



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 234 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Гавриков М.Б., Таюрский А.А.**

Влияние синхротронного и фоторекомбинационного излучений на нелинейное поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Влияние синхротронного и фоторекомбинационного излучений на нелинейное поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 234. 19 с. doi:[10.20948/prepr-2018-234](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-234)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-234>

**Ордена Ленина**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**имени М.В.Келдыша**  
**Российской академии наук**

**М.Б.Гавриков, А.А.Таюрский**

**Влияние синхротронного  
и фоторекомбинационного излучений  
на нелинейное поглощение  
альфвеновской волны  
диссипативной плазмой**

**Москва — 2018**

*Гавриков М.Б., Таюрский А.А.*

**Влияние синхротронного и фоторекомбинационного излучений на нелинейное поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой**

Предложена математическая модель затухания альфвеновской волны, в основу исследования которой положены уравнения двухжидкостной электромагнитной гидродинамики с полным учётом инерции электронов и их тормозного излучения. Особое внимание уделено изучению дополнительного влияния фоторекомбинационного и синхротронного излучений. Исследование выявило, в частности, конечность глубины проникновения альфвеновской волны в плазму. Другим важным эффектом является установление параметров поглощаемой альфвеновской волны и выход их на квазистационарный режим.

**Ключевые слова:** классическая МГД, электромагнитная гидродинамика (ЭМГД), альфвеновская волна, тормозное излучение, фоторекомбинационное излучение, синхротронное излучение.

*Mikhail Borisovich Gavrikov, Aleksei Aleksandrovich Taiurskii*

**Influence of synchrotron and photorecombination radiation on nonlinear absorption of Alfvén wave by dissipative plasma**

A mathematical model of the Alfvén wave absorption is proposed, the study of which is based on the equations of two-fluid electromagnetic hydrodynamics with electron inertia and bremsstrahlung taking into account. Special attention is paid to the research of the additional effects of photorecombination and synchrotron radiation. The investigation revealed, in particular, the finite depth of the Alfvén wave penetration into the plasma. Another important effect is the establishment of the parameters of the absorbed Alfvén wave and their convergence to the quasi-stationary regime.

**Key words:** classical MHD, electromagnetic hydrodynamics (EMHD), Alfvén wave, bremsstrahlung, photorecombination radiation, synchrotron radiation.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект №16-11-10278).

# 1. Введение

Как известно, температура солнечной короны, достигающая  $\sim 6 \cdot 10^6$  °К, примерно в  $10^3$  раз выше температуры солнечных слоёв – фотосферы и хромосферы, расположенных ниже короны и ближе к центру Солнца. На первый взгляд, это противоречит здравому смыслу, поскольку при удалении от центра Солнца, где происходят термоядерные реакции синтеза и температура достигает нескольких сотен миллионов градусов Кельвина, температура солнечной плазмы должна падать. Различные гипотезы о возможной причине этого аномального явления связаны, например, либо с теплом, выделяемым многочисленными микровспышками в солнечной короне, либо с магнитным суперторнадо, возникающим в хромо- и фотосферах и выплёскивающим свою энергию в солнечной короне. Наименее фантастическая гипотеза [1], проанализированная в этой и нескольких предыдущих работах [2–4], видит причину аномального разогрева солнечной короны в теплоте, выделяемой в короне в результате нелинейного поглощения альфвеновских волн, генерируемых в фотосфере. При этом, оказывается [3], огромную роль играет тормозное излучение электронов в солнечной короне. В настоящей работе дополнительно изучена роль синхротронного и фоторекомбинационного излучения в процессе нелинейного поглощения альфвеновской волны.

Альфвеновские волны являются бегущими вдоль магнитного поля поперечными синусоидальными колебаниями плазмы, в которых возмущаются только поперечные компоненты векторных параметров плазмы (скорости, напряжённости электрического и магнитного полей, плотности тока и пр.), а продольные компоненты и термодинамические параметры остаются неизменными. Альфвеновские волны в классической МГД были открыты Х. Альфвеном в 1942 г. [5]. Отличительная особенность альфвеновских волн состоит в том, что они являются точными решениями как линеаризованных в окрестности однородного состояния, так и нелинейных уравнений динамики плазмы (классическая МГД [6], двухжидкостная ЭМГД [7] /см. ниже/ и т.д.). Это открывает возможность их глубокого изучения и сравнения предсказаний линейной и нелинейной теорий.

Нелинейное поглощение альфвеновских волн, рассмотренное в настоящей и более ранних работах, обусловлено диссипативными процессами в плазме – магнитной и гидродинамическими вязкостями и теплопроводностями плазменных компонент, релаксацией температур электронов и ионов, а также излучением. В работах [3, 4] исследована роль тормозного излучения электронов. В этой работе дополнительно учтены синхротронное и фоторекомбинационное излучения. Поскольку диссипативные процессы относятся к мелкомасштабным, то изучение их для космической плазмы в рамках классической МГД наталкивается на очевидное препятствие – характерный масштаб длины  $L$  в классической МГД обязан удовлетворять

условию (очевидно, справедливому для космической плазмы)  $L \gg \ell_c = c / \omega_p$ , где  $\ell_c$  – скин-длина,  $\omega_p$  – плазменная частота, однако на длинах  $\gg \ell_c$  диссипативные эффекты исчезающе малы. Из этого положения есть два выхода. Либо перейти к турбулентным МГД-теориям плазмы [8, 9], либо использовать двухжидкостное описание на базе теории электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) плазмы [7], справедливость которого не связана с соотношением  $L \gg \ell_c$ . Первый путь требует для замыкания уравнений турбулентного движения вычисления полуэмпирических коэффициентов турбулентности (вязкости и пр. [8]), что для астрофизических задач сделать весьма проблематично. Поэтому ниже отдано предпочтение второму пути.

Для построения математической модели нелинейного поглощения альфвеновской волны солнечной короной принят ряд допущений:

- 1) Существует строгая геометрическая граница, отделяющая фотосферу от солнечной короны, которая ниже предполагается неподвижной плоскостью, задаваемой в координатах уравнением  $x=0$ , слева от которой расположена фотосфера. В частности, солнечная корона заполняет область  $0 \leq x < +\infty$ .
- 2) Плазма фотосферы считается однородной и неподвижной вдоль оси  $x$  ( $\rho = \text{const}$ ,  $T_{\pm} = \text{const}$ ,  $U_x = 0$  – здесь и ниже индексы “ $\pm$ ” относятся к параметрам электронов и ионов), вследствие чего ЭМГД-уравнения в фотосфере  $x < 0$  допускают точное решение типа альфвеновской волны. В частности, волна, бегущая слева направо, определяет граничное условие на левой границе  $x=0$  солнечной короны. На правой границе  $x = +\infty$  ставятся условия невозмущённой однородной покоящейся плазмы.
- 3) Плазма в солнечной короне предполагается квазинейтральной и несжимаемой, а в начальный момент времени – неподвижной и однородной с теми же параметрами, что у плазмы фотосферы.
- 4) При нагревании солнечной короны возникает поток тепла в область  $x < 0$ , занятую фотосферой. Ниже предполагается, что фотосфера мгновенно поглощает это тепло без изменения своей температуры.

