, из приложенных к спутнику внешних механических моментов учитываем только гравитационный. Систему уравнений вращательного движения спутника запишем в виде (4), (9), (16), (19). Эта система имеет стационарные решения, задаваемые соотношениями (6) и $h_1=h_2=h_3=0$. Матрицы $\hat{K}_a$, $\hat{K}_\omega$ и $\hat{K}_h$ выберем так, чтобы одно из этих решений было асимптотически устойчивым и характеризовалось достаточно большой степенью устойчивости. Для определенности рассмотрим стационарное решение

$$\gamma=-\delta=\frac{\pi}{2},\ \beta=0,\ \omega_1=\omega_2=0,\ \omega_3=-\omega_0,\ h_1=h_2=h_3=0. \tag{20}$$

В этом решении оси Ox_2 и Ox_3 совпадают с осями OX_3 и $-OX_2$ соответственно.

Линеаризуем систему уравнений (4), (9), (16), (19) в окрестности стационарного решения (20). Линеаризованная система разбивается на две независимых подсистемы:

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = Q_1 \mathbf{z}_1, \qquad \dot{\mathbf{z}}_2 = Q_2 \mathbf{z}_2, \tag{21}$$

$$\mathbf{z}_1 = \left(\omega_3 + \omega_0, \quad \delta + \pi/2, \quad h_3\right)^T, \qquad \mathbf{z}_2 = \left(\omega_1, \quad \omega_2, \quad \gamma - \pi/2, \quad \beta, \quad h_1, \quad h_2\right)^T,$$

$$Q_1 = \begin{Vmatrix} -\dfrac{k_{\omega 3}}{I_3} & \dfrac{3\omega_0^2\left(I_1 - I_2\right) + k_{a3}}{I_3} & \dfrac{k_{h3}}{I_3} \\ 1 & 0 & 0 \\ k_{\omega 3} & -k_{a3} & -k_{h3} \end{Vmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{Vmatrix} -\dfrac{k_{\omega 1}}{I_1} & \dfrac{\omega_0\left(I_3 - I_2\right)}{I_1} & \dfrac{3\omega_0^2\left(I_2 - I_3\right) - 2k_{a1}}{I_1} & \dfrac{k_{\omega 1}\omega_0}{I_1} & \dfrac{k_{h1}}{I_1} & 0 \\ \dfrac{\omega_0\left(I_1 - I_3\right)}{I_2} & -\dfrac{k_{\omega 2}}{I_2} & -\dfrac{k_{\omega 2}\omega_0}{I_2} & -\dfrac{k_{a2}}{I_2} & 0 & \dfrac{k_{h2}}{I_2} \\ 1 & 0 & 0 & -\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{\omega 1} & 0 & 2k_{a1} & -k_{\omega 1}\omega_0 & -k_{h1} & -\omega_0 \\ 0 & k_{\omega 2} & k_{\omega 2}\omega_0 & k_{a2} & \omega_0 & -k_{h2} \end{Vmatrix}.$$

Значения коэффициентов $k_{\omega i}$, k_{ai}, k_{hi} выберем так, чтобы степень устойчивости системы (21) была достаточно большой. Характеристический полином первой подсистемы (21) имеет третий порядок. Потребуем, чтобы он имел действительный корень кратности 3. Отсюда находим коэффициенты k_{a3}, $k_{\omega 3}$ и k_{h3}:

$$k_{h3} = \frac{\alpha^3 I_3}{3\omega_0^2\left(I_1 - I_2\right)}, \quad k_{\omega 3} = I_3\left(3\alpha - k_{h3}\right), \quad k_{a3} = 3\left[I_3\alpha^2 - \omega_0^2\left(I_1 - I_2\right)\right],$$

где α – степень устойчивости этого полинома. В данном случае значение α может быть любым. Примем $\alpha = 5.30 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$, тогда $k_{h3} = -0.05$ с$^{-1}$, $k_{\omega 3} =$ 721.26 Нмс, $k_{a3} = 0.95$ Нм.

Вторая подсистема (21) имеет порядок 6. Вычисляя характеристические числа ее матрицы, подберем коэффициенты: $k_{h1} = -0.1$ с$^{-1}$, $k_{\omega 1} = 300$ Нмс, $k_{a1} =$ $= 0.055$ Нм, $k_{h2} = 0.05$ с$^{-1}$, $k_{\omega 2} = 300$ Нмс, $k_{a2} = 0.1$ Нм. Характеристические числа при этом равны

$$-2.01 \cdot 10^{-4} \pm 1.13 \cdot 10^{-3}\sqrt{-1}\ \text{с}^{-1}, \quad -8.85 \cdot 10^{-4}\ \text{с}^{-1}, \quad -2.21 \cdot 10^{-3}\ \text{с}^{-1},$$

$$-0.012\ \text{с}^{-1}, \quad -0.077\ \text{с}^{-1}.$$

Покажем, что выбранный закон изменения кинетического момента гиросистемы обеспечивает трехосную орбитальную ориентацию спутника в окрестности неустойчивого положения равновесия (20). С этой целью вычислим решение системы (2), (9), (16), (19), задав его начальные условия в момент времени $t = 0$. Начальная ориентация спутника относительно орбитальной системе координат и начальные значения переменных h_i задаются соотношениями (20), начальные значения ω_i возьмем в виде

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) + \omega_0 = 0.01\,°/\text{с}.$$

Графики такого решения на интервале времени 8 сут приведены на рис. 12–14. В левой части рисунков для каждой фазовой переменной системы (2), (9), (16), (19) показан переходной процесс, обусловленный ошибками в задании начальной угловой скорости. Левые графики охватывают отрезок времени, который примыкает к начальной точке $t = 0$ и имеет длину 7 ч. Графики в правой части рисунков иллюстрируют движение спутника в установившемся режиме после окончания переходного процесса. Как и в предыдущих примерах, представленные здесь установившиеся колебания вызваны изменением плотности атмосферы и эллиптичностью орбиты. Результаты моделирования показали, что закон управления (21) обеспечивает достаточно точную стабилизацию спутника в окрестности неустойчивого положения равновесия (20), при этом собственный кинетический момент гиросистемы близок к нулю и практически не увеличивается на всем отрезке времени моделирования.

Следует отметить, что законы управления (9), (17) и (9), (19) являются упрощенными вариантами законов управления, предложенных в [10].

Литература

1. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Реализация режимов вращательного движения ИСЗ с малым уровнем микроускорений электромеханическими исполнительными органами // Космические исследования. 2012. Т. 50. № 5. с. 380-393.
2. Латышев Л.А., Штырлин А.Ф., Непейвода О.М., Сазонов В.В. Использование электроракетных двигателей для реализации режима движения ИСЗ с малым уровнем микроускорений // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2007. № 16.
3. Абрашкин В.И., Пузин Ю.А., Сазонов В.В. Электромагнитная система управления вращательным движением спутника, обеспечивающая малый уровень микроускорений на его борту // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2010. № 22.
4. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Стабилизация режима гравитационной ориентации искусственного спутника Земли электромагнитной системой управления // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2016. № 28.

5. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Реализация режимов вращательного движения ИСЗ с малым уровнем остаточных микроускорений электромеханическими исполнительными органами // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2008. № 91.
6. Бажинов И.К., Гаврилов В.П., Ястребов В.Д. и др. Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса «Салют-6» - «Союз» - «Прогресс». М.: Наука, 1985.
7. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
8. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М., Наука, 1966.
9. Markley F.L. Attitude determination using vector observation and singular value decomposition // Journal of the Astronautical Sciences. Vol. 36, No.3, 1988, pp. 245-258.
10. Vadali S.R. and Oh H.-S. Space Station Attitude Control and Momentum Management: A Nonlinear Look // Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol. 15, No. 3, May – June 1992, pp. 577-586.

