



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Люпа А.А., Трапезникова М.А.,  
Чечина А.А., Чурбанова Н.Г.

Сравнительный анализ  
алгоритмов явного типа для  
решения задач фильтрации  
с использованием  
гиперболизированных  
уравнений

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Сравнительный анализ алгоритмов явного типа для решения задач фильтрации с использованием гиперболизированных уравнений / А.А.Люпа [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 248. 18 с. doi:[10.20948/prepr-2018-248](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-248)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-248>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**А.А. Люпа, М.А. Трапезникова, А.А. Чечина,  
Н.Г. Чурбанова**

**Сравнительный анализ алгоритмов  
явного типа для решения задач  
фильтрации с использованием  
гиперболизированных уравнений**

**Москва — 2018**

*Люпа А.А., Трапезникова М.А., Чечина А.А., Чурбанова Н.Г.*

**Сравнительный анализ алгоритмов явного типа для решения задач фильтрации с использованием гиперболизированных уравнений**

Работа посвящена развитию вычислительных алгоритмов явного типа для моделирования многофазных течений слабосжимаемых жидкостей в подземном пространстве. Рассматриваются два подхода к выводу гиперболизированной системы уравнений фильтрации. Одна из моделей разработана на основе принципа минимальных размеров и техники дифференциальных приближений. Другая модель получена благодаря введению релаксации потока массы в уравнение неразрывности. Предлагаются алгоритмы, использующие аппроксимацию модифицированных уравнений трехслойными явными разностными схемами. На примере тестовых расчетов проводится сравнение двух подходов. Алгоритмы сопоставимы по вычислительным затратам и позволяют увеличить шаг по времени как минимум на порядок по сравнению с реализацией классической модели двухслойными явными схемами.

**Ключевые слова:** течение жидкости в пористой среде, релаксация потока, явные разностные схемы

*Anastasiya Alexandrovna Lyupa, Marina Alexandrovna Trapeznikova, Antonina Alexandrovna Chechina, Natalia Gennadievna Churbanova*

**Comparative analysis of explicit type algorithms for solving problems of filtration with the use of hyperbolized equations**

The work is devoted to the development of explicit-type computational algorithms for modeling multiphase flow of slightly compressible fluid in the subsurface. Two approaches to the derivation of a hyperbolized system of filtration equations are considered. One of the models is developed on the basis of the principle of minimal sizes and the technique of differential approximations. The other model is obtained by introducing the mass flux relaxation into the continuity equation. Algorithms are proposed that use the approximation of modified equations by three-level explicit difference schemes. These two approaches are compared on test predictions. The algorithms are comparable in computational costs and can increase the time step by at least an order of magnitude compared to the implementation of the classical model by two-level explicit schemes.

**Key words:** fluid flow in a porous medium, flux relaxation, explicit difference schemes

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 16-29-15095-офи\_м, 18-01-00405-а и 18-01-00587-а.

# 1. Введение

Разработка вычислительных технологий, включающих адекватные математические модели, точные численные методы и эффективные параллельные программы для описания крупномасштабных фильтрационных процессов в подземном пространстве, является одной из актуальных задач индустриальной математики. Среди возможных областей применения этих исследований — оптимизация добычи углеводородов, решение экологических проблем, связанных с просачиванием загрязняющих веществ в почву, строительство мелиоративных и гидротехнических сооружений.

Основная цель исследований — создание явных алгоритмов для моделирования многофазных течений слабосжимаемых жидкостей в пористой среде. Интерес к явным схемам объясняется рядом причин. Дело в том, что некоторые проблемы требуют проведения расчетов с критической точностью. К таким проблемам, в частности, относятся задачи нефтедобычи с фазовыми переходами, с фронтами горения, со сложным видом функций относительных фазовых проницаемостей. Для достижения необходимой точности приходится использовать очень подробные пространственно-временные сетки с ограничением на шаг по времени  $\Delta t = O(h^2)$  не только для явных, но и для неявных схем [1]. В этом случае явные схемы выигрывают по сравнению с неявными с точки зрения общего времени счета. Кроме того, явные схемы предпочтительнее при многопроцессорной реализации алгоритма.

В соответствии с этой целью авторами работы предложен оригинальный подход к моделированию течений в пористых средах: математическая модель выведена по аналогии с квазигазодинамической (КГД) системой уравнений [2], а затем модифицирована, так что тип уравнения неразрывности изменен с параболического на гиперболический. Как следствие, для аппроксимации уравнения неразрывности может быть использована трехслойная явная разностная схема, имеющая более мягкое условие устойчивости, чем двухслойная схема для исходного классического уравнения [3, 4].

В настоящей работе представлен также другой подход к выводу гиперболизированных уравнений фильтрации. Все большую популярность в наши дни приобретает тенденция при описании физических явлений учитывать время распространения возмущений, соответственно, время выравнивания макропараметров в системе (давления, температуры, плотности). Для этого предлагается ввести в уравнение неразрывности так называемую релаксацию потока (в данном случае — потока массы). Идея релаксации потоков изначально возникла при решении задач физики плазмы [5]. Цель была — ограничить тепловые потоки в быстропротекающих процессах при больших градиентах температуры. Было отмечено нефизичное свойство уравнения теплопроводности, основанного на законе Фурье, — бесконечная скорость распространения возмущений, свойственная параболическим уравнениям. Для обеспечения конечной скорости распространения возмущений было

предложено гиперболическое уравнение теплопроводности. В работе [6] также исследуется гиперболизированная версия уравнения теплопроводности.

