ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Дьяченко А.В., **Лысов В.Г.**

О многочленах совместной дискретной ортогональности на решетках со сдвигом

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Дьяченко А.В., Лысов В.Г. О многочленах совместной дискретной ортогональности на решетках со сдвигом // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 218. 24 с. doi:**10.20948/prepr-2018-218**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-218**

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А.В. Дьяченко, В.Г. Лысов

О многочленах совместной дискретной ортогональности на решетках со сдвигом

Москва — 2018

УДК 517.53
А.В. Дьяченко, В.Г. Лысов

О многочленах совместной дискретной ортогональности на решетках со сдвигом

Введен новый класс многочленов совместной ортогональности относительно произведений r классических дискретных весов на целочисленных решетках со сдвигами. Найдены явные представления в виде формул Родрига. Подробно описан случай $r = 2$ весов.

Ключевые слова: классические ортогональные многочлены дискретной переменной, совместная ортогональность, уравнение Пирсона, формула Родрига.

A.V. Diachenko,V.G. Lysov

On polynomials of multiple discrete orthogonality on lattices with shift

We introduce new class of polynomials of multiple orthogonality with respect to the product of r classical discrete weights on integer lattices with shifts. We found explicit representations in the form of Rodrigues formulas. The case of $r = 2$ weights is described in detail.

Key words: classical orthogonal polynomials of a discrete variable, multiple orthogonality, Pearson equation, Rodrigues formula.

Исследование частично поддержано Российским фондом фундаментальных исследований (проект 17-01-00614).

1 Введение

Ортогональные многочлены дискретной переменной имеют множество приложений. Одно из самых известных относится к теории представлений групп трехмерных вращений [12] и основано на глубокой связи между классическими многочленами, ортогональными относительно дискретных и непрерывных мер. Аналогия между этими многочленами прекрасно отражена в монографии [17].

В настоящей работе изучаются многочлены совместной ортогональности относительно набора дискретных мер, обобщающих классические. Исследование также использует аналогию с непрерывным случаем. Поэтому мы начнем изложение с описания некоторых свойств классических многочленов, ортогональных относительно непрерывных мер.

1.1 Классические ортогональные многочлены

Классическими ортогональными многочленами называют многочлены Якоби, Лагерра и Эрмита. Они образуют простой, но весьма востребованный класс специальных функций. Эти многочлены возникают при решении широкого круга задач в квантовой механике, математической физике, численных методах и теории аппроксимаций.

Классификация и доказательство основных свойств этих многочленов основываются на уравнении Пирсона для веса ортогональности. По определению [18], классические ортогональные многочлены — это многочлены P_n степени n, ортогональные относительно положительного непрерывного веса ρ на интервале $S_\rho \subset \mathbb{R}$:

$$\int_{S_\rho} P_n(x)x^k\rho(x)dx = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1, \tag{1}$$

где ρ удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона:

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)\rho(x)] = \tau(x)\rho(x), \tag{2}$$

а σ и τ — многочлены степени $\deg\sigma \leqslant 2$ и $\deg\tau = 1$. С точностью до тривиальных преобразований (сдвигов и растяжений) выделяются ровно три[1] типа классических ортогональных многочленов, см. таблицу 1.

[1]Иногда к классическим ортогональным многочленам относят также многочлены Бесселя, ортогональные относительно $e^{-1/x}$ на кардиоиде в $\mathbb{C}$. Для целей настоящей работы достаточно рассматривать ортогональность на подмножествах $\mathbb{R}$.

Для этих многочленов P_n имеется явное представление в виде формулы Родрига:

$$P_n(x)\rho(x) = C_n \frac{d^n}{dx^n}[\sigma^n(x)\rho(x)], \tag{3}$$

где $C_n \neq 0$ — нормировочная постоянная. Условие C1 в таблице 1 обеспечивает положительность и интегрируемость веса ρ. Все нули P_n являются простыми и лежат на интервале S_ρ.

Таблица 1: Классические ортогональные многочлены

P_n	$P_n^{\alpha,\beta}$, Якоби	L_n^α, Лагерра	H_n, Эрмита
$\rho(x)$	$(1+x)^\alpha(1-x)^\beta$	$x^\alpha e^{-x}$	e^{-x^2}
S_ρ	$(-1,1)$	$(0,\infty)$	$(-\infty,\infty)$
$\sigma(x)$	x^2-1	x	1
$\tau(x)$	$(\alpha+\beta+2)x-\alpha+\beta$	$-x+\alpha+1$	$-2x$
C1	$\alpha>-1, \beta>-1$	$\alpha>-1$	—

1.2 Многочлены совместной ортогональности

В ряде приложений, связанных с рациональными аппроксимациями, случайными матрицами, диофантовыми приближениями возникают многочлены совместной ортогональности, см. [4, 8, 15, 16, 25]. Такие многочлены определяются набором соотношений ортогональности относительно нескольких весов.

Пусть $\rho_1, \dots, \rho_r$ — весовые функции, заданные на интервалах вещественной оси $S_{\rho_1}, \dots, S_{\rho_r}$. Многочленом совместной ортогональности называется многочлен P_n, такой, что $P_n \not\equiv 0$, $\deg P_n \leqslant rn$ и выполнены следующие соотношения ортогональности:

$$\int_{S_{\rho_j}} P_n(x)x^k\rho_j(x)dx = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, r. \tag{4}$$

Случай $r = 1$ соответствует обычной ортогональности (1).

Известны две конструкции, которые позволяют определить классические многочлены совместной ортогональности. В первой конструкции [3] интервалы S_{ρ_j} совпадают, т.е. $S_{\rho_1} = \cdots = S_{\rho_r}$, а веса ρ_j удовлетворяют уравнению Пирсона (2) с различными $\tau^{(j)}$. Ограничения на степени σ и $\tau^{(j)}$ при этом сохраняются, т.е. $\deg \sigma \leqslant 2$ и $\deg \tau^{(j)} = 1$.

Вторая конструкция [2, 5, 9], на которой мы остановимся подробнее для случая $r = 2$, состоит в том, что весовые функции ρ_1, ρ_2 пропорциональны сужениям некоторой аналитической функции ρ на непересекающиеся интервалы S_{ρ_1}, S_{ρ_2}, т.е. $\rho_j := c_j \rho\big|_{S_{\rho_j}}$, $c_j = \mathrm{const}$. При этом, функция ρ удовлетворяет уравнению Пирсона (2), в котором σ и τ — многочлены степени $\deg \sigma \leqslant 3$ и $\deg \tau = 2$. Такая конструкция приводит к многочленам Анжелеско—Якоби [1, 13], Якоби—Лагерра [22] и Лагерра—Эрмита [23]. Основные характеристики этих многочленов приведены в таблице 2. Условие MC1 (Multiple Continuous) обеспечивает положительность и интегрируемость весов, а также $S_{\rho_1} \cap S_{\rho_2} = \varnothing$. Из ортогональности (4) сразу следует, что многочлен P_n имеет n простых нулей на S_{ρ_j}. Замечательное же свойство состоит в том, что для этих многочленов также справедлива формула Родрига (3).

