



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 241 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Щерица О.В., Мажорова О.С.

Методы исследования
конвективных течений со
сложной структурой

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Щерица О.В., Мажорова О.С. Методы исследования конвективных течений со сложной структурой // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 241. 33 с. doi:[10.20948/prepr-2018-241](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-241)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-241>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша
Российской академии наук

О.В. Щерица, О.С. Мажорова

Методы исследования конвективных течений
со сложной структурой

Москва — 2018

Щерица О.В., Мажорова О.С.

Методы исследования конвективных течений со сложной структурой

В работе рассмотрены методы анализа конвективных течений со сложной структурой. Показаны возможности методов исследования и описания течения, опирающиеся на спектральные методы, теорию динамических систем и методы вычислительной гомологии. Все эти подходы иллюстрируются на примере анализа многомасштабного течения, возникающего в горизонтальном слое жидкости, температуропроводность которой зависит от температуры. Показано, что только в сочетании различных методов и подходов исследования можно получить исчерпывающую информацию о структуре течения.

Ключевые слова: Многомасштабная конвекция, математическое моделирование, спектральные методы, вычислительная гомология, аттрактор.

Olga Vladimirovna Shcheritsa, Olga Semenovna Mazhorova

Methods for study the flow of complex structure.

Methods for studying and describing the flow of complex structure is demonstrated. Approaches based on spectral methods, on the theory of dynamic systems and on the computational homology methods are considered. All methods were applied to analyze a multiscale convection in a horizontal fluid layer with the temperature dependence of thermal diffusivity. It is shown that full description of the flow of complex structure can be obtained from a combination of different methods and approaches of the flow study.

Key words: Multiscale convection, mathematical modeling, spectral methods, computational homology, attractor

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-01-00436.

Введение

Естественная конвекция является одним из наиболее распространенных видов течения в природе. В связи с этим отдельной сложной и актуальной задачей является поиск методов исследования, описания и классификации структуры конвективного движения. В работе на примере анализа многомасштабной конвекции демонстрируются возможности методов исследования течений, опирающихся на спектральные методы, теорию динамических систем и методы вычислительной гомологии. Рассматриваемое течение было получено в рамках двумерной и трехмерной математических моделей конвективного движения в плоском горизонтальном слое жидкости, температуропроводность которой степенным образом зависит от температуры [1, 2]. Под влиянием нелинейного коэффициента температуропроводности в покоя-

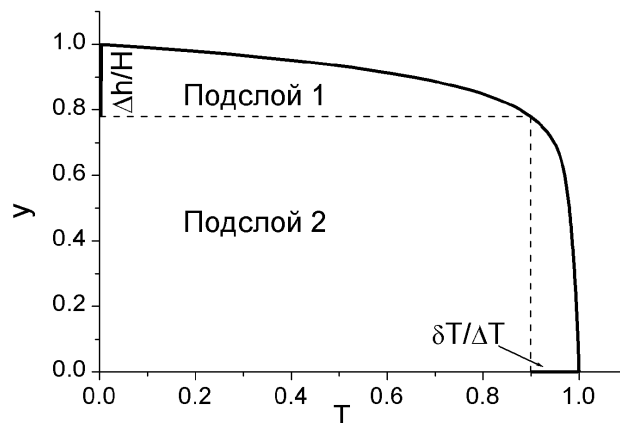


Рис. 1. Статический профиль температуры.

щемся слое жидкости формируется распределение температуры, при котором большая часть слоя практически равномерно прогрета. Температура изменяется на величину δT , малую по сравнению с полным перепадом температуры ΔT , а основное изменение температуры приходится на тонкий подслой вблизи верхней границы, толщина которого Δh составляет малую часть полной толщины слоя H . При этом весь слой стратифицирован неустойчиво (см. рис.1). Такое распределение температуры наблюдается в мантии Земли, конвективной зоне Солнца и других астрофизических объектах.

Авторы выражают благодарность д.ф.-м.н А.В. Гетлингу за предложенную

постановку задачи о конвекции в слое жидкости, температуропроводность которой степенным образом зависит от температуры, и к.ф.-м.н. В.В. Колмычкову за разработку программы для решения уравнений Навье–Стокса и проведение расчетов.

1. Исследование двумерного течения

Рассмотрим конвективное движение в горизонтальном слое жидкости, температуропроводность которой зависит от температуры. Прямоугольная область $\Omega = [0, L] \times [0, H]$, $L \gg H$ заполнена вязкой несжимаемой жидкостью. Нижняя и верхняя границы поддерживаются при постоянной температуре, T_{bot} и T_{top} соответственно, $T_{bot} - T_{top} = \Delta T > 0$. Боковые стенки теплоизолированы. Основу математической модели составляют уравнения движения вязкой жидкости и уравнение конвективной теплопроводности [3], записанные в безразмерном виде в переменных "функция тока–вихрь":

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x \cdot \omega) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y \cdot \omega) = \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] + Gr \frac{\partial T}{\partial x} e_y, \quad (1)$$

$$\omega = - \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right], \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x \cdot T) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y \cdot T) = \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right]. \quad (3)$$

Здесь x , y — декартовы координаты, t — время, ω — вихрь, ψ — функция тока, v_x и v_y — компоненты вектора скорости, $Gr = \frac{g\beta H^3 \Delta T}{\nu^2}$ — число Грасгофа, g — модуль ускорения свободного падения, e_y — единичный вектор, направленный вертикально вверх, β — коэффициент теплового расширения, ν — кинематическая вязкость, T — температура, $\kappa(T)$ — коэффициент температуропроводности, $Pr = \nu / \kappa(T_{top})$ — число Прандтля.

Коэффициент температуропроводности зависит от температуры следующим образом: к

$$\kappa(T) = 1 + \alpha T + \beta T^n. \quad (4)$$

Соответствующую стационарную задачу теплопроводности можно решить аналитически и найти температурный профиль в виде неявно заданной функции:

$$\frac{(T - T_{bot}) + \frac{\alpha}{2}(T^2 - T_{bot}^2) + \frac{\beta}{n+1}(T^{n+1} - T_{bot}^{n+1})}{(T_{top} - T_{bot}) + \frac{\alpha}{2}(T_{top}^2 - T_{bot}^2) + \frac{\beta}{n+1}(T_{top}^{n+1} - T_{bot}^{n+1})} = \frac{y}{H}. \quad (5)$$

Во всех расчетах, рассматриваемых в данной работе, $\alpha = 5$, $\beta = 600$, $n = 10$. Эти параметры обеспечивают в покоящемся слое жидкости формирование распределения температуры, приведенное на рисунке 1.

Неявная консервативная разностная схема для задачи (1)–(3) была построена методом конечных объемов на разнесенных сетках с переинтерполяцией Аракавы [4, 5]. Полученная система сеточных уравнений решалась с помощью стандартной процедуры расщепления по физическим процессам [6]. Сначала из уравнений Навье–Стокса (1)–(2), с помощью матричного алгоритма [7–9] вычислялось поле скоростей, затем из уравнения теплопроводности (3) определялось распределение температуры в слое.

1.1. Результаты расчетов

Рассмотрим задачу о конвективном движении в области с жесткими границами. В этом случае граничные условия имеют вид: $v_x = 0$, $v_y = 0$. В терминах "функция тока–вихрь" эти условия записываются следующим образом:

$\psi = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$, где n — внешняя нормаль к границе.

Расчеты проводились для области $[0, 15] \times [0, 1]$ для значений числа $Pr = 1$ и числа Рэлея $Ra = 10Ra_{cr}$, где $Ra_{cr} = 4.8 \times 10^5$ — критическое число Рэлея, на сетке с числом узлов по пространству $N_x = 1024$, $N_y = 50$ и шагом по времени $\tau = 0.1 - 0.5$. По вертикальному направлению использовались неравномерные сетки, сгущающиеся вблизи нижней и верхней границы слоя.

Под действием случайного начального возмущения в верхнем подслое начинает развиваться мелкомасштабная конвекция. Постепенно движение охватывает всю область и принимает форму валов, вертикальный размер которых сравним с толщиной области. При этом мелкомасштабное течение в верхнем подслое не исчезало. В то же время вблизи дна области формировались

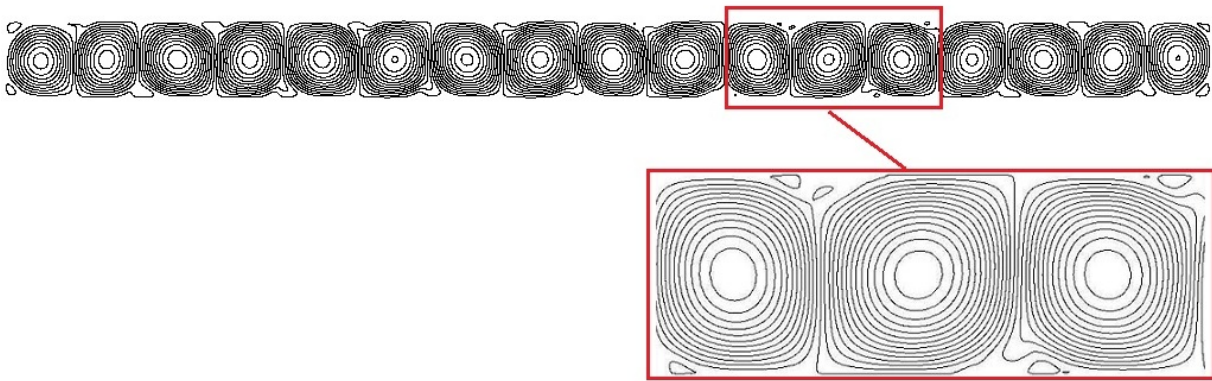


Рис. 2. Конвективное течение. Жесткая верхняя граница. Линии уровня функции тока. Сосуществование крупных ячеек и локализованного течения более мелкого масштаба.

мелкие структуры, размер которых сравним с размером структур течения в верхнем подслое (рис. 2). Мелкие ячейки особенно хорошо заметны над и под участками контакта крупных валов. Таким образом, в неустойчиво стратифицированном слое жидкости одновременно сосуществовали крупные конвективные структуры, заполняющие весь слой по толщине, и течение, локализованное в относительно тонких подслоях (рис. 2).

Многомасштабная конвекция наблюдалась также в области со свободной верхней границей. Граничные условия в этом случае имеют вид: $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, $v = 0$. В терминах "функция тока-вихрь": $\psi = 0$, $\omega = 0$.

Как и в предыдущем случае, течение зарождалось в верхнем подслое и постепенно охватывало всю область (рис. 3). Ячейки внутри подслоя 2, приведенного на рисунке 1, имеют тенденцию к увеличению размера, однако мелкомасштабные структуры, существующие в верхнем подслое, контролируют этот процесс: когда горизонтальный размер крупных структур существенно превосходит толщину слоя, ячейки, опускающиеся из верхнего подслоя, разбивают их на две части (рис. 3). В отличие от случая жесткой верхней границы, в котором число крупных валов было постоянно, при свободной границе число крупномасштабных структур изменялось в пределах от 8 до 16 валов [2].