Подход, учитывающий релаксацию потоков, с успехом применялся для моделирования течений несжимаемой жидкости и слабосжимаемого газа, когда в качестве модели был использован гиперболический вариант квазигазодинамической системы уравнений [7].

Для моделирования слабосжимаемых течений жидкости в пористой среде этот подход применяется впервые. Пока ограничимся рассмотрением изотермических двухфазных течений. Тестовые расчеты показывают преимущества данного подхода, в частности точность и возможность увеличить шаг по времени при расчетах по явным схемам. Проведен численный сравнительный анализ гиперболической КГД модели фильтрации и алгоритма ее реализации с моделью и алгоритмом, учитывающими релаксацию потока.

## 2. Классическая модель многофазного течения в пористой среде

Классическая математическая модель, описывающая течение многофазной жидкости в пористой среде, в изотермическом случае может быть представлена следующим образом (индекс  $\alpha$  обозначает фазу) [8, 9]:

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha = q_\alpha, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_\alpha = -K \frac{k_\alpha}{\mu_\alpha} (\operatorname{grad} P_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}), \quad (2)$$

$$\rho_\alpha = \rho_\alpha(P_\alpha), \quad (3)$$

$$\sum_\alpha S_\alpha = 1. \quad (4)$$

Здесь  $S_\alpha$  – насыщенность,  $P_\alpha$  – давление,  $\rho_\alpha$  – плотность,  $\mathbf{u}_\alpha$  – скорость фильтрации,  $\phi$  – пористость,  $K$  – абсолютная проницаемость,  $k_\alpha$  – относительная фазовая проницаемость,  $\mu_\alpha$  – динамическая вязкость,  $q_\alpha$  – источник жидкости,  $\mathbf{g}$  – вектор ускорения свободного падения. Система состоит из уравнений для каждой подвижной фазы: уравнение неразрывности (закон сохранения массы фазы) (1), обобщенный закон Дарси (2), уравнение состояния (3) – а также включает замыкающее соотношение (4). Сделаны следующие предположения: пористая среда недеформируемая и изотропная, фазы несмешивающиеся, невзаимодействующие и нерастворимые, фазовые переходы отсутствуют,

жидкие фазы слабосжимаемые, газ идеальный, капиллярные силы присутствуют.

Систему (1)-(4) следует дополнить выражениями для относительных фазовых проницаемостей и капиллярных давлений, которые представляют собой разность фазовых давлений. Эти выражения могут быть записаны как функции от насыщенных, построенные по экспериментальным данным. Строгих аналитических формулировок для этих функций нет, используются различные приближенные модели. В настоящей работе рассматриваются двухфазные течения, например, совместное течение воды и нефти в пористой среде, поэтому в системе присутствует одно капиллярное давление. Для его описания и описания относительных фазовых проницаемостей выбрана модель ван Генухтена [10, 11], сформулированная относительно эффективной насыщенности смачивающей фазы  $S_{we}$ :

$$\begin{aligned} k_w(S_{we}) &= S_{we}^{\frac{1}{2}} \left[ 1 - \left( 1 - S_{we}^{\frac{N}{N-1}} \right)^{\frac{N-1}{N}} \right]^2, \\ k_n(S_{we}) &= \left( 1 - S_{we} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ 1 - S_{we}^{\frac{N}{N-1}} \right]^{\frac{2(N-1)}{N}}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$P_n - P_w = P_{cnw}(S_{we}) = \frac{1}{\alpha} \left[ \left( S_{we} \right)^{\frac{N}{1-N}} - 1 \right]^{\frac{1}{N}}, \quad (6)$$

$$S_{we} = \frac{S_w - S_{wr}}{1 - S_{wr} - S_{nr}}, \quad (7)$$

где  $S_{wr}$  и  $S_{nr}$  – остаточные насыщенности фаз,  $\alpha$  и  $N$  – некоторые параметры.

### 3. Гиперболическая КГД модель фильтрации и алгоритм ее реализации

Одна из моделей, рассматриваемых в данной работе, построена по аналогии с КГД системой уравнений [2]. Вывод кинетически-согласованных разностных схем (КСРС) и связанной с ними КГД системы основан на так называемом «принципе минимальных размеров»: для многих задач механики сплошной среды существуют минимальные размеры, выступающие в качестве ограничений снизу при дискретизации модели [12].

Этот принцип обобщен на задачи фильтрации: в качестве минимального размера по пространству  $l$  рассматривается масштаб, при котором можно пренебречь микроструктурой фильтрующей породы. Именно на этом масштабе в качестве скорости течения можно рассматривать такую осредненную величину, как скорость фильтрации (скорость Дарси). Минимальный масштаб по времени  $\tau$  – это временной интервал, за который происходит установление

внутреннего равновесия в объеме с характерным размером  $l$ .

Уравнение (1) было модифицировано с учетом минимальных размеров.

При выводе модифицированного уравнения для течения однофазной жидкости в пористой среде за основу было взято кинетическое уравнение Энскога [13] — по аналогии с выводом КСРС и КГД системы уравнений для плотных газов. Было получено уравнение параболического типа с регуляризатором в правой части:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = \operatorname{div} \frac{lc}{2} \operatorname{grad} \rho, \quad (8)$$

где  $c$  – величина порядка скорости звука во флюиде.