Гипотеза о несжимаемости плазмы, как известно [10], справедлива, если

$$v_{\pm}^2 \ll c_{\pm}^2, \quad (1)$$

где  $v_{\pm}$  – гидродинамические скорости электронов и ионов,  $c_{\pm}$  – их звуковые скорости,  $c_{\pm} = (k_B T_{\pm} / m_{\pm})^{1/2}$ ,  $k_B$  – постоянная Больцмана. Как показывают расчёты, соотношения (1) в солнечной короне при нелинейном поглощении альфвеновской волны выполнены, несмотря на небольшую плотность плазмы – согласно [11], типичные значения плотности плазмы в солнечной короне равны  $\rho = 10^{-12} - 10^{-15} \text{ г/см}^3$ . Заметим, что в первой работе [2] плазма короны считалась сжимаемой, а  $U_x \neq 0$ . Как показали расчёты, плотность плазмы с течением времени остаётся практически постоянной во всей области, занятой солнечной короной, за исключением небольшой окрестности границы  $x=0$  с фотосферой, где отклонения от константного значения обусловлены гипотезой

1) о наличии строгой неподвижной границы между фотосферой и солнечной короной и являются, по сути, паразитическим эффектом. Простейший способ избавиться от этого эффекта – считать плазму несжимаемой. Для учёта сжимаемости плазмы необходимо либо считать границу фотосфера–корона подвижной (и тогда придётся выводить уравнение движения границы), либо считать эту границу проницаемой для плазмы фотосферы. Обе возможности ведут к усложнению модели нелинейного поглощения альфвеновских волн и нами не рассматривались.

В работах [3, 4] исследовано нелинейное поглощение альфвеновских волн с учётом тормозного излучения электронов  $p_T = \text{const} \cdot n_+ \cdot n_- Z^2 \sqrt{T_-}$  (где  $\text{const}$  определяется единицами измерения величин,  $Z$  – степень ионизации ионов) и, в частности, зависимость поглощения от частоты альфвеновской волны и неоднородности плазмы короны. В настоящей работе дополнительно учитывается фоторекомбинационное излучение  $p_{\text{фр}} = \text{const} \cdot n_+ \cdot n_- Z^4 / \sqrt{T_-}$  (где  $\text{const}$  также определяется единицами измерения величин [12]) и синхротронное излучение  $p_c$ , зависящее от магнитного поля [13],

$$p_c = \frac{k_B T_-}{2\pi c^3} \omega_{pe}^2 \omega_{ce}^2 \Phi = \frac{4}{3} \frac{k_B e^4}{m^3 c^5} H^2 T_- n_- \Phi, \quad (2)$$

где  $\omega_{pe} = (4\pi n_- e^2 / m_-)^{1/2}$  – плазменная частота электронов,  $\omega_{ce} = eH / (mc)$  – циклотронная частота электронов,  $H$  – напряжённость магнитного поля в гауссах,  $T_-$  – электронная температура в °К,  $\Phi$  – так называемый “форм-фактор” [13], показывающий, какая доля синхротронного излучения покидает плазму,  $0 < \Phi < 1$ . Для типичных параметров солнечной короны [11]  $H = 1-100$  Гс,  $T_- \approx 6 \cdot 10^6$  °К для любого  $0 < \Phi < 1$  имеем  $p_c \ll p_T$ , и, таким образом, определяющим является фоторекомбинационное и тормозное излучения. Согласно [12], имеем

$$\frac{p_{\text{фр}}}{p_T} = \frac{32Z^2}{T_-}, \quad (3)$$

где  $T_-$  меряется в электронвольтах. Из (3) с учётом равенства  $T_-(\text{эВ}) = T_-(\text{°К}) / 11600$  следует, что при  $T_- \geq 10^7$  °К имеем  $p_{\text{фр}} \ll p_T$ . Таким образом, в прогретой до значений  $\sim 6 \cdot 10^6$  °К солнечной короне фоторекомбинационным излучением можно пренебречь. Однако сам процесс разогрева солнечной короны при поглощении альфвеновских волн (а значит, финальная температура короны) существенно зависит от фоторекомбинационного излучения. Как показало наше исследование, зависимость поглощения альфвеновской волны от  $p_{\text{фр}}$  чисто количественная. Основные качественные выводы работы [3] остаются в силе: (а) поглощённая альфвеновская волна проникает в солнечную корону на конечную глубину  $d$ ,

которая на 10–15% меньше глубины проникновения без учёта  $p_{\text{фр}}$ , (б) параметры поглощённой альфвеновской волны стабилизируются, выходя с течением времени на квазистационарный режим, параметры которого можно найти решением некоторой краевой задачи на полупрямой для специальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, (в) при учёте фоторекомбинационного излучения электронная температура увеличивается ~ в 3.5 раза, а ионная ~ на 30% по сравнению с температурами без учёта  $p_{\text{фр}}$  и наличием только тормозного излучения  $p_T$ .

## 2. ЭМГД уравнения

Для исследования динамики двухжидкостной плазмы воспользуемся уравнениями Брагинского [14], составленными из двух – для электронов и ионов – комплектов гидродинамических уравнений. Для квазинейтральной плазмы уравнения Брагинского замыкаются усечённой системой уравнений электродинамики Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля. Весьма важно, что полученная замкнутая система уравнений динамики двухжидкостной плазмы с полным учётом инерции электронов может быть редуцирована [2, 15, 16] без потери математического и физического содержания к одножидкостной гидродинамической системе уравнений электромагнитной гидродинамики (ЭМГД). Для несжимаемой плазмы ЭМГД-система имеет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad \rho = \text{const}, \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \Pi = \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \mathbf{P}, \\ \mathbf{E} + \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi \rho} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}] + \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \mathbf{W}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где тензоры плотности потока импульса  $\Pi$ , вязких напряжений  $\mathbf{P}$  и “холловских слагаемых”  $\mathbf{W}$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \Pi = \Pi^h + \Pi^p + \Pi^c, \quad \mathbf{P} = \Pi_*^{(c)} + \Pi^{(U)}, \\ \mathbf{W} = (\lambda_- - \lambda_+) (\Pi^p + \Pi^c) + (\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-) \mathbf{I}_3 + \lambda_+ \lambda_- (\mathbf{j} \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{j}) - \Pi_*^{(U)} - \Pi^{(c)}, \\ \Pi^h = \rho \mathbf{U} \mathbf{U} + p_\Sigma \mathbf{I}_3, \quad \Pi^p = \frac{H^2}{8\pi} \mathbf{I}_3 - \frac{\mathbf{H} \mathbf{H}}{4\pi}, \quad \Pi^c = \lambda_+ \lambda_- \frac{\mathbf{j} \mathbf{j}}{\rho}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\lambda_\pm = m_\pm / e_\pm$ ,  $\lambda_\Sigma = \lambda_+ + \lambda_-$ ,  $p_\Sigma = p_+ + p_-$ ,  $m_\Sigma = m_+ + m_-$ ,  $\rho = \rho_+ + \rho_-$ ,  $\mathbf{U} = (\rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-) / \rho$ ,  $\mathbf{I}_3$  – единичный трёхмерный тензор,  $\sigma$  – проводимость плазмы. Тензоры вязких напряжений с учётом несжимаемости плазмы равны:

$$\Pi^{(U)} = 2\mu_\Sigma \mathbf{D}^U, \quad \Pi_*^{(U)} = 2\mu_* \mathbf{D}^U, \quad \Pi^{(c)} = 2\mu^* \mathbf{D}^c, \quad \Pi_*^{(c)} = 2\mu_* \mathbf{D}^c, \quad \Pi_\pm = 2\mu_\pm \mathbf{D}_\pm, \quad (6)$$

где  $D^U = \text{def}U$ ,  $D^c = \text{def}(j / \rho)$ ,  $D_{\pm} = \text{def}v_{\pm}$  – тензоры деформаций,  $\mu_{\Sigma} = \mu_{+} + \mu_{-}$ ,  $\mu_{*} = \lambda_{-}\mu_{+} - \lambda_{+}\mu_{-}$ ,  $\mu^{*} = \lambda_{-}^2\mu_{+} + \lambda_{+}^2\mu_{-}$ ,  $\mu_{\pm}$  – гидродинамические вязкости электронов и ионов. При этом вторые вязкости электронов и ионов считаются равными нулю.