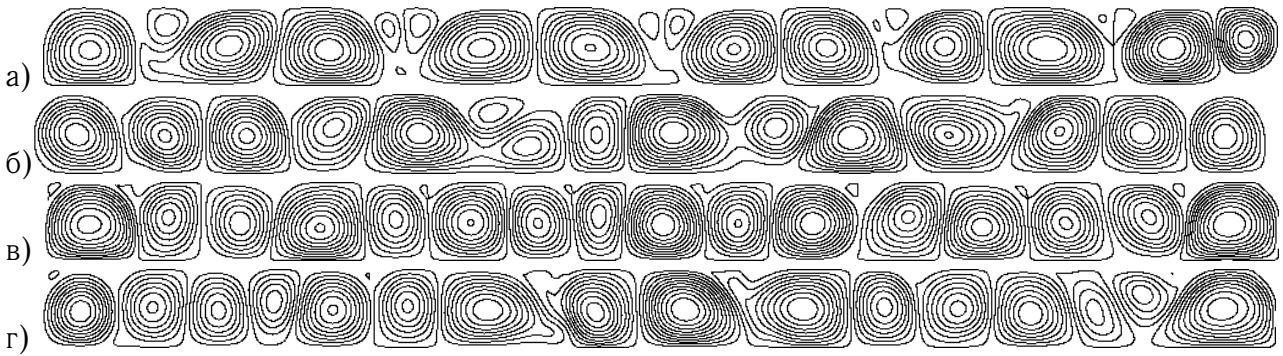


Рис. 3. Конвективное течение. Эволюция течения при свободной верхней границе, $Ra = 15Ra_{cr}$. Линии уровня функции тока для разных моментов времени: а) $t = 0.07t_\nu$, зарождение мелкомасштабных ячеек вблизи верхней поверхности слоя; б) $t = 0.09t_\nu$, дробление крупных валов под воздействием проникающих вглубь мелких ячеек; в) $t = 0.14t_\nu$, структура течения, сформировавшаяся в результате проникновения мелкомасштабных ячеек вглубь слоя; г) $t = 0.17t_\nu$, тенденция увеличения размеров крупномасштабных ячеек; t_ν — конвективное время.

1.2. Спектральные методы

Проведем исследование структуры течения с помощью одномерного дискретного преобразования Фурье функции тока $\psi(x, y)$, преобразование выполним по горизонтальной координате x при фиксированном значении $y \in [0, 1]$. Основной (ведущей) модой будем называть гармонику с максимальной амплитудой, второй модой — гармонику со второй по величине амплитудой. В спектре течения могут присутствовать низкочастотные моды, волновое число которых, как правило, близко к единице и меньше волнового числа ведущей моды. Эти моды являются результатом того, что течение еще не вышло на стационар. Крупные валы не успели подстроиться под размеры области, поэтому имеют разную мощность и горизонтальный размер. Вместе с тем, в силу условия прилипания на боковых границах, валы вблизи стенок всегда слабее, чем валы в центре области. Поэтому в диапазоне ниже ведущей моды в спектре возникает небольшой пик. Основная мода соответствует крупномасштабным структурам, высокочастотная составляющая спектра — мелкомасштабным.

Спектральный анализ течения в случае жесткой верхней границы показал, что в спектре присутствуют высокие частоты, амплитуды которых составля-

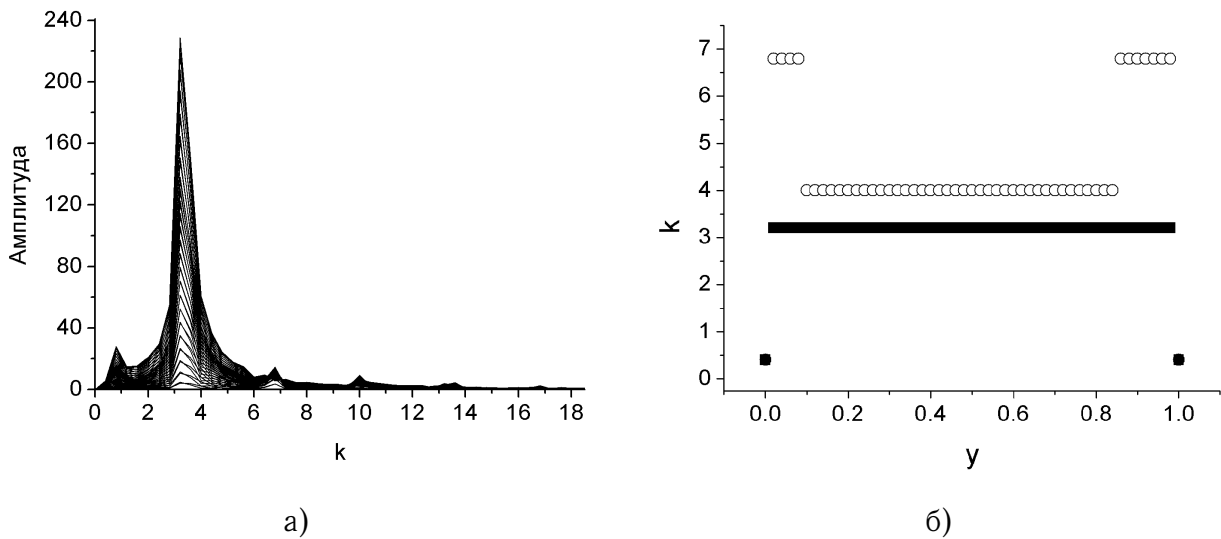


Рис. 4. Жесткая верхняя граница. а.) Спектр течения. б.) Квадратики — волновое число ведущей моды в спектре, кружочки — волновое число второй моды в спектре на разных высотах y .

ют 10–16% амплитуды основной моды. Волновое число высокочастотных мод не является кратным волновому числу ведущей моды, что подтверждает наличие разномасштабной конвекции [2]. Заметим, что вторая мода в спектре вблизи дна и вблизи верхней границы отличается от второй моды в спектре течения в центральной части области: $y \in [0.4, 0.86]$ (рис. 4 б). При этом в середине слоя ведущая и вторая мода близки. Поскольку амплитуды спектра вычислены с помощью дискретного преобразования Фурье, вероятней всего, обе эти гармоники соответствуют либо одному и тому же волновому числу, либо очень близким волновым числам. Таким образом, только вблизи границ $y = 0$ и $y = 1$ течение может быть представлено в виде суммы двух мод $k_1 = 3.2$ и $k_2 = 6.8$, то есть наблюдается одновременное сосуществование крупномасштабных и мелкомасштабных структур.

В случае открытой верхней границы спектр течения имеет более сложную структуру. На разных высотах ведущие моды соответствуют разными волновыми числами (рис. 5). При этом области, в которых локализируются ячейки, могут изменять свою толщину и не совпадают с подслоями, обусловленными статическим вертикальным профилем температуры (рис. 1). Кроме того, ведущая мода изменяется во времени, поскольку количество крупных структур в течении непостоянно.

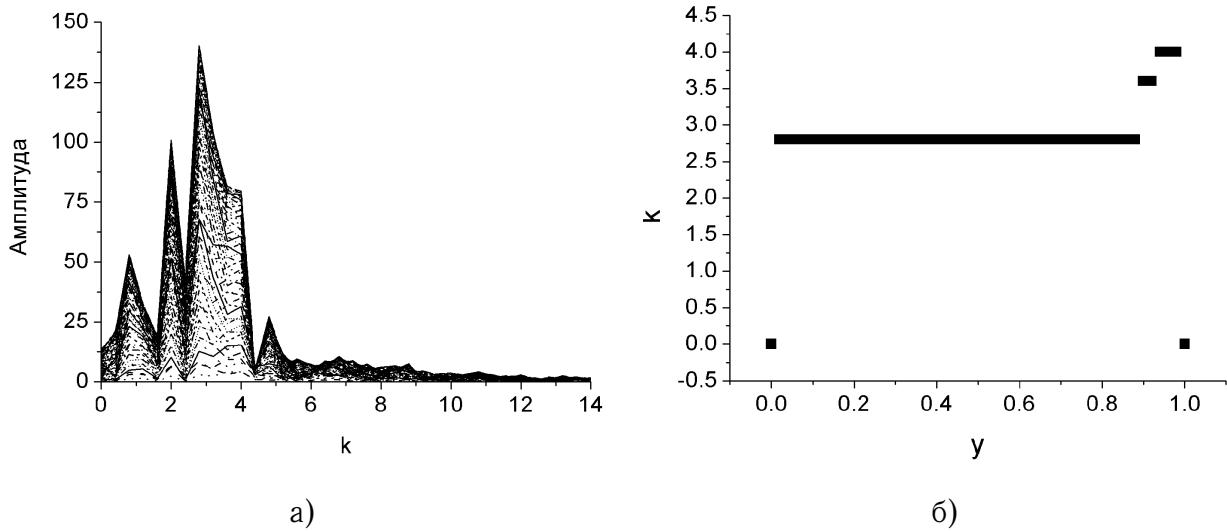


Рис. 5. Открытая верхняя граница. а) Спектр течения. б) Волновое число ведущей моды в спектре на разных высотах y .

Рассмотрим изменение во времени спектра функции тока, усредненной по толщине слоя:

$$\Psi_i(t) = \frac{1}{N_y} \sum_{j=0}^{N_y} \psi_{ij}.$$

В случае жесткой верхней границы амплитуды гармоник, в том числе и амплитуда ведущей моды, практически не изменяются (рис. 6). Такое постоянство амплитуд в спектре говорит об установлении течения, близкого к стационарному. Качественно иная ситуация наблюдается, если верхняя граница свободна. Пространственная картина течения и, соответственно, ее спектральное представление постоянно изменяются. В разные моменты времени гармоники с различными волновыми числами становятся ведущими модами. Усиление мелкомасштабной составляющей часто сопровождается ослаблением крупномасштабной и наоборот — наблюдается своего рода перемежаемость (рис. 6).