Таблица 2: Классические совместно ортогональные многочлены

P_n	Анжелеско—Якоби	Якоби—Лагерра	Лагерра—Эрмита
$\rho(x)$	$(a+x)^\alpha x^\beta (1-x)^\gamma$	$(a+x)^\alpha x^\beta e^{-x}$	$x^\beta e^{-x^2}$
$\rho_j(x)$	$(a+x)^\alpha \lvert x\rvert^\beta (1-x)^\gamma$	$(a+x)^\alpha \lvert x\rvert^\beta e^{-x}$	$\lvert x\rvert^\beta e^{-x^2}$
S_{ρ_1}, S_{ρ_2}	$(-a,0), (0,1)$	$(-a,0), (0,\infty)$	$(-\infty,0), (0,\infty)$
$\sigma(x)$	$(x+a)x(x-1)$	$(x+a)x$	x
$\tau(x)$	$(\alpha+\beta+\gamma+3)x^2$ $+ [(\beta+\gamma+2)a$ $-(\alpha+\beta+2)]x$ $-(\beta+1)a$	$-x^2$ $+(\alpha+\beta+2-a)x$ $+(\beta+1)a$	$-2x^2+\beta+1$
MC1	$\alpha > -1, \beta > -1$ $\gamma > -1, a > 0$	$\alpha > -1, \beta > -1$ $a > 0$	$\beta > -1$

1.3 Классические ортогональные многочлены дискретной переменной

До сих пор мы обсуждали непрерывный случай. Перейдем теперь к ортогональности относительно дискретных мер. Пусть S_ρ — дискретное множество на $\mathbb{R}$ (например, $S_\rho = \mathbb{Z}_+$ или $S_\rho = \{0, 1, \ldots, N\}$), а функция ρ принимает неотрицательные значения на S_ρ. Поместим в каждую точку $x \in S_\rho$ заряд равный $\rho(x)$ и рассмотрим дискретную меру μ:

$$\mu(y) = \sum_{x \in S_\rho} \rho(x)\delta(y - x). \tag{5}$$

Функцию ρ будем называть дискретным весом меры μ.

Рассмотрим последовательность многочленов P_n степени n, ортогональных относительно меры μ:

$$\int P_n(x)x^k d\mu(x) = \sum_{x \in S_\rho} P_n(x)x^k\rho(x) = 0, \quad k = 0, \ldots, n - 1. \tag{6}$$

Пусть Δf и ∇f — соответственно правая и левая разности функции f, т.е. $(\Delta f)(x) := f(x+1) - f(x)$, $(\nabla f)(x) := f(x) - f(x-1)$. Рассмотрим разностное уравнение Пирсона:

$$\Delta[\sigma(x)\rho(x)] = \tau(x)\rho(x), \tag{7}$$

где, как и ранее, σ и τ — многочлены степени $\deg\sigma \leqslant 2$ и $\deg\tau = 1$. С точностью до тривиальных преобразований для регулярных решеток существует (см. [17]) четыре класса классических ортогональных многочленов дискретной переменной: многочлены Шарлье и Мейкснера ортогональны на $\mathbb{Z}_+$, многочлены Кравчука и Хана ортогональны на $\{0, 1, \ldots, N\}$. Для всех этих многочленов справедлива формула Родрига:

$$P_n(x)\rho(x) = C_n\nabla^n\rho_n(x), \tag{8}$$

где снова C_n — это некоторая нормировочная постоянная, а ρ_n — смещенный вес, см. таблицу 3. Для многочленов Кравчука и Хана предполагается, что $n \leqslant N$. Условие D1 обеспечивает положительность и конечность моментов меры μ из (5). Из соотношений ортогональности сразу следует, что все нули P_n простые и лежат в выпуклой оболочке S_ρ. Между двумя соседними узлами решетки S_ρ расположено не более одного нуля P_n.

Таблица 3: Классические ортогональные многочлены дискретной переменной

P_n	Шарлье	Мейкснера	Кравчука	Хана
$\rho(x)$	$\frac{b^x}{\Gamma(x+1)}$	$\frac{b^x\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+1)}$	$\frac{b^x}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x+1)}$	$\frac{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(N-x+\beta)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x+1)}$
S_ρ	$\mathbb{Z}_+$	$\mathbb{Z}_+$	$0,1,\ldots,N$	$0,1,\ldots,N$
$\rho_m(x)$	$\frac{b^x}{\Gamma(x+1)}$	$\frac{b^x\Gamma(x+\alpha+m)}{\Gamma(x+1)}$	$\frac{b^x}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-m-x+1)}$	$\frac{\Gamma(x+\alpha+m)\Gamma(N-x+\beta)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-m-x+1)}$
$\frac{\rho_{m+1}(x)}{\rho_m(x)}$	1	$x+\alpha+m$	$N-m-x$	$(x+\alpha+m)$ $\times\,(N-m-x)$
$\frac{\rho_{m+1}(x-1)}{\rho_m(x)}$	$\frac{x}{b}$	$\frac{x}{b}$	$\frac{x}{b}$	$x(N-x+\beta)$
D1	$b>0$	$b\in(0,1)$ $\alpha>0$	$b>0$	$\alpha>0$ $\beta>0$
D2	$b\neq 0$	$\lvert b\rvert\in(0,1)$ $\alpha\notin -S_\rho$	$b\neq 0$ $b\neq -1$	$\alpha+\beta\notin\mathbb{Z}$ $\alpha,\beta\notin -S_\rho$

1.4 Многочлены совместной дискретной ортогональности

В работе [7] для дискретных мер была реализована первая из описанных выше конструкций («разные веса на общем носителе») построения классических совместно ортогональных многочленов. Аналогично непрерывному случаю в [7] рассматривались дискретные меры с общим носителем, удовлетворяющие разностному уравнению Пирсона (7) с многочленами σ и $\tau^{(j)}$ степеней $\deg\sigma \leqslant 2$ и $\deg\tau^{(j)} = 1$.