По решению системы (4) – (6) гидродинамические параметры электронов и ионов вычисляются через  $\rho$ ,  $U$ ,  $j$  по формулам:

$$v_{\pm} = U \pm \frac{\lambda_{\pm}}{\rho} j, \rho_{\pm} = \frac{\lambda_{\pm}}{\lambda_{\Sigma}} \rho. \quad (7)$$

Учитывая зависимость (см. ниже) проводимости плазмы  $\sigma$ , гидродинамических вязкостей  $\mu_{\pm}$  и других коэффициентов переноса от температур электронов и ионов  $T_{\pm}$ , систему (4)–(6) необходимо дополнить уравнениями для температур [10]

$$\rho_{\pm} c_p^{\pm} \left[ \frac{\partial T_{\pm}}{\partial t} + v \cdot \text{grad} T_{\pm} \right] = \text{div}(\chi_{\pm} \nabla T_{\pm}) + \text{tr}(\Pi_{\pm} D_{\pm}) + \frac{m_{\pm} j^2}{m_{\Sigma} \sigma} \pm b(T_{-} - T_{+}) - p^{\pm}, \quad (8)$$

где  $p^{\pm} = p_T^{\pm} + p_{fp}^{\pm} + p_c^{\pm}$ ,  $c_p = T(\partial S / \partial T)_p$  – теплоёмкость при постоянном давлении,  $\chi_{\pm}$  – теплопроводности электронов и ионов,  $Q = \pm b(T_{-} - T_{+})$  – тепло, передаваемое компонентами плазмы друг другу при упругих столкновениях,  $p_T^{\pm}$  – потери на тормозное излучение,  $p_{fp}^{\pm}$  – потери на фоторекомбинационное излучение,  $p_c^{\pm}$  – потери на синхротронное излучение электронов и ионов. Для идеального политропного газа с общим показателем адиабаты  $\gamma$  имеем

$c_p = \frac{k_B}{(\gamma - 1)m} = \text{const}$ , где  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $m$  – масса частицы газа.

Именно этим случаем мы ниже ограничимся, считая  $c_p^{\pm} = k_B / ((\gamma - 1)m_{\pm})$ .

С учётом зависимостей  $\sigma$ ,  $\mu_{\pm}$ ,  $\chi_{\pm}$ ,  $b$ ,  $p^{\pm}$  от остальных параметров плазмы, прежде всего температур  $T_{\pm}$ , приводимых ниже, уравнения (4)–(8) дают замкнутую определённую систему уравнений относительно величин  $\rho_{\pm}$ ,  $T_{\pm}$ ,  $U$ ,  $H$ ,  $E$ . На решении этой системы в случае  $c_p^{\pm} = \text{const}$  выполнен закон сохранения полной энергии:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{U^2}{2} + \varepsilon + \frac{\lambda_{+}\lambda_{-}j^2}{2\rho^2} \right) + \frac{H^2}{8\pi} \right] + \text{div} \left[ \rho U \left( \frac{U^2}{2} + \varepsilon + \frac{p_{\Sigma}}{\rho} + \frac{\lambda_{+}\lambda_{-}j^2}{2\rho^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{c}{4\pi} [E, H] + A j - \sum_{\pm} \chi_{\pm} \nabla T_{\pm} - (\Pi^{(U)} + \Pi^{(c)}) U - (\Pi^{(c)} + \Pi^{(U)}) j / \rho \right] = \\ & = -(p^{+} + p^{-}), \end{aligned}$$



где  $\varepsilon_{\pm} = c_p^{\pm} T_{\pm}$  – плотность внутренней энергии электронов и ионов,  $\varepsilon = (\lambda_+ \varepsilon_+ + \lambda_- \varepsilon_-) / \lambda_{\Sigma}$ ,

$$A = \lambda_+ \lambda_- \frac{\langle \mathbf{U}, \mathbf{j} \rangle}{\rho} + \lambda_+ \lambda_- \frac{(\lambda_- - \lambda_+) j^2}{2\rho^2} + \frac{\lambda_+ \lambda_-}{\lambda_{\Sigma}} (\varepsilon_+ - \varepsilon_-) + \frac{\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-}{\rho}.$$

Заметим, что вследствие несжимаемости  $p_{\pm}$  не связаны с  $T_{\pm}$  уравнениями состояния, которые теряют смысл, и являются независимыми неизвестными, подлежащими нахождению наравне с  $T_{\pm}$  из системы (4) – (8).

Коэффициенты переноса  $\mu_{\pm}, \chi_{\pm}, \sigma, b$  получаются приближённым решением кинетических уравнений [14] и ниже считались равными [14, 17–20]

$$\mu_+ = 0.96 \cdot \frac{3m_+^{1/2} T_+^{5/2}}{4\pi^{1/2} e^4 Z^4 L}, \quad \mu_- = 0.733 \cdot \frac{3m_-^{1/2} T_-^{5/2}}{4(2\pi)^{1/2} e^4 ZL},$$

$$\sigma = \frac{3T_-^{3/2}}{4(2\pi m_-)^{1/2} e^2 ZL \cdot 0.5129}, \quad b = \frac{5m_-^{1/2} e^4 Z^3 \rho^2 L}{m_+^3 k^{1/2} T_-^{3/2}},$$

$$\chi_+ = D(kT_+)^{5/2}, \quad \chi_- = A(kT_-)^{5/2},$$

где  $Z$  – кратность заряда ионов,  $e_+ = Ze$ ,  $e_- = e$ ,  $e$  – заряд электрона,  $L$  – кулоновский логарифм (ниже  $L = 15$ ),  $T_{\pm}$  измеряются в °К. Коэффициенты  $D$  и  $A$  равны:

$$A = 1.9 \frac{k}{m_-^{1/2} e^4 L} f(Z), \quad D = A \left( \frac{m_-}{m_+} \right)^{1/2} \frac{g(Z)}{Z}, \quad f(Z) = \frac{1 + 0.59Z^{-1}}{1 + 0.25Z + 0.34Z^{-1}},$$

$$g(Z) = \frac{13.56 + 7.29Z^{-1} + 0.43Z^{-2} + 1.75Z^{-3} + 0.59Z^{-4}}{1 + 0.59Z^{-1}} -$$

$$- \frac{3.34 + 13.56Z^{-1} + 4.55Z^{-2}}{0.25 + Z^{-1} + 0.34Z^{-2}}.$$

Теплопроводность  $\chi_-$  вычислялась и по альтернативной формуле

$$\chi_- = A(kT_-)^{5/2} \left/ \left( 1 + F \frac{H^2}{\rho^2} (kT_-^3) \right) \right., \quad F = 0.33 \frac{m_+^2}{m_- c^2 e^6 Z^4 L^2}.$$

Для основного случая  $Z = 1$  имеем  $f(1) = 1$ ,  $g(1) = 1.76$ .

Тормозное излучение вычислялось по формулам [12, 21]:  $p_T^+ = 0$ ,

$$p_T^- = p_T = \frac{32\sqrt{\pi}}{3^{3/2}} (\alpha a_0)^3 \frac{m_- e^4}{\hbar^3} E_H \left( \frac{k_B T_-}{E_H} \right)^{1/2} Z^2 n_+ n_- \text{ (Вт/см}^3\text{)},$$

где  $\alpha = e^2 / (\hbar c)$ ,  $a_0 = r_0 / \alpha^2$ ,  $r_0 = \frac{e^2}{m_- c^2}$  – классический электронный радиус,

$E_H = \frac{e^2}{2a_0}$ ,  $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-27}$  эрг·сек – постоянная Планка,  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-16}$  эрг/°К –

постоянная Больцмана. Отсюда имеем:

$$p_T = \frac{32\sqrt{\pi}}{3^{3/2}} 10^7 \cdot \frac{e^6}{c^3 m_-^{3/2} \hbar} \sqrt{kT_-} Z^2 n_+ n_- \left( \frac{\text{эрг}}{\text{сек} \cdot \text{см}^3} \right),$$

где  $T_e$  измеряется в °К, а  $n_+$ ,  $n_-$  в  $\text{см}^{-3}$ .