Таким образом, спектральный анализ позволяет:

- определить наличие многомасштабной конвекции. Мода с волновым числом, близким к единице, может быть следствием граничных условий на боковых границах. Как правило, эти гармоники не имеют максимальной амплитуды и просто расположены левее основной моды;
- в рассмотренных течениях спектральный метод позволил оценить раз-

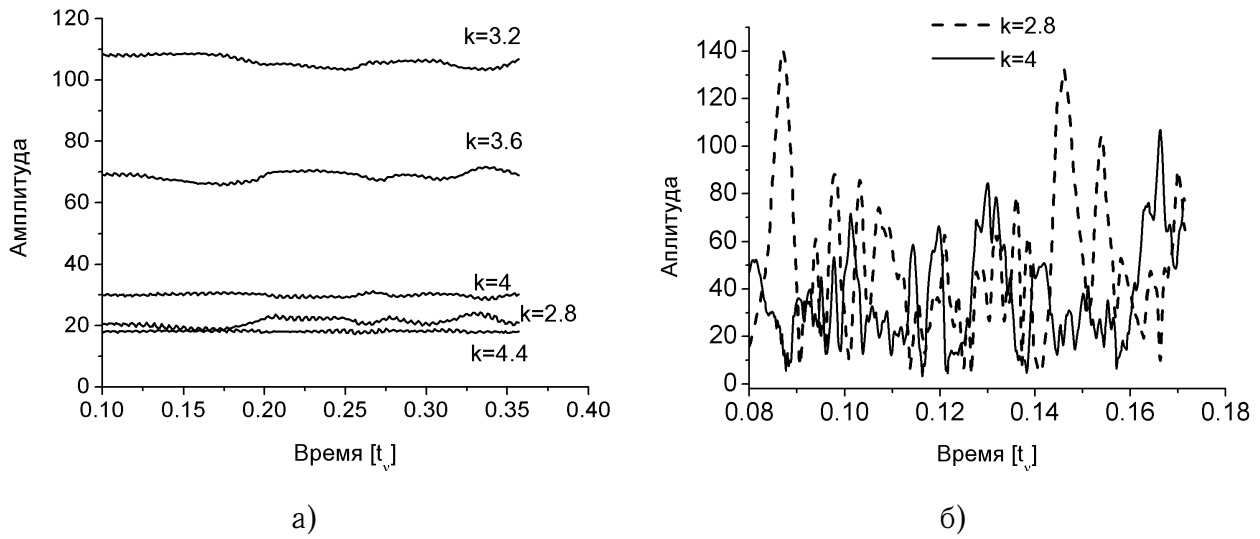


Рис. 6. Спектр функции тока, усредненной по толщине слоя. а.) Изменение амплитуд гармоник с волновыми числами $k = 2.8, 3.2, 3.6, 4.0$ и 4 . Жесткая верхняя граница. б.) Изменение амплитуд гармоник с волновыми числами $k = 2.8$ и 4 . Свободная верхняя граница.

меры и область локализации мелкомасштабных структур (рис. 4 и 5).

1.3. Фазовые пространства. Аттракторы

Рассмотрим траектории движения частиц. Основные расчеты были проведены с $\tau = 0.1$, для анализа траекторий в расчетах шаг по времени уменьшили в 10 раз. Однако прежде чем переходить к анализу траекторий частиц течения со сложной структурой, рассмотрим случай классической задачи о конвекции Рэля–Бенара. Это задача о конвективном движении в горизонтальном слое буссинесковской жидкости, верхняя и нижняя граница которого поддерживается при постоянной температуре $T_{bot} = 1$ и $T_{top} = 0$, $\kappa = 1$. Возникающее течение представляет собой систему валов, размер которых сравним с толщиной слоя. Траектории движения частиц такого течения в фазовом пространстве (y, v_y) образуют цикл с центром в точке $(0.5, 0)$ (рис. 7). Одна ось цикла равна 1, то есть совпадает с толщиной всего слоя; вторая ось — $2 \max |v_y|$, максимум вертикальной скорости достигается в центре области ($y = 0.5$). Вблизи верхней и нижней границы ($y = 0$ и $y = 1$), в силу граничных условий прилипания, скорость равна нулю. Переход траектории из одной полуплоскости фазового пространства в другую соответствует смене

направления движения частицы (вверх/вниз).

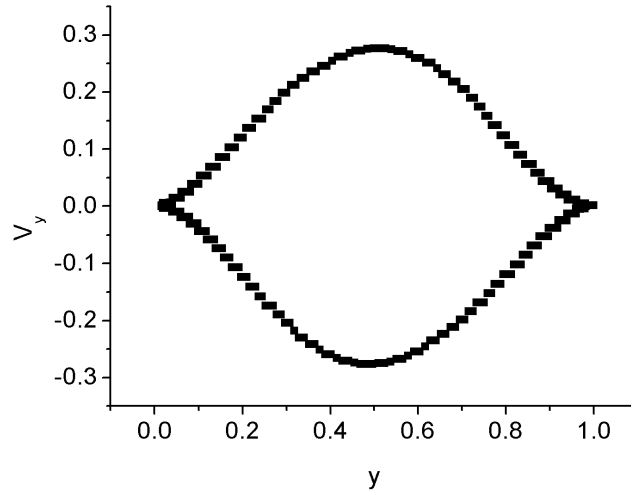


Рис. 7. Траектории движения частиц при конвекции Рэлея–Бенара в фазовом пространстве (y, v_y) .

В случае нелинейной температуропроводности¹ траектории движения частиц в пространстве (x, y) имеют более затейливый вид, чем траектории движения в системе валов конвекции Рэлея–Бенара. На рисунке 8 приведена траектория движения частицы в слое с твердыми границами. Квадратиком обозначено начало траектории. В своем движении частица переходит с одного крупного вала на другой, при этом иногда слетает на мелкие конвективные структуры вблизи дна и вблизи верхней границы. В фазовом пространстве (y, v_y) траектории образуют аттрактор, состоящий из трех циклов (рис. 9). Большой цикл соответствует крупной структуре, два маленьких цикла вблизи $y = 0$ и $y = 1$ соответствуют мелкомасштабным структурам. Структура аттрактора подтверждает, что течение является многомасштабным. Крупные и мелкие конвективные структуры сосуществуют, не происходит расслоения по высоте, при котором в каждом подслое присутствуют структуры только одного масштаба. В случае открытой верхней границы траектории движения частиц в фазовом пространстве (y, v_y) образуют аттрактор, состоящий из двух циклов, мелкий масштаб локализован вблизи границы $y = 1$ (рис. 10).

На рисунке 11 приведена зависимость модуля вертикальной компоненты скорости от координаты y . Такое представление данных позволяет опреде-

¹ $\kappa = \kappa(T)$, определяется формулой (4).

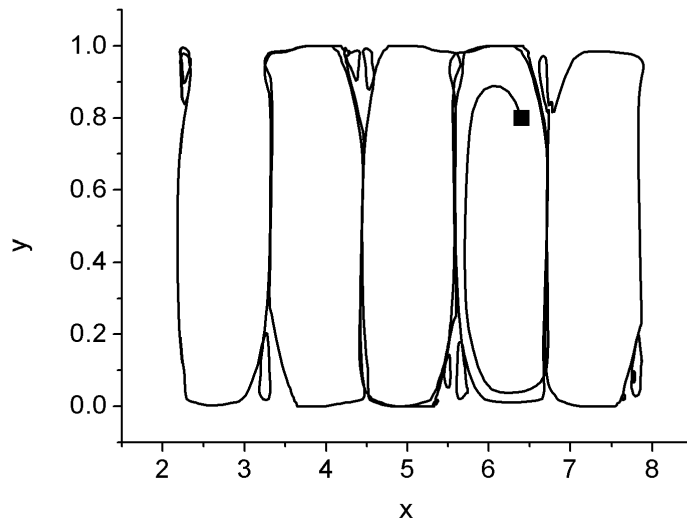


Рис. 8. Траектория движения частицы. Жесткая верхняя граница.

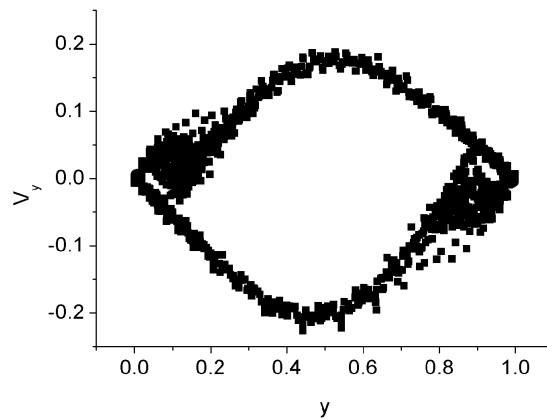


Рис. 9. Траектории в фазовом пространстве (y, v_y) . Жесткая верхняя граница.

лить размеры конвективных структур: крупные структуры по величине сравнимы с толщиной слоя, их вертикальный размер равен 1. Вертикальный размер мелких структур, расположенных вблизи дна, равен 0.15, вблизи верхней границы — 0.16 (рис. 11 а.). Не совпадение размеров мелких структур можно объяснить разными значениями коэффициентами температуропроводности вблизи верхней и нижней границы (при $y = 0$ $\kappa(T_{bot}) = 620$, при $y = 1$ $\kappa(T_{top}) = 1$). В случае открытой границы размер мелких структур равен 0.18 (рис.11 б.). В работе [2] приведен пример анализа конвективного течения в случае немонотонного статического профиля, анализ фазовых траекторий

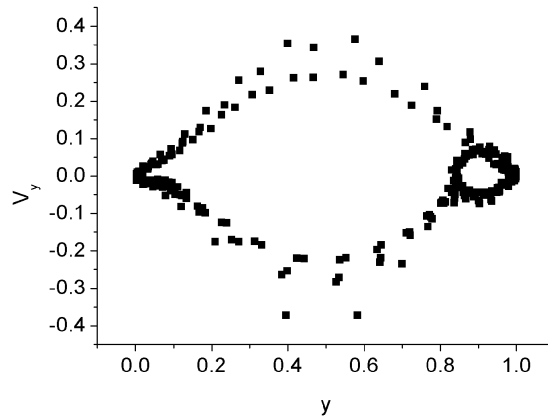


Рис. 10. Траектории в фазовом пространстве (y, v_y) . Свободная верхняя граница.

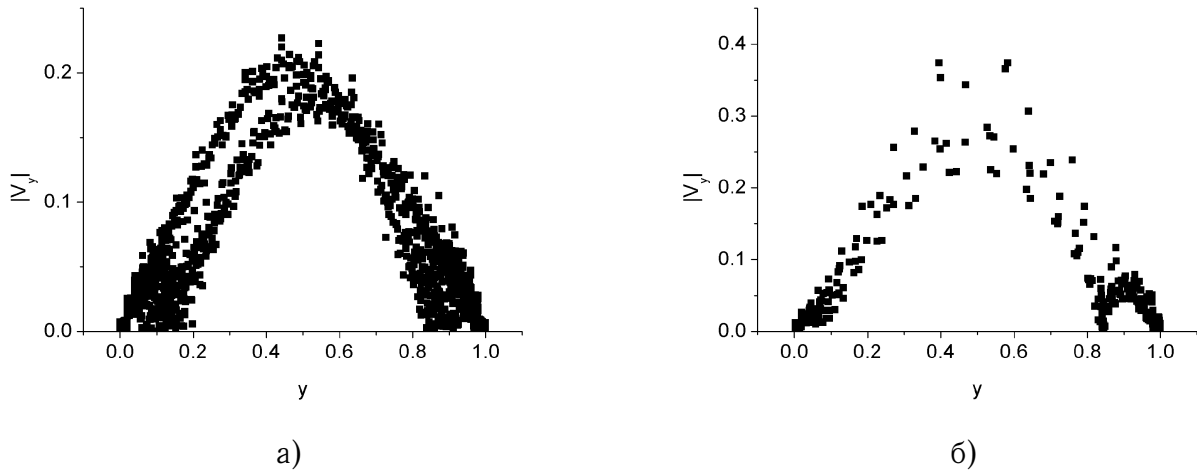


Рис. 11. Зависимость модуля вертикальной скорости от координаты y . а) Жесткая верхняя граница. б) Свободная верхняя граница.

позволил установить перенос мелкомасштабных структур.