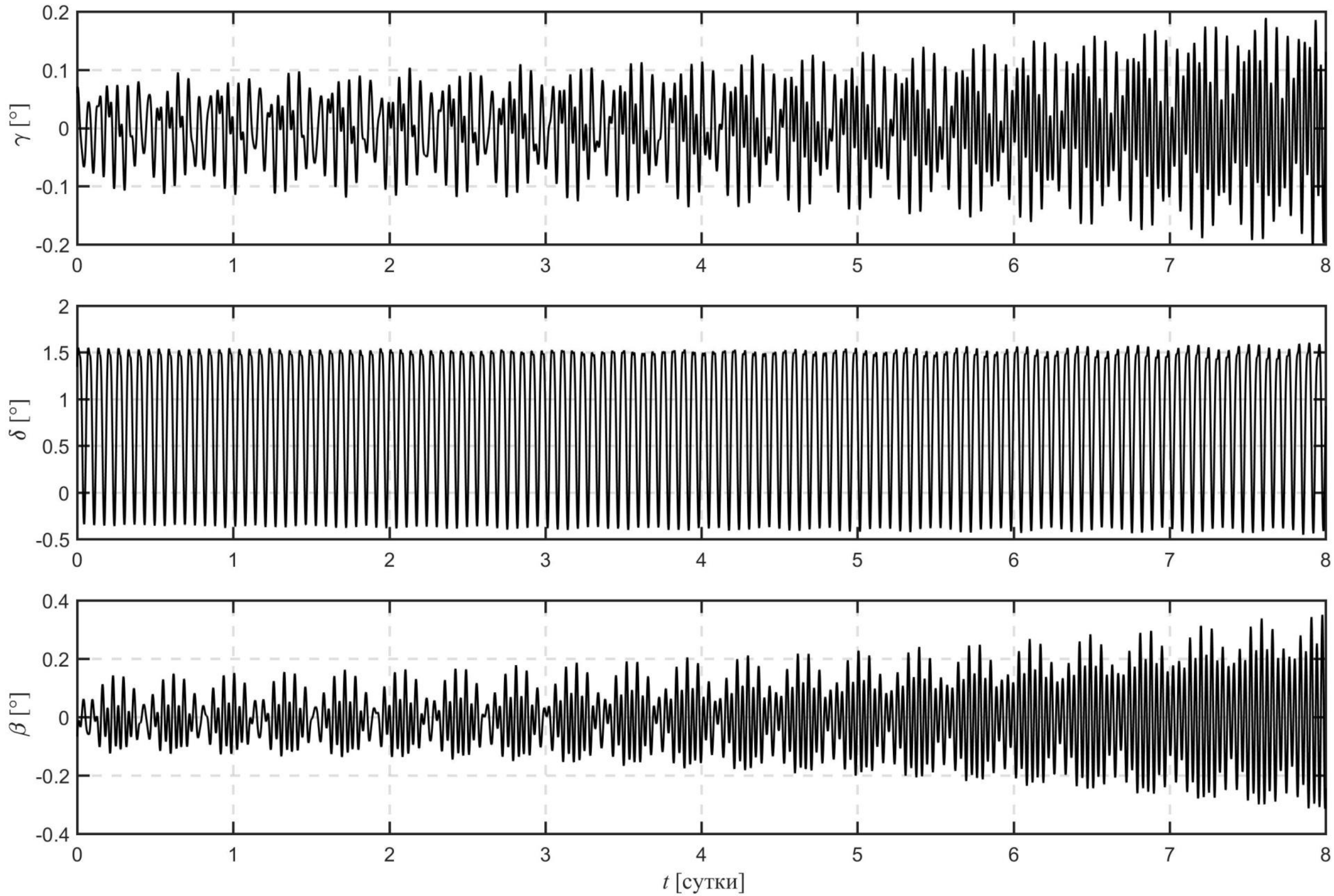

Рис. 1. Углы ориентации ИСЗ в режиме его пассивной гравитационной ориентации.

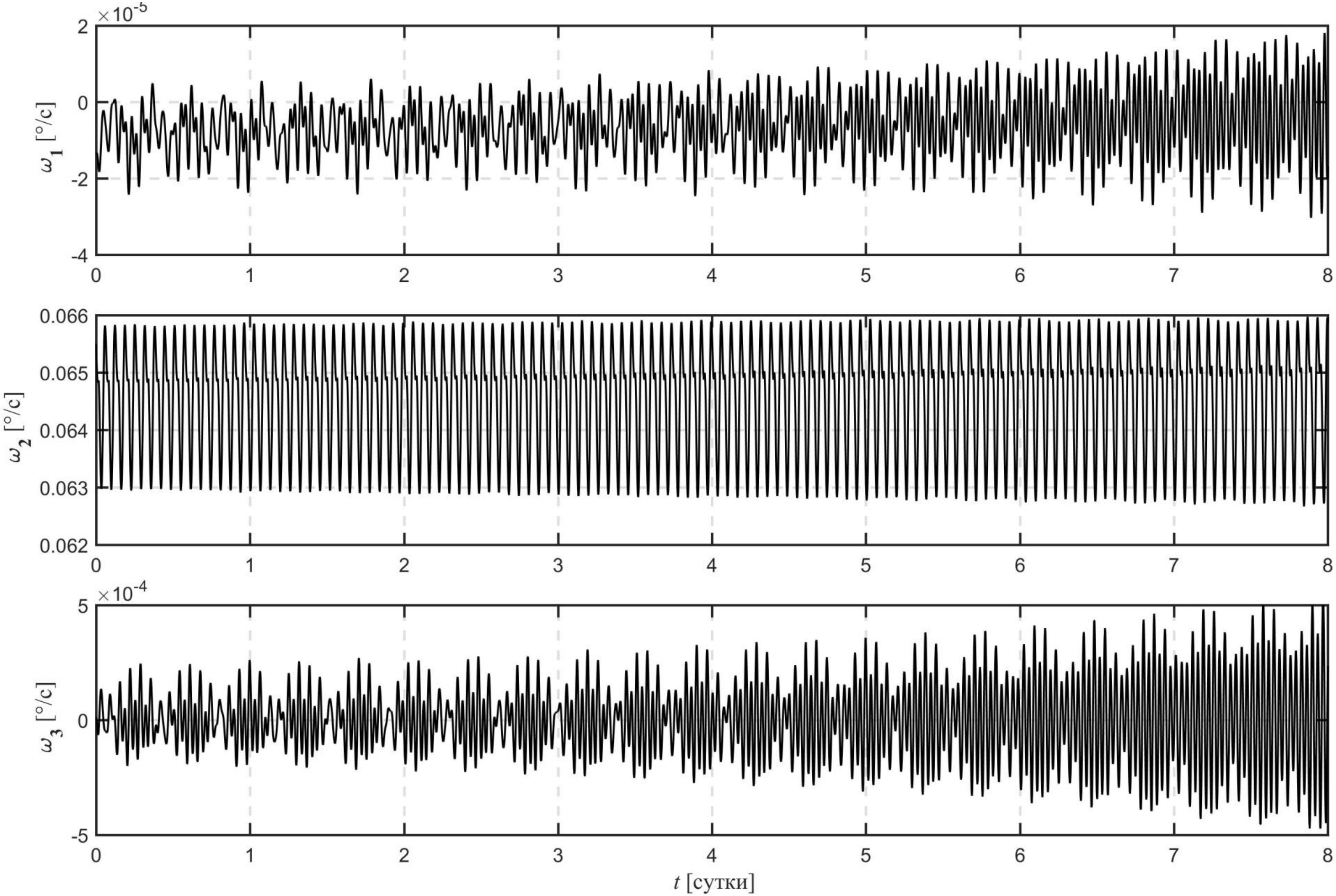

Рис. 2. Угловая скорость ИСЗ в режиме его пассивной гравитационной ориентации.