Синхротронное излучение определяется формулами  $p_c^+ = 0$ ,  $p_c^- = p_c$ , где  $p_c$  – формулой (2). Для фоторекомбинационного излучения использовались формулы  $p_{\phi p}^+ = 0$ ,  $p_{\phi p}^- = p_{\phi p}$ , где  $p_{\phi p}$  вычислялось с помощью формулы (3).

В системе (4)–(8) для простоты не учтены термосила и анизотропия замагниченной плазмы [21]. Кроме того, выражения для коэффициентов переноса имеют теоретический характер и периодически корректируются. Наиболее проблемным является значение для электронной вязкости  $\mu_-$ , которое должно быть, вероятно, на два-три порядка меньше теоретического, приведённого выше.

### 3. Альфвеновские волны в ЭМГД

В бездиссипативном случае в плоской геометрии плоские альфвеновские волны являются точными решениями ЭМГД-уравнений. В [2] было показано, что в указанном случае ЭМГД-уравнения имеют точные решения вида:

$$U_{\perp} = u(t)e^{i\kappa x}, H_{\perp} = h(t)e^{i\kappa x}, E_{\perp} = e(t)e^{i\kappa x}, T_{\pm} = \text{const}, \rho = \text{const}, U_x = 0, \quad (9)$$

где  $\kappa > 0$  – произвольное и использованы комплексные обозначения  $U_{\perp} = U_y + iU_z$ ,  $H_{\perp} = H_y + iH_z$ ,  $E_{\perp} = E_y + iE_z$ . При этом  $H_x = \text{const}$ , а  $e(t)$  выражается в явном виде через  $u(t)$  и  $h(t)$ :

$$e(t) = \left( \frac{iH_x}{c} u(t) + \frac{i\kappa\Lambda v_A}{\omega_p} h(t) \right) / (1+r^2), r = \frac{\kappa c}{\omega_p}, \Lambda = \sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}} - \sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}, v_A = \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (10)$$

Функции  $u(t)$ ,  $h(t)$  имеют вид:

$$u(t) = C_1 e^{i\omega_+ t} + C_2 e^{i\omega_- t}, \quad h(t) = \frac{(4\pi\rho)^{1/2}}{\kappa v_A} \{C_1 \omega_+ e^{i\omega_+ t} + C_2 \omega_- e^{i\omega_- t}\}. \quad (11)$$

Здесь  $\omega_p = (4\pi\rho)^{1/2} (\lambda_+ \lambda_-)^{-1/2}$  – плазменная частота, а  $C_1$ ,  $C_2$  – произвольные комплексные константы. Поперечная компонента плотности тока  $j_{\perp} = j_y + ij_z$

также изменяется по закону  $j_{\perp} = j(t)e^{i\kappa x}$ , а  $j_x = 0$ , где  $j(t) = -\frac{\kappa c}{4\pi} h(t)$ . Наконец,

$$\omega_{\pm} = \omega_{\pm}(\kappa) = \frac{\kappa v_A}{2} \left\{ \frac{r\Lambda}{1+r^2} \pm \left[ \frac{r^2\Lambda^2}{(1+r^2)^2} + \frac{4}{1+r^2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (12)$$

Функции (9)–(12) доставляют решение уравнений как сжимаемой, так и несжимаемой ЭМГД. Разница лишь в вычислении давлений  $p_{\pm}$  и поля  $E_x$ . В сжимаемой ЭМГД давления ищутся из уравнений состояния и поэтому на решении (9)–(12)  $p_{\pm} = \text{const}$ , а поле  $E_x$  равно

$$E_x = -\frac{1}{c} \text{Im}(\bar{U}_{\perp} H_{\perp}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\lambda_{-} - \lambda_{+}) \frac{H^2}{8\pi} + \lambda_{-} p_{+} - \lambda_{+} p_{-} \right],$$

откуда  $E_x = -\text{Im}(\bar{U}_{\perp} H_{\perp})/c$  зависит только от  $t$ , в частности,  $\text{div} \mathbf{E} = 0$ . Для несжимаемой ЭМГД поле  $E_x$  должно быть задано как произвольная функция  $t$ , а давления  $p_{\pm}$  ищутся однозначно с точностью до константы из линейной системы

$$\frac{\lambda_{-}}{\rho} \frac{\partial p_{+}}{\partial x} - \frac{\lambda_{+}}{\rho} \frac{\partial p_{-}}{\partial x} = E_x + \frac{1}{c} \text{Im}(\bar{U}_{\perp} H_{\perp}), \quad \frac{\partial p_{+}}{\partial x} + \frac{\partial p_{-}}{\partial x} = 0.$$

Если  $x$ -я компонента электрического поля в системе отсчёта движущейся плазмы равна нулю, то  $p_{\pm}$  не зависят от  $x$ , в противном случае  $p_{\pm}$  линейно зависят от  $x$ .

Формулы (9)–(12) показывают, что альфвеновская волна является суммой волн, бегущих вдоль магнитного поля с фазовой скоростью  $-\omega_{-}(\kappa)/\kappa$  и против магнитного поля с фазовой скоростью  $-\omega_{+}(\kappa)/\kappa$ , причём фазовые скорости, в отличие от МГД-теории, зависят от длины волны  $\ell = 2\pi/\kappa$ . Из (12) следует, что волна, бегущая против магнитного поля, имеет большую по абсолютной величине фазовую скорость, чем волна, бегущая вдоль магнитного поля. Когда  $\kappa$  меняется от 0 до  $+\infty$ , частоты  $\omega_{\pm}(\kappa)$  изменяются в диапазоне от  $-(\text{sgn} H_x)\omega_c^{+}$  до  $(\text{sgn} H_x)\omega_c^{-}$ , где  $\omega_c^{\pm} = |H_x|/(\lambda_{\pm} c)$  – циклотронные частоты электронов и ионов. Удобно обратить формулу (12):

$$\kappa = \kappa(\omega) = \frac{\omega_p}{c} \cdot \frac{|\omega|}{\left( \frac{v_A^2 \omega_p^2}{c^2} + \frac{\omega_p v_A}{c} \Lambda \omega - \omega^2 \right)^{1/2}}, \quad (13)$$

где  $-\omega_c^{+} < \omega < \omega_c^{-}$  для  $H_x > 0$  и  $-\omega_c^{-} < \omega < \omega_c^{+}$  для  $H_x < 0$ .

В длинноволновом пределе  $r \ll 1$  имеем  $\omega_{\pm}(\kappa) \sim \pm \kappa v_A$ , и полученное решение переходит в классическую альфвеновскую волну.

#### 4. Постановка задачи о пространственном поглощении

Пусть плоская альфвеновская волна, бегущая слева направо в области  $x < 0$ , набегаёт на границу  $x = 0$  диссипативной плазмы, заполняющей

полупространство  $x > 0$ . Дальнейшее распространение альфвеновской волны в области  $x > 0$  сопряжено с её поглощением, которое и является предметом изучения. Из результатов предыдущего пункта следует, что если продольное магнитное поле  $H_x < 0$ , то частота набегающей альфвеновской волны  $\omega$  меняется в диапазоне  $-\omega_c^- = \frac{H_x}{\lambda_- c} < \omega < 0$ , а если  $H_x > 0$  – то в диапазоне

$-\omega_c^+ = -\frac{H_x}{\lambda_+ c} < \omega < 0$ . Ниже рассматривается первый случай, поскольку для него

диапазон частот  $\omega$  в  $\frac{m_+}{Zm_-}$  раз больше, чем для второго случая. Плазма в области  $x > 0$  считается замагниченной, покоящейся, однородной и изотермической. Таким образом, в начальный момент времени в области  $x > 0$  имеем:

$$U_{\perp}|_{t=0} = 0, \quad U_x|_{t=0} = 0, \quad T_{\pm}|_{t=0} = T^0, \quad \rho|_{t=0} = \text{const}, \quad H_{\perp}|_{t=0} = 0, \quad (14)$$

где константа  $\rho$  и продольное магнитное поле  $H_x = \text{const}$  такие же, как и в области  $x < 0$ , откуда набегающая альфвеновская волна. Ниже станет ясно, что поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой в области  $x > 0$  происходит за время, значительно меньшее времени релаксации температур, поэтому в (14) можно было бы считать  $T_{\pm}$  различными.

