ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 203 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Лапик М.А.

Формулы восстановления равновесных мер для задач равновесия векторного потенциала с ограничениями на меры и внешними полями

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Лапик М.А. Формулы восстановления равновесных мер для задач равновесия векторного потенциала с ограничениями на меры и внешними полями // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 203. 16 с. doi:**10.20948/prepr-2018-203**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-203**

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им.М.В.Келдыша
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

М.А. Лапик

Формулы восстановления равновесных мер для задач равновесия векторного потенциала с ограничениями на меры и внешними полями

Москва, 2018

М.А. Лапик E-mail: mashalapik@gmail.com,
Формулы восстановления равновесных мер для задач равновесия векторного потенциала с ограничениями на меры и внешними полями.[1]

Аннотация. В работе рассмотрена p-мерная задача равновесия логарифмического потенциала с ограничениями на меры и внешним полем. Написаны условия равновесия для таких задач. Предложены формулы восстановления равновесных мер по семействам множеств равновесия, аналогичные формулам Буярова-Рахманова.

Стр. 16, библ. назв. 8

Ключевые слова: векторная задача равновесия, задачи равновесия с ограничениями, логарифмический потенциал.

M.A. Lapik E-mail: mashalapik@gmail.com,
Recovering formulas for constrained equilibrium measures in vector potential theory.

Abstract. The paper considers the p-dimensional equilibrium problem of logarithmic potential theory with constraints and external fields. Equilibrium conditions for such problems are written. Formulas for recovering of equilibrium measures by means of families of equilibrium sets are offered, ones are analogous to the Buyarov-Rakhmanov formulas.

Pages 16, Bibl. 8

Key words: vector equilibrium problem, constained equilibrium problem, logarithmic potential.

Содержание

[1]Исследование частично поддержано грантом РФФИ (проект 17-01-00614).

1 Введение. Основные определения

Пусть $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_i\}_{i=1}^p$ – непересекающиеся регулярные [5] компакты в $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, без внутренних точек, тогда $\mathcal{M}^x = \mathcal{M}^x(\mathbf{\Gamma})$ – это множество векторных (в смысле прямого произведения) борелевских мер $\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p)$ с носителями $S_{\mu_i} \subseteq \Gamma_i$, $i = 1, ..., p$ и компонентами масс x, т.е. $\mu_i(\Gamma_i) = x > 0$. Обозначим $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, ..., Q_p)$ непрерывную вектор-функцию

$$Q_i : \Gamma_i \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad i = 1, 2, ..., p.$$

Матрицей взаимодействия назовем вещественную симметрическую невырожденную положительно определенную матрицу

$$\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^p. \tag{1}$$

Логарифмическим потенциалом скалярной меры μ с компактным носителем называют функцию

$$U^\mu(z) = \int \log \frac{1}{|z-y|}\, d\mu(y).$$

Эта функция всюду определена, но может принимать значение $+\infty$, супергармонична в $\mathbb{C}$ и гармонична вне носителя меры, т.е.

$$U^\mu \in SpH(\mathbb{C}) \bigcap SbH(\overline{\mathbb{C}} \setminus S_\mu).$$

Вектор-функцию $\mathbf{W}_{\mathbf{Q}}^{\overline{\mu}} = (W_{\mathbf{Q},1}^{\overline{\mu}}, W_{\mathbf{Q},2}^{\overline{\mu}}, ..., W_{\mathbf{Q},p}^{\overline{\mu}})$:

$$W_{\mathbf{Q},i}^{\overline{\mu}}(z) = \sum_{j=1}^p c_{ij} U^{\mu_j}(z) + Q_i(z) \tag{2}$$

называют *векторным логарифмическим потенциалом* меры $\overline{\mu} \in \mathcal{M}^x$ во *внешнем поле* $\mathbf{Q}$ с *матрицей взаимодействия* $\mathbf{C}$. *Энергия во внешнем поле* для векторных мер $\overline{\mu} \in \mathcal{M}^x$ задается функционалом

$$I^{\mathbf{Q}}(\overline{\mu}) = I_1^{\mathbf{Q}}(\overline{\mu}) + I_2^{\mathbf{Q}}(\overline{\mu}) + \cdots + I_p^{\mathbf{Q}}(\overline{\mu}), \tag{3}$$

где

$$I_i^{\mathbf{Q}}(\overline{\mu}) = \int \Big(W_{\mathbf{Q},i}^{\overline{\mu}}(z) + Q_i(z) \Big) d\mu_i(z) = \sum_{j=1}^p c_{ij} I_{ij} + 2 \int Q_i(z)\, d\mu_i(z).$$

Экстремальная задача минимизации энергии во внешнем поле заключается в отыскании такой меры $\overline{\lambda}^x_{\mathbf{Q}}(\mathbf{\Gamma}) = \overline{\lambda}^x_{\mathbf{Q}} \in \mathcal{M}^x$, что

$$I^{\mathbf{Q}}(\overline{\lambda}^x_{\mathbf{Q}}) = \mathcal{I}^x_{\mathbf{Q}} = \inf_{\overline{\mu}\in\mathcal{M}^x} I^{\mathbf{Q}}(\overline{\mu}). \qquad (4)$$

В [2] доказано, что если $\mathcal{I}^x_{\mathbf{Q}} < +\infty$, то существует единственная мера $\overline{\lambda}^x_{\mathbf{Q}} \in \mathcal{M}^x$, такая, что $I^{\mathbf{Q}}(\overline{\lambda}^x_{\mathbf{Q}}) = \mathcal{I}^x_{\mathbf{Q}}$. Там же приведены *условия равновесия* для векторной задачи во внешнем поле: существуют и единственные константы w^x_i, $i = 1, ..., p$ для которых выполняются неравенства

$$W^{\overline{\lambda}^x_{\mathbf{Q}}}_{\mathbf{Q},i}(z) \begin{cases} = w^x_i & \text{на} \quad S_{\lambda^x_{\mathbf{Q},i}}, \\ \geq w^x_i & \text{на} \quad \Gamma_i. \end{cases} \qquad (5)$$

Верно и обратное: если для некоторой меры $\overline{\mu}^x \in \mathcal{M}^x$ и некоторых констант w^x_i, $i = 1, ..., p$ имеют место условия (5), то это экстремальная мера для задачи (4), то есть $\overline{\mu}^x = \overline{\lambda}^x_{\mathbf{Q}}$. *Мерой Робена компакта* $\mathbf{K} \subset \mathbf{\Gamma}$ называют экстремальную меру этого компакта в отсутствие внешнего поля, то есть $\overline{\omega}_{\mathbf{K}} = \overline{\lambda}_{\mathbf{0}}(\mathbf{K})$. Соответствующие этой мере константы равновесия будем обозначать $\gamma_i(\mathbf{K})$, $i = 1, ..., p$.