Явная схема с центрально-разностной аппроксимацией конвективного члена для этого уравнения может быть записана следующим образом:

$$\frac{\rho_i^{j+1} - \rho_i^j}{\Delta t} + \frac{(\rho u)_{i+1}^j - (\rho u)_{i-1}^j}{2h} = \left( \frac{lc}{2} \rho_{\bar{x}} \right)_x^j. \quad (9)$$

Она является устойчивой с условием

$$\Delta t = O(h^2) \quad (10)$$

в отличие от схемы с центральными разностями для классического уравнения (1), которая является абсолютно неустойчивой.

Для того чтобы смягчить ограничение на шаг по времени (10), модифицируем уравнение (8) с учетом минимального масштаба по времени. Используя разложение в ряд Тейлора, представим разностную аппроксимацию производной по времени в виде:

$$\frac{\rho_i^{j+1} - \rho_i^j}{\Delta t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + O(\Delta t^2). \quad (11)$$

Опираясь на это представление и отбрасывая члены порядка малости  $O(\Delta t^2)$ , заменим уравнение (8) на уравнение гиперболического типа:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = \operatorname{div} \frac{lc}{2} \operatorname{grad} \rho, \quad (12)$$

включающее вторую производную по времени с малым параметром  $\tau \sim h/c$  [4].

В работах [3, 4] было показано, что аппроксимирующая его трехслойная явная разностная схема

$$\frac{\rho_i^{j+1} - \rho_i^{j-1}}{2\Delta t} + \tau \frac{\rho_i^{j+1} - 2\rho_i^j + \rho_i^{j-1}}{\Delta t^2} + \frac{(\rho u)_{i+1}^j - (\rho u)_{i-1}^j}{2h} = \left( \frac{lc}{2} \rho_{\bar{x}} \right)_x^j \quad (13)$$

устойчива с более мягким по сравнению с (10) условием устойчивости

$$\Delta t = O(h^{3/2}). \quad (14)$$

Уравнение (12) обобщено на случай многофазного течения флюида [4, 14]:

$$\phi \frac{\partial(\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2(\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t^2} + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = q_\alpha + \operatorname{div} \frac{lc_\alpha}{2} \operatorname{grad}(\rho_\alpha S_\alpha). \quad (15)$$

Здесь  $c_\alpha$  – скорость звука в фазе  $\alpha$ .

При построении вычислительного алгоритма использовались линейные уравнения состояния для слабосжимаемых жидкостей и уравнение состояния идеального газа, если газовая фаза присутствует в моделируемой системе:

$$\rho_\alpha = \rho_{0\alpha} [1 + \beta_\alpha (P_\alpha - P_{0\alpha})], \quad \alpha = w, n, \quad (16)$$

$$\rho_g = \rho_{0g} \frac{P_g}{P_{0g}}. \quad (17)$$

Здесь  $\beta_\alpha$  – коэффициент изотермической сжимаемости,  $P_{0\alpha}$  и  $\rho_{0\alpha}$  – характерные значения давления и плотности.

Подробно вычислительный алгоритм для неизотермического трехфазного течения представлен в [14]. Там же предложено обобщение модифицированной модели на случай многокомпонентной фильтрации.

В данной работе будем считать, что в системе присутствует вода (индекс  $w$ ) и неводная жидкая фаза нефть (индекс  $n$ ).

В качестве основных искомым функций выберем водонасыщенность  $S_w$  и давление нефти  $P_n$ , для них зададим начальные и граничные условия. На каждом слое по времени  $j$  вычисляются:

- нефтенасыщенность  $S_n^j$  из (4), относительные фазовые проницаемости  $k_\alpha^j = k_\alpha(S_w^j)$ , капиллярное давление  $P_{cnw}(S_w^j)$  и затем давление воды  $P_w^j$  с помощью формул (5)-(7);

- плотности фаз  $\rho_\alpha^j$  (16);

- скорости фильтрации фаз  $\mathbf{u}_\alpha^j$  (2);

- произведение  $(\rho_\alpha S_\alpha)^{j+1}$  на следующем слое по времени для обеих фаз из (15) с помощью трехслойной явной разностной схемы, аналогичной (13) (на

первом слое используем двухслойную схему);

- основные искомые функции  $P_n^{j+1}$ ,  $S_w^{j+1}$  на следующем слое по времени с помощью решения в каждой точке расчетной сетки системы нелинейных алгебраических уравнений (система сформирована из уравнений состояния, умноженных на искомые  $S_\alpha^{j+1}$ , в правых частях стоят найденные значения  $(\rho_\alpha S_\alpha)^{j+1}$ , учтены замыкающее соотношение (4) и выражение для капиллярного давления (6)):

$$\begin{aligned} \rho_{0w} \left[ 1 + \beta_w (P_n^{j+1} - P_{cnw} (S_w^{j+1}) - P_{0w}) \right] S_w^{j+1} &= (\rho_w S_w)^{j+1}, \\ \rho_{0n} \left[ 1 + \beta_n (P_n^{j+1} - P_{0n}) \right] (1 - S_w^{j+1}) &= (\rho_n S_n)^{j+1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Система решается методом Ньютона, требуется всего несколько итераций;

- в случае многопроцессорной реализации на основе принципа геометрического параллелизма осуществляются обмены данными на внутренних границах подобластей для вычисления  $(\rho_\alpha S_\alpha)^{j+1}$  по явной схеме. Реализация метода Ньютона не требует межпроцессорных обменов.