Значения параметров диссипативной плазмы на границе  $x = 0$  совпадают со значениями на границе  $x = 0$  параметров альфвеновской волны, которые, согласно формулам (9) – (13), равны:

$$U_{\perp}|_{x=0} = U_0 e^{i\omega t}, \quad H_{\perp}|_{x=0} = U_0 \frac{\sqrt{4\pi\rho}}{kV_A} \omega e^{i\omega t},$$

$$E_{\perp}|_{x=0} = \frac{iU_0}{1 + \left(\frac{kc}{\omega_p}\right)^2} \left( \frac{H_x}{c} + \Lambda \sqrt{\lambda_+ \lambda_-} \omega \right) e^{i\omega t}, \quad j_{\perp}|_{x=0} = -U_0 \frac{\omega c \rho}{H_x} e^{i\omega t}. \quad (15)$$

На бесконечности параметры диссипативной плазмы совпадают с параметрами невозмущённой плазмы:

$$U_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad H_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad T_{\pm}|_{x=+\infty} = T^0, \quad E_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad j_{\perp}|_{x=+\infty} = 0. \quad (16)$$

Запишем систему (4)–(8) в безразмерном виде в случае плоской симметрии ( $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$ ), используя обозначения  $U = U_{\perp} = U_y + iU_z$ ,  $H = H_{\perp} = H_y + iH_z$ ,  $E = E_{\perp} = E_y + iE_z$ ,  $j = j_{\perp} = j_y + ij_z$

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( H_x H - \mu_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial x} - \xi \mu_* \frac{\partial j}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + i \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad j = i \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}
E - \frac{\xi^2}{\rho} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \xi \zeta \frac{j}{\sigma} + i H_x U + \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Lambda H_x H - \mu_* \frac{\partial U}{\partial x} - \xi \mu^* \frac{\partial j}{\partial x} \frac{1}{\rho} \right], \\
\frac{\partial T_+}{\partial t} &= \frac{2Z(\gamma-1)}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi_+ \frac{\partial T_+}{\partial x} \right) + \frac{m_-}{m_\Sigma} \frac{\xi \zeta}{\sigma} |j|^2 + \frac{\zeta}{\xi} C_0 \rho^2 \frac{T_+ - T_-}{T_-^{3/2}} + \right. \\
&+ \left. \frac{T_+^{5/2}}{R_+} \left[ \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^2 + \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \frac{\xi^2}{\rho^2} \left| \frac{\partial j}{\partial x} \right|^2 + 2 \frac{\xi}{\rho} \sqrt{\lambda_-} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \bar{j}}{\partial x} \right) \right] \right\}, \\
\frac{\partial T_-}{\partial t} &= \frac{2(\gamma-1)}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi_- \frac{\partial T_-}{\partial x} \right) + \frac{m_+}{m_\Sigma} \frac{\xi \zeta}{\sigma} |j|^2 + \frac{\zeta}{\xi} C_0 \rho^2 \frac{T_+ - T_-}{T_-^{3/2}} + \right. \\
&+ \left. \frac{T_-^{5/2}}{R_-} \left[ \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^2 + \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \frac{\xi^2}{\rho^2} \left| \frac{\partial j}{\partial x} \right|^2 - 2 \frac{\xi}{\rho} \sqrt{\lambda_+} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \bar{j}}{\partial x} \right) \right] \right\} - \\
&- \frac{\xi_T}{\xi} (\gamma-1) Z^2 \rho T_-^{1/2} \left( 1 + \frac{32k_r}{T_-} \right),
\end{aligned} \tag{17}$$

где  $k_r = 11600/T^0$ ,  $\mu_\Sigma = \mu_+ + \mu_-$ ,  $\mu_* = (\lambda_- / \lambda_+)^{1/2} \mu_+ - (\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2} \mu_-$ ,  $\mu^* = (\lambda_- / \lambda_+) \mu_+ + (\lambda_+ / \lambda_-) \mu_-$ ,  $\mu_\pm = T_\pm^{5/2} / R_\pm$ ,  $\sigma = \sigma_0 T_-^{3/2}$ ,  $\chi_\pm = C_\pm (\xi / \zeta) T_\pm^{5/2}$ , а значения  $\sigma_0$ ,  $C_0$ ,  $R_\pm$ ,  $C_\pm$  равны:

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4 \cdot 0.5129}, \quad C_0 = \frac{m_-}{m_+} \left( 1 + Z \frac{m_-}{m_+} \right) \frac{5}{2\sqrt{2}\pi}, \\
R_+ &= \frac{\zeta}{\xi} \left( \frac{m_-}{m_+} \right)^{1/2} \frac{Z^3}{1 + Z \frac{m_-}{m_+}} \cdot \frac{2^{5/2}}{3\sqrt{\pi} \cdot 0.96}, \quad R_- = \frac{\zeta}{\xi} \frac{8}{1 + Z \frac{m_-}{m_+}} (3\sqrt{\pi} \cdot 0.733)^{-1}, \\
C_+ &= \left( \frac{m_+}{m_-} \right)^{1/2} \left( 1 + Z \frac{m_-}{m_+} \right)^2 \frac{1.9\pi}{2\sqrt{2}} \frac{f(Z)g(Z)}{Z}, \quad C_- = \frac{m_+}{m_-} \left( 1 + Z \frac{m_-}{m_+} \right) \frac{1.9\pi}{2\sqrt{2}} f(Z).
\end{aligned}$$

Если  $\chi_-$  вычисляется по альтернативной формуле, то

$$\chi_- = \frac{\xi}{\zeta} C_- T_-^{5/2} \left( 1 + \frac{0.66\pi^2}{Z\zeta^2} \frac{m_+}{m_-} \frac{|H|^2 + H_x^2}{\rho^2} T_-^3 \right)^{-1}.$$

Наконец,  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $\xi_T$  – числа подобия, равные

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{\ell_c}{L_0} = \frac{c\sqrt{\lambda_+ \lambda_-}}{\sqrt{4\pi\rho_0} L_0}, \quad \zeta = \frac{(4\pi\rho_0)^{5/2}}{H_0^4} \cdot \frac{ce^3}{m_+^2} LZ^3 \left( 1 + Z \frac{m_-}{m_+} \right)^{-3/2}, \\
\xi_T &= \frac{\rho_0^{3/2}}{H_0^2} \frac{10^7 e^5}{c^2 \hbar m_+ m_-} \frac{64\sqrt{\pi}}{3^{3/2}} \left( 1 + Z \frac{m_-}{m_+} \right)^{-3/2},
\end{aligned}$$

где  $\ell_c = c / \omega_p$  – скин-длина,  $L_0$ ,  $\rho_0$ ,  $H_0$  и т.д. – характерные масштабы длины плотности, напряжённости магнитного поля и т.д. При обезразмеривании считалось  $t_0 = L_0 / v_0$ ,  $v_0 = v_A = H_0 / \sqrt{4\pi\rho_0}$ ,  $E_0 = v_0 H_0 / c$ ,  $j_0 = c H_0 / (4\pi L_0)$ ,  $T_0 = v_A^2 \lambda_{\Sigma} e / (2k_B)$ .