В [3] было доказано, что меру $\overline{\lambda}^x_{\mathbf{Q}}$ можно определить, зная семейство (по x) носителей экстремальных мер $\overline{\lambda}^x_{\mathbf{Q}}$. К сожалению, восстановление экстремальной меры по семейству носителей – это непростая задача, поскольку для этого приходится искать меры Робена для всего этого семейства. Но в случае, кода носители имеют простой вид, например отрезки, эту задачу возможно решить. [3] есть обобщение на векторный случай известной статьи В.С. Буярова и Е.А. Рахманова[1]. Настоящая работа, как и [3], во многом использует идеи и методы доказательств, предложенные в [1], но нам пришлось предложить векторные аналоги скалярных понятий. Целью этой работы является поиск аналогичных формул для задач с ограничениями на меры (см. Терему 3 настоящей работы). В скалярном случае задач с ограничениями на меры (см. [7]) имеют место формулы, аналогичные [1], но только требуется знать не семейство экстремальных носителей, а семейство множеств равновесия (см. например [8]). В векторном случае ситуация аналогична.

2 Векторные задачи равновесия с ограничениями

Рассмотрим подмножество $\mathcal{M}^{x,\overline{\sigma}}$ множества $\mathcal{M}^x$ – это множество мер, ограниченных конечной борелевской векторной мерой $\overline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_p)$, носитель которой равен $\mathbf{\Gamma}$ и $\overline{\sigma}$ имеет непрерывный потенциал $U^{\sigma_i|_K}$ для всех регулярных компактов K:

$$\mathcal{M}^{x,\overline{\sigma}} = \{\overline{\mu} \in \mathcal{M}^x : 0 \le \overline{\mu} \le \overline{\sigma}\},$$

где $\overline{\mu} \le \overline{\sigma}$ мы понимаем как векторное неравенство $0 \le \mu_i \le \sigma_i$ для $i = 1, 2, ..., p$, где $\mu_i \le \sigma_i$ значит то, что $\sigma_i - \mu_i$ есть мера. Меру $\overline{\sigma}$ называют *ограничением.* Очевидно, что в такой постановке $x \in (0, min_{i=1,...,p}|\sigma_i|]$, однако можно легко расширить область применения наших результатов на случай векторных весов, принадлежащих некоторой области (см. [4]).

Аналогично ставится *экстремальная задача во внешнем поле с ограничением*: найти меру $\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}} \in \mathcal{M}^{x,\overline{\sigma}}$, минимизирующую энергию в своем классе, то есть

$$I^{\mathbf{Q}}(\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}}) = \mathcal{I}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}} = \inf_{\overline{\mu} \in \mathcal{M}_{\mathbf{\Gamma}}^{x,\overline{\sigma}}} I^{\mathbf{Q}}(\overline{\mu}). \tag{6}$$

Если $\mathcal{I}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}} < +\infty$, то существует единственная мера $\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}} \in \mathcal{M}^{x,\overline{\sigma}}$, такая что $I^{\mathbf{Q}}(\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}}) = \mathcal{I}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}}$. Это следствие строгой выпуклости функционала энергии, как и для всех других экстремальных задач теории логарифмического потенциала.

2.1 Условия равновесия для векторных задач

В этом разделе мы выпишем условия равновесия для векторной задачи с ограничением. Скалярный аналог можно найти в [7]. Следующая теорема верна для любой допустимой матрицы взаимодействия.

Теорема 1. *Для экстремальной меры $\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}}$ существуют (не обязательно единственные) константы равновесия $F_Q^{x,\overline{\sigma}}$, такие что*

$$\begin{cases} W_{\mathbf{Q},1}^{\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}}} = c_{11}U^{\lambda_{\mathbf{Q},1}^{x,\overline{\sigma}}} + \cdots + c_{1p}U^{\lambda_{\mathbf{Q},p}^{x,\overline{\sigma}}} + Q_1 \begin{cases} \le F_{Q,1}^{x,\overline{\sigma}} & \text{на} \quad S_{\lambda_{\mathbf{Q},1}^{x,\overline{\sigma}}}, \\ \ge F_{Q,1}^{x,\overline{\sigma}} & \text{на} \quad S_{\sigma_1 - \lambda_{\mathbf{Q},1}^{x,\overline{\sigma}}}, \end{cases} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ W_{\mathbf{Q},p}^{\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}}} = c_{p1}U^{\lambda_{\mathbf{Q},2}^{x,\overline{\sigma}}} + \cdots + c_{pp}U^{\lambda_{\mathbf{Q},1}^{x,\overline{\sigma}}} + Q_p \begin{cases} \le F_{Q,p}^{x,\overline{\sigma}} & \text{на} \quad S_{\lambda_{\mathbf{Q},p}^{x,\overline{\sigma}}}, \\ \ge F_{Q,p}^{x,\overline{\sigma}} & \text{на} \quad S_{\sigma_p - \lambda_{\mathbf{Q},p}^{x,\overline{\sigma}}}. \end{cases} \end{cases} \tag{7}$$

Если для некоторой меры $\overline{\mu} \in \mathcal{M}^{x,\overline{\sigma}}$ выполняется (7), то $\overline{\mu} = \overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}}$.