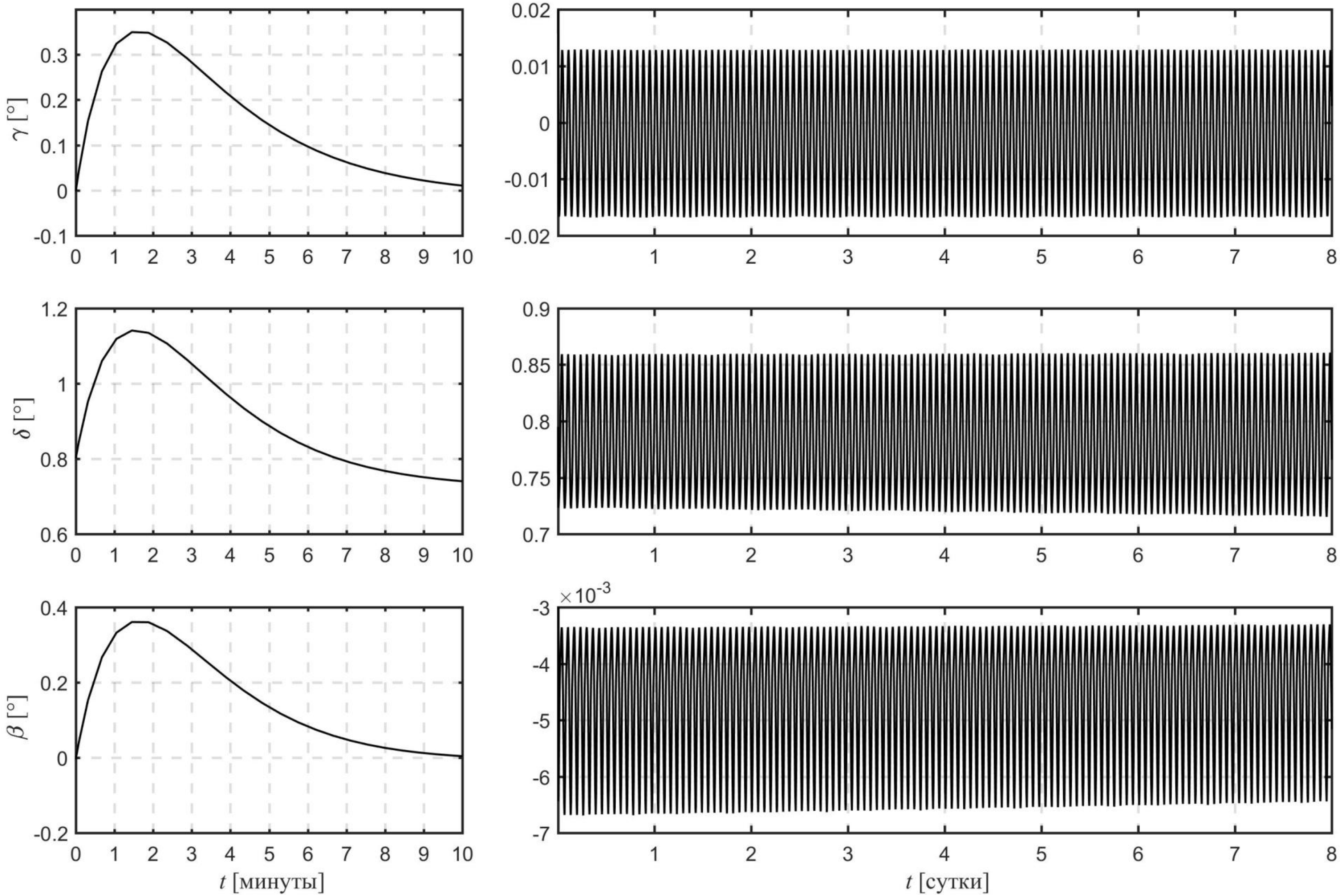

Рис. 3. Углы ориентации ИСЗ в режиме его орбитальной ориентации (9), (11).

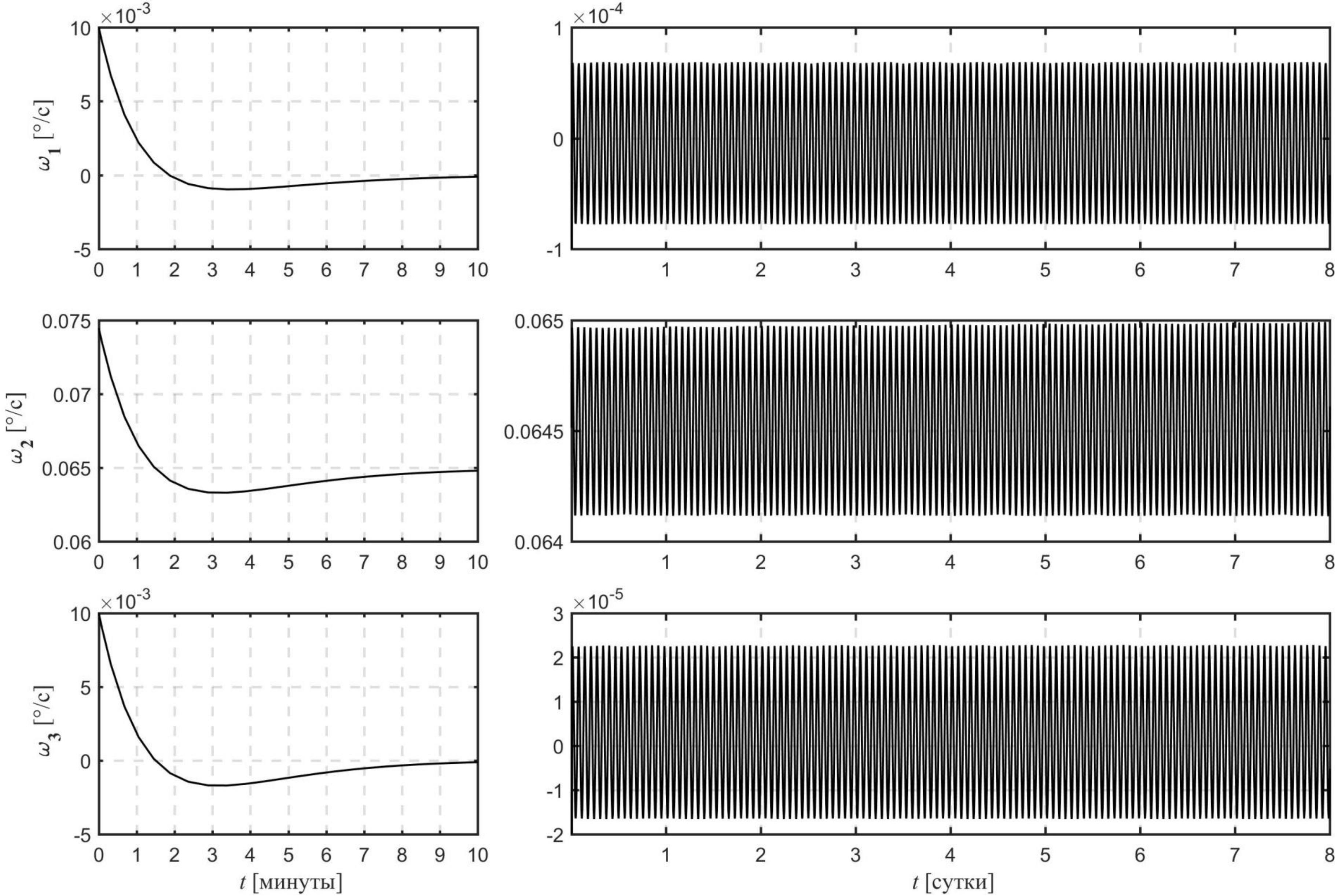

Рис. 4. Угловая скорость ИСЗ в режиме его орбитальной ориентации (9), (11).