Итак, требуется решить начально-краевую задачу для системы (17) на полупрямой  $x \geq 0$ : найти функции  $H(t, x)$ ,  $E(t, x)$ ,  $U(t, x)$ ,  $T_{\pm}(t, x)$ , удовлетворяющие для  $x \geq 0$ ,  $t \geq 0$  уравнениям системы (17), при  $t=0$  – безразмерным начальным условиям

$$U|_{t=0} = 0, \quad H|_{t=0} = 0, \quad E|_{t=0} = 0, \quad T_{\pm}|_{t=0} = T^0, \quad x \geq 0, \quad (18)$$

а при  $x=0$  и  $x=+\infty$  – безразмерным краевым условиям:

$$U|_{x=0} = U_0 e^{i\omega t}, \quad H|_{x=0} = \frac{\rho U_0 \omega}{\kappa H_x} e^{i\omega t}, \quad j|_{x=0} = -\frac{\rho U_0 \omega}{H_x} e^{i\omega t},$$

$$E|_{x=0} = \frac{iU_0}{1 + \kappa^2 \xi^2} (H_x + \xi \Lambda \omega) e^{i\omega t} = \frac{iU_0}{H_x} (H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2) e^{i\omega t}, \quad (19)$$

$$U|_{x=+\infty} = 0, \quad H|_{x=+\infty} = 0, \quad E|_{x=+\infty} = 0, \quad j|_{x=+\infty} = 0, \quad T_{\pm}|_{x=+\infty} = T^0,$$

причём при  $H_x > 0$  имеем  $-H_x (\lambda_- / \lambda_+)^{1/2} < \omega \xi < 0$ , при  $H_x < 0$  имеем  $H_x (\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2} < \omega \xi < 0$ . Здесь  $\omega, \rho, H_x \in \mathbb{R}$ ,  $U_0 \in \mathbb{C}$  – безразмерные параметры задачи и в безразмерном виде

$$\kappa = \kappa(\omega) = \frac{|\omega| \sqrt{\rho}}{\sqrt{H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2}}.$$

## 5. Численный метод решения задачи о пространственном поглощении

Рассмотрим неявную разностную схему численного решения задачи (17)–(19). Счётная область – отрезок  $[0, L]$  с достаточно большим  $L$ , в котором выбраны две сетки узлов  $x_{\kappa} = \kappa h$ ,  $0 \leq \kappa \leq N$ ,  $x_{\kappa+1/2} = (\kappa + 1/2)h$ ,  $0 \leq \kappa < N$ ,  $h = L/N$ . В целых узлах аппроксимируются величины  $j$ ,  $U$ ,  $E$ , в дробных –  $H$ ,  $T_{\pm}$ . Переход с нижнего на верхний временной слой  $T_{\pm}^0, U^0, H^0 \rightarrow T_{\pm}^1, U^1, H^1$  за время  $\tau$ ,  $t \rightarrow t + \tau$ , реализуется неявной разностной схемой, где для простоты считаем  $Z = 1$

$$1) \quad \rho \frac{U_{\kappa}^1 - U_{\kappa}^0}{\tau} - \frac{1}{h} \left[ \mu_{\Sigma, \kappa+1/2}^0 \frac{U_{\kappa+1}^1 - U_{\kappa}^1}{h} - \mu_{\Sigma, \kappa-1/2}^0 \frac{U_{\kappa}^1 - U_{\kappa-1}^1}{h} \right] -$$

$$- H_x \frac{H_{\kappa+1/2}^0 - H_{\kappa-1/2}^0}{h} - \frac{\xi}{\rho h} \left( \mu_{\Sigma, \kappa+1/2}^0 \frac{j_{\kappa+1}^0 - j_{\kappa}^0}{h} - \mu_{\Sigma, \kappa-1/2}^0 \frac{j_{\kappa}^0 - j_{\kappa-1}^0}{h} \right) = 0, \quad 0 < \kappa < N,$$

$$U_N^1 = 0, \quad U_0^1 = U_0 e^{i\omega(t+\tau)}, \quad j_N^0 = 0, \quad j_0^0 = -\frac{\rho U_0 \omega}{H_x} e^{i\omega t}, \quad j_k^0 = i \frac{H_{k+1/2}^0 - H_{k-1/2}^0}{h},$$

$$0 < k < N.$$

$$2) \frac{H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa+1/2}^0}{\tau} + i \frac{E_{\kappa+1} - E_{\kappa}}{h} = 0, \quad 0 \leq \kappa < N,$$

$$E_{\kappa} - \frac{\xi^2}{\rho_{\kappa}} \frac{E_{\kappa+1} - 2E_{\kappa} + E_{\kappa-1}}{h^2} = \frac{i\xi\zeta}{\sigma_0(T_{-, \kappa}^0)^{3/2}} \cdot \frac{H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa-1/2}^1}{h} + iH_x U_{\kappa}^1 +$$

$$+ \frac{\xi\Lambda H_x}{\rho} \frac{H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa-1/2}^1}{h} - \frac{\xi}{\rho h} \left[ \mu_{*, \kappa+1/2}^0 \frac{U_{\kappa+1}^1 - U_{\kappa}^1}{h} - \mu_{*, \kappa-1/2}^0 \frac{U_{\kappa}^1 - U_{\kappa-1}^1}{h} \right] -$$

$$- \frac{\xi^2}{\rho^2 h} \left[ \mu_{\kappa+1/2}^{*0} \frac{j_{\kappa+1}^0 - j_{\kappa}^0}{h} - \mu_{\kappa-1/2}^{*0} \frac{j_{\kappa}^0 - j_{\kappa-1}^0}{h} \right],$$

$$0 < \kappa < N, \quad E_N = 0, \quad E_0 = \frac{iU_0}{H_x} (H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2) e^{i\omega(t+\tau/2)},$$

$$3) \frac{T_{\pm, \kappa+1/2}^1 - T_{\pm, \kappa+1/2}^0}{\tau} = \frac{2(\gamma-1)}{\rho} \left\{ \frac{1}{h} \left[ \chi_{\kappa+1}^{\pm} \frac{T_{\pm, \kappa+3/2}^1 - T_{\pm, \kappa+1/2}^1}{h} - \chi_{\kappa}^{\pm} \frac{T_{\pm, \kappa+1/2}^1 - T_{\pm, \kappa-1/2}^1}{h} \right] + \right.$$

$$+ \frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}} \frac{\xi\zeta}{\sigma_0(T_{-, \kappa+1/2}^0)^{3/2}} \left| \frac{j_{\kappa}^1 + j_{\kappa+1}^1}{2} \right|^2 \pm \frac{\zeta}{\xi} C_0 \rho^2 \frac{T_{-, \kappa+1/2}^0 - T_{+, \kappa+1/2}^0}{(T_{-, \kappa+1/2}^0)^{3/2}} + \frac{(T_{\pm, \kappa+1/2}^0)^{5/2}}{R_{\pm}} \times$$

$$\left. \times \left[ \left| \frac{U_{\kappa+1}^1 - U_{\kappa}^1}{h} \right|^2 + \frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}} \frac{\xi^2}{\rho^2} \left| \frac{j_{\kappa+1}^1 - j_{\kappa}^1}{h} \right|^2 \pm 2 \frac{\xi}{\rho} \sqrt{\frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}}} \operatorname{Re} \left( \frac{U_{\kappa+1}^1 - U_{\kappa}^1}{h} \cdot \frac{j_{\kappa+1}^1 - j_{\kappa}^1}{h} \right) \right] \right\} - P_{\kappa+1/2}^{\pm},$$

$$P_{\kappa+1/2}^+ = 0, \quad P_{\kappa+1/2}^- = \frac{\xi_T}{\xi} (\gamma-1) \rho (T_{-, \kappa+1/2}^0)^{1/2} (1 + 32k_r / T_{-, \kappa+1/2}^0),$$

$$0 \leq k < N, \quad T_{\pm, 1/2}^1 = T^0, \quad T_{\pm, N+1/2}^1 = T^0.$$

Шаг  $\tau$  выбирается из условия устойчивости

$$\tau = kh / U_{\text{эф}}, \quad U_{\text{эф}} = \max_{0 \leq k < N} \left( \left| H_{\kappa+1/2}^0 \right|^2 / \rho + T_{+, \kappa+1/2}^0 + T_{-, \kappa+1/2}^0 \right)^{1/2},$$

