



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 202 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Кулешов А.А., Мышецкая Е.Е.

Алгоритм численного
решения для двумерной
трехфазной модели лесных
пожаров

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Кулешов А.А., Мышецкая Е.Е.
Алгоритм численного решения для двумерной трехфазной модели лесных пожаров //
Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 202. 16 с. doi:[10.20948/prepr-2018-202](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-202)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-202>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.А. Кулешов, Е.Е. Мышецкая

**Алгоритм численного решения
для двумерной трехфазной модели
лесных пожаров**

Москва — 2018

А.А. Кулешов, Е.Е. Мышецкая

Алгоритм численного решения для двумерной трехфазной модели лесных пожаров

Для предложенной ранее авторами двумерной трехфазной математической модели лесных пожаров разработан алгоритм численного решения, основанный на методе расщепления системы уравнений модели на несколько подсистем по физическим процессам. Полученные подсистемы уравнений аппроксимируются конечно-разностным методом. Приведены результаты демонстрационных расчетов, показывающие, что предложенная модель адекватно описывает процесс распространения лесных пожаров.

Ключевые слова: лесные пожары, двумерная математическая модель, трехфазная среда, численный метод, расщепление по физическим процессам.

Andrey Aleksandrovich Kuleshov, Elena Evgenievna Myshetskaya

Numerical algorithm for two-dimensional three-phase mathematical model of forest fires

For the developed earlier by the authors two-dimensional three-phase mathematical model of forest fires, a numerical solution algorithm based on the method of splitting the model system of equations into several subsystems by physical processes was created. The subsystems of the equations are approximated by the finite-difference method. The results of numerical simulation are showing that the developed model adequately represents the forest fires propagation process.

Key words: forest fires, two-dimensional mathematical model, three-phase medium, numerical method, splitting by physical processes.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00405-а.

Оглавление

Введение	3
1. Система уравнений двумерной трехфазной модели лесных пожаров	3
2. Алгоритм численного решения задачи	7
3. Результаты модельных расчетов.....	14
Заключение.....	16
Список литературы.....	16

Введение

В работе [1] была построена двумерная трехфазная модель лесных пожаров, описывающая распространение пожара в одном слое лесных горючих материалов (ЛГМ) постоянной толщины с постоянными физико-химическими параметрами среды (истинная плотность, влагосодержание, теплотворная способность и т.д.) в этом слое. Для описания пожара в слое ЛГМ использована модель двухфазной среды [2], в которой газоздушная или газовая фаза состоит из воздуха и легких летучих продуктов пиролиза и горения, а твердая фаза состоит из лесных горючих материалов и твердых продуктов пиролиза ЛГМ. Для описания механизма распространения пожара крупными горящими дисперсными частицами в [1] рассматривается третья – дисперсная фаза. Такие частицы переносятся ветром над слоем ЛГМ и, оседая, образуют новые очаги пожара перед основным его фронтом.

В настоящей работе рассматривается алгоритм численного решения задачи и приводятся некоторые результаты модельных расчетов.

1. Система уравнений двумерной трехфазной модели лесных пожаров

Для наглядного описания алгоритма численного решения задачи необходимо привести исходную систему уравнений двумерной трехфазной модели лесных пожаров, построенную в [1]. Система уравнений модели была получена интегрированием по высоте слоя ЛГМ (яруса леса) исходных трехмерных уравнений, состоит из подсистемы осредненных по Фавру уравнений газовой динамики для многокомпонентной газовой фазы, подсистемы уравнений для массы компонент твердой фазы и ее энергии и подсистемы переноса массы и энергии крупных дисперсных частиц. Уравнения модели имеют следующий вид:

газовая фаза:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = Q - J_\rho, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) + \nabla (\phi p) = \nabla \cdot (\mu_{eff} \nabla \mathbf{V}) + \mathbf{F} + \mathbf{F}_w - \mathbf{J}_v, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} E + \phi p \mathbf{V}) = \nabla \cdot (k_{eff} \nabla T) + \alpha (T_1 - T) + \sigma (\alpha_1 T_1^4 - \alpha T^4) + \\ + \alpha_d (T_d - T) + \sigma (\alpha_d T_d^4 - \alpha T^4) + f_\Gamma + f_{\Gamma R} + q_1 W + q_s W_s - J_E, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho C_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} C_i) = \nabla \cdot (\rho D_{eff} \nabla C_i) + Q_i + W_i + W_i^s - J_{C_i}, \quad i = \overline{1,5}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho C_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} C_s) = Q_s - W_s - J_s, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} k) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \nabla k \right) + G + P_k - \rho \varepsilon - L_k, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \varepsilon) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) + c_1 G \frac{\varepsilon}{k} + P_\varepsilon - c_2 \frac{\rho \varepsilon^2}{k} - L_\varepsilon, \quad (7)$$