Рассмотрим траектории частиц в фазовом пространстве (y, v_y, T) . В случае валиковой конвекции траектории в пространстве (y, v_y, T) образуют трехмерный аттрактор – цикл, по форме напоминающий лепесток (рис.12). Двигаясь вверх, частица охлаждается, так как приближается к границе с температурой $T_{top} = 0$, поэтому в аттракторе при $y = 1$ температура $T = 0$. Спускаясь вниз, частица нагревается, и в аттракторе при $y = 0$ температура $T = 1$. Тем самым можем оценить диапазон изменения температуры внутри конвективной структуры.

На рисунке 13 приведены фазовые портреты траектории движения частиц

в фазовом пространстве (y, v_y, T) при $\kappa = \kappa(T)$. Для большей наглядности оси на рисунках развернуты под разными углами. Как в случае жесткой верхней границы, так и в случае открытой верхней границы наблюдается два цикла в виде лепестка. Каждый из этих трехмерных циклов, похож на аттрактор при валиковой конвекции (рис.12). В то же время, лепестки в аттракторах, приведенных на рисунке 13, отличаются от аттрактора на рисунке 12 отсутствием симметрии проекции на плоскость (y, T) относительно прямой, проходящей через точки $(0, 1)$ и $(1, 0)$. Это отличие объясняется нелинейной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры. Большой цикл-лепесток соответствует крупномасштабной структуре, в которой частица проходит всю толщину слоя ($y \in [0, 1]$), и температура в точках траектории изменяется во всем диапазоне от 0 до 1. Второй цикл локализован в верхней части слоя, температура в нем мало отклоняется от $T_{top} = 0$. Поэтому этот цикл соответствует мелкомасштабным конвективным структурам, расположенным вблизи верхней границы слоя. В случае жесткой границы внутри этих структур температура изменяется от 0 до 0.35 (рис. 13 а.), при свободной верхней границе $T \in [0, 0.6]$. Из-за сильной теплопроводности вблизи дна ($\kappa(T_{bot}) = 620$) третий лепесток, ожидаемый в аттракторе на рисунке 13 а, не имеет четкой структуры, и видна лишь волнистая траектория.

Исследование портретов траекторий движения частиц в фазовых пространствах позволило оценить размер структур, их локализацию и диапазон изменения температуры внутри каждой из структур. Однако эти методы хорошо работают для течений, близких к стационарным.

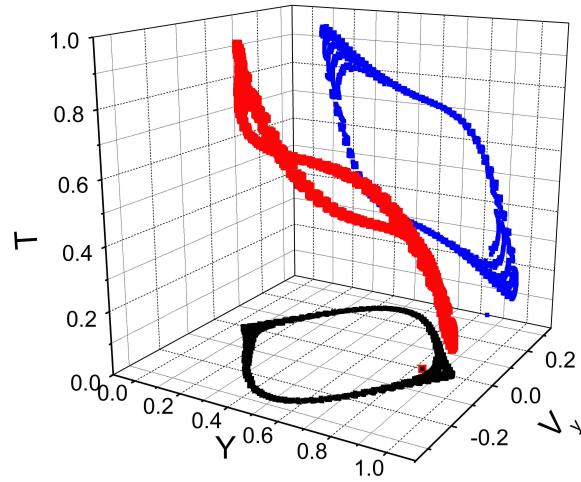


Рис. 12. Течение с валиковой структурой. Траектории в фазовом пространстве (y, v_y, T) . Красным цветом выделена траектория в пространстве (y, v_y, T) . Синим — проекция траектории на плоскость (y, T) , черным — проекция на плоскость (y, v_y) .

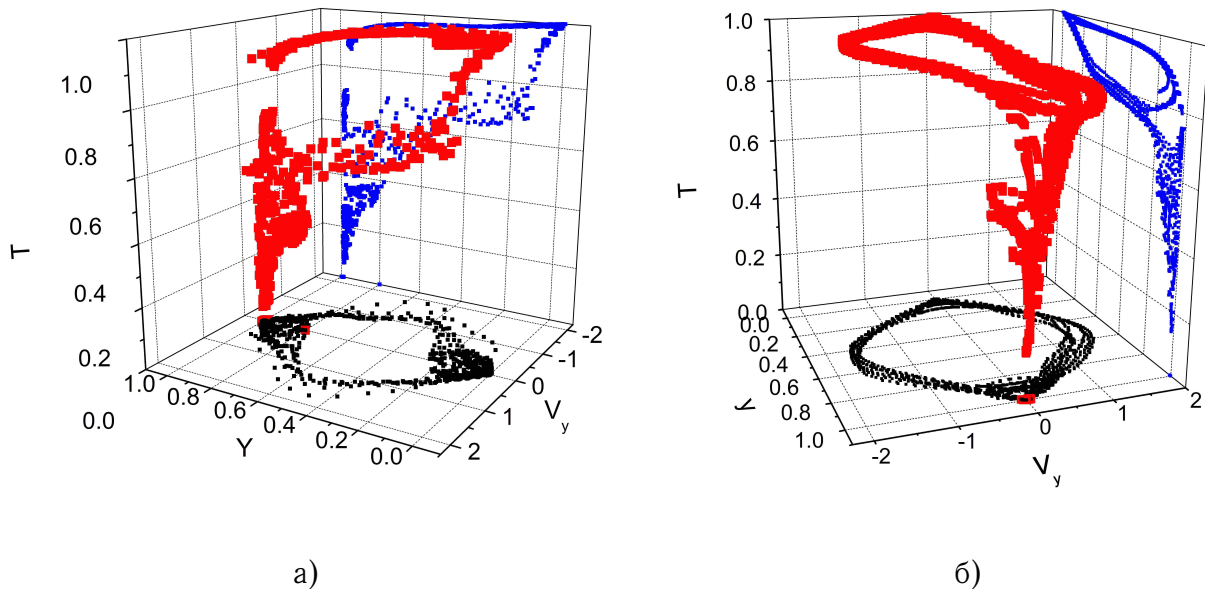


Рис. 13. Траектории в фазовом пространстве (y, v_y, T) . а) Жесткая верхняя граница. б) Открытая верхняя граница. Красным цветом выделена траектория в пространстве (y, v_y, T) . Синим — проекция траектории на плоскость (y, T) , черным — проекция на плоскость (y, v_y) .

2. Исследование трехмерного течения

Рассмотрим результаты моделирования в трехмерном приближении течения жидкости в плоском горизонтальном слое жидкости, температуропроводность которой зависит от температуры (4). Течение в области $\Omega = [0, L] \times [0, L] \times [0, H]$ описывается уравнениями Навье–Стокса и уравнением, конвективной диффузии [3, 10]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V = \nabla^2 V - \nabla p + Gr T \hat{z}, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot V = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V \cdot \nabla T = \frac{1}{Pr} \nabla \cdot (\kappa(T) \nabla T). \quad (8)$$

Здесь V — вектор скорости, p — давление, $\hat{z} = (0, 0, 1)$. На границе области выполнены условия прилипания $V = 0$. Верхняя и нижняя границы поддерживаются при постоянной температуре, $T_{top} = 0$ и $T_{bot} = 1$ соответственно, боковые границы — теплоизолированы.

Неявная разностная схема для задачи (6)–(8) построена исходя из требований консервативности [4, 5]. Полученная система сеточных уравнений решалась с помощью стандартной процедуры расщепления по физическим процессам [6]: сначала из уравнений Навье–Стокса определялось поле скоростей, затем вычислялось распределение температуры. Для решения уравнений Навье–Стокса использовалась модификация известного полунейного метода предиктор-корректор на разнесенных сетках. Его суть состоит в замене уравнения несжимаемости уравнением Пуассона для давления. Сначала из уравнения движения вычислялся предиктор скорости. Потом определялась поправка давления, и с ее помощью осуществлялась коррекция поля скоростей для обеспечения несжимаемости [11].

2.1. Результаты расчетов

Основные расчеты проводились в области $[0, 15] \times [0, 15] \times [0, 1]$ с жесткими границами, на сетке с числом узлов $N_x = N_y = 257$, $N_z = 31$ для $Pr = 1$, $Ra \approx 37.5 Ra_{cr}$, где критическое число Рэлея $Ra_{cr} \approx 4 \cdot 10^6$. На рисунке 14

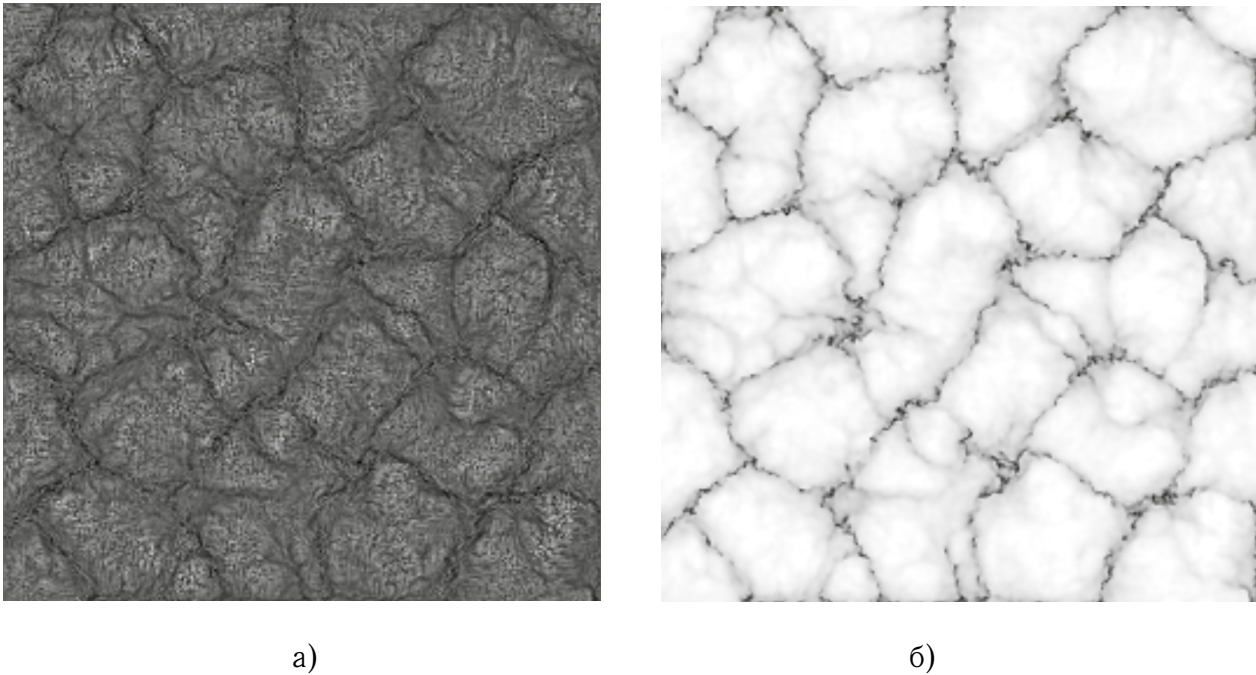


Рис. 14. Структура течения в плоскости $z = 0.97$, $Ra \approx 37.5Ra_{cr}$. а) Распределение вертикальной компоненты скорости V_z , $V_z \in [-0.55, 0.55]$, черный цвет соответствует $V_z = -0.55$. б) Поле температуры. $T \in [0, 1]$, черный цвет соответствует минимальной температуре.