Таким образом, предложенный подход к решению задач фильтрации состоит из модели, включающей модифицированное по аналогии с КГД системой гиперболическое уравнение неразрывности, и алгоритма, предполагающего аппроксимацию модифицированного уравнения явной разностной схемой. В рамках традиционных подходов исходная модель сводится к какой-либо математической формулировке относительно основных искомых функций, то есть для определения этих функций выводятся дифференциальные уравнения, которые решаются явными или неявными численными методами. Предложенный подход от традиционных отличается не только модификацией уравнения неразрывности, но и тем, что не выводятся уравнения относительно основных искомых функций. Модифицированное уравнение используется для вычисления вспомогательной величины, а основные функции находятся путем решения системы уравнений, составленной на основе уравнений состояния, для чего в каждой расчетной точке применяется экономичная локальная итерационная процедура. Авторы классифицируют алгоритм как алгоритм явного типа, поскольку он не требует обращения полной матрицы системы и распараллеливается, как явные схемы.

Рассмотренный подход был многократно протестирован и применялся для решения задач нефтедобычи и задач просачивания на суперкомпьютерах, в том числе с гибридной архитектурой [15, 16]. Были достигнуты чрезвычайно высокие ускорения вычислений.

#### 4. Модель и алгоритм, учитывающие релаксацию потока массы

Рассмотрим другой подход к выводу гиперболизированных уравнений фильтрации, который представляется достаточно обоснованным с физической точки зрения. Уравнение (1) кратко можно записать в виде:

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{Q}_\alpha = q_\alpha, \quad \alpha = w, n, \quad (19)$$

где  $\mathbf{Q}_\alpha$  – поток фазы  $\alpha$ .

Обозначим  $\mathbf{Q}_\alpha^D = \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha$  – поток Дарси. В классической модели  $\mathbf{Q}_\alpha = \mathbf{Q}_\alpha^D$ .

С учетом релаксации поток можно представить в виде:

$$\mathbf{Q}_\alpha = \mathbf{Q}_\alpha^D - \tau \frac{\partial \mathbf{Q}_\alpha}{\partial t}. \quad (20)$$

Малый параметр  $\tau$  – параметр релаксации, характеризующий время установления равновесия в системе.

Из (20) следует:

$$\operatorname{div}\mathbf{Q}_\alpha = \operatorname{div}\mathbf{Q}_\alpha^D - \tau \operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{Q}_\alpha}{\partial t}. \quad (21)$$

Если продифференцировать уравнение (19) по времени, затем умножить его на  $\tau$ , принять во внимание (21) и подставить в полученное уравнение  $\operatorname{div}\mathbf{Q}_\alpha$  из (19), приходим к окончательному виду уравнения неразрывности, модифицированного за счет введения релаксации потока:

$$\tau \frac{\partial^2(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t^2} + \frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{Q}_\alpha^D = q_\alpha + \tau \frac{\partial q_\alpha}{\partial t}. \quad (22)$$

К модели, включающей модифицированное уравнение (22), может быть применена известная техника разделения переменных, используемая, например, в [17] для сведения классической модели к системе уравнений, пригодной для численной реализации с помощью популярного метода IMPES (IMplicit Pressure – EXplicit Saturation) [17, 8]. Целью является привести модель к формулировке в терминах среднего давления  $P_{avg}$  и водонасыщенности, при этом исключить производные по времени от насыщенности из уравнения для давления.

Если уравнение (22), в котором производные по времени предварительно разложить на сумму слагаемых, разделить на  $\rho_\alpha$  и сложить два полученных уравнения неразрывности фаз, подставить скорость Дарси (2), учесть капиллярное давление и сделать некоторые упрощения, в частности, считать

пористость постоянной и уравнения состояния линейными, то получим следующий вид уравнения для давления:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\rho_n} \operatorname{div}(\rho_n \lambda_n \operatorname{grad} P_{avg}) + \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div}(\rho_w \lambda_w \operatorname{grad} P_{avg}) + \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\rho_n} \operatorname{div}(\rho_n \lambda_n \operatorname{grad} P_c) + \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div}(\rho_w \lambda_w \operatorname{grad} P_c) \right] + q_t = \\
& = \phi (S_n c_n + S_w c_w) \left( \frac{\partial P_{avg}}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 P_{avg}}{\partial t^2} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \phi (S_n c_n - S_w c_w) \left( \frac{\partial P_c}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 P_c}{\partial t^2} \right) + \\
& + g \left[ \frac{1}{\rho_n} \operatorname{div}(\rho_n^2 \lambda_n \operatorname{grad} z) + \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div}(\rho_w^2 \lambda_w \operatorname{grad} z) \right] + \\
& + 2\tau \phi \left( c_n \frac{\partial S_n}{\partial t} + c_w \frac{\partial S_w}{\partial t} \right) \frac{\partial P_{avg}}{\partial t} + \\
& + \tau \phi (c_n + c_w) \frac{\partial S_w}{\partial t} \frac{\partial P_c}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Уравнение для водонасыщенности представим в виде:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div}(\rho_w \lambda_w \operatorname{grad} P_w) + q_w = g \cdot \operatorname{div}(\rho_w^2 \lambda_w \operatorname{grad} z) + \phi \rho_w S_w c_w \frac{\partial P_w}{\partial t} + \\
& + \phi \rho_w \frac{\partial S_w}{\partial t} + \tau \phi \rho_w \frac{\partial^2 S_w}{\partial t^2} + \tau \phi \rho_w S_w c_w \frac{\partial^2 P_w}{\partial t^2} + \\
& + 2\tau \phi \rho_w c_w \frac{\partial P_w}{\partial t} \frac{\partial S_w}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{24}$$