$$p = \rho^0 R T \sum_{i=1}^5 \frac{C_i}{M_i}; \quad (8)$$

твёрдая фаза:

$$\rho_j^0 \frac{\partial \phi_j}{\partial t} = R_{\phi_j}, \quad j = \overline{1, 3}; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^3 \rho_j^0 \phi_j c_{pj} T_1 = & -\alpha (T_1 - T) - \sigma (\varkappa_1 T_1^4 - \varkappa T^4) - \\ & -\alpha_2 (T_1 - T_d) - \sigma (\varkappa_1 T_1^4 - \varkappa_d T_d^4) + Q_{T_1}; \end{aligned} \quad (10)$$

дисперсная фаза:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_d}{\partial t} = -c_f (\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_w) |\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_w|, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_d \mathbf{V}_d) = R_d - J_d, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_d c_{pd} T_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_d \mathbf{V}_d c_{pd} T_d) = & -\alpha_1 (T_d - T) - \alpha_2 (T_d - T_1) - \\ & -\sigma (\varkappa_d T_d^4 - \varkappa T^4) - \sigma (\varkappa_d T_d^4 - \varkappa_1 T_1^4) - J_{T_d} + Q_{T_d}; \end{aligned} \quad (13)$$

нормировочные и балансные соотношения:

$$\begin{aligned} \phi + \sum_{j=1}^3 \phi_j + \phi_d = 1, \quad \sum_{i=1}^5 C_i + C_s = 1, \\ \sum_{i=1}^5 (Q_i + W_i + W_i^s) + Q_s - W_s = Q, \quad \sum_{j=1}^3 R_{\phi_j} = -Q. \end{aligned} \quad (14)$$

Система уравнений (1)-(14) рассматривается в декартовых координатах в прямоугольной области $\Omega = \{0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$ на горизонтальной плоскости XU ; ρ – парциальная плотность газовой фазы; p – общее давление многофазной

среды; $\mathbf{V}=(u, v)$ – вектор скорости газовой фазы; T – температура газовой фазы; E – полная энергия газовой фазы, $E=0.5(u^2+v^2)+c_v T$; c_v – удельная теплоемкость газовой фазы; ϕ – ее объемная доля; $\rho^0=\rho/\phi$ – ее истинная плотность; R – универсальная газовая постоянная; M_i – молекулярная масса i -й компоненты газовой фазы; $\mathbf{F}=-\rho c_d s \mathbf{V}|\mathbf{V}|$ – объемная сила, связанная с обменом импульсами между фазами (сила межфазного трения); c_d – эмпирический коэффициент сопротивления растительности; s – удельная поверхность ЛГМ; $\mathbf{F}_w=-\rho \xi (\mathbf{V}-\mathbf{V}_w)|\mathbf{V}-\mathbf{V}_w|$ – сила трения, обусловленная ветром на верхней границе слоя ЛГМ, имеющим скорость \mathbf{V}_w ; ξ – безразмерный эмпирический коэффициент трения; C_i $i=\overline{1,5}$ – массовые концентрации горючего газа (СО), окислителя (О₂), углекислого газа (СО₂), паров воды (Н₂О) и азота (N₂) соответственно; C_s – массовая концентрация мелкодисперсной сажи; Q – скорость поступления вещества в газовую среду в результате химических процессов в твердой фазе; ϕ_j , $j=\overline{1,3}$ – объемные доли компонентов твердой фазы: ЛГМ, коксика и золы соответственно; ρ_j^0 , $j=\overline{1,3}$ – истинная плотность j -й компоненты твердой фазы, $\rho_j^0=\text{const}$; R_{ϕ_j} – скорость изменения массы j -й компоненты твердой фазы в результате химических реакций; T_1 – температура твердой фазы; Q_{T_1} – тепловыделение в твердой фазе в процессе горения; c_{pj} – удельная теплоемкость компонент твердой фазы; W – массовая скорость реакции горения СО; W_s – массовая скорость горения сажи; W_i, W_i^s , $i=\overline{1,5}$ – скорости образования или потребления компонент газовой фазы в соответствующих реакциях, $\rho_d, T_d, \mathbf{V}_d=(u_d, v_d), \phi_d$ – парциальная плотность, температура, скорость и объемная доля дисперсной фазы соответственно, коэффициент сопротивления частиц c_f зависит от формы частиц, площади сечения частиц, которые будем полагать одинаковыми (рассматривается монодисперсная смесь), и числа Рейнольдса: так, согласно [14], при $\text{Re} > 2 \cdot 10^6$ $c_f = 0.1 k_f \pi r^2$, где k_f – коэффициент формы частицы; $\mathbf{V}_w=(u_w, v_w)$ – скорость ветра над лесным массивом; $\phi_d = \rho_d / \rho_d^0$, где ρ_d^0 и c_{pd} – истинная плотность и удельная теплоемкость материала дисперсных частиц соответственно, и, так как дисперсные частицы и коксик состоят из углерода, то $\rho_d^0 = \rho_2^0$, $c_{pd} = c_{p2}$ и равны соответствующим параметрам углерода.