Рис. 15. Картина течения, поле температуры $y = 5.1$. $T \in [0, 1]$, черный цвет соответствует минимальной температуре.

приведено распределение вертикальной компоненты скорости и температуры в сечении вблизи верхней границы ($z = 0.97$). Четко видны крупные конвективные структуры. С течением времени они продолжают расти и медленно перемещаться относительно друг друга. Поверхность крупных структур усеяна множеством мелких структур, которые дрейфуют к границам крупных структур. Заметим, что граница крупных структур не гладкая, а “резная” [1]. В течении присутствуют мощные нисходящие струи, идущие от верхней границы до дна области, и менее мощные, которые погружаются на глубину, сравнимую с толщиной первого подслоя статического профиля температуры (рис. 15).

На рисунке 16 изображен спектр поля температуры, показанного на рисунке 14 б. В спектре выделяется кольцо в низкочастотном диапазоне, соот-

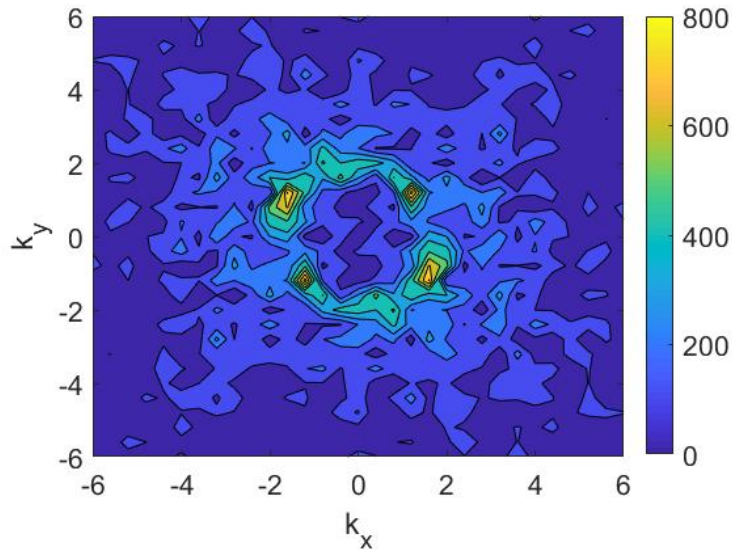


Рис. 16. Спектр течения, $z = 0.97$.

ветствующем волновым числам $1.2 < k < 2$. В этом кольце три пары точек: четыре ярких точки соответствуют волновым числам с одинаковой максимальной амплитудой, и две менее ярких точки отвечают волновым числам с амплитудой, следующей по величине. Все эти точки на рисунке расположены на окружности, при этом симметрично относительно точки $(0, 0)$. Таким образом, ведущей моде соответствуют три пары пересекающихся валов. Поэтому конвективную структуру, которую они описывают, можно считать ячейкой. В то же время ведущая мода отвечает крупномасштабным структурам, наблюдаемым в поле температуры и скорости (рис. 14). Однако в спектре не заметны особенности (локальные максимумы), которые бы указывали на наличие мелкомасштабных структур, заполняющих всю область и циркулирующих внутри крупных структур. Анализ портретов траекторий движения частиц в различных фазовых пространствах не дал ожидаемых результатов. Удавалось описать только крупномасштабные структуры.

2.2. Вычислительная гомология

Еще один способ исследования структуры течения, который рассмотрим в данной работе, опирается на методы вычислительной гомологии [12–17]. Вычислительная гомология определяет инварианты топологического пространства (числа Бетти). Первое число Бетти β_0 — это количество связанных

областей в пространстве, второе число Бетти β_1 — количество независимых циклов, то есть отверстий. Если, например, в поле температуры выделить некоторое топологическое пространство, то, зная его числа Бетти, можно описать структуру течения, в котором возникло такое поле температуры. Топологические инварианты можно вычислить с помощью открытого пакета CHomP [18].

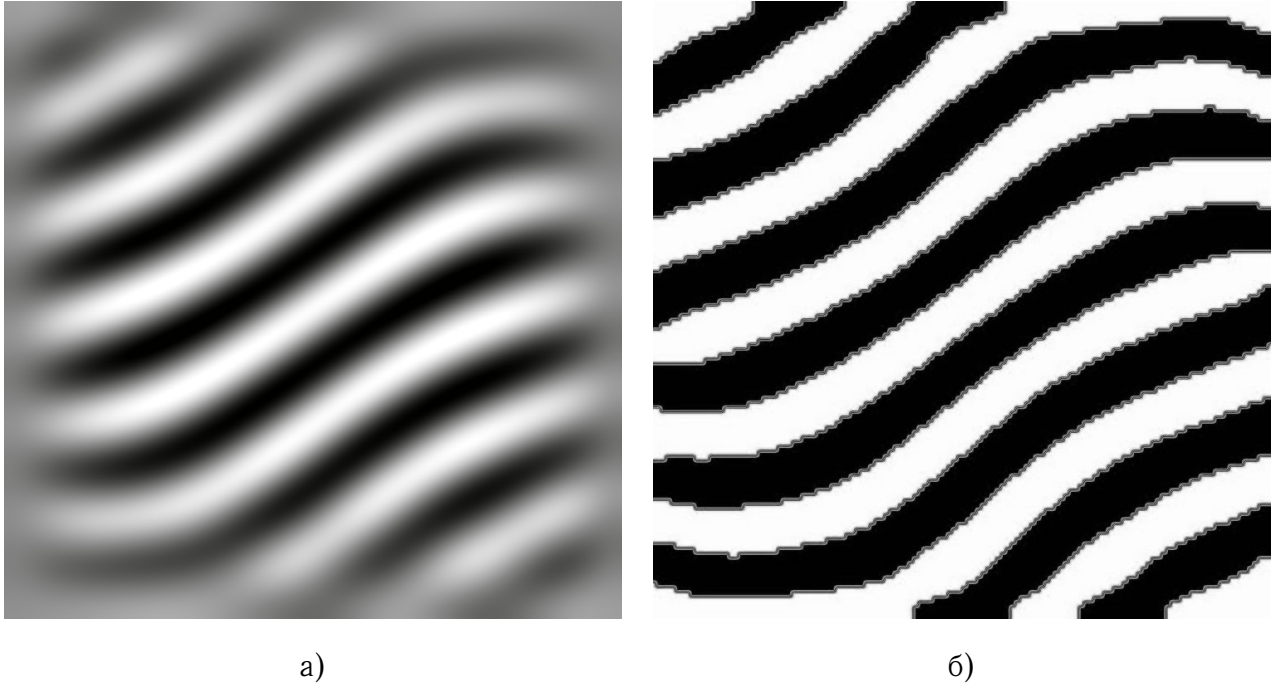


Рис. 17. Конвективные валы. а) Поле температуры. $z = 0.5$; б) Два топологических пространства. Белым цветом обозначена более горячая область ($\beta_0^{hot} = 9$, $\beta_1^{hot} = 0$), черным — более холодная ($\beta_0^{cold} = 8$, $\beta_1^{cold} = 0$).

Рассмотрим, что дает такой подход, на примере стандартных конвективных структур — валов и ячеек. На рисунке 17 а приведено поле температуры для конвективных валов, полученных в расчете для плоского горизонтального слоя жидкости, нижняя граница которого теплоизолирована, а верхняя поддерживается при постоянной температуре $T_{top} = 0$, слой с внутренними источниками теплоты $q = 2$, $\kappa \equiv 1$, $Pr = 0.01$, $Ra = 1420$. В качестве исследуемого топологического пространства возьмем множество точек в сечении $z = 0.5$, в которой температура ниже средней температуры в сечении. Будем называть эту область холодным пространством. На рисунке 17 б эта область выделена черным цветом. Вычислим числа Бетти этого топологического пространства, получим $\beta_0^{cold} = 8$, $\beta_1^{cold} = 0$, то есть в выбранном топологическом

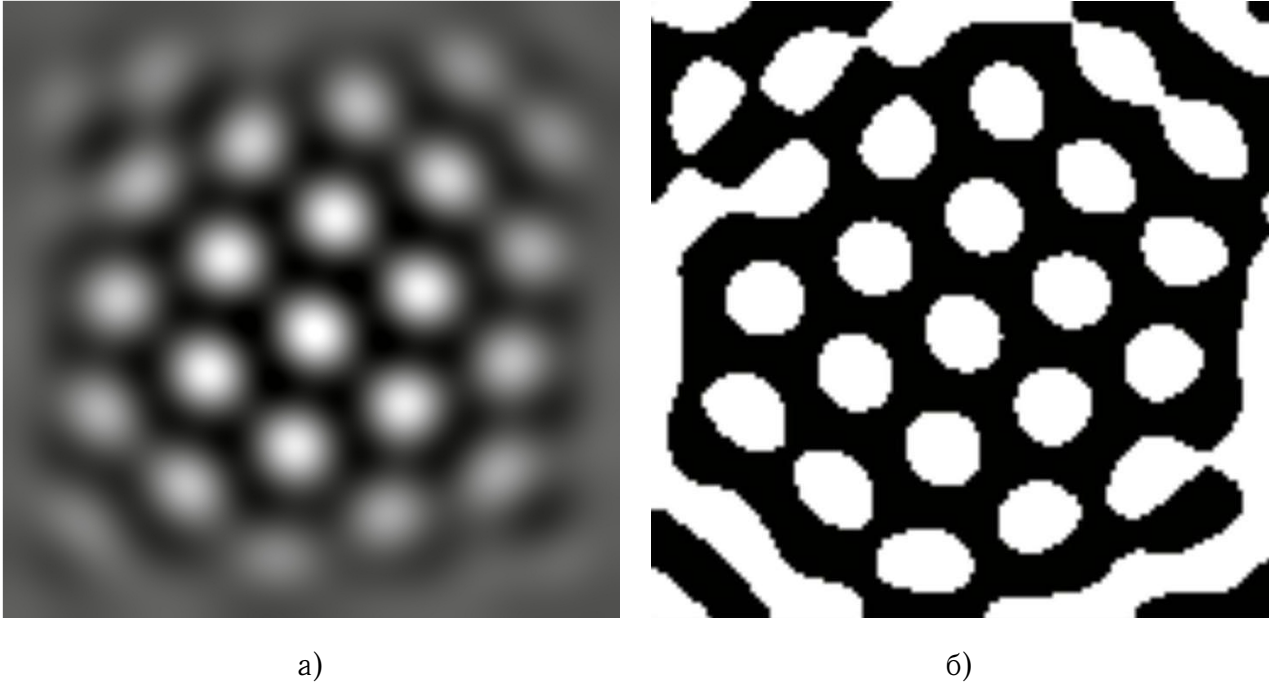


Рис. 18. Конвективные ячейки. а) Поле температуры. $z = 0.5$. б) Два топологических пространства. Белым цветом обозначена более горячая область ($\beta_0^{hot} = 25$, $\beta_1^{hot} = 0$), черным — более холодная ($\beta_0^{cold} = 4$, $\beta_1^{cold} = 21$).