где  $0 < k < 1$  – коэффициент запаса, подбираемый экспериментально. Порядок вычислений по схеме 1)–3) следующий. Сначала из 1) прогонкой определяется величина  $U_{\kappa}^1$ ,  $0 \leq \kappa \leq N$ . После этого по формулам 2) находятся значения  $H_{\kappa+1/2}^1$ ,  $0 \leq \kappa < N$ ,  $E_{\kappa}$ ,  $0 \leq \kappa \leq N$ . Для этого посредством первого равенства 2) исключается из числа неизвестных  $H_{\kappa+1/2}^1 = H_{\kappa+1/2}^0 - \frac{i\tau}{h} (E_{\kappa+1} - E_{\kappa})$ ,  $0 \leq \kappa < N$ , и полученные выражения подставляются во второе равенство 2), после чего

величины  $E_\kappa$ ,  $0 \leq \kappa \leq N$ , ищутся прогонкой и по найденным значениям восстанавливаются  $H_{\kappa+1/2}^1$ ,  $0 \leq \kappa < N$ . На завершающем этапе прогонками ищутся  $T_{\mp, \kappa+1/2}^1$ ,  $0 \leq \kappa < N$ . При этом  $j_\kappa^1$  вычисляются по очевидным формулам  $j_\kappa^1 = i(H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa-1/2}^1)/h$ ,  $0 < \kappa < N$ ,  $j_N^1 = 0$ ,  $j_0^1 = -\frac{\rho U_0 \omega}{H_x} e^{i\omega(t+\tau)}$ . Значения  $\chi_\kappa^\pm$  получаются интерполяцией  $\chi_\kappa^\pm = \frac{1}{2}(\chi_{\kappa+1/2}^\pm + \chi_{\kappa-1/2}^\pm)$ ,  $0 < \kappa < N$ ,  $\chi_0^\pm = \chi_{1/2}^\pm$ ,  $\chi_N^\pm = \chi_{N-1/2}^\pm$ , при этом  $\chi_{\kappa+1/2}^\pm$ ,  $0 \leq \kappa < N$  берутся на нулевом слое.

## 6. Анализ результатов расчётов

Рассмотрим результаты расчётов процесса нелинейного поглощения альфвеновской волны применительно к параметрам солнечной короны  $\rho_0 = 10^{-12} \text{ г / см}^3$ ,  $H_0 = 1 \text{ гс}$ ,  $Z = 1$ , тогда, согласно п. 4,  $\zeta = 3 \cdot 10^3$ ,  $\xi_T = 3$ , скин-длина  $\ell_c = c / \omega_p \approx 1 \text{ см}$ . Желая учесть мелкомасштабные ( $\sim \ell_c$ ) процессы при поглощении альфвеновской волны, положим  $L_0 = \ell_c$ , тогда  $\xi = 1$ . Учитываем оценку толщины плазменной части солнечной короны [3]  $\approx 300 - 400 \text{ км}$ , тем самым действительно будет учтена мелкомасштабная динамика плазмы. Для указанных параметров фоновой диссипативной плазмы альфвеновская скорость  $v_A = H_0 / \sqrt{4\pi\rho_0} = 2.8 \cdot 10^5 \text{ см / сек}$ ,  $t_0 = L_0 / v_A = c\sqrt{\lambda_+ \lambda_-} / H_0 = 3.45 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$ ,  $T_0 \approx 10^3 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $k_r = 11.6$ . Дебаевский радиус  $r_D = (kT_0)^{1/2} / (2\pi^{1/2} \rho_0 n_0^{1/2}) \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ см} \ll L_0$  и много меньше шагов использованной разностной сетки, поэтому условие квазинейтральности выполнено с высокой точностью. Здесь и ниже  $n_0 = \rho_0 / m_+$ ,  $m_+ = 2m_p$ .

Рассмотрим результаты расчётов для амплитуды  $U_0$  поперечной скорости падающей альфвеновской волны, равной  $|U_0| = 0.1$ , при этом  $\omega = -30$ ,  $H_x = -1$ . Частота  $\omega$  выбрана в середине интервала возможных частот  $-(\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2} < \omega < 0$ . Как видно из представленных графиков (рис. 1, 2), во-первых, альфвеновская волна проникает в диссипативную плазму на конечную глубину. Во-вторых, параметры альфвеновской волны выходят с течением времени на квазистационарный режим. В частности, происходит стабилизация со временем профилей температур электронов и ионов.



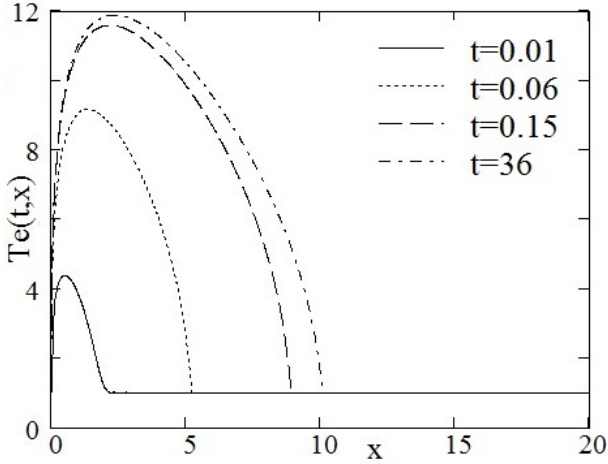


Рис. 1. Процесс установления с течением времени профиля температуры электронов

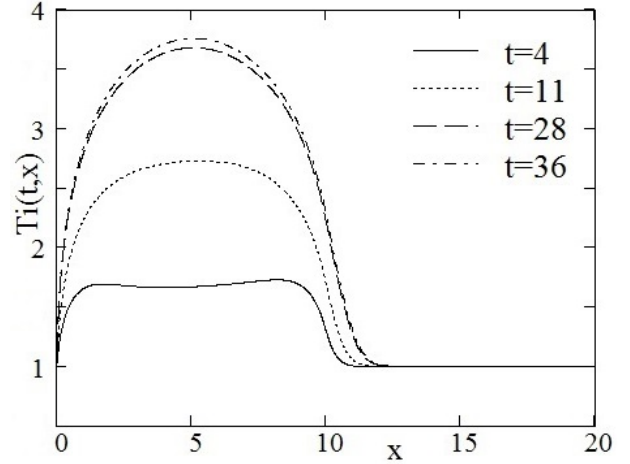


Рис. 2. Процесс установления с течением времени профиля температуры ионов

Наличие квазистационарного режима объясняется существованием у системы (17) квазистационарных решений вида  $T_{\pm} = T_{\pm}(x)$ ,  $U = e^{i\omega t} U(x)$ ,  $H = e^{i\omega t} H(x)$ ,  $E = e^{i\omega t} E(x)$ ,  $j = e^{i\omega t} j(x)$ , где  $\omega$  – частота падающей альфвеновской волны. Подставляя указанные функции в систему (17) и сокращая на  $e^{i\omega t}$ , получаем систему ОДУ на функции  $T_{\pm}(x)$ ,  $U(x)$ ,  $E(x)$  вида