Для турбулентного замыкания системы (1)-(5) использована модифицированная модель турбулентности, содержащая в правых частях уравнений для турбулентной кинетической энергии k и скорости ее диссипации ε , помимо обычного выражения для скорости генерации турбулентной энергии G , дополнительные члены P_k, P_ε и L_k, L_ε , которые описывают соответственно

генерацию и диссипацию турбулентности за счет взаимодействия потока с ЛГМ [2]. Эффективный коэффициент вязкости равен сумме динамической и турбулентной вязкости $\mu_{eff} = \mu_l + \mu_t$.

Эффективный коэффициент теплопроводности $k_{eff} = k_l + k_t + k_r$ есть сумма коэффициентов молекулярной, турбулентной и лучистой теплопроводности соответственно, где $k_l = c_p \mu_l / Pr$, $k_t = c_p \mu_t / Pr_t$, $Pr = Pr_t = 0.7$ – ламинарное и турбулентное числа Прандтля. В качестве модели переноса излучения рассматривается модель лучистой теплопроводности, подробно описанная в [5], в которой плотность потока энергии излучения определяется формулой $\mathbf{W}_r = -k_r \nabla T$, $k_r = 16\sigma l_s T^3 / 3$, l_s – длина пробега излучения, σ – постоянная Стефана–Больцмана.

Эффективный коэффициент диффузии $D_{eff} = \mu_l / \rho Sc + \mu_t / \rho Sc_t$, где $Sc = Sc_t = 0.7$ – ламинарное и турбулентное числа Шмидта.

Модель горения в газовой фазе, химические процессы в твердой и дисперсной фазах, члены $J_\rho, \mathbf{J}_v, J_E, \mathbf{J}_C, J_s, J_d$, описывающие потоки вещества, импульса и энергии через верхнюю и нижнюю границы слоя ЛГМ, а также члены, отвечающие за межфазный теплообмен и обмен лучистой энергией, подробно описаны в [1].

Граничные условия для системы (1)-(14) задаются на открытой боковой границе Γ расчетной области. На тех участках границы, где поток втекает в расчетную область, задаются параметры невозмущенной окружающей среды (с индексом a)

$$\Phi|_{\Gamma} = \Phi_a, \quad \Phi = (\rho, u, v, T)^T, \quad (\mathbf{V}, \mathbf{n}) \leq 0,$$

а на участках границы, где газ вытекает из области, задаются условия

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \Phi = (\rho, u, v, E, \mathbf{C}, \rho_d, T_d)^T, \quad (\mathbf{V}, \mathbf{n}) > 0.$$

Начальные значения параметров вне источника пожара – это параметры окружающей среды, а в очаге пожара задаются характерные для рассматриваемого вида пожара и типа ЛГМ значения параметров $(T^0, T_1^0, T_d^0, \mathbf{C}^0, \mathbf{C}_s^0, \rho_d^0)$, начальные скорости газовой и дисперсной фаз равны нулю $\mathbf{V}^0 = 0, \mathbf{V}_d^0 = 0$, а давление в начальный момент времени задается равным атмосферному $p^0 = p_a$ (известно, что в открытых системах давление выравнивается) и из уравнения состояния находится неизвестное нам значение плотности газовой фазы в начальный момент времени.

2. Алгоритм численного решения задачи

2.1. Метод расщепления задачи по физическим процессам

Алгоритм численного решения задачи, так же как алгоритм для двумерной двухфазной модели лесных пожаров, разработанный и применявшийся авторами ранее [2-6], основан на широко известном методе расщепления задачи по физическим процессам. На временном шаге $[t_n, t_{n+1}]$ последовательно решаются задачи, начальными данными в которых служат решения, полученные на предыдущих этапах.