пространстве 8 связных областей и нет отверстий. Теперь рассмотрим область, в которой температура выше средней температуры в сечении, назовем ее горячим пространством. На рисунке 17 б эта область окрашена белым цветом, и для нее $\beta_0^{hot} = 9$, $\beta_1^{hot} = 0$. То есть количество горячих и холодных связных областей, можно сказать одинаковое ($\beta_0^{hot} = \beta_0^{cold} + 1$), при этом отверстия отсутствуют в обоих пространствах ($\beta_1^{hot} = \beta_1^{cold} = 0$). Действительно, в случае валов холодное и горячее топологические пространства совпадают с областями нисходящих и восходящих потоков, соответственно. Такое соотношение чисел Бетти становится интуитивно понятно, поскольку вал состоит из одного восходящего и одного нисходящего потока, что соответствует одной горячей связной области и одной холодной связной области. Таким образом, в рассматриваемом течении есть восемь валов. В данном примере $\beta_1^{hot} = \beta_1^{cold} = 0$. Однако на практике, при исследовании течений близких к валиковым структурам, вторые числа Бетти могут быть не нулевыми. Тогда инварианты должны удовлетворять следующим соотношениям: $\beta_0^{hot} \approx \beta_0^{cold}$, $\beta_1^{hot} \ll \beta_0^{hot}$, $\beta_1^{cold} \ll \beta_0^{cold}$. Заметим, что для исследования структуры конвективного движения понадобились топологические инвариан-

ты для обеих областей, как холодной, так и горячей. Информация о топологии только одной из областей не всегда позволяет сделать вывод о структуре течения.

Рассмотрим конвективное движение в форме ячеек с восходящим потоком в центре. На рисунке 18 а приведено поле температуры, полученное в расчете для горизонтального плоского слоя жидкости, нижняя граница которого теплоизолирована, верхняя — поддерживается при постоянной температуре $T_{top} = 0$, с внутренним источником теплоты $q = 1$, $\kappa \equiv 1$, $Pr = 0.01$, $Ra = 1395$. В сечении $z = 0.5$ опять выделим горячее и холодное топологические пространства (рис. 18 б). Для горячей области числа Бетти $\beta_0^{hot} = 25$, $\beta_1^{hot} = 0$, для холодной — $\beta_0^{cold} = 4$, $\beta_1^{cold} = 21$. Заметим, что связанные горячие области совпадают с областями восходящих тепловых потоков, расположенных в центральной части шестиугольных ячеек, таким образом, β_0^{hot} практически равно числу ячеек. Холодных связанных областей не одна, как подсказывает логика, а четыре. Это связано с тем, что в приграничных областях структура шестиугольных ячеек искажается. Однако отверстий в холодном пространстве (β_1^{cold}) почти столько же, сколько связанных областей в горячем ($\beta_1^{cold} \approx \beta_0^{hot}$), то есть совпадают с количеством ячеек. Таким образом, для ячеек с восходящим потоком в центре $\beta_0^{hot} \gg \beta_1^{hot}$, $\beta_0^{cold} \ll \beta_1^{cold}$, $\beta_1^{cold} \approx \beta_0^{hot}$. В таблице 1 приведены соотношения чисел Бетти, характерные для конвективных структур. Заметим, что анализ топологических инвариантов позволяет определить и тип ячейки: восходящий или нисходящий поток в центре.

Таблица 1. Топологические инварианты

Конвективная структура	Числа Бетти
Вал	$\beta_0^{hot} \approx \beta_0^{cold}$, $\beta_1^{hot} \ll \beta_0^{hot}$, $\beta_1^{cold} \ll \beta_0^{cold}$
Ячейка с восходящим потоком в центре	$\beta_0^{cold} \ll \beta_1^{cold}$, $\beta_0^{hot} \gg \beta_1^{hot}$, $\beta_1^{cold} \approx \beta_0^{hot}$
Ячейка с нисходящим потоком в центре	$\beta_0^{hot} \ll \beta_1^{hot}$, $\beta_0^{cold} \gg \beta_1^{cold}$, $\beta_1^{hot} \approx \beta_0^{cold}$

Проведем исследование течения в слое жидкости, температуропроводность которой зависит от температуры, с использованием методов вычислительной гомологии. На рисунке 19 представлены топологические пространства для поля температуры, приведенного на рисунке 14 б. Холодное пространство

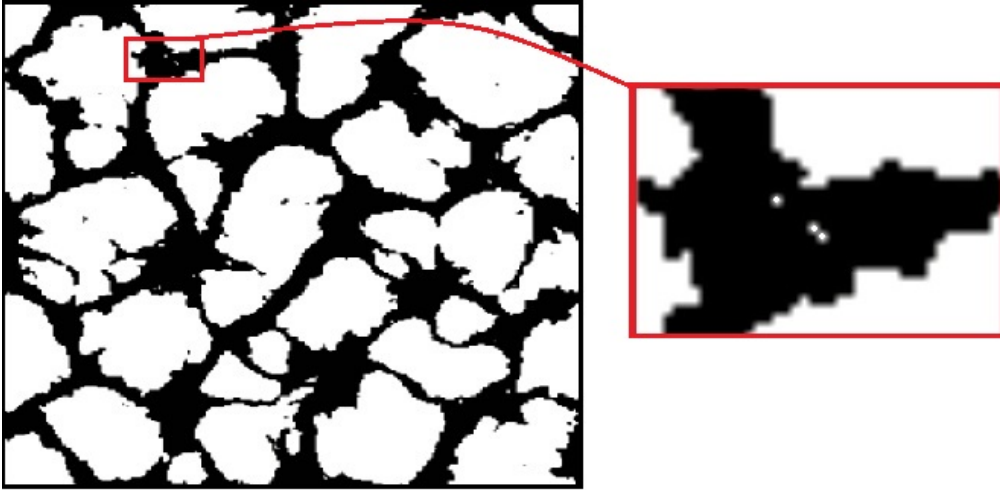


Рис. 19. Два топологических пространства для картины течения 14 б.. Белым цветом — более горячая область ($\beta_0^{hot} = 58$, $\beta_1^{hot} = 29$), черным — более холодная ($\beta_0^{cold} = 25$, $\beta_1^{cold} = 52$).

точно повторяет границу крупномасштабных структур. По форме оно напоминает паутину, которая проходит там, где есть сильные нисходящие струи, доходящие до самого дна. Тонкие черные линии, перешейки, соответствуют менее сильным нисходящим потокам, также видны мелкие отдельно стоящие черные островки. Числа Бетти для горячих областей — $\beta_0^{hot} = 58$, $\beta_1^{hot} = 29$, холодных — $\beta_0^{cold} = 25$, $\beta_1^{cold} = 52$. Количество связных холодных областей — более одной, хотя на рисунке 19 ясно видна одна большая связная паутина. Значение $\beta_0^{cold} = 25$, полученное с помощью программы SNumP [18], объясняется наличием мелких черных островков внутри крупных больших белых (горячих) областей. Были получены удивительно большие значения топологических инвариантов $\beta_0^{hot} = 58$ и $\beta_1^{cold} = 52$. Оказалось, что в мощных нисходящих струях есть мелкие вкрапления горячих областей (рис. 19). Аномальные значения чисел Бетти могут быть признаком многомасштабного течения, которое должно быть исследовано тщательнее другими методами, например спектральными.

Анализ значений чисел Бетти холодного и горячего топологических пространств в горизонтальных сечениях $z = const \in (0, 1)$ показал, что разномасштабное течение можно найти как в верхней, так и в нижней части слоя (рис. 20). Если сопоставить числа Бетти при $z = 0.1$ с данными таблицы 1, то вблизи дна должны быть конвективные структуры типа ячеек с нисходя-

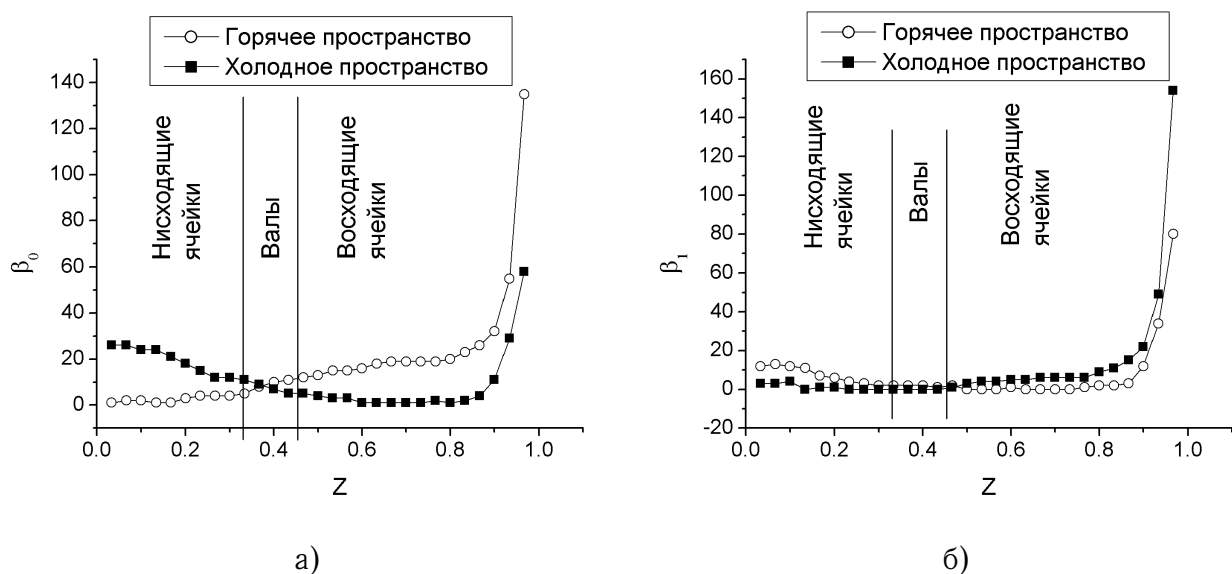


Рис. 20. Числа Бетти холодного (черные квадратики) и горячего (белые кружочки) топологических пространств в горизонтальных сечениях для течения 14. а) Число Бетти β_0 , количество связных областей; б) Число Бетти β_1 , количество отверстий.

щим потоком в центре. При визуальном контроле выясняется, что в сечении $z = 0.1$ перепад температур мал и составляет $\Delta T = T_{max} - T_{min} = 0.0185$. Однако его достаточно, чтобы холодное топологическое пространство было не пусто и по своей структуре напоминало паутину, которую наблюдали на рисунке 19. Формальный подход к построению холодных и горячих областей приводит к тому, что вблизи дна разрозненные холодные струи, с минимальным влиянием друг на друга (см. рис. 15), принимаются за ячейки. Таким образом, без визуального контроля или без дополнительного исследования другим методом полагаться на соотношения чисел Бетти не стоит [1].

