ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 251 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Шильков А.В.

Ускорение итераций при решении уравнения переноса частиц с помощью экстраполяции источника по индексу итераций

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Шильков А.В. Ускорение итераций при решении уравнения переноса частиц с помощью экстраполяции источника по индексу итераций // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 251. 27 с. doi:10.20948/prepr-2018-251
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-251

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А.В. Шильков

Ускорение итераций при решении уравнения переноса частиц с помощью экстраполяции источника по индексу итераций

Москва — 2018

Шильков А.В.

Ускорение итераций при решении уравнения переноса частиц с помощью экстраполяции источника по индексу итераций

Исследуется скорость сходимости итерационного алгоритма решения уравнения переноса частиц (нейтронов или фотонов). Алгоритм ускорения итераций основан на нелинейной экстраполяции источника рассеянных частиц по индексу итераций. На серии тестовых задач установлено, что коэффициент ускорения растет с ростом вырождения задачи – увеличением доли процессов консервативного рассеяния частиц – и достигает значения десять. Сочетание метода с методом Зейделя дополнительно увеличивает коэффициент ускорения в полтора–два раза. Достоинствами метода является простота реализации, малое число арифметических операций и малый объем хранимой информации при выполнении итерации. По этим параметрам метод сопоставим с методом простых итераций.

Ключевые слова: уравнение переноса нейтронов или фотонов, итерационные методы, ускорение сходимости итераций

Alexander Victorovich Shilkov

Acceleration of iterations when solving the particle transport equation by extrapolating the source by iteration index

The rate of convergence of the iterative algorithm for solving the transport equation of particles (neutrons or photons) is investigated. The iteration acceleration algorithm is based on nonlinear extrapolation of the source of scattered particles by the iteration index. A series of test problems was solved. It was found that the acceleration coefficient increases with increasing the problem degeneration (i.e., with increasing the ratio of the conservative scattering cross section of particles to the total cross section) and reaches a value of ten. The combination of the method with the Seidel method additionally increases the acceleration coefficient by one and a half to two times. The advantages of the method are simplicity of implementation, a small number of arithmetic operations and a small amount of stored information during the iteration. The method is comparable to the method of simple iterations on these parameters.

Key words: transport equation of neutrons or photons, iteration methods, acceleration of iterations

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда, проект №14-11-00699.

Введение

В работе исследуется простой метод ускорения сходимости итераций с помощью экстраполяции источника рассеянных частиц по индексу итераций. Экстраполяция использует экстремальные свойства параболической трехточечной аппроксимации моментов функции распределения.

История развития итерационных алгоритмов численного решения интегро-дифференциального уравнения переноса частиц насчитывает более 70 лет. За это время было разработано много алгоритмов: от простых до довольно сложных. К сожалению, в настоящее время нет универсального алгоритма, имеющего оптимальную (близкую к оптимальной) эффективность при решении большинства важных для практики задач. В основе итерационных алгоритмов лежит деление источника частиц на фиксированный известный источник и переменный неизвестный источник рассеянных частиц. Источник рассеянных частиц уточняется в ходе итераций. В методе простых итераций переменный источник вычисляется по функции распределения на предыдущей итерации, в методе Зейделя – по функции на предыдущей итерации и функции на уже пройденных на текущей итерации значениях ординат. В методе Люстерника (см. [1], [2]) функция распределения предыдущей итерации подправляется с помощью первого собственного числа однородной задачи. Перечисленные простые алгоритмы теряют эффективность в вырожденной задаче, в которой источник рассеянных частиц становится намного больше фиксированного источника.

Для решения вырожденных задач были разработаны более сложные методы. В методах ребаланса: «fine-mesh rebalance», «coarse-mesh rebalance» (см., [3]–[8]) функция распределения на предыдущей итерации умножается на корректирующий множитель. Множитель вычисляется из алгебраических уравнений, выражающих баланс числа частиц в некоторой совокупности ячеек. В ряде случаев метод дает неплохое ускорение. Однако радиус сходимости метода ограничен. Более надежными являются методы, использующие независимое решение уравнений для моментов функции распределения: метод квазидиффузии [9], KP-метод [10]. DSA-метод [11]. Подробные обзоры методов даны в [12], [13]. Источник частиц представляется в виде суммы моментов функции распределения. Для расчета моментов на каждой итерации решается независимая вспомогательная задача эллиптического типа. Методы обеспечивают быструю сходимость итераций при решении одномерных задач, в которых вспомогательная задача может быть решена прямыми методами. Однако эффективность методов резко падает в многомерных задачах, т.к. для решения эллиптической задачи приходится выполнять свои итерации. Здесь применяются итерационные методы расщепления – одномерные прогонки по направлениям [12], [14], метод трехслойной экстраполяции многочленами Чебышева, метод минимальных невязок и другие [15], [16]. Дополнительным фактором, снижающим эффективность, является сложность реализации

методов, а именно трудности в построении дискретных схем, обеспечивающих высокую точность аппроксимации многомерных эллиптических задач, коэффициенты которых (сечения взаимодействия частиц со средой) могут резко меняться как в пространстве, так и по энергии частиц.