Этап 1. Перенос газовой фазы:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{F})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{F})}{\partial y} = 0,$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho \mathbf{C} \\ \rho C_s \\ \rho k \\ \rho \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \phi p \\ \rho uv \\ \rho uE + \phi pu \\ \rho u \mathbf{C} \\ \rho u C_s \\ \rho uk \\ \rho u \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + \phi p \\ \rho vE + \phi pv \\ \rho v \mathbf{C} \\ \rho v C_s \\ \rho vk \\ \rho v \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Этап 2. Учет выбывания субстанции на верхней и нижней границах слоя ЛГМ:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = -\mathbf{J}_{\mathbf{F}}, \quad \frac{\partial F_d}{\partial t} = -J_{F_d},$$

где член J_E включает также члены обмена тепловой энергией f_{Γ} и лучистой энергией $f_{\Gamma R}$ на верхней и нижней границах слоя ЛГМ.

После 2-го этапа вычисляются:

$$u = \frac{(\rho u)}{\rho}, \quad v = \frac{(\rho v)}{\rho}, \quad E = \frac{(\rho E)}{\rho}, \quad \mathbf{C} = \frac{(\rho \mathbf{C})}{\rho}, \quad C_s = \frac{(\rho C_s)}{\rho}, \quad T = \frac{1}{c_v} \left(E - \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right),$$

$$k = \frac{(\rho k)}{\rho}, \quad \varepsilon = \frac{(\rho \varepsilon)}{\rho}.$$

Этап 3. Учет межфазного трения:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -c_d s \mathbf{V} |\mathbf{V}|, \quad \mathbf{V} = (u, v)^T.$$

Этап 4. Учет влияния ветра на верхней границе слоя ЛГМ:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\xi (\mathbf{V} - \mathbf{V}_w) |\mathbf{V} - \mathbf{V}_w|.$$

Этап 5. Учет вязкости, теплопроводности и диффузии:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{K} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{K} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right),$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ T \\ \mathbf{C} \\ k \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \nu_{eff} \\ \nu_{eff} \\ \hat{k}_{eff} \\ D_{eff} \\ \nu_{eff}/\sigma_k \\ \nu_{eff}/\sigma_\varepsilon \end{pmatrix},$$

где $\nu_{eff} = \mu_{eff}/\rho$, $\hat{k}_{eff} = k_{eff}/\rho$.

Этап 6. Учет генерации и диссипации турбулентной кинетической энергии и скорости ее диссипации:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} = G + P_k - \rho \varepsilon - L_k,$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} = c_1 G \frac{\varepsilon}{k} + P_\varepsilon - c_2 \frac{\rho \varepsilon^2}{k} - L_\varepsilon.$$

Этап 7. Вычисление скорости дисперсной фазы:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_d}{\partial t} = -c_f (\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_w) |\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_w|.$$

Этап 8. Перенос массы и энергии дисперсной фазы:

$$\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \frac{\partial \rho_d u_d}{\partial x} + \frac{\partial \rho_d v_d}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_d c_{pd} T_d}{\partial t} + \frac{\partial \rho_d u_d c_{pd} T_d}{\partial x} + \frac{\partial \rho_d v_d c_{pd} T_d}{\partial y} = 0.$$

Этап 9. Учет химических реакций:

изменение массы и массовых концентраций в газовой и дисперсной фазах и объемных долей компонентов твердой фазы за счет химических реакций

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = Q, \quad \rho_j^0 \frac{\partial \phi_j}{\partial t} = R_{\phi_j}, \quad j = \overline{1,3}, \quad \frac{\partial \rho_d}{\partial t} = R_d, \quad \phi_d = \rho_d / \rho_c, \quad \phi = 1 - \sum_{j=1}^3 \phi_j - \phi_d,$$

$$\frac{\partial \rho C_i}{\partial t} = Q_i + W_i + W_i^s, \quad i = \overline{1,5}, \quad C_s = 1 - \sum_{i=1}^5 C_i;$$

изменение тепловой энергии за счет химических реакций

$$\frac{\partial \rho c_v T}{\partial t} = q_l W + q_s W_s, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^m \rho_j c_{pj} \phi_j T_1 \right) = Q_{T_1}, \quad \frac{\partial \rho_d c_{pd} T_d}{\partial t} = Q_{T_d}.$$

Этап 10. Учет межфазного теплообмена и обмена лучистой энергией:

$$\frac{\partial \rho c_v T}{\partial t} = \alpha (T_1 - T) + \alpha_1 (T_d - T) + \sigma (\varepsilon_1 T_1^4 - \varepsilon T^4) + \sigma (\varepsilon_d T_d^4 - \varepsilon T^4),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^3 \rho_j^0 \phi_j c_{pj} T_1 = -\alpha (T_1 - T) - \alpha_2 (T_1 - T_d) - \sigma (\varepsilon_1 T_1^4 - \varepsilon T^4) - \sigma (\varepsilon_1 T_1^4 - \varepsilon_d T_d^4),$$

$$\frac{\partial \rho_d c_{pd} T_d}{\partial t} = -\alpha_1 (T_d - T) - \alpha_2 (T_d - T_1) - \sigma (\varepsilon_d T_d^4 - \varepsilon T^4) - \sigma (\varepsilon_d T_d^4 - \varepsilon_1 T_1^4).$$

2.2. Численные методы решения подсистем уравнений

2.2.1. Численный метод решения подсистем уравнений этапов 1,5

Рассмотренные в п. 2.1 подсистемы уравнений решались методом конечных разностей на прямоугольной сетке, введенной в области Ω . Подсистема уравнений переноса этапа 1 была аппроксимирована явной TVD разностной схемой [6,7]. Для системы параболических уравнения этапа 5 была применена стандартная конечно-разностная аппроксимация [8].