Доказательство. Пусть $\overline{\lambda}^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q}} = (\lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},1}, ..., \lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},p})$ – экстремальная мера. Покажем, что имеют место условия равновесия (7). Напишем условия равновесия для меры $\lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},1}$, которая является экстремальной для задачи

$$I^{\mathbf{Q}}(\overline{\lambda}^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q}}) = \min_{(\mu,\lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},2},...,\lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},p})\in\mathcal{M}^{x,\overline{\sigma}}} I^{\mathbf{Q}}((\mu, \lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},2}, ..., \lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},p})),$$

где

$$I^{\mathbf{Q}}((\mu, \lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},2}, ..., \lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},p})) = c_{11}I(\mu)+2\int\left(Q_1+c_{12}U^{\lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},2}}+\cdots+c_{1p}U^{\lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},p}}\right)d\mu+const.$$

Следовательно, μ есть решение скалярной экстремальной задачи в непрерывном внешнем поле

$$\widetilde{Q}_1 := \frac{Q_1 + c_{12}U^{\lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},2}} + \cdots + c_{1p}U^{\lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},p}}}{c_{11}}.$$

Мы помним, что $c_{ii} > 0$. Непрерывность $\widetilde{Q}_1$ следует из непрерывности потенциала σ_1 и полунепрерывности снизу логарифмического потенциала меры.

Напишем условия равновесия [7] для этой скалярной задачи

$$c_{11}U^{\lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},1}}(z) + c_{12}U^{\lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},2}}(z) + \cdots + c_{1p}U^{\lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},p}} + Q_1(z)\begin{cases} \le C_1 & \text{на} \quad S_{\lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},1}} \\ \ge C_1 & \text{на} \quad S_{\sigma_1-\lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},1}} \end{cases}.$$

Для остальных координат аналогично. Это достаточные условия для скалярных задач, и, чтобы они стали достаточными для векторной задачи, осталось показать, что покоординатный минимум совпадает с глобальным. Проведем доказательство, аналогичное доказательству теоремы 4.3 стр. 218 [5]. Докажем, что покоординатный минимум совпадает с глобальным.

Пусть $\overline{\mu}$ – глобальный минимум функционала $I^{\mathbf{Q}}$, и пусть существует мера $\overline{\nu} \neq \overline{\mu}$, являющаяся точкой покоординатного минимума.

Без ограничения общности, пусть $\nu_i \neq \mu_i$ для i=1,2,...,r. Определим квадратичный функционал $P(t_1, ..., t_r)$ в $[0, 1]^r$

$$P(t_1, t_2, ..., t_r) := I^{\mathbf{Q}}((t_1\mu_1 + (1-t_1)\nu_1,\ , ...,\ t_r\mu_r + (1-t_r)\nu_r, \nu_{r+1},\ ..., \nu_p)).$$

Поскольку $\overline{\nu}$ – покоординатный минимум, имеем для $i = 1, ..., r$

$$\frac{\partial P}{\partial t_i}(0, ..., 0) \ge 0.$$

Определим также квадратный трехчлен на $[0, 1]$

$$p(t) := P(t, ..., t) = t^2 \sum_{ij=1}^{r} c_{ij} I(\mu_i - \nu_i, \mu_j - \nu_j) + t(...) + (...),$$

тогда $p'(0) \geq 0$ и $p(0) \geq p(1)$, поскольку $\overline{\mu}$ есть глобальный минимум функционала $I^{\mathbf{Q}}$. Из свойств квадратного трехчлена можно заключить, что

$$\sum_{ij} c_{ij} I(\mu_i - \nu_i, \mu_j - \nu_j) < 0,$$

а это противоречит положительной определенности векторного функционала энергии в отсутствие внешнего поля $I^{\mathbf{0}}(\cdot, \cdot)$ (см. утрерждение 4.2 стр.208, [5]). $\square$

2.2 Возрастание равновесных мер

В этом пункте мы покажем, что ограниченные векторные равновесные меры возрастают при росте массы.

Рассмотрим случай отсутствия сталкивания, то есть случай, когда носитель робеновской меры регулярного компакта совпадает с ним.

$$\begin{array}{ll} c_{ij} < 0 & i \neq j, \\ c_{i1} + c_{i2} + \cdots + c_{ip} \geq 0 & i = 1, ..., p \end{array} \tag{8}$$

(из положительной определенности следует $c_{ii} > 0$).

Теорема 2. *Пусть матрица взаимодействия $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ удовлетворяет условиям (8). Для любых y и x, таких что $y > x > 0$, верно*

$$\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{y,\overline{\sigma}} \geq \overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}}.$$

Следствие 1. *Носители $S_{\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}}}$ ограниченной мерой $\overline{\sigma}$ экстремальной меры во внешнем поле $\mathbf{Q}$ с весом x являются возрастающим множеством относительно параметра x.*

Следствие 2. *Параметризованное множество компактов $S_{\overline{\sigma} - \overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}}}$, где равновесная мера $\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}}$ не достигла ограничения, есть убывающее множество по параметру x.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать что для $\varepsilon = y - x$

$$\overline{\nu} := \overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}} + \overline{\lambda}_{\widetilde{\mathbf{Q}}}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}} = \overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x+\varepsilon,\overline{\sigma}}$$

где $\widetilde{\sigma} = \overline{\sigma} - \overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}}$ и $\widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{W}_{\mathbf{Q}}^{\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{x},\overline{\sigma}}}$. Если потенциал $\overline{\sigma}$ непрерывен, то $\mathbf{W}_{\mathbf{Q}}^{\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{x},\overline{\sigma}}}$ непрерывен для $i = 1, ..., p$. Это очевидно, так как $U^{\sigma_i - \lambda_i} = U^{\sigma_i} - U^{\lambda_i}$ одновременно непрерывна снизу и сверху.

Проверим принадлежность меры $\overline{\nu}$ классу $\mathcal{M}^{x+\varepsilon,\overline{\sigma}}$. То, что вес $\overline{\nu}$ равен $x+\varepsilon$, очевидно: $|\overline{\nu}_i| = |\overline{\lambda}_{\mathbf{Q},i}^{x,\overline{\sigma}}| + |\overline{\lambda}_{\widetilde{\mathbf{Q}},i}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}| = x+\varepsilon$. Мера $\overline{\nu}$ есть $\overline{\sigma}$-ограниченная мера, поскольку $\overline{\lambda}_{\widetilde{\mathbf{Q}}}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}$ – это $(\overline{\sigma} - \overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}})$-ограниченная мера.