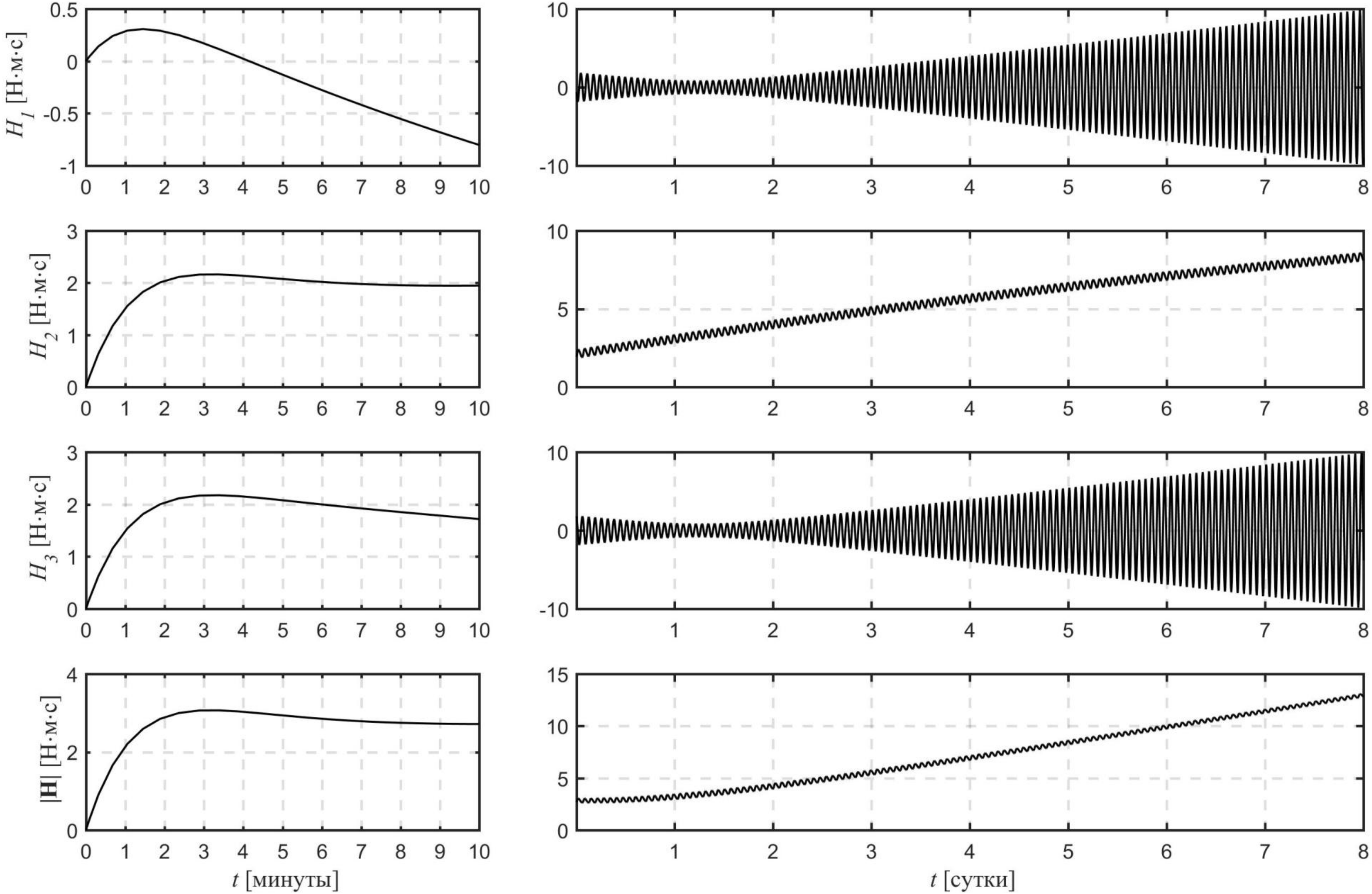

Рис. 5. Гиростатический момент ИСЗ в режиме его орбитальной ориентации (9), (11).

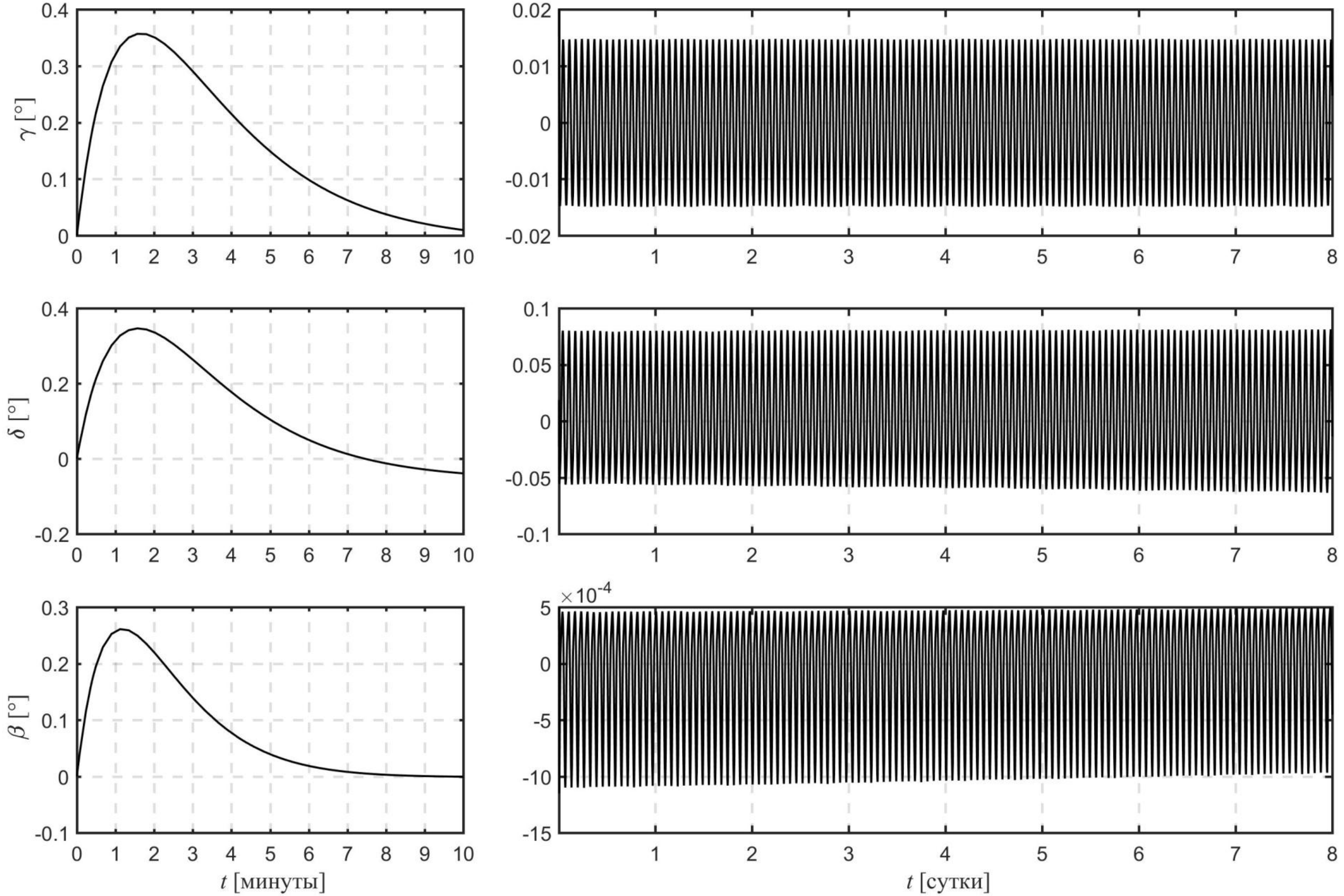

Рис. 6. Углы ориентации ИСЗ в режиме его орбитальной ориентации (9), (15).