2.2.2. Решение подсистем уравнений этапов 3, 4, 7

Решение подсистем уравнений этапов 3, 4, 7 на отрезке $[t_n, t_{n+1}]$ можно получить аналитически. Рассмотрим, например, подсистему этапа 4

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\xi(u - u_w) |\mathbf{V} - \mathbf{V}_w|, \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\xi(v - v_w) |\mathbf{V} - \mathbf{V}_w|, \quad t_n < t \leq t_{n+1}, \quad (16)$$

$$u|_{t=t_n} = \tilde{u}^n, \quad v|_{t=t_n} = \tilde{v}^n,$$

где \tilde{u}^n, \tilde{v}^n – решения, полученные на рассматриваемом временном шаге, после этапа 3.

Умножая первое уравнение на $u - u_w$, а второе – на $v - v_w$ и складывая их, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left((u - u_w)^2 + (v - v_w)^2 \right) = -\xi \left((u - u_w)^2 + (v - v_w)^2 \right) |\mathbf{V} - \mathbf{V}_w|. \quad (17)$$

Введем обозначение $R(t) = (u - u_w)^2 + (v - v_w)^2$, тогда $|\mathbf{V} - \mathbf{V}_w| = \sqrt{R(t)}$ и уравнение (17) примет вид

$$\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial t} = -\xi R^{3/2}.$$

Отсюда

$$-dR^{-1/2} = -\xi dt,$$

$$R^{-1/2}(t) = R^{-1/2}(t_n) + \xi(t - t_n),$$

$$\sqrt{R(t)} = \frac{\sqrt{R(t_n)}}{1 + \xi(t - t_n)\sqrt{R(t_n)}} = |\mathbf{V} - \mathbf{V}_w|, \quad (18)$$

$$\sqrt{R(t_n)} = |\tilde{\mathbf{V}}^n - \mathbf{V}_w|.$$

Подставляя выражение (18) в уравнение (15) и разделяя переменные, получаем

$$\frac{d(u - u_w)}{u - u_w} = -\frac{\xi \sqrt{R(t_n)} dt}{1 + \xi \sqrt{R(t_n)} (t - t_n)}.$$

Отсюда

$$\ln(u - u_w) - \ln(\tilde{u}^n - u_w) = -\ln \left[1 + \xi \sqrt{R(t_n)} (t - t_n) \right],$$

$$u = u_w + \frac{\tilde{u}^n - u_w}{1 + \xi |\tilde{\mathbf{V}}^n - \mathbf{V}_w| (t - t_n)}.$$

Аналогично из уравнения (16) получим

$$v = v_w + \frac{\tilde{v}^n - v_w}{1 + \xi |\tilde{\mathbf{V}}^n - \mathbf{V}_w| (t - t_n)}.$$

Тогда решение системы (15),(16) в момент t_{n+1} имеет вид

$$\tilde{u}^{n+1} = \frac{\tilde{u}^n + \xi u_w |\tilde{\mathbf{V}}^n - \mathbf{V}_w| \Delta t}{1 + \xi |\tilde{\mathbf{V}}^n - \mathbf{V}_w| \Delta t}, \quad (19)$$

$$\tilde{v}^{n+1} = \frac{\tilde{v}^n + \xi v_w |\tilde{\mathbf{V}}^n - \mathbf{V}_w| \Delta t}{1 + \xi |\tilde{\mathbf{V}}^n - \mathbf{V}_w| \Delta t}. \quad (20)$$

Решение подсистем этапов 3 и 7 аналогично решению (19),(20) подсистемы (15),(16) при $\mathbf{V}_w = 0$.