$$\begin{aligned}
 & i\rho\omega U + \frac{H_x}{\omega} \frac{d^2 E}{dx^2} - \frac{d}{dx} \left( \mu_{\Sigma} \frac{dU}{dx} \right) + \frac{i\xi}{\rho\omega} \frac{d}{dx} \left( \mu_* \frac{d^3 E}{dx^3} \right) = 0, \\
 & E - \left( \frac{\xi^2}{\rho} - \frac{i\xi\xi}{\omega\sigma} - \frac{\xi\Lambda H_x}{\omega\rho} \right) \frac{d^2 E}{dx^2} - iH_x U + \frac{\xi}{\rho} \frac{d}{dx} \left( \mu_* \frac{dU}{dx} \right) - \frac{i\xi^2}{\omega\rho^2} \left( \mu_* \frac{d^3 E}{dx^3} \right) = 0, \\
 & \frac{d}{dx} \left( \chi_{\pm} \frac{dT_{\pm}}{dx} \right) + \frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}} \frac{\xi\xi}{\omega^2 \sigma_0 T_{\pm}^{3/2}} \left| \frac{d^2 E}{dx^2} \right| \pm \frac{\xi}{\xi} C_0 \rho^2 \frac{T_{-} - T_{+}}{T_{\pm}^{3/2}} + \\
 & + \frac{T_{\pm}^{5/2}}{R_{\pm}} \left[ \left| \frac{dU}{dx} \right|^2 + \frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}} \frac{\xi^2}{\omega^2 \rho^2} \left| \frac{d^3 E}{dx^3} \right|^2 \pm \frac{\xi}{\rho\omega} \sqrt{\frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}}} \operatorname{Re} \left( i \frac{dU}{dx} \frac{d^3 E}{dx^3} \right) \right] - \\
 & - \frac{(1 \mp 1)}{4} \frac{\xi_T}{\xi} Z^2 \rho T_{\pm}^{1/2} \left( 1 + \frac{32k_r}{T_{\pm}} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{20}$$

с граничными условиями в точках  $x=0$  и  $x=+\infty$ :

$$\begin{aligned}
 & T_{\pm}(0) = T^0, \quad U(0) = U_0, \quad H(0) = \frac{\rho U_0 \omega}{\kappa H_x}, \quad E(0) = \frac{iU_0}{1 + \kappa^2 \xi^2} (H_x + \xi\Lambda\omega), \\
 & T_{\pm}(+\infty) = T^0, \quad U(+\infty) = 0, \quad H(+\infty) = 0, \quad E(+\infty) = 0.
 \end{aligned} \tag{21}$$

При этом  $H = -\frac{dE}{dx}/\omega$ . Квazистационарные решения, получаемые установлением по времени, вероятно, можно получить, решая краевую задачу (20), (21) на  $(0, +\infty)$ . Однако проверка этой гипотезы и обсуждение результатов расчётов выходит за рамки настоящей работы, поскольку система (20), (21) из-за малости  $\mu_-$  является “жёсткой” и её численное решение требует особого внимания.

На рис. 3, 4 проведено сравнение установившихся профилей температур электронов и ионов в случае учёта только тормозного излучения (пунктирная линия) и в случае учёта тормозного и фоторекомбинационного излучений (сплошная линия). Синхротронное излучение, как показано во введении, существенного вклада не даёт. Из рис. 3 видно, что глубина проникновения для электронов во втором случае на 20% меньше, чем в первом. Максимальная температура при этом возросла в 3,5 раза. На рис. 4 показано, что глубина проникновения ионов одного порядка. Но максимальная температура ионов при учёте двух видов излучения на 30% больше.

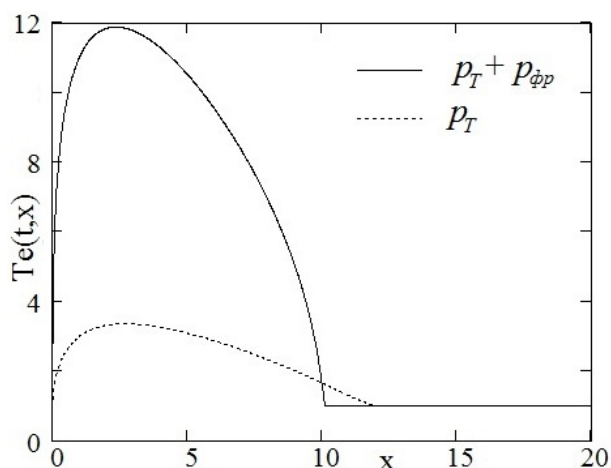


Рис. 3. Установившиеся профили температур электронов с учётом излучений

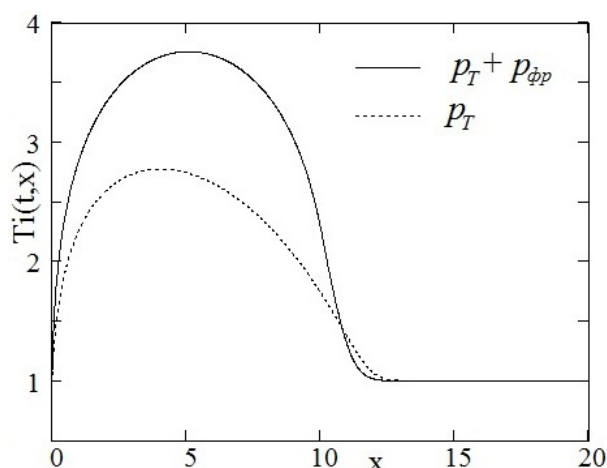


Рис. 4. Установившиеся профили температур ионов с учётом излучений

Отметим ещё один эффект: резко возрастает скорость процесса установления профиля температуры электронов. В случае тормозного и фоторекомбинационного излучений на процесс стабилизации затрачено в 10 раз меньше времени, чем в случае учёта только тормозного излучения.

## Список литературы

1. Scott W. McIntosh, Bart Pe Pontien, Marts Carlsson, Viggo Hansteen, Paul Boerner & Marsel Goossens. Alfvénic waves with sufficient energy to power the quiet solar corona and fast solar wind // Nature. 2011. v.475. p. 478–480.

2. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Пространственное нелинейное затухание альфвеновских волн в диссипативной плазме // Математическое моделирование. 2013. т.25. № 8. С. 65-79.
3. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Пространственное нелинейное поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 2. С. 40–59. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-2-40-59.
4. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Влияние плазменной неоднородности и частоты альфвеновской волны на её нелинейное пространственное поглощение диссипативной плазмой // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 3. С. 82–96. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-82-96.
5. Альфвен Х. Космическая электродинамика. – М.: ИЛ, 1952.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
7. Гавриков М.Б. Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика. М.: КРАСАНД. 2018. 584 с.
8. Горбачкий В.Г. Космическая газодинамика. М.: Наука. 1977. 360 с.
9. Бай-Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазма. М.: Мир. 1964. 302 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.
11. Аллен К.У. Астрофизические величины. М.: Мир, 1977.
12. Чукбар К.В. Лекции по явлениям переноса в плазме. Долгопрудный: Издательский дом “Интеллект”. 2008. 256с.
13. Трубников Б.А. Универсальный коэффициент выхода циклотронного излучения из плазменных конфигураций // Вопросы теории плазмы. Вып. 7. / Под ред. Б.Б. Кадомцева. М: Энергоатомиздат. 1973. С. 274-300.
14. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы. Под ред. М.А. Леонтовича. – М.: Госатомиздат. 1963. Вып. 1. С. 183-272.
15. Гавриков М.Б. Основные уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики. Ч. I // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. № 59. 28 с.
16. М.В. Gavrikov and А.А. Taiurskii, Electron inertia effect on incompressible plasma flow in a planar channel, J. Plasma Phys. (2015), vol. 81, 495810506, doi:10.1017/S0022377815000720.
17. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. – М.: Мир, 1965, 212с.
18. Чэпмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. – М.: ИЛ, 1960.
19. Имшенник В.С. // Астрономический журнал, 1961, 38, с.652.
20. Ландау Л.Д. // ЖЭТФ, 1937, №7, с.203.
21. Грим Г. Процессы излучения в плазме / В сб. Основы физики плазмы. Т.1 – М.: Энергоатомиздат, 1983, 641 с.

## Оглавление

1. Введение .....	3
2. ЭМГД уравнения .....	6
3. Альфвеновские волны в ЭМГД .....	9
4. Постановка задачи о пространственном поглощении .....	10
5. Численный метод решения задачи о пространственном поглощении .....	13
6. Анализ результатов расчётов .....	15
Список литературы.....	17