Исследуемый в работе метод экстраполяции источника по скорости сходимости итераций уступает методам, использующим решение вспомогательной эллиптической задачи для моментов функции распределения. Однако по таким показателям, как простота реализации, число выполняемых арифметических операций и объем хранимой информации на одну итерацию, метод сопоставим с методом простых итераций. Эффективность метода возрастает при увеличении вырождения задачи.

Стационарное уравнение переноса излучений. В численном моделировании ядерных реакторов и защиты от излучений, процессов лучистого теплообмена в газах и плазме, задач дистанционной диагностики природных, технических и биологических объектов требуется находить решение линейного стационарного интегро-дифференциального уравнения переноса излучений:

$$\Omega^i \frac{\partial \varphi}{\partial r^i} + [\sigma_a + \sigma_s]\varphi = \frac{Q}{4\pi} + \nu\sigma_s F, \qquad F = \frac{1}{2\pi}\int_{4\pi} w(\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}')\varphi(\mathbf{\Omega}')d\mathbf{\Omega}'. \qquad (1)$$

Здесь $\varphi(E,\mathbf{\Omega},\mathbf{r})$ суть функции распределения частиц – нейтронов или фотонов, зависящая от координат $\mathbf{r}$, единичного вектора – направления полета частиц $\mathbf{\Omega}$, ($|\mathbf{\Omega}|=1$) и энергии частиц E (или индекса интервала энергий, если используется многогрупповое приближение). В данной работе мы ограничимся рассмотрением задачи нахождения функции распределения в фиксированной точке энергий E (интервале энергий). Слагаемые, содержащие значения функции в других энергиях $E' \neq E$, если таковые есть, считаются известными. В (1) они включены в фиксированный источник частиц $Q(E,\mathbf{\Omega},\mathbf{r})$. Аргумент E в обозначениях величин далее будем опускать. Величины $\sigma_a(\mathbf{r})$ и $\sigma_s(\mathbf{r})$ суть соответственно сечение поглощения и сечение рассеяния частиц из пучка, $\nu\sigma_s F$ есть переменный источник, описывающий приход частиц в пучок из других пучков в результате процессов консервативного рассеяния или размножения частиц. В нем $\nu(\mathbf{r})$, $0 \le \nu \le \nu_f$, – числовой множитель, $F(\mathbf{\Omega},\mathbf{r})$ – интегральный оператор рассеяния частиц, $w(\eta,\mathbf{r})$ – ядро оператора (индикатриса рассеяния), $\eta = \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}'$ – косинус угла рассеяния.

Ядро оператора рассеяния принято задавать стандартным разложением:

$$w(\eta,\mathbf{r}) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{2}\omega_n(\mathbf{r})P_n(\eta), \qquad \omega_0 = 1, \quad \omega_n(\mathbf{r}) = \int_{-1}^{1} w(\eta,\mathbf{r})P_n(\eta)d\eta,$$

где N – порядок разложения, $P_n(\eta)$ – многочлены Лежандра, $\omega_n(\mathbf{r})$ – моменты индикатрисы. Тогда [17]:

$$F(\mathbf{\Omega},\mathbf{r}) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{4\pi}\omega_n \int_{4\pi} P_n(\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}')\varphi(\mathbf{\Omega}')d\mathbf{\Omega}' = \tag{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{4\pi}\omega_n(\mathbf{r})P_n^{ijk\cdots}(\mathbf{\Omega})J_n^{ijk\cdots}(\mathbf{r}) =$$

$$= \frac{J_0}{4\pi} + \frac{3}{4\pi}\omega_1\Omega^i J_1^i + \frac{5}{4\pi}\omega_2 P_2^{ij}(\mathbf{\Omega})J_2^{ij} + \ldots + \frac{2N+1}{4\pi}\omega_N P_N^{ijk\cdots}(\mathbf{\Omega})J_N^{ijk\cdots},$$

$$J_n^{ijk\cdots}(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \underbrace{\Omega^i\Omega^j\Omega^k\ldots}_{n}\varphi(\mathbf{\Omega},\mathbf{r})d\mathbf{\Omega}.$$

Здесь $J_n^{ijk\cdots}(\mathbf{r})$ – момент функции распределения порядка «n», $P_n^{ijk\cdots}(\mathbf{\Omega})$ – симметричный сферический тензор Лежандра ранга «n» (не путать со сферической функцией), который не меняется при перестановке любой пары индексов и представляет собой линейную комбинацию симметричных произведений координат единичного вектора и тензора Кронекера. Коэффициенты при одночленах равны коэффициентам при степенях многочлена Лежандра порядка «n» (см Таблица 1).