Из определения меры $\overline{\nu}$ заключаем, что $W_{\mathbf{Q}}^{\overline{\nu}} = W_{\widetilde{\mathbf{Q}}}^{\overline{\lambda}_{\widetilde{\mathbf{Q}}}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}}$. Запишем условия равновесия (7) для $\overline{\lambda}_{\widetilde{\mathbf{Q}}}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}$

$$
\begin{cases}
W_{\widetilde{\mathbf{Q}},1}^{\overline{\lambda}_{\widetilde{\mathbf{Q}}}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}} = c_{11}U^{\overline{\lambda}_{\widetilde{\mathbf{Q}},1}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}} + \cdots + c_{1p}U^{\overline{\lambda}_{\widetilde{\mathbf{Q}},p}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}} + W_{\mathbf{Q},1}^{\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\sigma}} \begin{cases} \le F_{\widetilde{\mathbf{Q}},1}^{\varepsilon} & \text{на } S_{\lambda_{\widetilde{\mathbf{Q}},1}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}}, \\ \ge F_{\widetilde{\mathbf{Q}},1}^{\varepsilon} & \text{на } S_{\widetilde{\sigma}_1 - \lambda_{\widetilde{\mathbf{Q}},1}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}}, \end{cases} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
W_{\widetilde{\mathbf{Q}},p}^{\overline{\lambda}_{\widetilde{\mathbf{Q}}}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}} = c_{p1}U^{\overline{\lambda}_{\widetilde{\mathbf{Q}},1}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}} + \cdots + c_{pp}U^{\overline{\lambda}_{\widetilde{\mathbf{Q}},p}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}}(z) + W_{\mathbf{Q},p}^{\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\sigma}} \begin{cases} \le F_{\widetilde{\mathbf{Q}},p}^{\varepsilon} & \text{на } S_{\lambda_{\widetilde{\mathbf{Q}},p}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}}, \\ \ge F_{\widetilde{\mathbf{Q}},p}^{\varepsilon} & \text{на } S_{\widetilde{\sigma}_p - \lambda_{\widetilde{\mathbf{Q}},p}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}}. \end{cases}
\end{cases}
$$

Замечая, что $S_{\widetilde{\sigma} - \lambda_{\widetilde{\mathbf{Q}}}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}} = S_{\overline{\sigma} - \overline{\nu}}$, заключаем, что осталось доказать неравенства

$$W_{\widetilde{\mathbf{Q}},i}^{\overline{\lambda}_{\widetilde{\mathbf{Q}}}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}}(z) \le F_{\widetilde{\mathbf{Q}},i}^{\varepsilon}$$

на $S_{\lambda_{\mathbf{Q},i}^{x,\overline{\sigma}}} \setminus S_{\lambda_{\widetilde{\mathbf{Q}},i}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}}$. Это будет означать, что $\overline{\nu}$ удовлетворяет условиям равновесия и

$$\overline{\nu} = \overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x+\varepsilon,\overline{\sigma}}.$$

Поскольку матрица взаимодействия $\mathbf{C} = (c_{ij})$ удовлетворяет условиям (8), то векторный логарифмический потенциал является субгармонической функцией вне носителя соотвествующей компоненты меры, т.е.

$$c_{i1}U^{\overline{\lambda}_{\widetilde{\mathbf{Q}},1}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}} + \cdots + c_{ip}U^{\overline{\lambda}_{\widetilde{\mathbf{Q}},p}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}} \in SbH(\overline{\mathbb{C}} \setminus S_{\lambda_{\widetilde{\mathbf{Q}},i}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}}).$$

Для $z \in (\overline{\mathbb{C}} \setminus S_{\lambda_{\widetilde{\mathbf{Q}},i}^{\varepsilon,\overline{\sigma}}})$ по принципу максимума получим

$$(c_{i1}U^{\overline{\lambda}_{\widetilde{\mathbf{Q}},1}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}} + \cdots + c_{ip}U^{\overline{\lambda}_{\widetilde{\mathbf{Q}},i}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}})(z) < \tag{9}$$

$$< \sup_{S_{\lambda_{\widetilde{\mathbf{Q}},i}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}}}(c_{i1}U^{\overline{\lambda}_{\widetilde{\mathbf{Q}},1}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}} + \cdots + c_{ip}U^{\overline{\lambda}_{\widetilde{\mathbf{Q}},p}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}}) \le F_{\widetilde{\mathbf{Q}},i}^{\varepsilon} - \inf_{S_{\lambda_{\widetilde{\mathbf{Q}},i}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}}} \widetilde{Q}_i \le F_{\widetilde{\mathbf{Q}},1}^{\varepsilon} - F_{Q,i}^{x,\overline{\sigma}}.$$

Выше мы использовали то, что $S_{\lambda^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}_{\widetilde{\mathbf{Q}},i}} \subset S_{\sigma_i-\lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},i}}$, требуемое получаем из условий равновесия для $\overline{\lambda}^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q}}$, которые на $S_{\sigma_i-\lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},i}}$ суть $\widetilde{Q}_i \geq F^{x,\overline{\sigma}}_{Q,i}$.

Складывая $\widetilde{Q}_i \leq F^{x,\overline{\sigma}}_{Q,i}$ с (9), получаем, что на $S_{\lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q},i}} \setminus S_{\lambda^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}_{\widetilde{\mathbf{Q}},i}}$ имеет место требуемое неравенство

$$W^{\overline{\lambda}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}_{\widetilde{\mathbf{Q}}}}_{\widetilde{\mathbf{Q}},i} = c_{i1}U^{\overline{\lambda}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}_{\widetilde{\mathbf{Q}},1}} + \cdots + c_{ip}U^{\overline{\lambda}^{\varepsilon,\widetilde{\sigma}}_{\widetilde{\mathbf{Q}},i}} + \widetilde{Q}_i < F^{x,\overline{\sigma}}_{Q,i} + F^{\varepsilon}_{\widetilde{\mathbf{Q}},i} - F^{x,\overline{\sigma}}_{Q,i} = F^{\varepsilon}_{\widetilde{\mathbf{Q}},i}$$

□

Введем обозначение $S_i^{\lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q}}} = \left\{ z \in \Gamma_i : W^{\overline{\lambda}^{x,\sigma}_{\mathbf{Q}}}_{\mathbf{Q},i}(z) \leq F^x_{\mathbf{Q},i} \right\}$, из условий рвновесия очевидно, что $\mathbf{S}_{\lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q}}} \subset \mathbf{S}^{\lambda^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q}}}$.