Для реализации второй конструкции («один вес на разных носителях») в дискретном случае необходимо рассматривать наборы решеток, сдвинутых относительно друг друга на нецелые величины. По-видимому, первым такое наблюдение сделал В.Н. Сорокин в работе [26], где рассматривались различные обобщения многочленов Мейкснера. Целью настоящей работы является реализация этого подхода в более общем случае. Отметим еще недавние работы [10, 11, 21], в которых исследуются свойства ортогональных ($r = 1$) многочленов относительно произведений классических весов на объединении решеток со сдвигами.

Начнем со следующего наблюдения. Заметим, что формула Родрига

(8) определяет ортогональный многочлен P_n степени n при достаточно общих условиях, когда параметры α, β, b могут принимать и комплексные значения.

Предложение 1. *Если параметры функции ρ из таблицы 3 удовлетворяют условию D2, то многочлен P_n, определяемый формулой* (8)*, имеет степень n и удовлетворяет соотношениям ортогональности* (6) *относительно (вообще говоря, комплекснозначной) меры μ из* (5)*.*

Для того, чтобы сформулировать подобное утверждение в случае совместной ортогональности, нам понадобится аналог условия D2, которое мы обозначим MD2 (Multiple Discrete).

Пусть $\rho^{(1)} \dots, \rho^{(r)}$ — набор классических дискретных весов с условиями D2 на параметры. Введем некоторые обозначения. Обозначим через r_C, r_M, r_K, r_H соответственно количество весов Шарлье, Мейкснера, Кравчука и Хана в этом наборе, т.е. $r_C + r_M + r_K + r_H = r$. Каждому весу соответствует свой набор параметров. С целью унификации каждому весу $\rho^{(j)}$ поставим в соответствие четверку параметров $\alpha_j, \beta_j, b_j, N_j$ по следующему правилу. Весу Хана соответствует параметр $b_j = 1$, а всем остальным весам — параметры $\beta_j = 0$. Для весов Шарлье и Кравчука выполнено $\alpha_j = 0$, а для весов Шарлье и Мейкснера — $N_j = +\infty$. Пусть $B := \prod_{j=1}^r b_j$ и $N := \min_j\{N_j\}$.

Условие MD2 на набор $\rho^{(1)} \dots, \rho^{(r)}$ состоит в следующем:

0) $B \neq 0$, а параметры α_j для весов Мейкснера и параметры α_j, β_j для весов Хана удовлетворяют условию D2;

1) $r_C = 0,\ r_M > 0 \quad \Rightarrow \quad |B| < 1$;

2) $r_K = r \quad \Rightarrow \quad B \neq (-1)^r$;

3) $r_H > 0 \quad \Rightarrow \quad r_K = r - 1,\ B = (-1)^{r-1}$.

В частности, при условии MD2 набор $\rho^{(1)} \dots, \rho^{(r)}$ не может содержать более одного веса Хана. Если такой вес есть, то все остальные веса являются весами Кравчука.

Теперь мы готовы сформулировать основной результат.

Теорема 2. *Пусть $\rho^{(1)} \dots, \rho^{(r)}$ — набор дискретных весов, удовлетворяющий условию MD2. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ — набор вещественных чисел,* *такой, что* $\gamma_j - \gamma_k \notin \mathbb{Z}, \notin \alpha_j + \mathbb{Z}, \notin \beta_k + \mathbb{Z}$ *при* $j \neq k$. *Положим*

$$R(x) := \prod_{j=1}^{r} \rho^{(j)}(x - \gamma_j), \quad R_n(x) := \prod_{j=1}^{r} \rho_n^{(j)}(x - \gamma_j). \tag{9}$$

Тогда при $n \leqslant N$ *формула Родрига*

$$P_n(x)R(x) = \nabla^n R_n(x) \tag{10}$$

определяет многочлен P_n *степени* rn, *удовлетворяющий следующим соотношениям ортогональности:*

$$\sum_{x \in \gamma_j + S_{\rho^{(j)}}} P_n(x) x^k R(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, r. \tag{11}$$

Таким образом, в условиях теоремы 2, формула Родрига (10) определяет многочлен P_n, который является многочленом совместной ортогональности:

$$\int P_n(x) x^k d\mu_j(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, r. \tag{12}$$

относительно r дискретных (вообще говоря, комплекснозначных) мер

$$\mu_j(y) = \sum_{x \in \gamma_j + S_{\rho^{(j)}}} R(x) \delta(y - x). \tag{13}$$

с попарно непересекающимися носителями $\operatorname{supp} \mu_j = \gamma_j + S_{\rho^{(j)}}$ и общей аналитической весовой функцией R.

Отметим, что весовая функция R удовлетворяет разностному уравнению Пирсона:

$$\Delta[\sigma(x)R(x)] = \tau(x)R(x), \tag{14}$$

где σ и τ — многочлены степени $\deg \sigma \leqslant r + 1$ и $\deg \tau = r$.

В главе 2 мы докажем предложение 1 и теорему 2. В главе 3 для случая $r = 2$ мы обсудим условия MD1, аналогичные условиям D1. То есть рассмотрим условия, при которых меры μ_j положительны. При этом введем несколько новых классов многочленов совместной дискретной ортогональности относительно произведений классических весов.

2 Доказательство основного результата

2.1 Доказательство предложения 1

Предложение 1 является частным случаем теоремы 2. Мы приведем здесь его краткое доказательство. Нам понадобится простая лемма.

Лемма 3. *Пусть q_1, q_2, p — многочлены с единичными старшими коэффициентами:*

$$q_j(x) = x^{r+1} + a_j x^r + \dots, \quad j = 1, 2; \qquad p(x) = x^m + \dots,$$

тогда

$$q_1(x)p(x) - q_2(x)p(x-1) = (a_1 - a_2 + m)x^{r+m} + \dots,$$

где под многоточием понимаются слагаемые меньших степеней.

Мы будем использовать формулу суммирования по частям:

$$\sum_{x=0}^{N} g(x-1)\nabla f(x) = g(N)f(N) - g(-1)f(-1) - \sum_{x=0}^{N} f(x)\nabla g(x),$$

а также следующие обозначения (см. таблицу 3):

$$u_m(x) := \frac{\rho_{m+1}(x)}{\rho_m(x)}, \qquad v_m(x) := \frac{\rho_{m+1}(x-1)}{\rho_m(x)}.$$

Лемма 4. *Пусть $\rho(x)$ — один из классических весов из таблицы 3, для которого выполнено условие D2. Тогда при всех $m = 0, 1, \dots, n$ и $n = 0, 1, \dots, N$ равенство*

$$\rho_{n-m}(x)P_m^{(n)}(x) = \nabla^m \rho_n(x), \tag{15}$$

задает многочлен $P_m^{(n)}$ степени m, ортогональный с весом ρ_{n-m} на S_ρ.