2.2.2. Решение подсистемы уравнений этапа 10

Подсистема уравнений этапа 10, в свою очередь, решается расщеплением на несколько подсистем обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведем для краткости изложения лишь методы решения двух подсистем: обмена тепловой энергией и энергией излучения между газовой и твердой фазами.

$$\frac{\partial \rho c_v T}{\partial t} = \alpha(T_1 - T), \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^3 \rho_j^0 \phi_j c_{pj} T_1 = -\alpha(T_1 - T), \quad t_n < t \leq t_{n+1}, \quad (22)$$

$$T|_{t=t_n} = T^n, \quad T_1|_{t=t_n} = T_1^n.$$

Обозначив $a^n = c_p \rho^n$, $b^n = \sum_{j=1}^3 \rho_j^0 \phi_j^n c_{pj}$, перепишем подсистему (21),(22) в

линеаризованном виде

$$a^n \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha(T_1 - T), \quad (23)$$

$$b^n \frac{\partial T_1}{\partial t} = -\alpha(T_1 - T). \quad (24)$$

Складывая (2.31) и (2.32), получим

$$\frac{\partial(a^n T + b^n T_1)}{\partial t} = 0,$$

отсюда следует, что $a^n T + b^n T_1 = \text{const}$ по t . Тогда получаем

$$a^n T^{n+1} + b^n T_1^{n+1} = a^n T^n + b^n T_1^n. \quad (25)$$

Из (25) получаем

$$T_1^{n+1} = \frac{1}{b^n} (a^n T^n + b^n T_1^n - a^n T^{n+1}). \quad (26)$$

Используя неявную аппроксимацию для уравнения (23)

$$a^n \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = \alpha(T_1^{n+1} - T^{n+1}) \quad (27)$$

и подставляя T_1^{n+1} из (26) в (27), получим

$$\frac{a^n}{\Delta t} T^{n+1} - \frac{a^n}{\Delta t} T^n = \alpha \left(\frac{a^n}{b^n} T^n + T_1^n - \frac{a^n}{b^n} T^{n+1} - T^{n+1} \right),$$

отсюда находим

$$T^{n+1} = \frac{\left(\frac{a^n}{\Delta t} + \alpha \frac{a^n}{b^n}\right) T^n + \alpha T_1^n}{\frac{a^n}{\Delta t} + \alpha \left(\frac{a^n}{b^n} + 1\right)} \quad (28)$$

и из (25) находим

$$T_1^{n+1} = T_1^n + \frac{a^n}{b^n} (T^n - T_1^n). \quad (29)$$

Заметим, что, так как $a^n, b^n, \alpha > 0$, из (28) следует $\min(T^n, T_1^n) \leq T^{n+1} \leq \max(T^n, T_1^n)$.

Рассмотрим подсистему обмена энергией излучения

$$\frac{\partial \rho c_v T}{\partial t} = \sigma (\varepsilon_1 T_1^4 - \varepsilon T^4), \quad (30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^3 \rho_j^0 \phi_j c_{pj} T_1 = -\sigma (\varepsilon_1 T_1^4 - \varepsilon T^4). \quad (31)$$

Представим правую часть в виде

$$\sigma (\varepsilon_1 T_1^4 - \varepsilon T^4) = \sigma (\varepsilon_1 T_1^4 - \varepsilon_1 T^4 + \varepsilon_1 T^4 - \varepsilon T^4) = \sigma \varepsilon_1 (T_1^4 - T^4) + \sigma (\varepsilon_1 - \varepsilon) T^4.$$

Пользуясь представлением

$$T_1^4 - T^4 = (T_1 - T)(T_1^3 + T_1 T^2 + T T_1^2 + T^3),$$

можно провести линеаризацию члена $\sigma \varepsilon_1 (T_1^4 - T^4)$, обозначив

$$\alpha^n = \left(T_1^3 + T_1 T^2 + T T_1^2 + T^3 \right) \Big|_{t=t_n}.$$

Систему (30), (31) можно разбить на две подсистемы:

$$a^n \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^n (T_1 - T),$$

$$b^n \frac{\partial T_1}{\partial t} = -\alpha^n (T_1 - T);$$

$$a^n \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma(\alpha_1 - \alpha)T^4,$$

$$b^n \frac{\partial T_1}{\partial t} = -\sigma(\alpha_1 - \alpha)T^4,$$

первая из которых решается так же, как подсистема (23),(24), а вторая решается явно.