2.3 Производная равновесных мер

В этом разделе мы сформулируем и докажем основную теорему данной работы. Наша ближайшая цель – показать, что мера

$$\overline{\Delta}^{\pm\varepsilon}_x := \frac{\overline{\lambda}^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q}} - \overline{\lambda}^{x\pm\varepsilon,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q}}}{\mp\varepsilon} \in \mathcal{M}^1$$

стремится в слабом смысле при $\varepsilon \to 0$ к робеновской мере компакта $\mathbf{\Delta}_x = \mathbf{S}_{\overline{\lambda}^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q}}} \cap \mathbf{S}_{\overline{\sigma}-\overline{\lambda}^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q}}}$. Этот компакт называют еще множеством равновесия.

Нам достаточно показать, что из любой последовательности $\overline{\Delta}^{\pm\varepsilon_n}_x$, $\varepsilon_n \searrow 0$ можно выделить сходящуюся к мере Робена подпоследовательность. Поскольку робеновская мера компакта единственна, то это будет означать дифференцируемость в слабом смысле.

Теорема 3. *Семейство равновесных мер $\overline{\lambda}^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q}}$ монотонно возрастает, непрерывно в слабом смысле и дифференцируемо сверху и снизу там, где семейство множеств равновесия $\mathbf{\Delta}_x$ непрерывно сверху и снизу соответственно. Причем*

$$\frac{\partial}{\partial^{\pm}x}\overline{\lambda}^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q}} = \overline{\omega}_{\Delta_x} = \overline{\omega}_x. \tag{10}$$

Пусть $\Delta_{x,i} = [\alpha_i(x), \beta_i(x)]$. Для экстремальной меры справедливо представление при $x > 0$

$$\overline{\lambda}^{x,\overline{\sigma}}_{\mathbf{Q}} = \int_0^x \overline{\omega}_{\mathbf{\Delta}_\tau}\, d\tau. \tag{11}$$

Следствие 3. *По Следствию 1 и 2, поскольку* $\Delta_{x,i} = [\alpha_i(x), \beta_i(x)]$ *суть пересечения возрастающего и убывающего семейства множеств, то функции* α_i β_i*,* $i = 1, ..., p$ *имеют один минимум и один максимум соответственно и непрерывны почти всюду.*

Введем упрощающие обозначения $\overline{\lambda}^x = \overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}}$, $W_i^x = W_{\mathbf{Q},i}^{\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}}}$, $F_i^x = F_{Q,i}^{x,\overline{\sigma}}$, $\mathbf{S}_x = \mathbf{S}_{\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}}}$, $\mathbf{S}^x = \mathbf{S}^{\lambda_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}}}$, $\mathbf{\Sigma}_x = \mathbf{S}_{\overline{\sigma}-\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x,\overline{\sigma}}}$.

Слабая непрерывность экстремальной меры, то есть $\overline{\lambda}^{x-\varepsilon} \xrightarrow{*} \overline{\lambda}^x$ и $\overline{\lambda}^{x+\varepsilon} \xrightarrow{*} \overline{\lambda}^x$, при $\varepsilon \searrow 0$ очевидна. Рассмотрим произвольную непрерывную функцию f на $\mathbf{\Gamma}$, ее модуль ограничен некоторой константой M. Докажем, что интеграл от f по мере $\overline{\lambda}^x - \overline{\lambda}^{x-\varepsilon}$ стремится к 0 при $\varepsilon \searrow 0$:

$$\left| \int f d \left(\overline{\lambda}^x - \overline{\lambda}^{x-\varepsilon} \right) \right| \leq \int |f| \, d \left(\overline{\lambda}^x - \overline{\lambda}^{x-\varepsilon} \right) \leq pM\varepsilon.$$

Аналогично доказывается непрерывность справа.

Перед доказательством теоремы сформулируем и докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Для любого положительного* ε *и* $i = 1, ..., p$*, верно*

$$W_i^{x+\varepsilon} - W_i^x \begin{cases} \leq F_i^{x+\varepsilon} - F_i^x & \text{на } \mathbb{C} \\ = F_i^{x+\varepsilon} - F_i^x & \text{на } \Sigma_{x+\varepsilon,i} \cap \Delta_{x,i} \end{cases}, \tag{12}$$

$$W_i^x - W_i^{x-\varepsilon} \begin{cases} \leq F_i^x - F_i^{x-\varepsilon} & \text{на } \mathbb{C} \\ = F_i^x - F_i^{x-\varepsilon} & \text{на } \Sigma_{x,i} \cap \Delta_{x-\varepsilon,i} \end{cases}. \tag{13}$$

Доказательство. Поскольку (12) и (13) отличаются только обозначениями, докажем только (12). Начнем с первого неравенства.

Учитывая, что мера может расти только там, где она не достигла ограничения, получаем, что $\Sigma_{x,i} \supset S_{\overline{\Delta}_{x,i}^{\varepsilon}}$. Из условий равновесия (7)

$$W_i^x \geq F_i^x$$

и на $S_{\overline{\Delta}_{x,i}^{\varepsilon}}$ верно $W_i^{x+\varepsilon} \leq F_i^{x+\varepsilon}$. Применяя принцип максимума (см. [6], теорема 3.2, глава 2), получаем первое неравенство. Принцип максимума применим, поскольку для матрицы равновесия выполняются условия (8).

Второе равенство получается из первого неравенства и условий равновесия, согласно которым

$$W_i^x = F_i^x$$

на $\Delta_{x,i}$ и на $\Sigma_{x+\varepsilon,i}$

$$W_i^{x+\varepsilon} \geq F_i^{x+\varepsilon}$$

□

Лемма 2. $\boldsymbol{S}_x \subset \boldsymbol{S}^x \subset \ \boldsymbol{S}_{x+\varepsilon} \subset \boldsymbol{S}^{x+\varepsilon}$

Доказательство. Достаточно доказать только среднее включение. Покажем сначала, что $\mathbf{S}^x \subset \mathbf{S}^{x+\varepsilon}$. Допустим обратное, то есть существуют i и точка $z \in S_i^x \setminus S_i^{x+\varepsilon}$, такие, что $W_i^{x+\varepsilon}(z) > F_i^{x+\varepsilon}(z)$ и $W_i^x(z) \leq F_i^x(z)$. Это сразу же противоречит предыдущей лемме.