Доказательство. Индукция по m. Если $m = 0$, то равенство (15), очевидно, задает многочлен нулевой степени $P_0^{(n)} \equiv 1$, для которого набор соотношений ортогональности пуст.

Пусть при $m \geqslant 1$ известно, что $P_{m-1}^{(n)}$ является многочленом степени $m-1$, таким, что

$$\sum_{x \in S_\rho} P_{m-1}^{(n)}(x) x^k \rho_{n-m}(x) = 0, \quad k = 0, \dots m-2. \tag{16}$$

Тогда $P_m^{(n)}$ выражается через $P_{m-1}^{(n)}$:

$$\rho_{n-m}(x)P_m^{(n)}(x) = \nabla^m \rho_n(x) = \nabla[P_{m-1}^{(n)}(x)\rho_{n-m+1}(x)]. \tag{17}$$

Вначале проверим, что $P_m^{(n)}$ является многочленом степени m. Из соотношения выше следует, что

$$P_m^{(n)}(x) = u_{n-m}(x)P_{m-1}^{(n)}(x) - v_{n-m}(x)P_{m-1}^{(n)}(x-1). \tag{18}$$

Как видно из таблицы 3 во всех случаях, кроме случая многочленов Хана, функции u и v являются линейными. При выполнении условия D2 сокращения старшего коэффициента не происходит, а значит, в левой части получаются многочлены степени m.

В случае же многочленов Хана многочлены $u_m(x)$ и $v_m(x)$ имеют степень 2 и равные старшие коэффициенты, т.е. их разность линейна:

$$v_m(x) - u_m(x) = (\beta + \alpha + 2m)x + (\alpha + m)(m - N).$$

Поэтому вклады от их старших коэффициентов сокращаются независимо от параметров:

$$[x^{m+1}]P_m^{(n)}(x) = [x^{m+1}]\Big(u_{n-m}(x)P_{m-1}^{(n)}(x) - v_{n-m}(x)P_{m-1}^{(n)}(x-1)\Big) = 0.$$

Следующий же коэффициент может быть найден по лемме 3:

$$\begin{aligned}[x^m]P_m^{(n)}(x) &= [x^m]\Big(u_{n-m}(x)P_{m-1}^{(n)}(x) - v_{n-m}(x)P_{m-1}^{(n)}(x-1)\Big)\\ &= -\big(\beta + \alpha + 2(n-m) - (m-1)\big)\cdot [x^{m-1}]P_{m-1}^{(n)}(x).\end{aligned}$$

Он не сокращается при выполнении условия D2 из таблицы 3. Стало быть, правая часть (18) и в этом случае есть многочлен степени m.

Теперь проверим, что $P_m^{(n)}$ удовлетворяет необходимым соотношениям ортогональности. Пусть $k \leqslant m-1$, а $S_\rho = \{0, 1, \dots, N\}$, где $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Тогда

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{N} P_m^{(n)}(x)x^k\rho_{n-m}(x) &= \sum_{x=0}^{N} x^k \nabla[P_{m-1}^{(n)}(x)\rho_{n-m+1}(x)]\\ &= (x+1)^k P_{m-1}^{(n)}(x)\rho_{n-m+1}(x)\Big|_{x=-1}^{N} - \sum_{x=0}^{N} P_{m-1}^{(n)}(x)\rho_{n-m+1}(x)\nabla(x+1)^k.\end{aligned} \tag{19}$$

По предположению индукции последняя сумма равна нулю. Кроме того, $\rho_{n-m+1}(-1) = \rho_{n-m+1}(N) = 0$ при $m \leqslant n$, т.к. функция $1/\Gamma(x)$ имеет нули в целых неположительных точках. Причем для весов Шарлье и Мейкснера, которым соответствует $N = \infty$, условие D2 обеспечивает сверхполиномиальную скорость затухания веса $\rho_{n-m+1}(x)$ при $x \to \infty$. Таким образом, внеинтегральные слагаемые также равны нулю. Шаг индукции осуществлен, лемма доказана. $\square$

Предложение 1 вытекает из данной леммы при $m = n$, т.к. $\rho = \rho_0$.

2.2 Доказательство теоремы 2

Теорема 2 является частным случаем ($m = n$, $R = R_0$) леммы ниже.

Лемма 5. *В условиях теоремы 2 при $n \leqslant N$ и $m \in \{0, \dots, n\}$ равенство*

$$R_{n-m}(x)P_m^{(n)}(x) = \nabla^m R_n(x) \tag{20}$$

задает многочлен $P_m^{(n)}$ степени rm, удовлетворяющий соотношениям совместной ортогональности с весом R_{n-m} на множествах $\gamma_j + S_{\rho(j)}$:

$$\sum_{x \in \gamma_j + S_{\rho(j)}} P_m^{(n)}(x) x^k R_{n-m}(x) = 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad j = 1, \dots, r.$$

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по m. Как и в случае ортогональности с одним весом, при $m = 0$ равенству (20) удовлетворяет только многочлен нулевой степени $P_0^{(n)} \equiv 1$. Заметим, что

$$R_{n-m}(x)P_m^{(n)}(x) = \nabla^m R_n(x) = \nabla[P_{m-1}^{(n)}(x)R_{n-m+1}(x)]. \tag{21}$$

Пусть для $m \in \{1, \dots, n\}$ уже доказано, что $P_{m-1}^{(n)}$ есть многочлен степени $r(m-1)$, удовлетворяющий совместным ортогональностям

$$\sum_{x \in \gamma_j + S_{\rho(j)}} P_{m-1}^{(n)}(x) x^k R_{n-m+1}(x) = 0, \quad k = 0, \dots, m-2, \quad j = 1, \dots, r.$$

Проверим, что $P_m^{(n)}$ есть многочлен степени rm. Имеем

$$P_m^{(n)}(x) = \frac{R_{n-m+1}(x)}{R_{n-m}(x)} P_{m-1}^{(n)}(x) - \frac{R_{n-m+1}(x-1)}{R_{n-m}(x)} P_{m-1}^{(n)}(x-1)$$
$$= \prod_{j=1}^{r} \frac{\rho_{n-m+1}^{(j)}(x-\gamma_j)}{\rho_{n-m}^{(j)}(x-\gamma_j)} P_{m-1}^{(n)}(x) - \prod_{j=1}^{r} \frac{\rho_{n-m+1}^{(j)}(x-\gamma_j-1)}{\rho_{n-m}^{(j)}(x-\gamma_j)} P_{m-1}^{(n)}(x-1)$$
$$= \prod_{j=1}^{r} u_{n-m}^{(j)}(x-\gamma_j) \cdot P_{m-1}^{(n)}(x) - \prod_{j=1}^{r} v_{n-m}^{(j)}(x-\gamma_j) \cdot P_{m-1}^{(n)}(x-1).$$

Таким образом, справедливо представление:

$$P_m^{(n)}(x) = U_{n-m}(x) \cdot P_{m-1}^{(n)}(x) - V_{n-m}(x) \cdot P_{m-1}^{(n)}(x-1), \tag{22}$$

где

$$U_m(x) := \prod_{j=1}^{r} u_m^{(j)}(x-\gamma_j), \quad V_m(x) := \prod_{j=1}^{r} v_m^{(j)}(x-\gamma_j).$$

Так как U_{n-m} и V_{n-m} — многочлены, то $P_m^{(n)}$ — многочлен. Определим его степень.