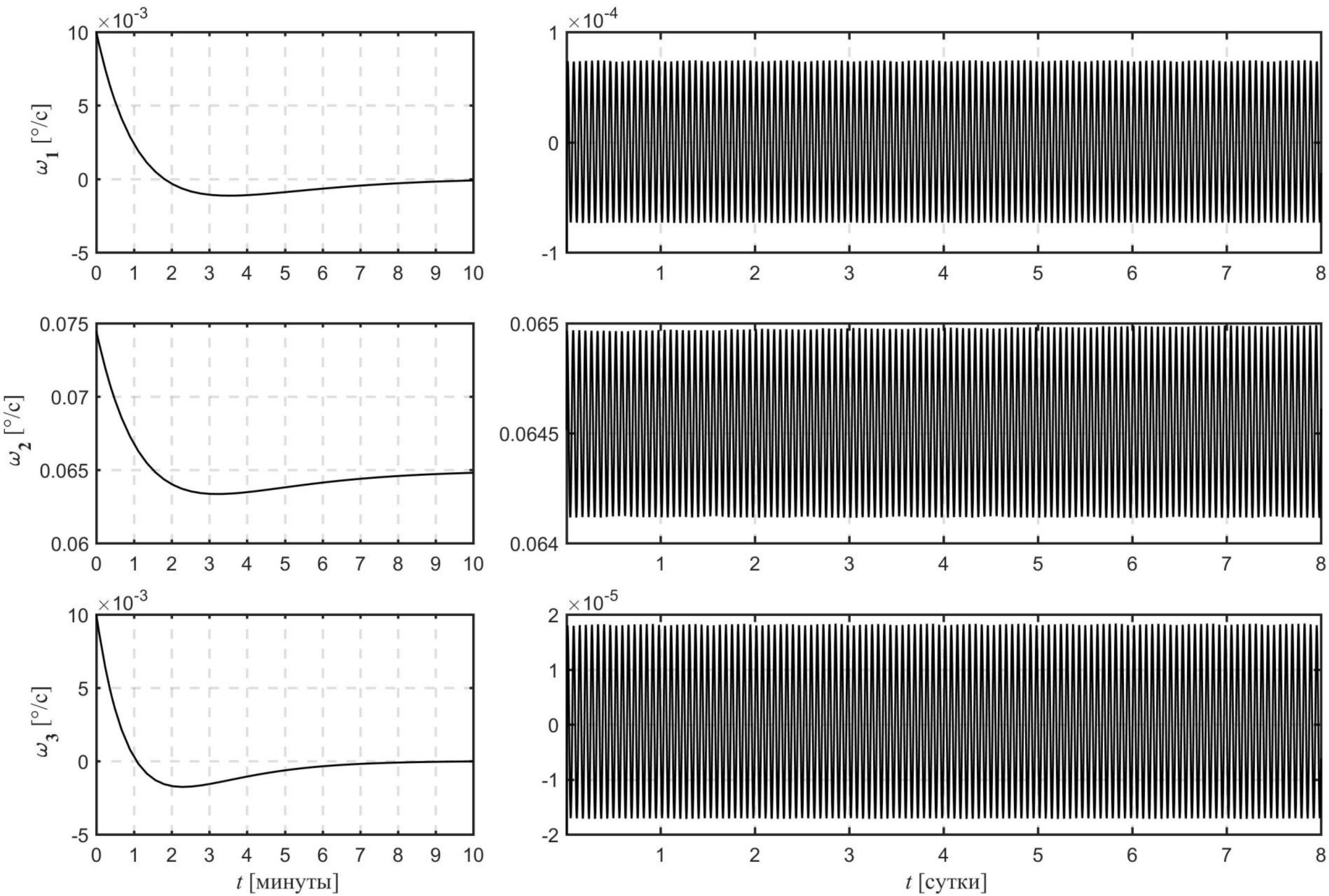

Рис. 7. Угловая скорость ИСЗ в режиме его орбитальной ориентации (9), (15).

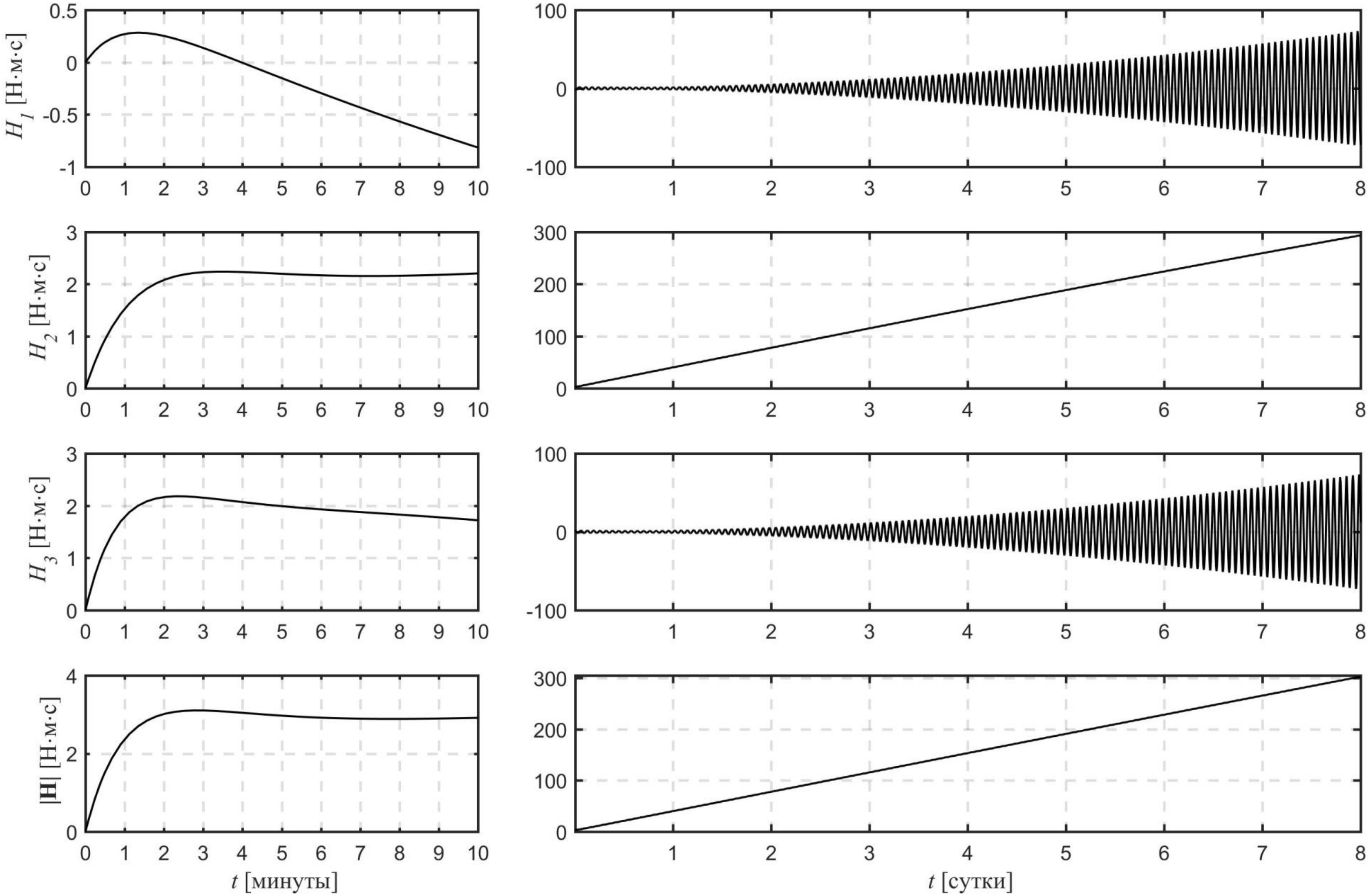

Рис. 8. Гиростатический момент ИСЗ в режиме его орбитальной ориентации (9), (15).