Докажем, что $\mathbf{S}^x \setminus \mathbf{S}_{x+\varepsilon} = \emptyset$. Допустим обратное, что существуют i и точка $z \in S_i^x \setminus S_{x+\varepsilon,i}$. Из условий равновесия следует, что $W_i^x(z) \leq F_i^x$ и $W_i^{x+\varepsilon}(z) = F_i^{x+\varepsilon}$, так как

$$\begin{cases} W_i^{x+\varepsilon} \leq F_i^{x+\varepsilon} & \text{на} \ \ S_i^x \subset S_i^{x+\varepsilon}, \\ W_i^{x+\varepsilon} \geq F_i^{x+\varepsilon} & \text{на} \ \ S_i^x \setminus S_{x+\varepsilon,i} \subset \Sigma_{x+\varepsilon,i}. \end{cases}$$

Следовательно, $W_i^{x+\varepsilon} - W_i^x \geq F_i^{x+\varepsilon} - F_i^x$, что противоречит строгому неравенству (9) и тому, что $\mathbf{S}_{\overline{\Delta}_x^{+\varepsilon}} \subset \mathbf{S}_{x+\varepsilon}$. □

Лемма 3. *Множество* $\boldsymbol{S}_x$ *непрерывно снизу:*

$$\overline{\bigcup_{\varepsilon>0} \boldsymbol{S}_{x-\varepsilon}} = \boldsymbol{S}_x. \tag{14}$$

Следствие 5.

$$\overline{\bigcup_{\varepsilon>0} (\Sigma_{x,i} \cap \Delta_{x-\varepsilon,i})} = \Delta_{x,i}. \tag{15}$$

Доказательство. Достаточно показать, что $\mathbf{S}_x \subset \overline{\bigcup_{\varepsilon>0} \mathbf{S}^{x-\varepsilon}}$. Для произвольного $\delta > 0$ и $i = 1, 2, ..., p$

$$\lambda_i^x \left(S_x \setminus \overline{\bigcup_{\varepsilon>0} S_{x-\varepsilon}} \right) \leq \lambda_i^x \left(S_{x,i} \setminus S_i^{x-\delta} \right) = (\lambda_i^x - \lambda_i^{x-\delta}) \left(S_{x,i} \setminus S_i^{x-\delta} \right) \leq \delta.$$

Слева стоит неотрицательная константа, из произвольности выбора δ заключаем, что $\overline{\lambda}^x \left(\mathbf{S}_x \setminus \overline{\bigcup_{\varepsilon>0} \mathbf{S}^{x-\varepsilon}} \right) = 0$. По определению, носитель меры есть минимальное замкнутое множество $\mathbf{S}$, т.ч. $\overline{\lambda}^x (\mathbf{\Gamma} \setminus \mathbf{S}) = 0$.

Для доказательства следствия достаточно заметить, что $\Sigma_{x,i} \cap \Delta_{x-\varepsilon,i} = \Delta_{x,i} \bigcap S_{x-\varepsilon,i}$ □

Лемма 4. *Множество* Σ_x *непрерывно сверху:*

$$\overline{\bigcup_{\varepsilon>0} \mathbf{\Sigma}_{x+\varepsilon}} = \mathbf{\Sigma}_x \tag{16}$$

Следствие 4. *Возрастающее при $\varepsilon \searrow 0$ множество $\Delta_x \cap \Sigma_{x+\varepsilon}$ стремится к Δ_x то есть*

$$\overline{\bigcup_{\varepsilon>0}(\Delta_{x,i} \cap \Sigma_{x+\varepsilon,i})} = \Delta_{x,i}. \tag{17}$$

Доказательство. Включение $\overline{\bigcup_{\varepsilon>0} \mathbf{\Sigma}_{x+\varepsilon}} \subset \mathbf{\Sigma}_x$ очевидно. Рассмотрим произвольное компактное множество

$$\mathbf{A} \subset \Sigma_x \setminus \overline{\bigcup_{\varepsilon>0} \Sigma_{x+\varepsilon}}.$$

Для любого $\delta > 0$ верно

$$0 \leq \overline{\lambda}^x(\mathbf{A}) \leq \overline{\sigma}(\mathbf{A}), \quad \overline{\lambda}^{x+\delta}(\mathbf{A}) = \overline{\sigma}(\mathbf{A}),$$

следовательно,

$$\overline{\sigma}(\mathbf{A}) - \overline{\lambda}^x(\mathbf{A}) < p\,\delta.$$

Тогда, в силу произвольности δ, $\overline{\sigma}(\mathbf{A}) = \overline{\lambda}^x(\mathbf{A}) = 0$. По определению носителя меры $\overline{\sigma} - \overline{\lambda}^x$ получаем, что $\mathbf{\Sigma_x} \subset \overline{\bigcup_{\varepsilon>0} \mathbf{\Sigma}_{x+\varepsilon}}$. □

Приступим теперь к доказательству Теоремы 3.

Заметим, что для любого положительного δ мера $\overline{\Delta}_x^{\pm\delta} := \dfrac{\overline{\lambda}^x - \overline{\lambda}^{x\pm\delta}}{\mp\delta} \in \mathcal{M}^1$. Из теоремы о слабой компактности сферы в сопряженном пространстве следует, что из этого множества можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$\overline{\Delta}_x^{\pm\delta_k} \stackrel{*}{\longrightarrow} \widetilde{\Delta}_x^{\pm}, \quad k \to \infty. \tag{18}$$

Для того, чтобы доказать дифференцируемость равновесных мер справа и слева, достаточно показать, что $\widetilde{\Delta}_x^{\pm}$ является мерой Робена компакта Δ_x, $cap\,(\Delta_x) > 0$. Из единственности робеновской меры будет следовать дифференцируемость.