Вначале рассмотрим случай $r_H = 0$, т.е. когда в наборе $\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(r)}$ нет веса Хана. В этом случае все $u^{(j)}$ и $v^{(j)}$ линейны и $\deg P_m^{(n)} \leqslant rm$. Докажем, что при условии MD2 выполняется равенство: $\deg P_m^{(n)} = rm$.

Если в наборе весов имеется вес Шарлье, то $\deg V_{n-m} = r > \deg U_{n-m}$. Таким образом, если $r_C > 0$, то $\deg P_m^{(n)} = r + \deg P_{m-1}^{(n)} = rm$.

Если $r_C = 0$, а $r_M > 0$, то

$$[x^r]U_{n-m} = (-1)^{r_K}, \qquad [x^r]V_{n-m} = \frac{1}{B}.$$

По условию MD2 в этом случае $|B| < 1$, т.е. старшие коэффициенты U_{n-m} и V_{n-m} различны и снова $\deg P_m^{(n)} = rm$.

Наконец, если $r_H = r_C = r_M = 0$, т.е. $r_K = r$, то

$$[x^r]U_{n-m} = (-1)^{r}, \qquad [x^r]V_{n-m} = \frac{1}{B}.$$

Снова по условию MD2 получаем $\deg P_m^{(n)} = rm$.

Теперь рассмотрим случай, когда $r_H > 0$. По условию MD2 $r_H = 1$, $r_K = r - 1$, $B = (-1)^{r-1}$. Будем считать, что весом Хана является последний вес $\rho^{(r)}$ в рассматриваемом наборе. Многочлены U_{n-m} и V_{n-m} имеют степень $r+1$, но с равными старшими коэффициентами:

$$[x^{r+1}]U_{n-m} = (-1)^r, \qquad [x^{r+1}]V_{n-m} = -\frac{1}{B}.$$

Чтобы вычислить коэффициенты U_{n-m} и V_{n-m} при x^r, выпишем сами эти многочлены:

$$U_m(x) = (x - \gamma_r + \alpha + m)\prod_{j=1}^{r}(N_j - m - x + \gamma_j),$$

$$V_m(x) = \frac{1}{B}(N_r - x + \gamma_r + \beta)\prod_{j=1}^{r}(x - \gamma_j).$$

По теореме Виета имеем

$$[x^r]U_m = (-1)^{r-1}\left(\sum_{j=1}^{r} N_j + \sum_{j=1}^{r}\gamma_j + \gamma_r - (r+1)m - \alpha\right),$$

$$[x^r]V_m = \frac{1}{B}\left(\sum_{j=1}^{r}\gamma_j + \gamma_r + N_r + \beta\right).$$

Снова по лемме 3 найдем коэффициент при x^{rm} многочлена $P_n^{(m)}$:

$$\begin{aligned}&(-1)^{r-1}[x^{rm}]P_m^{(n)}(x)\\ &\quad= \left(\alpha + \beta + r + (r+1)n - (2r+1)m - \sum_{j=1}^{r-1} N_j\right)[x^{r(m-1)}]P_{m-1}^{(n)}(x).\end{aligned}$$

Таким образом, из условий MD2 получаем, что этот коэффициент отличен от нуля, т.е. $\deg P_n^{(m)} = rm$.

Осталось проверить ортогональность. Это делается совершенно аналогично случаю $r = 1$. Условия на параметры сдвигов γ_j в теореме 2 гарантируют выполнение равенств $R_{n-m+1}(-1+\gamma_j) = R_{n-m+1}(N+\gamma_j) = 0$ при $m \in \{1, \dots, n\}$, т.к. в этих точках знаменатели R_{n-m+1} имеют полюсы, а числители — регулярны. Это обеспечивает равенство нулю внеинтегральных слагаемых при проведении шага индукции, см. (19). $\square$

При рассмотрении конкретных примеров многочленов совместной дискретной ортогональности условия теоремы 2 на параметры сдвигов γ_j и параметры α_j, β_j можно несколько ослабить. Перейдем к рассмотрению конкретных примеров в случае $r = 2$ весов.

3 Классификация многочленов совместной дискретной ортогональности

Далее мы ограничимся рассмотрением случая $r = 2$. Будем изучать многочлены P_n степени $2n$, удовлетворяющие соотношениям совместной ортогональности относительно пары дискретных мер μ_1 и μ_2:

$$\int P_n(x)x^k d\mu_j(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad j = 1, 2. \tag{23}$$

Обсудим все следствия теоремы 2, когда меры μ_1 и μ_2 положительны. В зависимости от того, пересекаются или нет выпуклые оболочки носителей этих мер (напомним, что $\operatorname{supp}\mu_j = \gamma_j + S_{\rho^{(j)}}$), выделим два случая:

- Случай I: $\operatorname{conv}(\gamma_1 + S_{\rho^{(1)}}) \cap \operatorname{conv}(\gamma_2 + S_{\rho^{(2)}}) \neq \varnothing$;
- Случай II: $\operatorname{conv}(\gamma_1 + S_{\rho^{(1)}}) \cap \operatorname{conv}(\gamma_2 + S_{\rho^{(2)}}) = \varnothing$.

3.1 Случай I

Многочлены Шарлье—Шарлье. Пусть $B := b > 0$, а γ_1, γ_2 — вещественные числа такие, что $0 < |\gamma_2 - \gamma_1| < 1$. Тогда функция

$$R(x) := \frac{b^x}{\Gamma(x - \gamma_1 + 1)\Gamma(x - \gamma_2 + 1)} \tag{24}$$

есть произведение двух весов Шарлье на решетках со сдвигами γ_1, γ_2. Она принимает положительные значения при $x - \gamma_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, 2$. Определим пару дискретных мер:

$$\mu_j(y) := \sum_{x \in \gamma_j + \mathbb{Z}_+} R(x)\delta(y - x), \quad j = 1, 2. \tag{25}$$

Многочлен Шарлье—Шарлье — это многочлен P_n степени $2n$, определяемый формулой:

$$P_n(x)R(x) = \nabla^n R(x). \tag{26}$$

Многочлен P_n удовлетворяет $2n$ соотношениям ортогональности (23) относительно мер μ_1, μ_2, определенных в (25).