В (23), (24) использованы перечисленные ниже обозначения:

$$\begin{aligned}
q_t &= \frac{q_n}{\rho_n} + \frac{q_w}{\rho_w}, \quad c_n = \frac{1}{\rho_n} \frac{d\rho_n}{dP_n}, \quad c_w = \frac{1}{\rho_w} \frac{d\rho_w}{dP_w}, \quad P_{avg} = \frac{P_n + P_w}{2}, \quad P_n = P_{avg} + \frac{P_c}{2}, \\
P_w &= P_{avg} - \frac{P_c}{2}, \quad \lambda_n = -\frac{Kk_n}{\mu_n}, \quad \lambda_w = -\frac{Kk_w}{\mu_w}.
\end{aligned}$$

Оба уравнения (23), (24) содержат производные второго порядка по времени с малым параметром. К сожалению, полностью избавиться от насыщенности в уравнении для давления не удалось.

Для решения системы (23)-(24) может быть реализован полностью явный вычислительный алгоритм, использующий трехслойные явные разностные

схемы на разнесенной расчетной сетке для аппроксимации обоих уравнений, относительные фазовые проницаемости при этом аппроксимируются "вверх по потоку" [18]. Данные схемы приведены в [19]. Сначала определяем  $P_{avg}^{j+1}$  из (23), производные по времени от водонасыщенности при этом вычисляются явно с использованием значений с предыдущего слоя по времени. Затем определяем

$$S_w^{j+1} \text{ из (24), подставляя в качестве давления воды значения } P_w = P_{avg}^{j+1} - \frac{P_c(S_w^j)}{2}$$

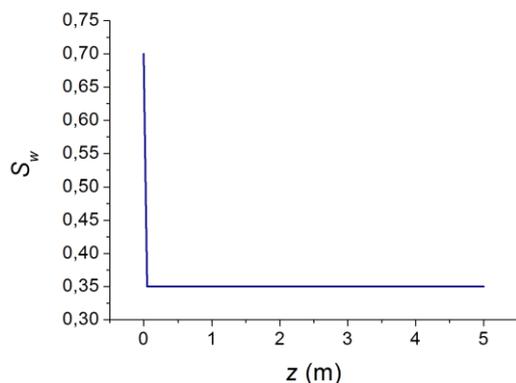
с использованием найденных на текущем слое значений среднего давления. При  $\tau = 0$  указанные трехслойные схемы превращаются в двухслойные для аппроксимации соответствующих уравнений для среднего давления и водонасыщенности, полученных из классической модели.

## 5. Тестовые расчеты

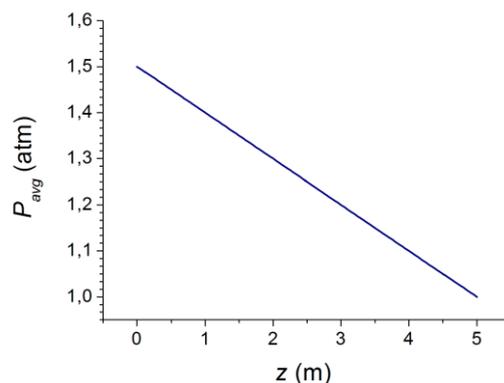
В качестве теста для верификации и сравнения предложенных подходов к моделированию процессов фильтрации рассмотрим задачу о двухфазном течении воды и нефти в пористой среде с закачкой воды на границе. Подобная задача рассматривалась в [19] с другим начальным значением давления и без учета капиллярных сил. В данном случае значение давления уменьшено, чтобы влияние капиллярных сил было ощутимым. Исследуемая область однородной изотропной пористой среды – параллелепипед размера  $1\text{ м} \times 1\text{ м} \times 5\text{ м}$ . В силу симметрии задача сводится к одномерной по оси  $Oz$ , вдоль которой действует сила тяжести. Постановку задачи иллюстрирует рис. 1.

Начальные условия:  $S_w = 0.35$ ,  $P_{avg} = 1.5 - 0.1z$ .

Граничные условия:  $S_w|_{z=0} = 0.7$ ,  $S_w|_{z=5} = 0.35$ ,  $P_{avg}|_{z=0} = 1.5 \text{ атм}$ ,  $P_{avg}|_{z=5} = 1 \text{ атм}$ .



(а) Водонасыщенность



(б) Среднее давление

Рис. 1. Распределение водонасыщенности (а) и среднего давления фаз (б) по глубине в начальный момент времени в задаче о двухфазной фильтрации воды и нефти

Таблица 1 содержит параметры жидкостей, таблица 2 — параметры пористой среды, используемые в расчетах. В формулах (5), (6) используются значения  $N = 3.25$ ,  $\alpha = 10$ . Шаг расчетной сетки по пространству зафиксирован как  $h = 0.05$  м.