Будем предполагать, что энергия меры $\widetilde{\Delta}_x^{\pm}$ конечна. Докажем, что из множества

$$\left\{ \frac{F_1^x - F_1^{x\pm\delta_k}}{\mp\delta_k}, \ldots, \quad \frac{F_p^x - F_p^{x\pm\delta_k}}{\mp\delta_k} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Для $z \in \Delta_{x,i}$ квази-всюду верно равенство:

$$-\infty < W_{\mathbf{0},i}^{\widetilde{\Delta}_x^{\pm}}(z) = \underline{\lim}_{k\to\infty} W_{\mathbf{0},i}^{\overline{\Delta}_x^{\pm\delta_n}}(z) = \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{F_i^x - F_i^{x\pm\delta_n}}{\mp\delta_n}. \qquad (19)$$

Первое равенство следует из определения слабой сходимости мер и Теоремы 6.9 Гл. 1 в [6], а второе – из Леммы 1. Из конечности энергии следует конечность $W_{\mathbf{0},i}^{\widetilde{\Delta}_x^{\pm}}(z_0)$ для некоторого $z_0 \in \Delta_{x,i}$. Следовательно, можно выделить подпоследовательность $\varepsilon_n = \delta_{k_n}$, такую что

$$\widetilde{\gamma}_1^{\pm} := \lim_{n\to\infty} \frac{F_1^x - F_1^{x\pm\varepsilon_n}}{\mp\varepsilon_n}, \ldots, \quad \widetilde{\gamma}_p^{\pm} := \lim_{n\to\infty} \frac{F_p^x - F_p^{x\pm\varepsilon_n}}{\mp\varepsilon_n}. \qquad (20)$$

Докажем, что мера дифференцируема справа и слева. Используя принцип максимума для субгармонических функций, Теоремы 6.9 Гл. 1 в [6], принцип понижения, следствия 4, 5 и Леммы 1-4, мы получим следующие неравенства:

$$\begin{cases} W_{\mathbf{0},1}^{\widetilde{\Delta}_x^{+}} \begin{cases} = \lim\limits_{n\to\infty} W_{\mathbf{0},1}^{\overline{\Delta}_x^{+\varepsilon_n}} = \widetilde{\gamma}_1^{+} & \text{к.в. на} \quad \Delta_{x,1}, \\ \le \widetilde{\gamma}_1^{+} & \text{на} \quad \mathbb{C}, \end{cases} \\ \ldots \\ W_{\mathbf{0},p}^{\widetilde{\Delta}_x^{+}} \begin{cases} = \lim\limits_{n\to\infty} W_{\mathbf{0},2}^{\overline{\Delta}_x^{+\varepsilon_n}} = \widetilde{\gamma}_p^{+} & \text{к.в. на} \quad \Delta_{x,p},, \\ \le \widetilde{\gamma}_p^{+} & \text{на} \quad \mathbb{C}. \end{cases} \end{cases} \qquad (21)$$

$$\begin{cases} W_{\mathbf{0},1}^{\widetilde{\Delta}_x^{-}} \begin{cases} = \lim\limits_{n\to\infty} W_{\mathbf{0},1}^{\overline{\Delta}_x^{-\varepsilon_n}} = \widetilde{\gamma}_1^{-} & \text{к.в. на} \quad \Delta_{x,1}, \\ \le \widetilde{\gamma}_1^{-} & \text{на} \quad \mathbb{C}, \end{cases} \\ \ldots \\ W_{\mathbf{0},p}^{\widetilde{\Delta}_x^{-}} \begin{cases} = \lim\limits_{n\to\infty} W_{\mathbf{0},p}^{\overline{\Delta}_x^{-\varepsilon_n}} = \widetilde{\gamma}_p^{-} & \text{к.в. на} \quad \Delta_{x,p},, \\ \le \widetilde{\gamma}_p^{-} & \text{на} \quad \mathbb{C}. \end{cases} \end{cases} \qquad (22)$$

Для экстремальности меры равенства в (21), (22) должны иметь место квази-всюду на носителе мер $\widetilde{\Delta}_x^{\pm}$. Очевидно, что

$$\mathbf{S}_{\widetilde{\Delta}_x^{+}} = \left(\bigcap_{\varepsilon>0} \mathbf{S}_{x+\varepsilon}\right) \cap \mathbf{\Sigma}_x, \quad \mathbf{S}_{\widetilde{\Delta}_x^{-}} = \left(\bigcap_{\varepsilon>0} \mathbf{\Sigma}_{x-\varepsilon}\right) \cap \mathbf{S}_x.$$

Таким образом, в точках x, где носитель непрерывен сверху, то есть $\mathbf{S}_x = \left(\bigcap\limits_{\varepsilon>0} \mathbf{S}_{x+\varepsilon}\right)$ или эквивалентно, как легко доказать, $\mathbf{\Delta}_x$ непрерывна сверху, имеет место дифференцируемость экстремальных мер сверху. В точках x, где множество, на котором ограничение не достигается, непрерывно снизу, то есть $\mathbf{\Sigma}_x = \left(\bigcap_{\varepsilon>0} \mathbf{\Sigma}_{x-\varepsilon}\right)$ или $\mathbf{\Delta}_x$ непрерывно снизу, имеет место дифференцируемость слева.

Для завершения доказательства Теоремы, нам осталось установить справедливость формулы (11) для равновесной меры.

Пусть $\Delta_{x,i} = [\alpha_i(x), \beta_i(x)]$. Легко видеть, что $\alpha_i(x), \beta_i(x)$ имеют один минимум и один максимум и непрерывны везде, за исключением не более чем счетного числа точек. Выше мы показали, что мера дифференцируема в точках непрерывности Δ_x.

Положим $\overline{\mu}^x := \int_0^x \overline{\omega}_\tau \, d\tau$ и рассмотрим заряд $\overline{\nu}^x := \overline{\lambda}^x - \overline{\mu}^x$ массы ноль. Наша цель доказать, что $\overline{\nu}^x$ есть нулевой заряд.

Докажем сначала, что $\overline{\nu}^x$ не зависит от x. Заряд $\overline{\nu}^x$ непрерывен по x. Мера $\overline{\mu}^x$ дифференцируема слева и справа в точках непрерывности $\overline{\omega}_\tau$ слева и справа соответственно.