Многочлены Шарлье—Мейкснера. Пусть $b > 0$ и $\alpha > 0$, а $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, причем $0 < |\gamma_2 - \gamma_1| < 1$ и $\gamma_2 - \gamma_1 < \alpha$. Следующая функция положительна при $x \geqslant \min(\gamma_1, \gamma_2)$:

$$R^{(\alpha)}(x) := \frac{b^x\,\Gamma(x-\gamma_2+\alpha)}{\Gamma(x-\gamma_1+1)\Gamma(x-\gamma_2+1)}. \tag{27}$$

На целочисленных решетках со сдвигами рассмотрим две дискретные меры:

$$\mu_j(y) := \sum_{x\in\gamma_j+\mathbb{Z}_+} R^{(\alpha)}(x)\delta(y-x), \quad j = 1, 2. \tag{28}$$

Тогда многочлен P_n, определяемый формулой Родрига

$$P_n(x)R^{(\alpha)}(x) = \nabla^n R^{(\alpha+n)}(x), \tag{29}$$

имеет степень $2n$ и удовлетворяет соотношениям ортогональности (23), относительно мер (28). Такие многочлены P_n будем называть *многочленами Шарлье—Мейкснера.*

Многочлены Мейкснера—Сорокина. Пусть $b \in (0, 1)$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, а $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, причем $0 < |\gamma_2 - \gamma_1| < 1$ и $\gamma_1 - \gamma_2 < \alpha_1$, $\gamma_2 - \gamma_1 < \alpha_2$. Рассмотрим следующую, положительную при $x \geqslant \min(\gamma_1, \gamma_2)$, функцию

$$R^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x) := b^x\,\frac{\Gamma(x-\gamma_1+\alpha_1)\Gamma(x-\gamma_2+\alpha_2)}{\Gamma(x-\gamma_1+1)\Gamma(x-\gamma_2+1)}. \tag{30}$$

Функция $R^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ является произведением двух весов Мейкснера.

На каждой из решеток $\gamma_j + \mathbb{Z}_+$ рассмотрим меру μ_j:

$$\mu_j(y) := \sum_{x\in\gamma_j+\mathbb{Z}_+} R^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x)\delta(y-x), \quad j = 1, 2. \tag{31}$$

Тогда следующий многочлен P_n степени $2n$:

$$P_n(x)R^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x) = \nabla^n R^{(\alpha_1+n,\alpha_2+n)}(x) \tag{32}$$

удовлетворяет соотношениям ортогональности (23), где меры μ_j определены в (31). Такие многочлены P_n впервые появились в работе В.Н. Сорокина [26] и мы назовем их *многочленами Мейкснера—Сорокина.*

Многочлены Кравчука—Кравчука. Пусть $b > 0$, а $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ и $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ удовлетворяют одному из двух условий:

а) $N_1 = N_2$, $0 < |\gamma_1 - \gamma_2| < 1$;

б) $N_1 = N_2 - 1$, $0 < \gamma_1 - \gamma_2 < 1$.

Отметим, что, как и в предыдущих случаях, данные условия означают перемежаемость узлов рассматриваемых решеток. В данном случае речь идет о решетках $\gamma_j + \{0, 1, \dots, N_j\}$. Рассмотрим произведение двух весов Кравчука:

$$R_{N_1,N_2}(x) := \frac{b^x}{\Gamma(x-\gamma_1+1)\Gamma(N_1-x+\gamma_1+1)} \times \frac{1}{\Gamma(x-\gamma_2+1)\Gamma(N_2-x+\gamma_2+1)}. \quad (33)$$

Определим две положительные дискретные меры:

$$\mu_j(y) := \sum_{x-\gamma_j=0}^{N_j} R_{N_1,N_2}(x)\delta(y-x), \quad j = 1, 2. \quad (34)$$

При $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leqslant N_1$ определим многочлен P_n степени $2n$:

$$P_n(x)R_{N_1,N_2}(x) = \nabla^n R_{N_1-n,N_2-n}(x). \quad (35)$$

Тогда P_n удовлетворяет соотношениям ортогональности (23) относительно мер μ_1, μ_2 из (34). Многочлен P_n (35) будем называть *многочленом Кравчука—Кравчука.*

Многочлены Кравчука—Хана I. Пусть $B := -1$, а $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ и $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ удовлетворяют одному из шести условий:

а) $N_1 = N_2$, $0 < |\gamma_2 - \gamma_1| < 1$, а $\alpha > \max\{0, \gamma_2 - \gamma_1\} < -\beta - N_2$;

б) $N_1 = N_2$, $0 < |\gamma_1 - \gamma_2| < 1$, а $\beta > \max\{0, \gamma_1 - \gamma_2\} < -\alpha - N_2$;

в) $N_1 = N_2 - 1$, $0 < \gamma_1 - \gamma_2 < 1$, а $\alpha > 0 < -\beta - N_2$;

г) $N_1 = N_2 - 1$, $0 < \gamma_1 - \gamma_2 < 1$, а $\beta > 0 < -\alpha - N_2$;

д) $N_1 = N_2 + 1$, $0 < \gamma_2 - \gamma_1 < 1$, а $\alpha > \gamma_2 - \gamma_1 < -\beta - N_2$;

e) $N_1 = N_2 + 1$, $0 < \gamma_2 - \gamma_1 < 1$, а $\beta > 1 - (\gamma_2 - \gamma_1) < -\alpha - N_2$.

Рассмотрим функцию $G^{(\alpha,\beta)}_{N_1,N_2}$:

$$G^{(\alpha,\beta)}_{N_1,N_2}(x) := \frac{1}{\Gamma(x-\gamma_1+1)\Gamma(N_1-x+\gamma_1+1)} \times \frac{\Gamma(x-\gamma_2+\alpha)\Gamma(N_2-x+\gamma_2+\beta)}{\Gamma(x-\gamma_2+1)\Gamma(N_2-x+\gamma_2+1)}. \quad (36)$$

Из каждого из условий а)—е) следует, что при $x \in [\gamma_j, \gamma_j + N_j]$ знаменатель функции $G^{(\alpha,\beta)}_{N_1,N_2}$ положителен, а знак числителя чередуется таким образом, что функция $(-1)^{x-\gamma_j} G^{(\alpha,\beta)}_{N_1,N_2}(x)$ является знакопостоянной на решетке $\gamma_j + \{0, 1, \dots, N_j\}$, где $j = 1, 2$.