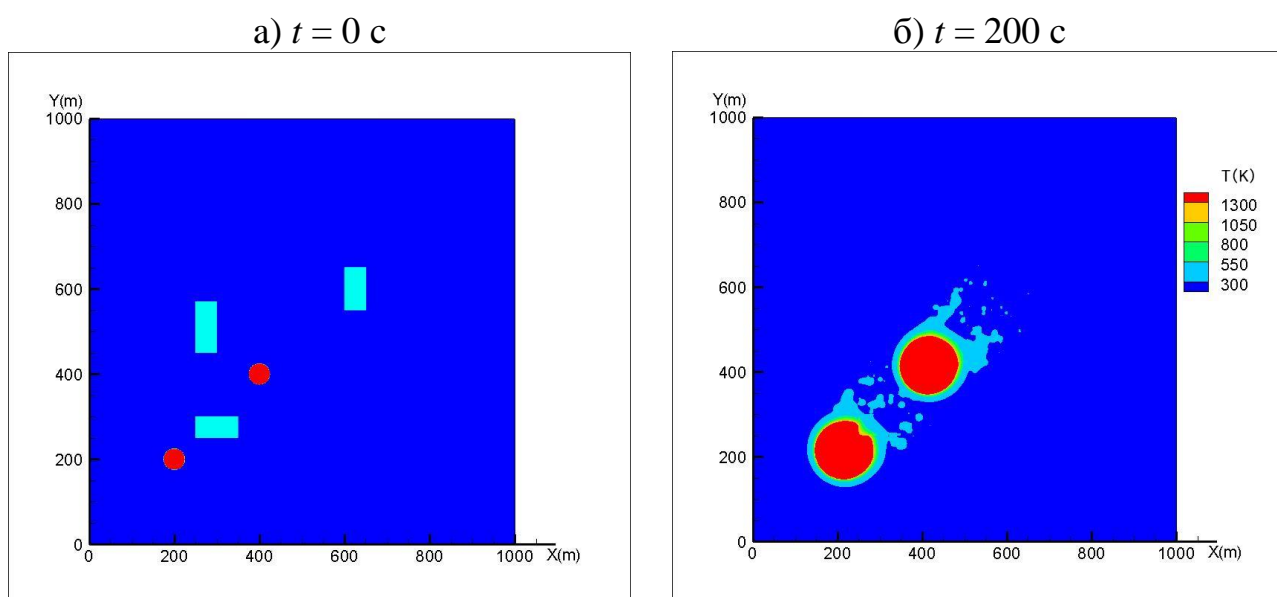
В целом предложенный численный метод имеет второй порядок аппроксимации по пространству и первый – по времени.

3. Результаты модельных расчетов

На рис.1 представлены результаты демонстрационного расчета на многопроцессорной ЭВМ процесса распространения лесного пожара по двумерной трехфазной модели (1)–(14) от двух источников в условиях неоднородного распределения запасов ЛГМ и при наличии ветра.

На рис. 1а в начальный момент времени схематично изображены три поляны прямоугольной формы, на которых отсутствует растительность. Источники пожара имеют форму круга. Ветер имеет скорость $V_w = (3,3)$ м/с.

На рис. 1 можно видеть распространение температурного фронта лесного пожара во времени. Фронт пожара от обоих источников распространяется по направлению ветра.