Таблица 1

**Параметры фаз**

Физическая величина	Вода, $w$	Нефть, $n$
Характерная плотность, кг/м <sup>3</sup>	1000	850
Динамическая вязкость, Па·с	$10^{-3}$	$10^{-2}$
Характерное давление, атм	1	1
Коэффициент сжимаемости, Па <sup>-1</sup>	$4.4 \cdot 10^{-10}$	$10^{-9}$
Остаточная насыщенность	0.05	0.05

Таблица 2

**Параметры среды**

Пористость	0.4
Абсолютная проницаемость, м <sup>2</sup>	$6.64 \cdot 10^{-11}$

Исходная система уравнений (1)-(7) является сильно нелинейной, поэтому найти ее точное общее решение не представляется возможным. В качестве эталона возьмем численное решение поставленной задачи, полученное на основе классической модели (1)-(7) с помощью часто используемого на практике IMPES-метода. Подробно применение IMPES-метода к решению подобной задачи рассмотрено в [19]. Уравнение для среднего давления аппроксимируется неявной схемой, соответствующая СЛАУ решается итерационным методом. Уравнение для насыщенности аппроксимируется явной двухслойной схемой.

Эталонное решение получено в расчетах с шагом по времени  $\Delta t = 10^{-4}$  с. Вообще говоря, IMPES-метод позволяет проводить расчеты с шагом по времени на несколько порядков больше, но с потерей точности. Выбор шага осуществлен на основе сравнения результатов при различных шагах. В табл. 3 представлены погрешности по давлению и по насыщенности на два момента времени, которые дает IMPES-метод при различных шагах по сравнению с  $\Delta t = 10^{-4}$  с. Погрешности исследованы на два момента времени для того, чтобы

исключить быстрое нарастание ошибки. При этом относительная ошибка между величинами  $A$  и  $B$  вычислялась по формуле:

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_i} \left( \frac{A_i - B_i}{A_i} \right)^2} / N_i. \quad (25)$$

Таблица 3

**Погрешность IMPES-метода при вычислении  $P_{avg}$  и  $S_w$  в зависимости от шага по времени**

$\Delta t, c$	$\varepsilon_p, \varepsilon_s$ при $t = 50 c$	$\varepsilon_p, \varepsilon_s$ при $t = 100 c$
$1 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-7}, 4.1 \cdot 10^{-6}$	$1.0 \cdot 10^{-7}, 2.8 \cdot 10^{-6}$
$1 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-8}, 7.8 \cdot 10^{-7}$	$3.0 \cdot 10^{-8}, 5.4 \cdot 10^{-7}$
$5 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-8}, 4.2 \cdot 10^{-7}$	$1.7 \cdot 10^{-8}, 3.0 \cdot 10^{-7}$
$2 \cdot 10^{-4}$	$4.7 \cdot 10^{-9}, 1.3 \cdot 10^{-7}$	$5.8 \cdot 10^{-9}, 9.3 \cdot 10^{-8}$

При решении тестовой задачи с помощью модели и алгоритма, учитывающих релаксацию потока (раздел 4 данного препринта), малый параметр  $\tau$  выбирался эмпирически в зависимости от шага по времени так, чтобы обеспечить устойчивость счета. Результаты сравнения полученного решения с эталонным отражены в табл. 4, в которой приведены погрешности по давлению и по насыщенности в зависимости от шага по времени и параметра релаксации при аппроксимации уравнений (23) и (24) трехслойными явными схемами.

Таблица 4

**Погрешность трехслойной схемы относительно эталонного решения при вычислении  $P_{avg}$  и  $S_w$  в зависимости от шага по времени и параметра релаксации в момент  $t = 20 c$**

$\Delta t, c$	$\tau, c$	$\varepsilon_p$	$\varepsilon_s$
$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$
$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$
$1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-7}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$
$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-7}$	$3.7 \cdot 10^{-6}$

$\Delta t, \text{ с}$	$\tau, \text{ с}$	$\varepsilon_p$	$\varepsilon_s$
$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$5.3 \cdot 10^{-7}$	$6.5 \cdot 10^{-6}$
$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$
$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$6.3 \cdot 10^{-7}$	$8.0 \cdot 10^{-6}$

Заметим, что точность решения при фиксированном  $\Delta t$  зависит от  $\tau$ . Погрешность  $\varepsilon_s > 10^{-3}$  слишком велика, схема является неустойчивой при соответствующих значениях  $\Delta t$  и  $\tau$ . Для продолжительных расчетов были выбраны значения  $\Delta t = 10^{-4}$  с,  $\tau = 10^{-4}$  с.

Для сравнения помимо IMPES-метода был использован полностью явный алгоритм реализации классической модели: уравнения для среднего давления и для насыщенности аппроксимировались двухслойными явными схемами, устойчивость наблюдалась при  $\Delta t \leq 10^{-5}$  с. Таким образом, гиперболизация модели позволяет увеличить шаг по времени явного метода как минимум на порядок (при фиксированном шаге по пространству).

Аналогичный вывод можно сделать при решении тестовой задачи с помощью гиперболической КГД модели и алгоритма ее реализации на основе трехслойной явной схемы (раздел 3 данного препринта). Расчеты продемонстрировали, что и в этом случае значения  $\Delta t = 10^{-4}$  с,  $\tau = 10^{-4}$  с являются оптимальными с точки зрения устойчивости при выбранном шаге по пространству. Расчеты поставленной задачи и ряда других тестовых задач при различных соотношениях  $\Delta t$  и  $\tau$  показали, что выбор  $\tau = \Delta t$  приводит к удовлетворительным результатам [20] и может быть рекомендован для проведения расчетов прикладных задач. Подбор малого параметра  $l$  при регуляризаторе вызывает большие трудности, поскольку этот параметр в большей степени влияет на точность метода. Рисунок 2 иллюстрирует эксперименты по выбору этого параметра. Для простоты подбирали целиком коэффициент при регуляризаторе, считая его одинаковым для фаз и обозначив

$reg\_coeff = \frac{l c_\alpha}{2}, \forall \alpha$ . Можно видеть, что использование регуляризатора приводит к сглаживанию решения, при этом от значения исследуемого коэффициента зависит степень "размазывания" фронта. Для указанного теста к хорошим результатам приводит  $reg\_coeff = 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с, что соответствует  $l \sim 10^{-8}$  м и согласуется с физическими соображениями о минимальном размере в задачах фильтрации [13, 3, 4, 20].