Рассмотрим две дискретные *знакопостоянные* меры:

$$\mu_j(y) := \sum_{x-\gamma_j=0}^{N_j} (-1)^{x-\gamma_j} G^{(\alpha,\beta)}_{N_1,N_2}(x)\delta(y-x), \quad j = 1, 2. \quad (37)$$

При $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leqslant \min\{N_1, N_2\}$ определим *многочлен Кравчука—Хана I*, как многочлен P_n, удовлетворяющий соотношению

$$P_n(x)(-1)^x G^{(\alpha,\beta)}_{N_1,N_2}(x) = \nabla^n \left[(-1)^x G^{(\alpha+n,\beta+n)}_{N_1-n,N_2-n}(x)\right]. \quad (38)$$

Многочлен P_n имеет степень $2n$ и является многочленом совместной ортогональности (23) относительно мер μ_1, μ_2 из (37).

Мы рассмотрели случай I, когда выпуклые оболочки носителей мер μ_1, μ_2 пересекаются. Отметим, что во всех рассмотренных выше случаях носители мер μ_1, μ_2 обладали свойством перемежаемости. Нетрудно убедиться, что в случае I условие перемежаемости узлов двух решеток является необходимым для того, чтобы рассматриваемые меры были знакопостоянными.

3.2 Случай II

Перейдем теперь к случаю, когда выпуклые оболочки носителей мер μ_1, μ_2 не пересекаются.

Многочлены Шарлье—Кравчука. Пусть $B := -b$, $b > 0$, $N \in \mathbb{N}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\gamma_1 - \gamma_2 > N$, $\gamma_1 - \gamma_2 \notin \mathbb{N}$. Пусть

$$G_N(x) := \frac{1}{\Gamma(x-\gamma_1+1)\Gamma(x-\gamma_2+1)\Gamma(N-x+\gamma_2+1)}. \tag{39}$$

Рассмотрим две дискретные знакопостоянные меры:

$$\begin{aligned} \mu_1(y) &:= \sum_{x-\gamma_1=0}^{\infty} (-b)^{x-\gamma_1} G_N(x)\delta(y-x), \\ \mu_2(y) &:= \sum_{x-\gamma_2=0}^{N} (-b)^{x-\gamma_2} G_N(x)\delta(y-x). \end{aligned} \tag{40}$$

Заметим, что из неравенства $\gamma_1 - \gamma_2 > N$ вытекает, что выпуклые оболочки носителей мер μ_1, μ_2 не пересекаются.

При $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leqslant N$ определим многочлен P_n степени $2n$:

$$P_n(x)(-b)^x G_N(x) = \nabla^n \left[(-b)^x G_{N-n}(x)\right]. \tag{41}$$

Тогда P_n удовлетворяет соотношениям совместной ортогональности (23) относительно мер μ_1, μ_2 из (40). Многочлен P_n назовем *многочленом Шарлье—Кравчука.*

Многочлены Мейкснера—Кравчука строятся аналогично многочленам Шарлье–Кравчука. Пусть $b \in (0,1)$, $N \in \mathbb{N}$, $\alpha, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha > \gamma_1 - \gamma_2 > N$, $\gamma_1 - \gamma_2 \notin \mathbb{N}$. Пусть

$$G_N^{(\alpha)}(x) := \frac{\Gamma(x-\gamma_1+\alpha)}{\Gamma(x-\gamma_1+1)\Gamma(x-\gamma_2+1)\Gamma(N-x+\gamma_2+1)}. \tag{42}$$

Рассмотрим две дискретные знакопостоянные меры:

$$\begin{aligned} \mu_1(y) &:= \sum_{x-\gamma_1=0}^{\infty} (-b)^{x-\gamma_1} G_N^{(\alpha)}(x)\delta(y-x), \\ \mu_2(y) &:= \sum_{x-\gamma_2=0}^{N} (-b)^{x-\gamma_2} G_N^{(\alpha)}(x)\delta(y-x). \end{aligned} \tag{43}$$

Выпуклые оболочки носителей мер μ_1, μ_2 не пересекаются.

Как и ранее для $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leqslant N$ определим многочлен P_n степени $2n$:

$$P_n(x)(-b)^x G_N^{(\alpha)}(x) = \nabla^n[(-b)^x G_{N-n}^{(\alpha+n)}(x)].$$

Многочлен Мейкснера—Кравчука P_n удовлетворяет соотношениям ортогональности (23) относительно мер из (43).

Многочлены Анжелеско—Кравчука. Пусть $b > 0$, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\gamma_1 - \gamma_2 > N_2$, $\gamma_1 - \gamma_2 \notin \mathbb{N}$. Пусть

$$G_{N_1,N_2}(x) := \frac{1}{\Gamma(x-\gamma_1+1)\Gamma(N_1-x+\gamma_1+1)} \times \frac{1}{\Gamma(x-\gamma_2+1)\Gamma(N_2-x+\gamma_2+1)}. \quad (44)$$

Рассмотрим две дискретные знакопостоянные меры:

$$\mu_j(y) := \sum_{x-\gamma_j=0}^{N_j} (-b)^{x-\gamma_j} G_{N_1,N_2}(x)\delta(y-x), \quad j = 1, 2. \quad (45)$$

При $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leqslant \min(N_1, N_2)$ определим многочлен P_n степени $2n$:

$$P_n(x)(-b)^x G_{N_1,N_2}(x) = \nabla^n[(-b)^x G_{N_1-n,N_2-n}(x)]. \quad (46)$$

Многочлен P_n удовлетворяет соотношениям совместной ортогональности (23) относительно мер из (45). Выпуклые оболочки носителей мер μ_1, μ_2 не пересекаются. Наборы таких мер в литературе [6] принято называть системами Анжелеско, см. [1, 13]. Многочлен P_n будем называть *многочленом Анжелеско—Кравчука.*

Многочлены Кравчука—Хана II. Пусть $B := -1$, а $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ и $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ удовлетворяют одному из двух условий:

а) $\alpha > \gamma_2 - \gamma_1 > N_1$, $\gamma_2 - \gamma_1 \notin \mathbb{N}$, $\beta > 0$;

б) $-\beta - N_2 > \gamma_2 - \gamma_1 > N_1$, $\gamma_2 - \gamma_1 \notin \mathbb{N}$, $-\alpha - N_2 > 0$.

Рассмотрим пару мер μ_1, μ_2, определенных в (37). При указанных выше условиях меры μ_1, μ_2 являются знакопостоянными, а выпуклые оболочки их носителей не пересекаются.