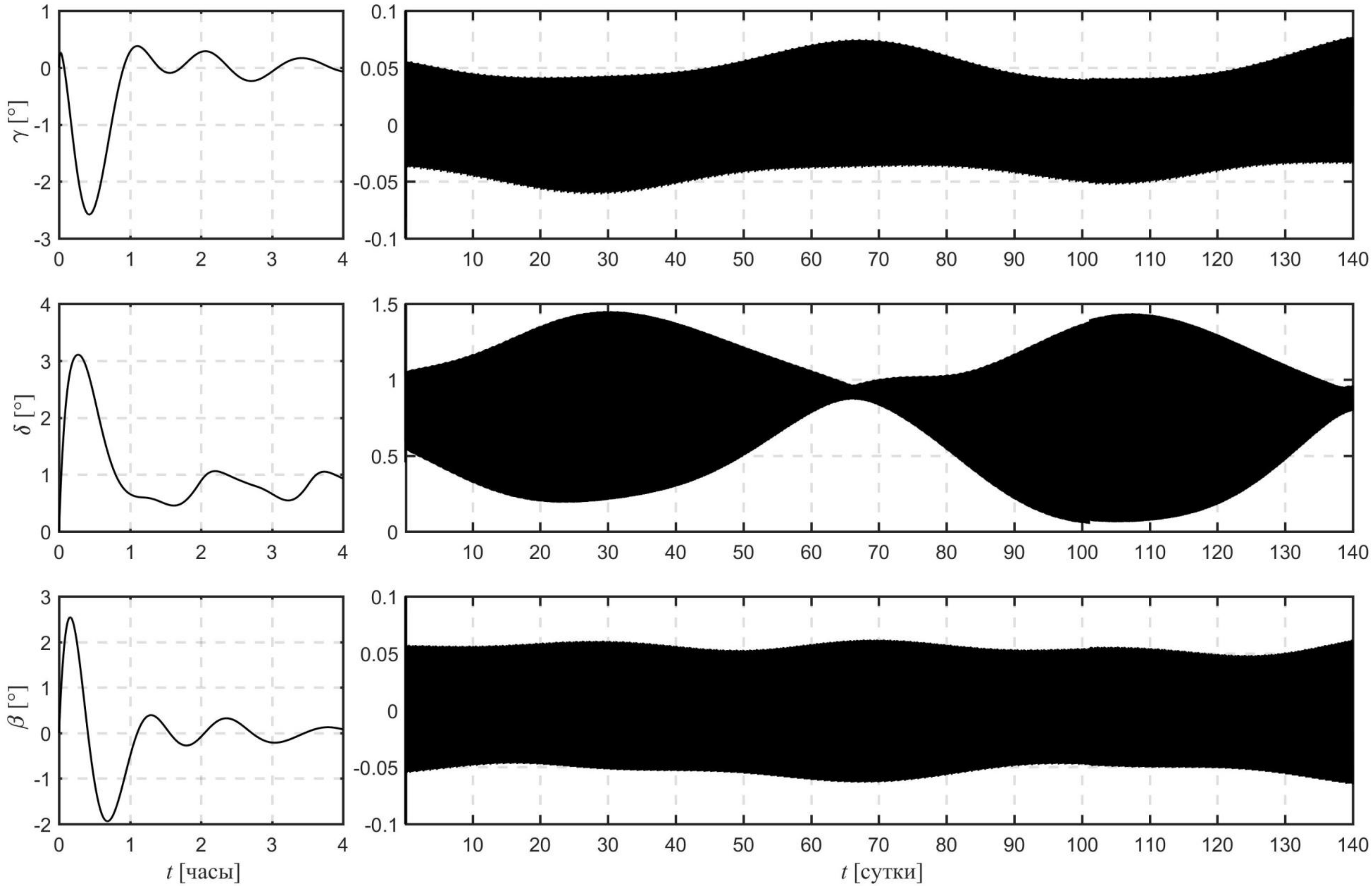

Рис. 9. Углы ориентации ИСЗ в режиме его орбитальной ориентации (9), (17).

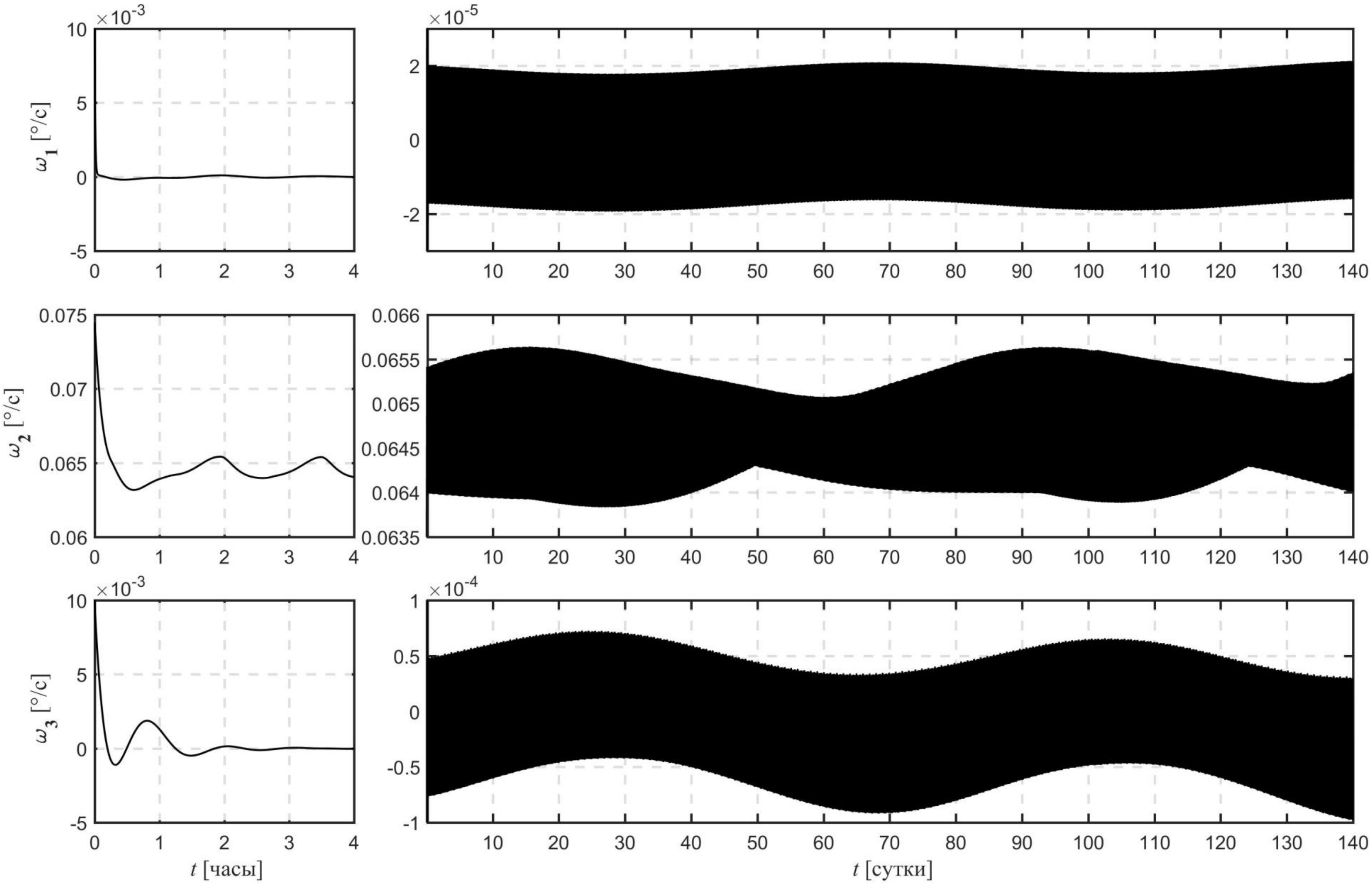

Рис. 10. Угловая скорость ИСЗ в режиме его орбитальной ориентации (9), (17).