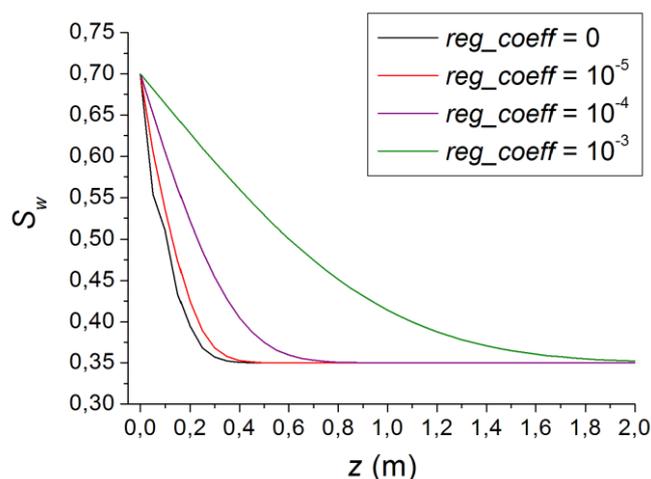


Рис. 2. Водонасыщенность в момент времени 100 с при решении задачи о двухфазной фильтрации с помощью гиперболической КГД модели, варьируется только коэффициент при регуляризаторе

Рисунок 3 иллюстрирует сравнение профилей водонасыщенности и среднего давления, полученных на момент времени 300 с при решении тестовой задачи различными методами при указанных выше шагах разностной сетки и малых параметрах. Подход, основанный на гиперболической КГД модели, помечен как method I, подход, учитывающий релаксацию потока, – как method II, эталонное решение дает IMPES method. Наблюдается очень хорошее согласование результатов. Результаты по методам II и IMPES визуально совпадают в силу малости относительных ошибок (см. табл. 4). Результаты по методу I визуально достаточно близки к эталону (относительные ошибки не вычислялись).

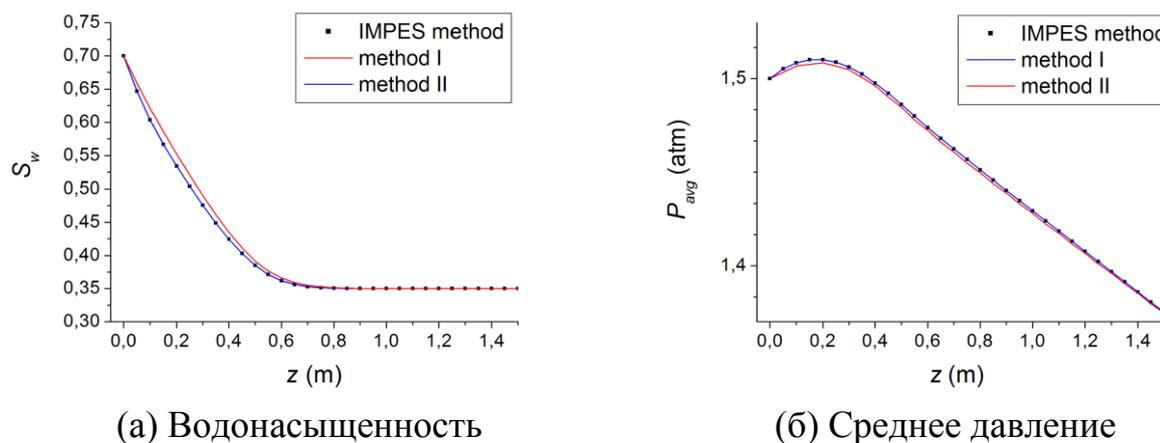


Рис. 3. Водонасыщенность (а) и среднее давление фаз (б) в момент времени 300 с при решении разными методами задачи о двухфазной фильтрации

Таблица 5 содержит максимально допустимые для устойчивости шаги по времени, полученные экспериментально при реализации методов I и II. Шаг для метода I подбирался таким образом, чтобы при обращении матрицы в методе Ньютона определитель не обращался в ноль. Шаг для метода II выбирался из условия, чтобы не наблюдалось критического нарастания ошибок, при котором решение "разваливается". В обоих случаях  $\tau = \Delta t$ , то есть значение  $\tau$  отличалось для методов I и II. Если варьировать  $\tau$ , то можно добиться повышения  $\Delta t$  еще в несколько раз, но не более. Представленный в табл. 5 шаг по времени для метода I в несколько раз больше, чем для метода II, однако метод I требует дополнительных по сравнению с явной схемой затрат на реализацию метода Ньютона в каждой расчетной точке. Поэтому в целом методы можно считать сопоставимыми по вычислительным затратам.