Пакет программ для задач вычислительной гомологии SNumP позволяет каждую связную область топологического пространства исследовать отдельно, например раскрасить в свой цвет. Рисунок 22 демонстрирует возможности пакета. При исследовании топологических пространств можно рассматривать не только сечение $z = const$, а всю трехмерную область, и анализировать три числа Бетти: первое — количество связных областей, второе — количество отверстий, третье — полостей. Расположение красных и синих пятен на рисунке 22 свидетельствует о том, что мелкомасштабные структуры в большом количестве наблюдаются вблизи границ раздела крупномасштабных структур, а также встречаются в центре крупных структур. Мелкие структуры



Рис. 21. Картина течения. $z = 0.1$. Холодное (черным цветом) и горячее (белым) топологические пространства. $\beta_0^{hot} = 2$, $\beta_1^{hot} = 12$, $\beta_0^{cold} = 24$, $\beta_1^{cold} = 4$; $T_{min} = 0.9215$, $T_{max} = 1.0$.

локализованы в верхней части слоя, вблизи дна мелкомасштабных структур не выявлено (рис. 22 б). Стоит отметить тот факт, что объем маленьких связных областей равен от 4 до 12 ячеек расчетной сетки.

Исследование конвективного движения в трехмерной области на основе топологии двумерных сечений, например поля температуры, может приводить к неверным заключениям о структуре течения. Так произошло и в предыдущем примере с сечением $z = 0.1$. При рассмотрении поля температуры во всей области $\Omega = [0, L] \times [0, L] \times [0, H]$ мелкомасштабные структуры вблизи дна не найдены (рис. 22 б).

Сопоставляя поле температуры и топологические пространства, можно оценить диапазон температуры в связных областях и соответственно подобрать палитру для его изображения. Так была подобрана палитра для поля температуры, приведенного на рисунке 14 б. Мелкомасштабные структуры (синие, зеленые пятнышки на рисунке 23) видны внутри крупномасштабных, в большом количестве концентрируясь на их границах. Замечено, что мелкомасштабные структуры всплывают в центре крупных структур и переносятся на периферию, по траекториям, совпадающим с нисходящими струями, которые присутствуют только в верхнем подслое и не достигают дна. В итоге получается, что мелкомасштабные структуры переносятся на периферию

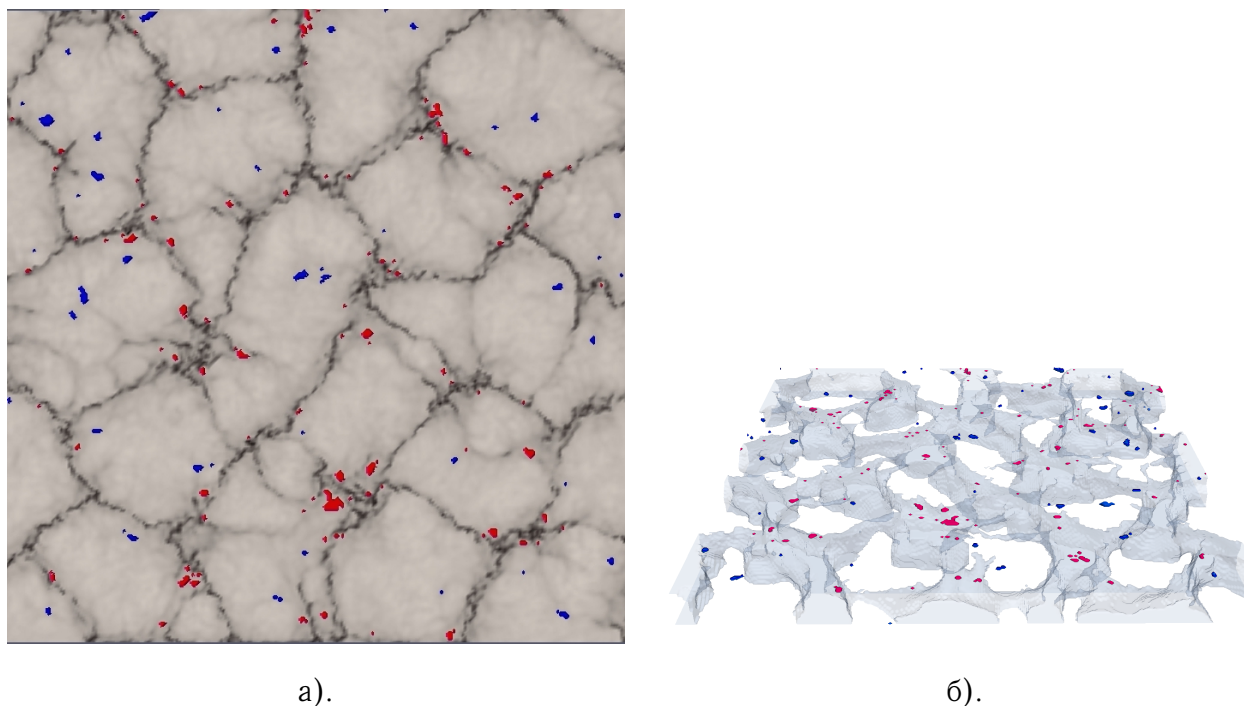


Рис. 22. Структура течения, $Ra \approx 37.5Ra_{cr}$. Мелкомасштабные связные области холодного (синий цвет) и горячего (красный) топологических пространств; а.) поле температуры. $z = 0.97$. б.) Весь слой жидкости $[0, L] \times [0, L] \times [0, 1]$. Серым цветом выделены границы крупномасштабных структур (горячее топологическое пространство).

крупной структуры с помощью некоторого промежуточного масштаба (рис. 24). Этот промежуточный масштаб можно заметить в холодном топологическом пространстве — тонкие черные перешейки (рис. 19) [1].

Исследование течения с использованием методов вычислительной гомологии требует подбора критерия, который бы позволил найти такие топологические пространства, инварианты которых могут дать характеристику структуры течения, указать на те или иные особенности конвекции. В качестве критерия можно выбрать, например:

- 1) область восходящих потоков ($V_z > 0$) и область нисходящих потоков ($V_z < 0$);
- 2) область, в которой температура выше средней температуры в сечении, и область, в которой температура ниже средней;
- 3) область, в которой $T - T_{stat} > 0$ при фиксированном z , и область, в которой $T - T_{stat} < 0$, где T_{stat} — статический профиль температуры; и многие другие.

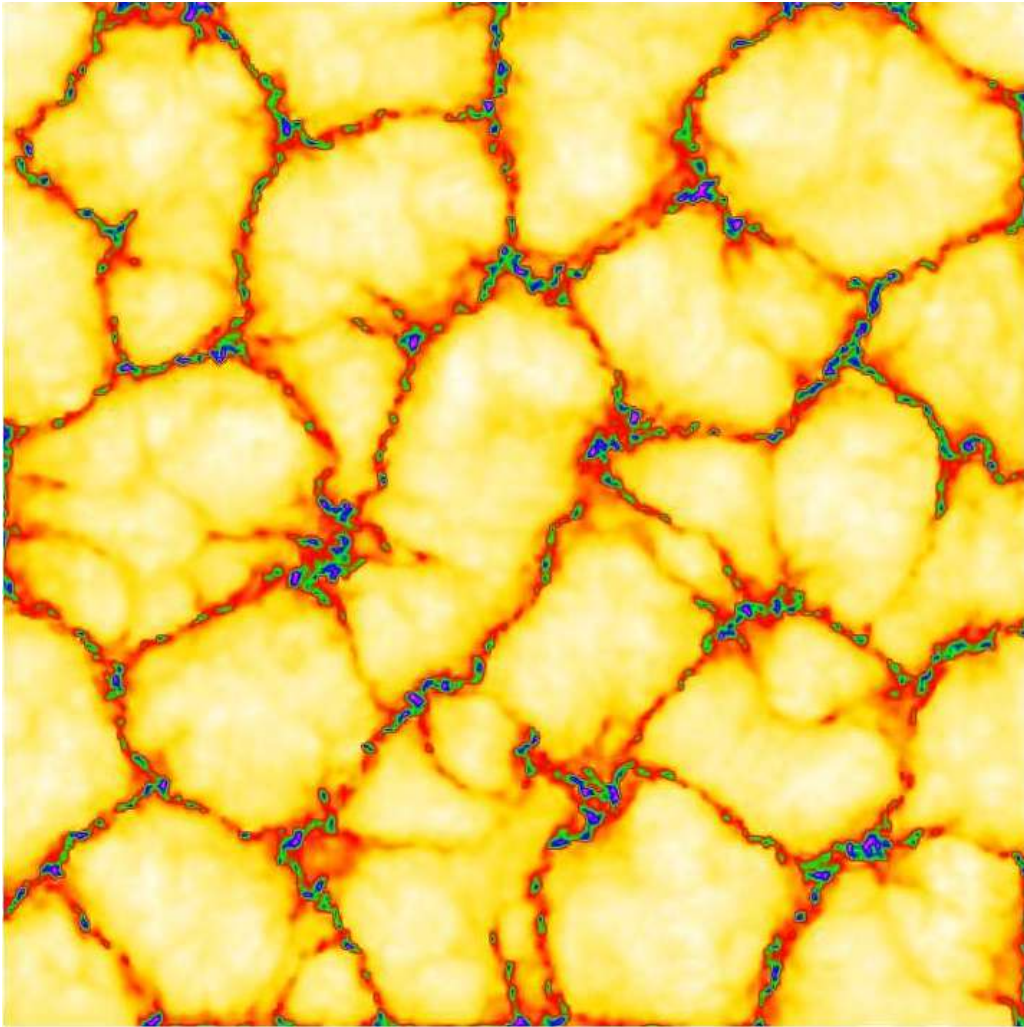


Рис. 23. Структура течения в плоскости $z = 0.97$, поле температуры, $Ra \approx 37.5Ra_{cr}$.

Опыт исследования структуры течения методами вычислительной гомологии говорит о том, что

- выбор топологических пространств для анализа их инвариантов играет ключевую роль в изучении структуры течения. При исследовании течения со сложной структурой не следует ограничиваться только одним критерием построения топологического пространства;
- необходимо отметить простоту использования методов вычислительной гомологии, при этом нельзя игнорировать тот факт, что формальный подход выбора топологического пространства может дать ошибочное заключение о характере течения, поэтому всегда необходим визуальный контроль;

2.3. Спектральные методы

Рассмотрим, какие возможности для исследования структуры течения предоставляют стандартный низкочастотный фильтр Гаусса (аналог хорошо известного фильтра бегущего среднего) и высокочастотный фильтр Лапласа (рис. 25) [1, 19]. Низкочастотный фильтр выделяет крупномасштабные структуры. Высокочастотный — области, в которых есть достаточно резкий перепад температуры, в этом случае на первый план выходят мощные нисходящие струи и мелкомасштабные структуры, которые заполняют всю поверхность крупных ячеек. Если сложить изображения, представленные на рисунке 25, то получится картина течения, приведенная на рисунке 14 б.