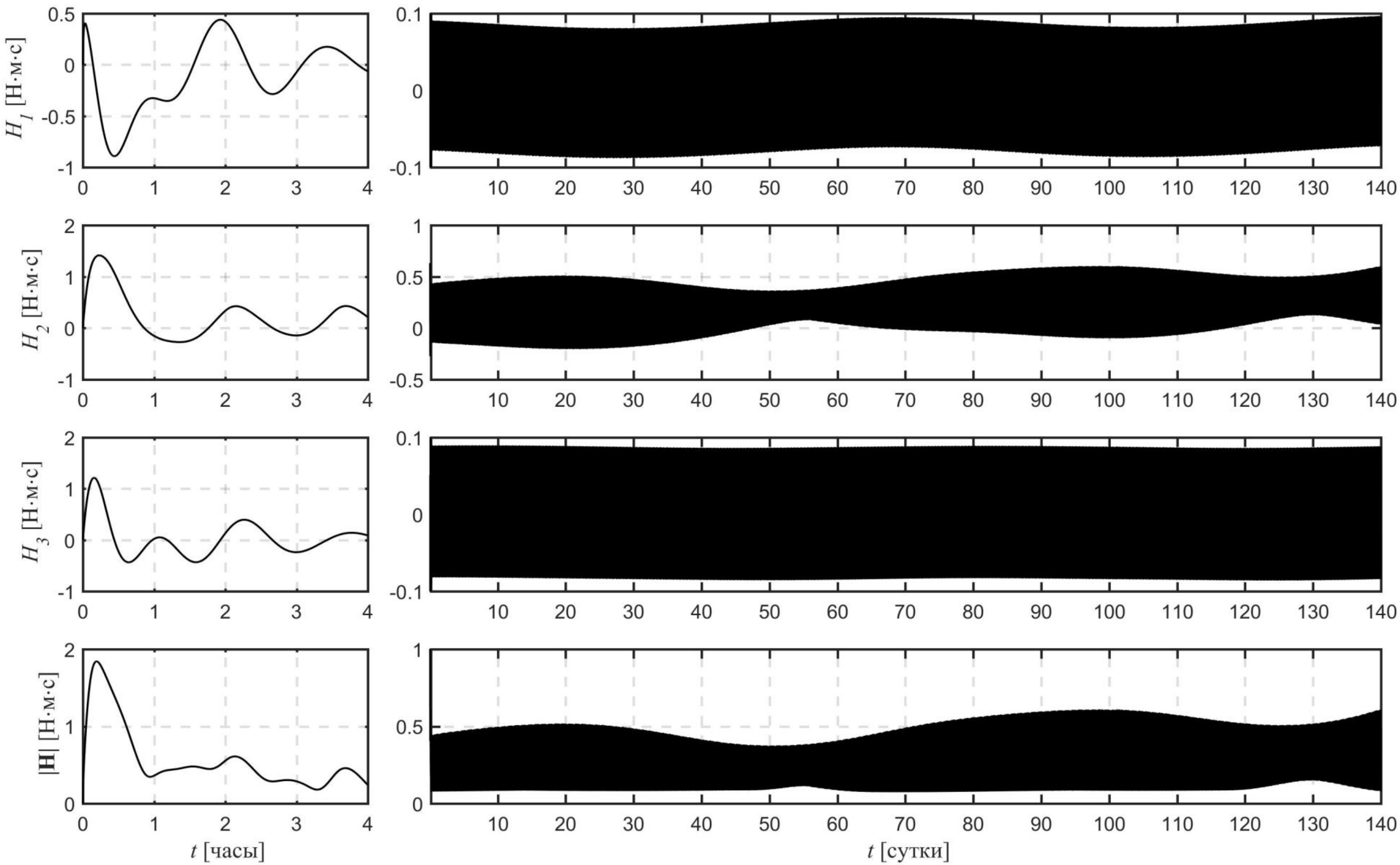

Рис. 11. Гиростатический момент ИСЗ в режиме его орбитальной ориентации (9), (17).

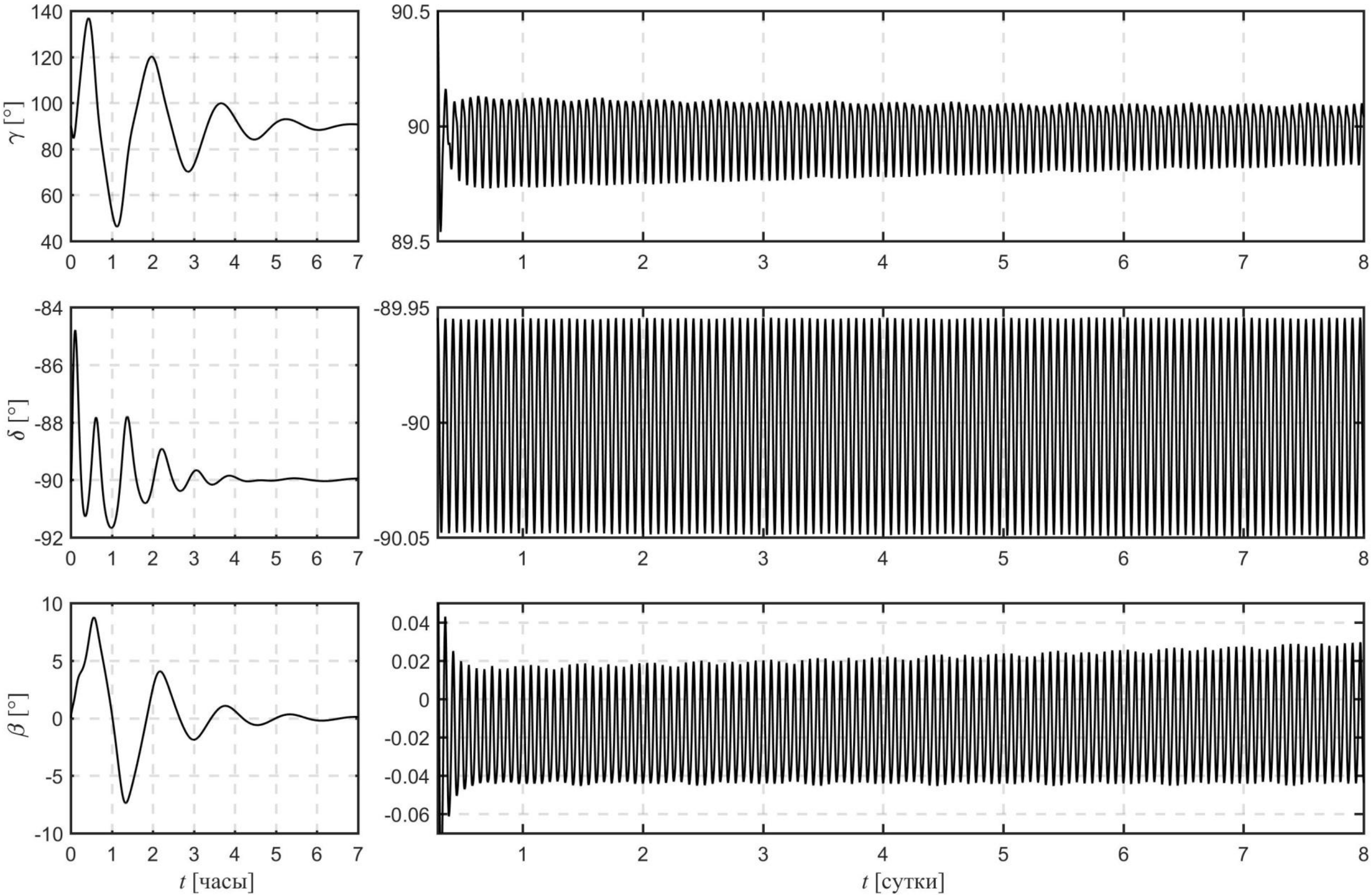

Рис. 12. Углы ориентации ИСЗ в режиме его орбитальной ориентации (9), (19).