Таблица 5

**Максимальные шаги по времени в алгоритмах на основе гиперболизированных уравнений**

$h$ , м	$\Delta t$ , с (method I)	$\Delta t$ , с (method II)
0.05	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-4}$

В расчетах по методу II было установлено, что учет капиллярного давления приводит к уменьшению шага по времени на порядок по сравнению с [19]. Это объясняется сложной зависимостью поведения уравнений для давления и насыщенности от преобладания тех или иных членов, в частности, доминирование капиллярных эффектов приводит к поведению, типичному для параболических уравнений [17], следовательно, к более жесткому ограничению на шаг по времени.

## 6. Заключение

Предложенные подходы к моделированию фильтрации слабосжимаемых жидкостей используют гиперболизированные уравнения неразрывности и их аппроксимацию явными разностными схемами. Разработанные алгоритмы обеспечивают примерно одинаковое увеличение шага по времени по сравнению с явными схемами для классической модели и сопоставимы с точки зрения вычислительных затрат. При реализации КГД модели фильтрации наблюдаются некоторые трудности, связанные с эмпирическим подбором малого параметра при регуляризаторе, имеющего смысл минимального характерного масштаба по пространству, из-за чего возможна потеря точности решения. Второй подход в большей степени лежит в русле традиционных методов. В этом случае гиперболизация, основанная на предположении о релаксации потока, представляется физически более обоснованной. Этот подход выигрывает с точки зрения точности, но его гораздо труднее обобщить

на многокомпонентный случай, поскольку он предполагает вывод и решение очень громоздких уравнений. В дальнейшем оба подхода будут развиваться с целью решения на суперкомпьютерах крупномасштабных прикладных задач о течениях в подземных горизонтах.

### **Библиографический список**

- [1] Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику: Учеб. пособие: Для вузов. – М.: Изд-во Моск. Физ.-техн. Ин-та, 1994.
- [2] Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике. – М.: Изд-во МГУ, 1999.
- [3] Четверушкин Б.Н., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Шильников Е.В. Об одной схеме для решения задач фильтрации // Математическое моделирование. – 2010. – Т.22, №4. – С. 99-109.
- [4] Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Использование явных схем для моделирования процесса двухфазной фильтрации // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 7. – С. 52-60.
- [5] Голант В.Е., Жилинский А.П., Сахаров И.Е. Основы физики плазмы. – М.: Атомиздат, 1977.
- [6] Мышецкая Е.Е., Тишкин В.Ф. Оценки влияния гиперболизации для уравнения теплопроводности // ЖВМ и МФ. – 2015. – Т. 55, № 8. – С. 1299-1304.
- [7] Давыдов А.А., Четверушкин Б.Н., Шильников Е.В. Моделирование течений несжимаемой жидкости и слабосжимаемого газа на многоядерных гибридных вычислительных системах // ЖВМ и МФ. – 2010. – Т. 50, № 12. – С. 2275-2284.
- [8] Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
- [9] Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М. Подземная гидромеханика: Учебник для вузов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
- [10] Helmig, R. Multiphase flow and transport processes in the subsurface – A contribution to the modeling of hydrosystems. – Springer, 1997.
- [11] Pinder, G.F.; Gray, W.G. Essentials of Multiphase Flow and Transport in Porous Media. – John Wiley & Sons, 2008.
- [12] Четверушкин Б.Н. К вопросу об ограничении снизу на масштабы в механике сплошной среды / Время, хаос, математические проблемы, Вып.4. – М.: Изд-во МГУ, 2009, С. 75-96.
- [13] Трапезникова М.А., Белоцерковская М.С., Четверушкин Б.Н. Аналог кинетически-согласованных схем для моделирования задачи фильтрации // Математическое моделирование. – 2002. – Т.14, №10. – С. 69-76.

- [14] Люпа А.А., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г. Моделирование неизотермической многофазной фильтрации с применением явных разностных схем // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 103. 20 с. doi:10.20948/prepr-2016-103  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-103>
- [15] Люпа А.А., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г., Лемешевский С.В. Моделирование процессов нефтедобычи с применением высокопроизводительных вычислительных систем // Математическое моделирование. – 2015. – Т. 27, № 9. – С. 73-80.
- [16] Chetverushkin, Boris N.; Churbanova, Natalia G.; Kuleshov, Andrey A.; Lyupa, Anastasiya A.; Trapeznikova, Marina A. Application of kinetic approach to porous medium flow simulation in environmental hydrology problems on high-performance computing systems // RJNAMM. – 2016. – Vol. 31 (4). – P. 187-196. – doi:10.1515/rnam-2016-0019
- [17] Peaceman, D. Fundamentals of numerical reservoir simulation. – Elsevier, 1977.
- [18] Каневская Р.Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. – М.: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [19] Люпа А.А., Савенков Е.Б. Модель двухфазной фильтрации с релаксацией потока и анализ эффективности применения явных схем // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 129. 16 с. doi:10.20948/prepr-2016-129  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-129>
- [20] Люпа А.А., Трапезникова М.А., Чечина А.А., Чурбанова Н.Г. Алгоритм явного типа для решения задач неизотермической фильтрации многофазных жидкостей // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 101. 16 с. doi:10.20948/prepr-2018-101  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-101>

## Оглавление

1. Введение.....	3
2. Классическая модель многофазного течения в пористой среде .....	4
3. Гиперболическая КГД модель фильтрации и алгоритм ее реализации .....	5
4. Модель и алгоритм, учитывающие релаксацию потока массы.....	9
5. Тестовые расчеты.....	11
6. Заключение .....	16
Библиографический список.....	17