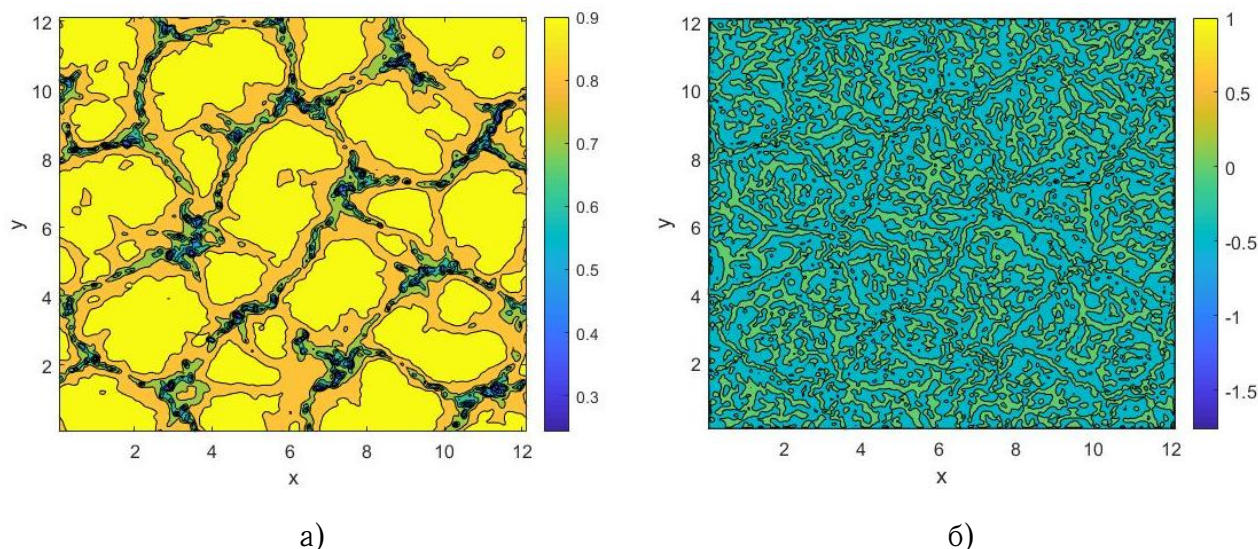


Рис. 25. Результаты обработки картины течения фильтрами. а) Низкочастотный фильтр
б) Высокочастотный фильтр

В расчете получено трехмасштабное течение, однако в спектре нет ярко выраженных мод, соответствующих каждому из масштабов (рис. 16). Чтобы удалить из картины течения (рис. 14 б) структуры, отвечающие ведущей моде $1.2 < k < 2$, был применен полосовой фильтр [19]. В результате стали видны мелкомасштабные структуры и промежуточный масштаб, по которому они перемещаются на периферию крупных структур (рис. 26 а). На рисунке 26 б приведен спектр картины, полученной после обработки фильтром. В спектре отсутствуют моды, соответствующие волновым числам $1.2 < k < 2$, однако остались моды, соответствующие второму и третьему, самому маленькому, масштабу. Заметим, что амплитуды оставшихся мод приблизительно в

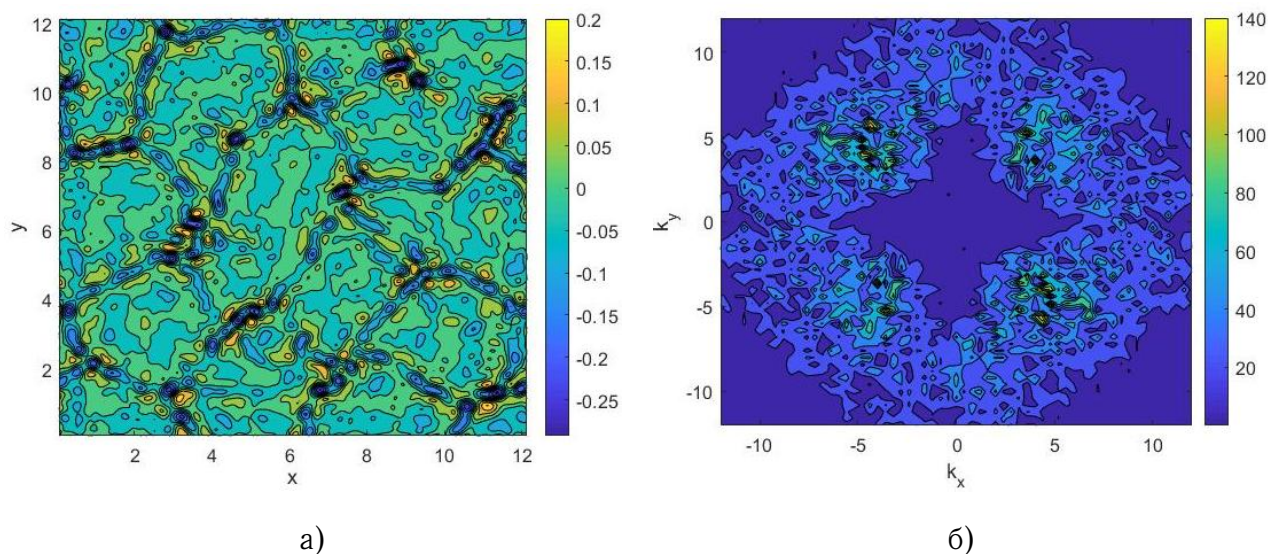


Рис. 26. Полосовой фильтр. а) Результат обработки картины течения полосовым фильтром; б) Спектр результата обработки полосовым фильтром.)

шесть раз меньше амплитуды ведущей моды (рис. 27). Таким образом, в спектре течения нельзя четко указать частоту, соответствующую каждому из трех масштабов. Однако знание волновых чисел или диапазонов их изменения, позволяет оценить размеры этих структур. Стоит отметить тот факт, что подход на основе методов вычислительной гомологии указал область, где может быть течение сложной многомасштабной структуры. А с помощью спектральных методов действительно удалось описать масштабы этого течения.

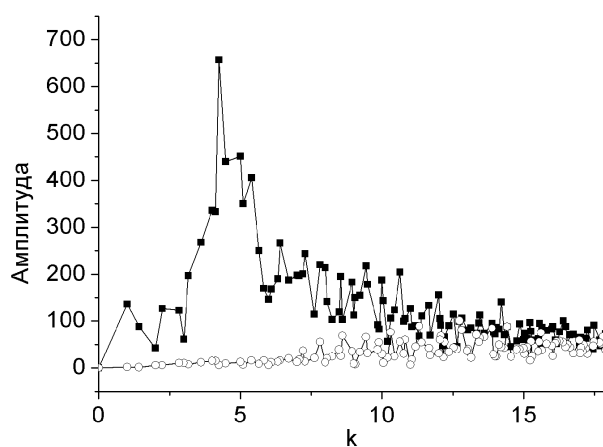


Рис. 27. Спектр усредненный по азимуту. Квадратики — спектр исходного течения, кружочки — спектр результата обработки полосовым фильтром.

Таким образом, если наличие многомасштабной конвекции установлено, то дальнейшее ее исследование эффективно вести спектральными методами, которые трудоемки, но позволяют определить волновые числа ведущих мод, то есть характерные размеры конвективных структур. Так же как и в двумерном случае, основная мода течения может квантоваться и создавать иллюзию присутствия второго (мелкого) масштаба течения.

Заключение

В работе рассмотрены методы анализа конвективного течения со сложной структурой. Наиболее распространенные методы, такие как Фурье-анализ, низкочастотные фильтры, не всегда способны определить размер структуры и область ее локализации. Поэтому необходимы новые подходы в исследовании возникающих течений. Опыт анализа конвективного движения, возникающего в плоском горизонтальном слое жидкости, температуропроводность которой зависит от температуры, показал, что исследование, опирающееся только на один подход, мало информативно. Только в сочетании разных методов исследования можно получить исчерпывающую информацию о течении. Предложенные методы можно использовать как для анализа результатов расчетов, так и данных наблюдений и экспериментов.

Список литературы

1. Getling A.V., Mazhorova O.S., Shcheritsa O.V. Effects of variable thermal diffusivity on the structure of convection // *Physics Letters A*. 2018. Vol. 382. P. 639–645.
2. Getling A.V., Mazhorova O.S., Shcheritsa O.V. Concerning the multi-scale structure of solar convection // *Geomagnetism and Aeronomy*. 2013. Vol. 53, no. 7. Pp. 904–908.
3. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло – и массообмена. Москва: Наука, 1984.
4. Мажорова О.С. Разностные методы решения уравнения динамики вязкой жидкости. Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Том VII-I. Математическое моделирование в низкотемпературной плазме. Часть 2. Под ред. Попова Ю.П. М.: Янус-К. 2008. 333 с.
5. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. Москва: Мир, 1980.
6. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Отв. ред. Ю.И.Шокин. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1981. 304 с.
7. Мажорова О.С., Попов Ю.П. Матричный итерационный метод численного решения двумерных уравнений Навье – Стокса // *ДАН СССР*. 1981. Vol. 259, no. 3. Pp. 535 – 540.
8. Мажорова О.С., Попов Ю.П. О методах численного решения уравнений Навье – Стокса // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1980. Vol. 20, no. 4. Pp. 1005 – 1020.
9. Мажорова О.С., Попов Ю.П., Похилко В.И. Матричный алгоритм численного решения нестационарных задач концентрационной конвекции для многокомпонентных сред. В сб. Математическое моделирование. Получение монокристаллов и полупроводниковых структур. Под ред. Самарского А.А., Попова Ю.П., Мажоровой О.С. Москва: Наука, 1986. С. 19–31.

10. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Москва: Наука, 1972. 392 с.
11. Колмычков В.В., Мажорова О.С., Попов Ю.П. Анализ алгоритмов решения трехмерных уравнений Навье – Стокса в естественных переменных // Дифференциальные уравнения. 2006. Vol. 42, no. 7. Pp. 932 – 942.
12. Gameiro Marcio, Pilarczyk Pawel. Automatic Homology Computation with Application to Pattern Classification // RIMS Kokyuroku Bessatsu. 2007. Vol. B3. Pp. 1 – 10.
13. Krishan Kapilanjana, Kurtuldu Huseyin, Schatz Michael F. Homology and symmetry breaking in Rayleigh-Benard convection: Experiments and simulations // Physics of Fluids. 2007. no. 17105.
14. Krishan Kapilanjana, Kurtuldu Huseyin, Schatz Michael F. Topological characterization of spatial-temporal chaos // Physical review. 2004. no. 035203(R).
15. Emran Mohammad S., Schumacher Jörg. Large-scale mean patterns in turbulent convection // Journal of Fluid Mechanics. 2015. Vol. 776. P. 96–108.
16. Kramár Miroslav, Levanger Rachel, Tithof Jeffrey et al. Analysis of Kolmogorov flow and Rayleigh–Bénard convection using persistent homology // Physica D. 2016. Vol. 334. P. 82–98.
17. Grindrod P., Harrington H.A., Otter N., Porter M.A. A roadmap for the computation of persistent homology. arXiv:1506.08903. 2015. 45 p.
18. CHomP, Computational Homology Project. <http://chomp.rutgers.edu>.
19. Блейкхут Р.Е. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. Москва: Мир, 1989. 220 с.

Содержание

Введение	3
1. Исследование двумерного течения	4
1.1. Результаты расчетов	5
1.2. Спектральные методы	7
1.3. Фазовые пространства. Аттракторы	10
2. Исследование трехмерного течения	16
2.1. Результаты расчетов	16
2.2. Вычислительная гомология	18
2.3. Спектральные методы	28
Заключение	30