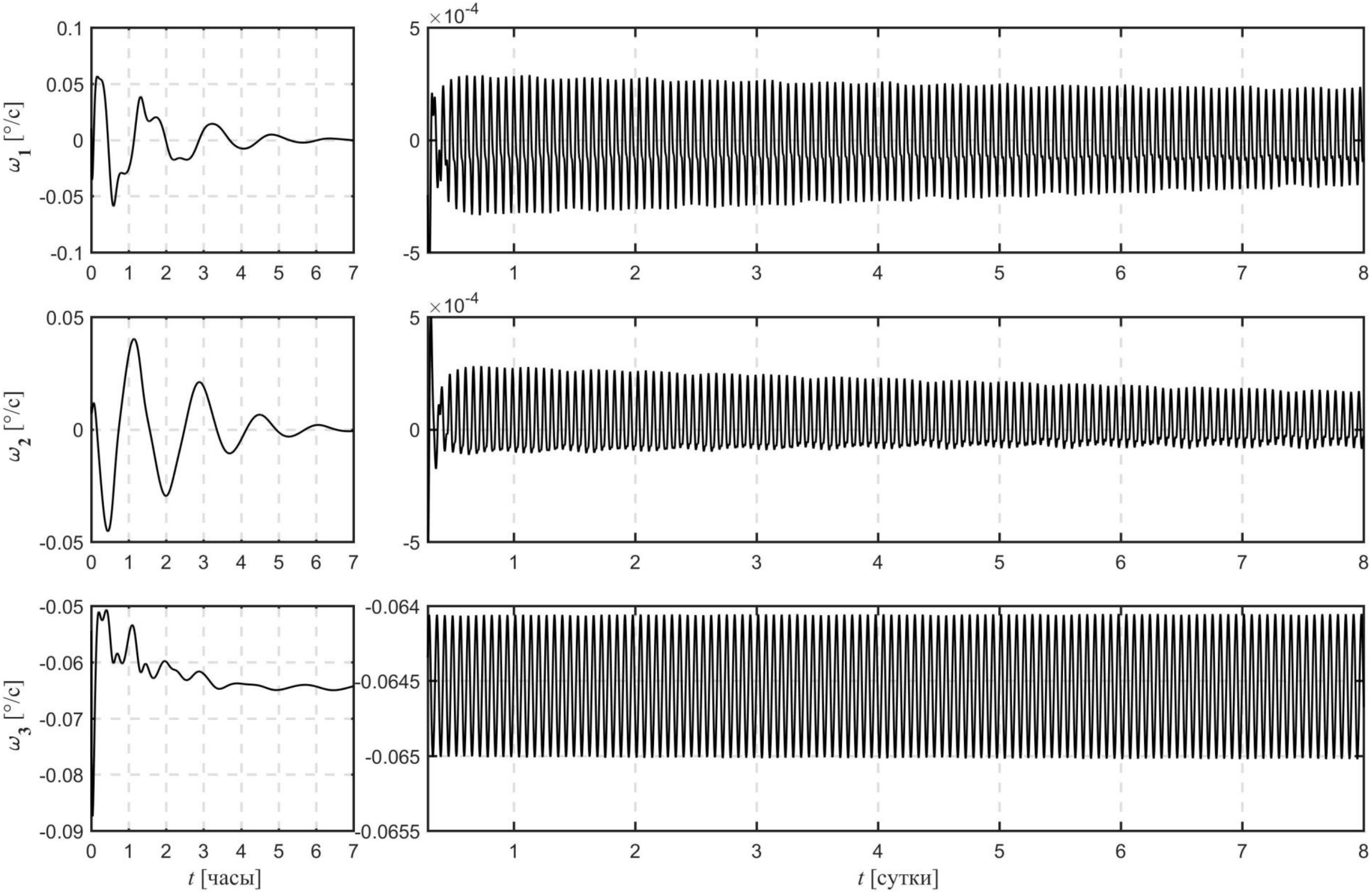

Рис. 13. Угловая скорость ИСЗ в режиме его орбитальной ориентации (9), (19).

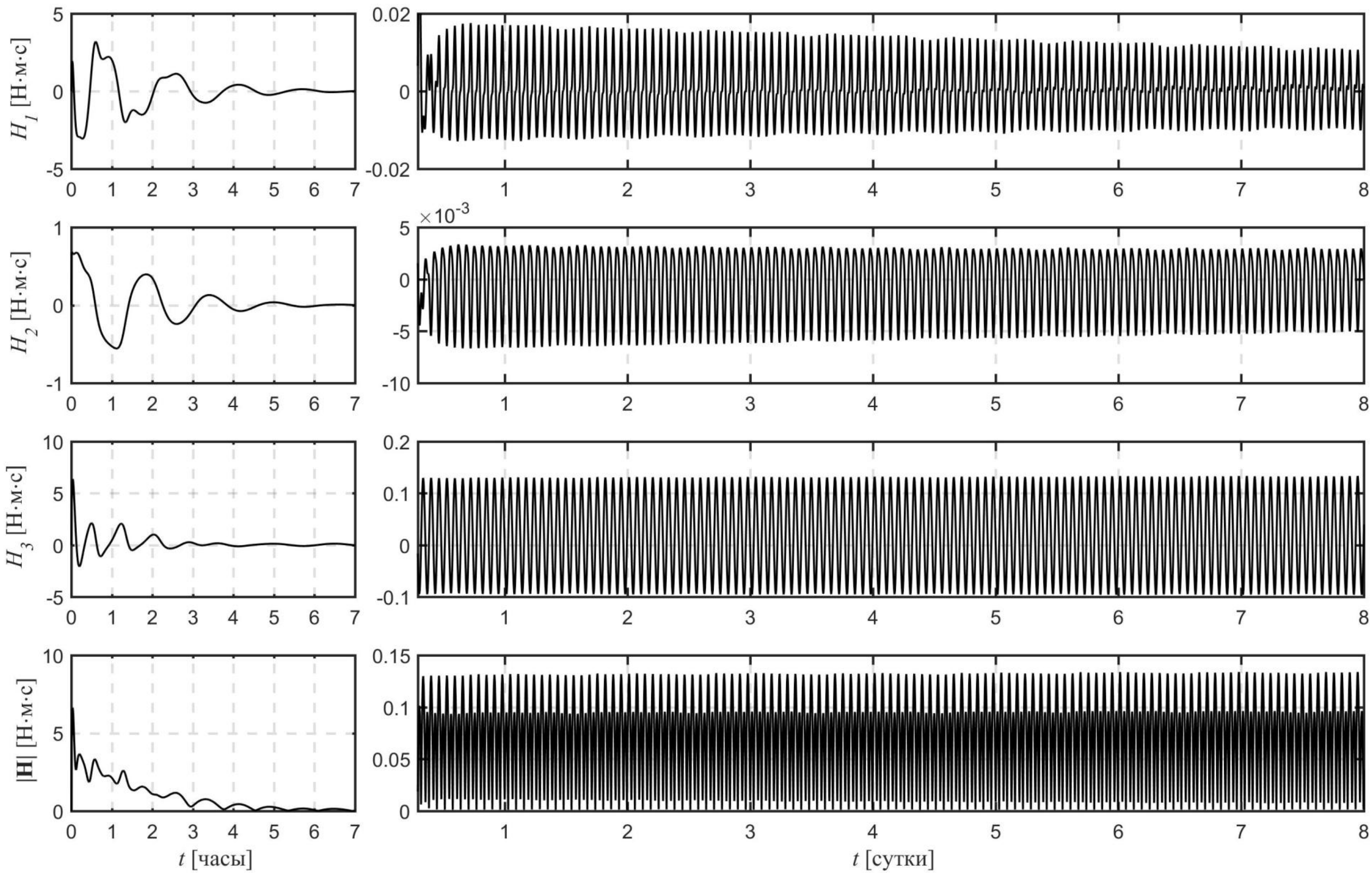

Рис. 14. Гиростатический момент ИСЗ в режиме его орбитальной ориентации (9), (19).