Изучим непрерывность $\overline{\omega}_\tau$. Пусть семейство Δ_τ непрерывно в τ_0. С помощью теоремы о слабой компактности единичного шара выбираем из $\overline{\omega}_{\tau_0+\varepsilon}$ слабо сходящуюся к $\widetilde{\omega}$ подпоследовательность $\overline{\omega}_{\tau_0+\varepsilon_n}$. Из непрерывности следует, что носитель $\widetilde{\omega}$ есть Δ_{τ_0}. Квази-всюду на Δ_{τ_0} выполняются равенства

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} W^{\overline{\omega}_{\tau_0+\varepsilon_n}}_{\mathbf{0},i}(z) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \gamma_i(\Delta_{\tau_0+\varepsilon_n}) = W^{\widetilde{\omega}}_{\mathbf{0},i}(z).$$

Следовательно $\widetilde{\omega} = \overline{\omega}_{\tau_0}$ и $\overline{\omega}_\tau$ непрерывно сверху в точке τ_0. Аналогично доказывается непрерывность снизу.

Мы показали, что $\overline{\nu}^x$ непрерывен и дифференцируем всюду, за исключением не более чем счетного множества точек.

Рассмотрим произвольное борелевское множество $\mathbf{B} \subset \mathbf{\Gamma}$ и определим функцию $f(x) := \overline{\nu}^x(\mathbf{B})$. Функция f непрерывна, и производная всюду равна нулю за исключением не более чем счетного множества E_0. Учитывая, что $\overline{\lambda}^x$ и $\overline{\mu}^x$ суть возрастающие меры, получим, что $f_1(x) := \overline{\lambda}^x(\mathbf{B})$ и $f_2(x) := \overline{\mu}^x(\mathbf{B})$ – абсолютно непрерывные функции. Следовательно, $f = f_1 - f_2$ абсолютно непрерывная функция с всюду, за исключением не более чем счетного множества, равной нулю производной. Следовательно f –константа, и заряд $\overline{\nu} = \overline{\nu}^x$ не зависит от x.

Допустим, что $\overline{\nu}$ не нулевой заряд с полной вариацией $A > 0$. Рассмотрим разложение Жордана заряда $\overline{\nu}$. Пусть $\mathbf{S}_+$ и $\mathbf{S}_-$ – такие подмножества $\mathbf{\Gamma}$, что $\overline{\nu}(\mathbf{S}_+) = -\overline{\nu}(\mathbf{S}_-) = \frac{A}{2}$. Тогда, для любого x имеем

$$\overline{\lambda}^x(\mathbf{S}_-) = \overline{\mu}^x(\mathbf{S}_-) + \overline{\nu}(\mathbf{S}_-) = \overline{\mu}^x(\mathbf{S}_-) - \frac{A}{2} \geq 0,$$

что приводит к противоречию при $0 < x < \frac{A}{2}$. Следовательно, существует x_0, такой, что $\overline{\nu} \equiv 0$ при $x \leq x_0$.

Пусть теперь $\overline{\lambda}^x = \overline{\mu}^x$ при $x \leq x_0$ и $\overline{\lambda}^x \neq \overline{\mu}^x$ при некотором $x > x_0$. Тогда при этом x, как и раньше, $\overline{\nu} := \overline{\lambda}^x - \overline{\mu}^x$ — заряд нулевой массы, который можно представить в виде разности двух мер :

$$\overline{\nu} := \left(\overline{\lambda}^x - \overline{\lambda}^{x_0}\right) - \left(\overline{\mu}^x - \overline{\mu}^{x_0}\right) = \left(\overline{\lambda}^x - \overline{\lambda}^{x_0}\right) - \int_{x_0}^{x} \overline{\omega}_\tau \, d\tau.$$

Как в предыдущем случае, рассмотрим разложение Жордана заряда $\overline{\nu}$. Пусть $\mathbf{S}_+$ и $\mathbf{S}_-$ такие, что $\overline{\nu}(\mathbf{S}_+) = -\overline{\nu}(\mathbf{S}_-) = \frac{A}{2}$, тогда

$$\left(\overline{\lambda}^x - \overline{\lambda}^{x_0}\right)(\mathbf{S}_-) = \left(\overline{\mu}^x - \overline{\mu}^{x_0}\right)(\mathbf{S}_-) + \overline{\nu}(\mathbf{S}_-) = \left(\overline{\mu}^x - \overline{\mu}^{x_0}\right)(\mathbf{S}_-) - \frac{A}{2} \geq 0.$$

Аналогично предыдущему приходим к противоречию при $x - x_0 < \frac{A}{2}$. Следовательно, в качестве x_0 можно выбрать $x_0 + \frac{A}{2}$ и повторить последние рассуждения. Повторяя этот процесс, можно получить, что формула (11) верна для любого x. Теорема доказана.

3 Заключение

В одномерном случае с помощью формул для восстановления равновесных мер, подобных (11), решалась прямая задача в методе прямой и обратной задачи для непрерывного предела цепочек Тоды. Задачи теории логарифмического потенциала других видов позволяют расширить класс начальных условий для таких задач.

Автор выражает глубокую благодарность А.И. Аптекареву и Д.Н. Тулякову за продуктивные обсуждения в процессе работы над этой задачей и анонимному члену редколлегии за замечание, которое способствовало улучшению данной работы.

Список литературы

[1] *В.С. Буяров, Е.А. Рахманов,* О семействах мер, равновесных во внешнем поле на вещественной оси. Мат. сб. N5 190 (1999), 11-22.

[2] *А.А. Гончар, Е.А. Рахманов,* О задаче равновесия для векторных потенциалов. УМН, том 40, выпуск 4(244), (1985), 155-156.

[3] *М.А. Лапик,* О семействах векторных мер, равновесных во внешнем поле. Матем. сб., 206:2 (2015), 41-56.

[4] *М.А. Лапик,* Экстремальная мера и внешнее поле в двупараметрических векторных задачах равновесия логарифмического потенциала. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016, N 115, 20 с.

[5] *Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин,* Рациональные аппроксимации и ортогональность. Москва: "Наука"(1988).

[6] *E. B. Saff, V. Totik,* Logarithmic Potentials with External Fields. Grundlehren Math. Wiss. 316, Springer, Berlin, 1997.

[7] *P. D. Dragnev, E. B. Saff.* Constrained energy problems with applications to orthogonal polynomials of a discrete variable. J.Anal. Math. 72(1997),223-259.

[8] *A.B.J. Kuijlaars, E.A. Rakhmanov* Zero distributions for discret orthogonal polynomials, J.Comput. Appl. Math. 99 (1998), 255-274.