При $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leqslant \min\{N_1, N_2\}$ определим *многочлен Кравчука—Хана II*, как многочлен P_n, удовлетворяющий соотношению (38). Многочлен P_n имеет степень $2n$ и является многочленом совместной ортогональности (23) относительно мер μ_1, μ_2 из (37).

3.3 Заключение

Мы рассмотрели несколько примеров многочленов совместной дискретной ортогональности в случае $r = 2$ весов. Для всех примеров весовые функции удовлетворяют разностному уравнению Пирсона, а для многочленов справедлива формула Родрига (10).

Из формулы Родрига нетрудно получить рекуррентные соотношения третьего порядка, связывающие многочлены P_n степени $2n$, соответствующие диагональным индексам (n, n), и многочлены Q_n степени $2n+1$, соответствующие индексам $(n+1, n)$ (Q_n удовлетворяет $n+1$ соотношению ортогональности относительно меры μ_1 и n соотношениям относительно μ_2). Представляет интерес исследование свойств этих рекуррентных соотношений и соответствующих ленточных операторов Гейзенберга.

В настоящей работе мы не затрагивали вопросы *нормальности* индексов и единственности многочленов совместной ортогональности P_n. В случае II, когда выпуклые оболочки носителей мер ортогональности μ_1, μ_2 не пересекаются, система мер μ_1, μ_2 является *совершенной*. Это означает, что все индексы (n_1, n_2) нормальны, а многочлен совместной ортогональности определен однозначно с точностью до нормировочного множителя. Действительно, из соотношений ортогональности следует, что P_{n_1,n_2} имеет n_j простых нулей в выпуклой оболочке носителя μ_j. То есть степень P_{n_1,n_2} равна $n_1 + n_2$, что и означает нормальность (n_1, n_2). В случае I вопрос нормальности требует дополнительного изучения.

Классические ортогональные многочлены являются пределами классических многочленов дискретной ортогональности. Различные предельные соотношения между гипергеометрическими ортогональными многочленами представляются схемой Аски [14]. Аналогичными свойствами обладают и рассмотренные нами совместно ортогональные многочлены.

Вызывает интерес вопрос об асимптотическом поведении многочленов P_n при $n \to \infty$. В работе [26] исследовалась асимптотика сжатых многочленов Мейкснера—Сорокина (случай I). При исследовании асимптотики возникают новые нетривиальные задачи равновесия векторного логарифмического потенциала. При этом часть нулей многочленов P_n

заметают комплексные кривые. В случае II при подходящем масштабировании можно ожидать стандартных задач равновесия с матрицей взаимодействия Анжелеско и ограничением сверху на равновесную меру.

Исследованию этих вопросов мы планируем посвятить дальнейшие публикации. Мы также надеемся, что рассмотренные многочлены найдут приложения в комбинаторике, теории представлений и других разделах.

Список литературы

[1] Angelesco A. Sur deux extensions des fractions continues algébriques. C. R. Acad. Sci. Paris, 168 (1919), 262—265.

[2] Aptekarev A.I. Multiple orthogonal polynomials. J. Comput. Appl. Math. 99 (1998), no. 1-2, 423–447.

[3] Aptekarev A.I., Branquinho A., Van Assche W. Multiple Orthogonal Polynomials for Classical Weights. Transactions of the American Mathematical Society Vol. 355, no. 10 (2003), pp. 3887-3914.

[4] Аптекарев А.И., Койэлаарс А.Э. Аппроксимации Эрмита–Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов, УМН, 66:6(402) (2011), 123–190.

[5] Aptekarev A.I., Marcellán F., Rocha I.A. Semiclassical multiple orthogonal polynomials and the properties of Jacobi-Bessel polynomials. J. Approx. Theory 90 (1997), no. 1, 117–146.

[6] Aptekarev A.I., Stahl H. (1992) Asymptotics of Hermite–Padé Polynomials. In: Gonchar A.A., Saff E.B. (eds) Progress in Approximation Theory.

[7] Arvesú J., Coussement J., Van Assche W. Some discrete multiple orthogonal polynomials. J. Comput. Appl. Math. 153 (2003), no. 1-2, 19–45.

[8] Van Assche W. Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence, in Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation. Contemp. Math., 236 (1999), 325–342.

[9] Van Assche W., Coussement E. Some classical multiple orthogonal polynomials. J. Comput. Appl. Math. 127 (2001), no. 1-2, 317–347.

[10] Dominici D., Marcellán F. Discrete semiclassical orthogonal polynomials of class one. Pacific J. Math. 268 (2014), no. 2, 389–411.

[11] Filipuk G., Van Assche W. Discrete orthogonal polynomials with hypergeometric weights and Painlevé VI. SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., 14 (2018), No. 088, 19 pp.

[12] Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Наука, 1958.

[13] Калягин В.А. Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности, Матем. сб., 110(152):4(12) (1979), 609–627.

[14] Koekoek R., Swarttouw R.F. The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue. Delft Univ. of Technology, Rep. no. 98-17, 1998. https://homepage.tudelft.nl/11r49/documents/as98.pdf

[15] Kuijlaars A.B.J. Multiple orthogonal polynomial ensembles, Recent trends in orthogonal polynomials and approximation theory, Contemp. Math., vol. 507, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, pp. 155–176.

[16] Mukhin E., Varchenko A. Multiple orthogonal polynomials and a counterexample to the Gaudin Bethe ansatz conjecture. Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), no. 11, 5383–5418.

[17] Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной, М.: Наука, 1985.

[18] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Основы теории специальных функций, М.: Наука, 1974.

[19] Никишин Е.М., Сорокин В.Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность, М.: Наука, 1988.

[20] Сегё Г. Ортогональные многочлены, М.: Физматлит, 1962.

[21] Smet C., Van Assche W. Orthogonal polynomials on a bi-lattice. Constr. Approx. 36 (2012), no. 2, 215–242.

[22] Sorokin V.N. Simultaneous Pade approximations in the case of finite and infinite intervals. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 1984, no. 8, 45–52.

[23] Сорокин В.Н. Обобщение многочленов Лагерра и сходимость совместных аппроксимаций Паде. УМН, 41:1(247) (1986), 207–208.

[24] Sorokin V.N. Generalization of classical orthogonal polynomials and convergence of simultaneous Pade approximants. Trudy Sem. Petrovsk. No. 11 (1986), 125–165.

[25] Сорокин В.Н. Циклические графы и теорема Апери. УМН, 57:3(345) (2002), 99–134.

[26] Сорокин В.Н. О многочленах совместной ортогональности для дискретных мер Мейкснера, Матем. сб., 201:10 (2010), 137-160.

Оглавление