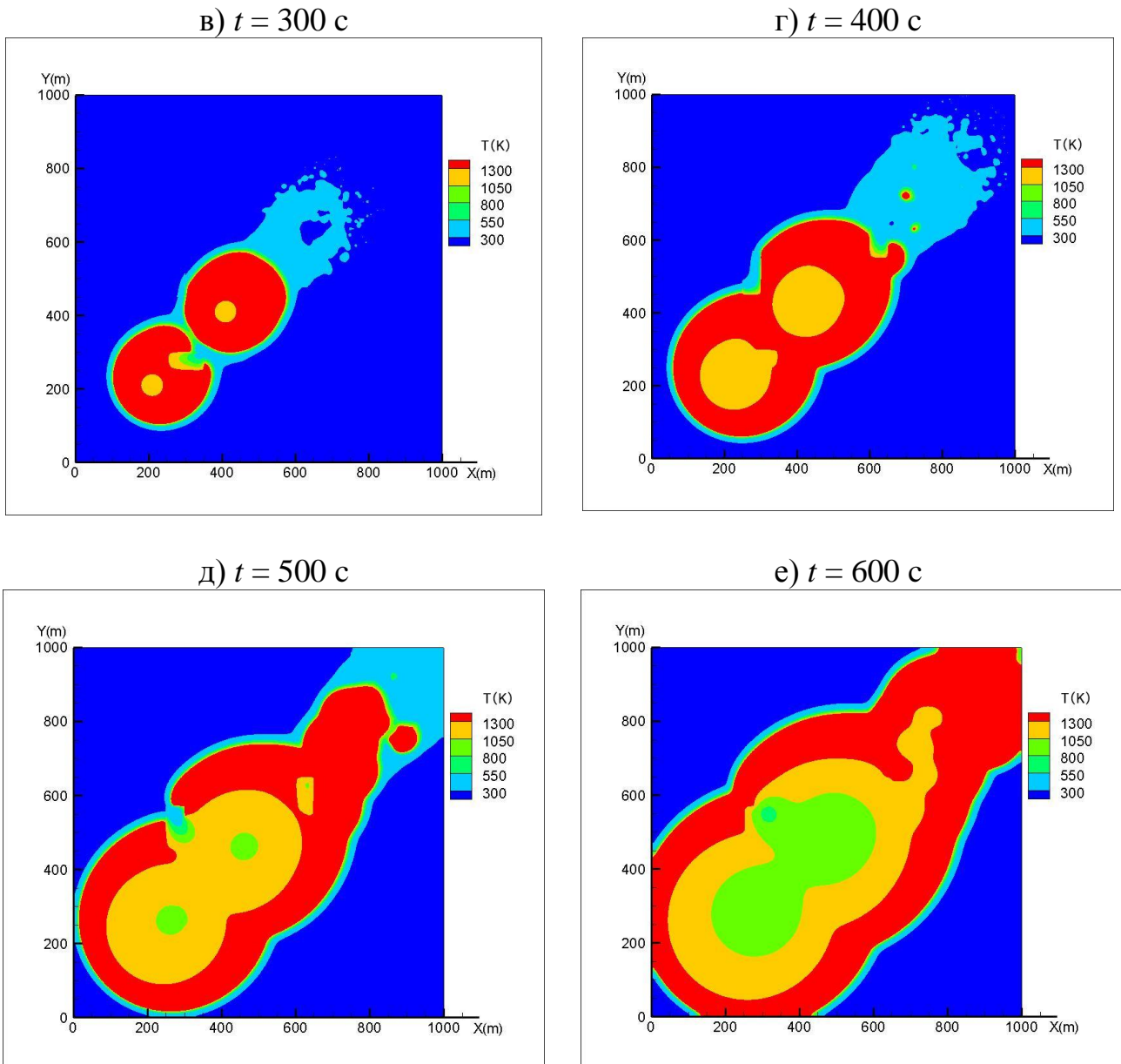


Рис. 1. Распространение температурного фронта лесного пожара.

На рис. 1в видно, как фронт пожара обтекает одну из полянок и как по мере выгорания ЛГМ образуется задняя кромка фронта пожара. Температура за задней кромкой постепенно падает, поскольку процесс горения там прекратился. Представленные результаты расчетов показывают, что предложенная модель позволяет описать наблюдаемый в реальных лесных пожарах механизм распространения огня с помощью горящих частиц, которые переносятся ветром над пологом леса и, опускаясь, служат причиной образования новых очагов пожара перед передней кромкой фронта пожара. Эти очаги затем сливаются с основным фронтом пожара.

Заключение

Для двумерной трехфазной математической модели лесных пожаров разработан алгоритм численного решения с применением метода расщепления системы уравнений по физическим процессам и конечно-разностной аппроксимацией полученных подсистем. Проведена численная реализация построенной модели на многопроцессорном вычислительном комплексе, и представлены результаты модельных расчетов, показывающие, что предложенная модель адекватно описывает процесс распространения лесных пожаров, в том числе механизм распространения фронта пожара с помощью горящих частиц, которые переносятся ветром над пологом леса и, опускаясь, служат причиной образования новых очагов огня перед передней кромкой фронта пожара.

Список литературы

1. Кулешов А.А., Мышецкая Е.Е., Якуш С.Е. Двумерная трехфазная математическая модель лесных пожаров // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 92. 12 с.
2. Кулешов А.А., Мышецкая Е.Е., Якуш С.Е. Моделирование распространения лесных пожаров на основе модифицированной двумерной модели // Мат. моделирование. 2016. Т. 28. № 12. С. 20-32.
3. Kuleshov A.A., Chetverushkin B.N., Myshetskaya E.E. Parallel computing in forest fire two-dimension modeling // Computers and Fluids. 2013. V. 80. P. 202-206.
4. Kuleshov A.A., Myshetskaya E.E. Numerical simulation of forest fires based on 2D model // WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer. 2011. V. 6. Issue 4. P. 91-100.
5. Кулешов А.А., Мышецкая Е.Е. Математическое моделирование лесных пожаров с применением многопроцессорных ЭВМ // Мат. моделирование. 2008. Т. 20. № 11. С. 28-34.
6. Кулешов А.А., Мышецкая Е.Е. Математическое моделирование лесных пожаров с применением многофазных моделей // Мат. моделирование. 2005. Т. 17. № 1. С. 34-42.
7. Зеленцов В.Б., Рындина Н.Ч., Тишкин В.Ф. Применение квазимонотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации к нестационарной задаче о трещине продольного сдвига. // М.: Препринты Ин-та матем. моделирования РАН. 1993. № 20. 18 с.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука. 1983. 616 с.