Таблица 1. Сферические тензоры Лежандра

Многочлен Лежандра	Сферический тензор Лежандра
$P_0(\mu)=1$	$P_0(\mathbf{\Omega})=1$
$P_1(\mu)=\mu$	$P_1^i(\mathbf{\Omega})=\Omega^i$
$P_2(\mu)=\frac{3}{2}\mu^2-\frac{1}{2}$	$P_2^{ij}(\mathbf{\Omega})=\frac{3}{2}\Omega^i\Omega^j-\frac{\delta^{ij}}{2}$
$P_3(\mu)=\frac{5}{2}\mu^3-\frac{3}{2}\mu$	$P_3^{ijk}(\mathbf{\Omega})=\frac{5}{2}\Omega^i\Omega^j\Omega^k-\frac{3}{2}\frac{\Omega^i\delta^{jk}+\Omega^j\delta^{ik}+\Omega^k\delta^{ij}}{3}$
$P_4(\mu)=\frac{35}{8}\mu^4-\frac{30}{8}\mu^2+\frac{3}{8}$	$P_4^{ijkl}(\mathbf{\Omega})=\frac{35}{8}\Omega^i\Omega^j\Omega^k\Omega^l-\frac{30}{8}\frac{\Omega^i\Omega^j\delta^{kl}+\Omega^i\Omega^k\delta^{jl}}{6}-$ $-\frac{30}{8}\frac{\Omega^i\Omega^l\delta^{jk}+\Omega^j\Omega^k\delta^{il}}{6}-\frac{30}{8}\frac{\Omega^j\Omega^l\delta^{ik}+\Omega^k\Omega^l\delta^{ij}}{6}+$ $+\frac{3}{8}\frac{\delta^{ij}\delta^{kl}+\delta^{ik}\delta^{jl}+\delta^{il}\delta^{jk}}{3}$

Свертка сферического тензора Лежандра с единичным вектором дает тензор на ранг ниже: $\Omega^k P_n^{ijkl\ldots} = P_{n-1}^{ijl\ldots}$. Свертка тензора по любой паре индексов равна нулю: $\delta^{ij} P_n^{ijk\ldots} = \delta^{jk} P_n^{ijk\ldots} = \ldots = 0$. В случае $w(\eta) = \delta(\eta - 1)$ из (1), (2) следует разложение функции распределения по системе сферических тензоров Лежандра:

$$\varphi(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} P_n^{ijk\ldots}(\mathbf{\Omega}) J_n^{ijk\ldots}(\mathbf{r}) = \frac{J_0}{4\pi} + \frac{3}{4\pi}\Omega^i J_1^i + \frac{5}{4\pi} P_2^{ij}(\mathbf{\Omega}) J_2^{ij} + \ldots . \qquad (3)$$

На границе тела $\Gamma(\mathbf{r})$ на распределение «влетающих» частиц накладывается условие (см. рис. 1):

$$\varphi(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_\Gamma)\big|_{\mathbf{\Omega n}<0} = \int\limits_{\mathbf{\Omega}'\mathbf{n}>0} G(\mathbf{\Omega}' \to \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_\Gamma)\varphi(\mathbf{\Omega}', \mathbf{r}_\Gamma) d\mathbf{\Omega}' + \varphi_{ext}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_\Gamma)\big|_{\mathbf{\Omega n}<0}. \qquad (4)$$

Здесь $\mathbf{n}$ есть вектор внешней нормали к границе в точке $\mathbf{r}_\Gamma$. Частицы, движущиеся от границы вглубь тела, характеризуются условием $\mathbf{\Omega n} < 0$, частицы, вылетающие из тела, – условием $\mathbf{\Omega n} > 0$. Величина $G(\mathbf{\Omega}' \to \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_\Gamma)$ есть дифференциальное сечение внутреннего отражения – вероятность перехода частиц, падающих на границу «изнутри» в направлении $\mathbf{\Omega}'$ в пучок отраженных частиц в направлении $\mathbf{\Omega}$. φ_{ext} есть распределение внешних пучков частиц.

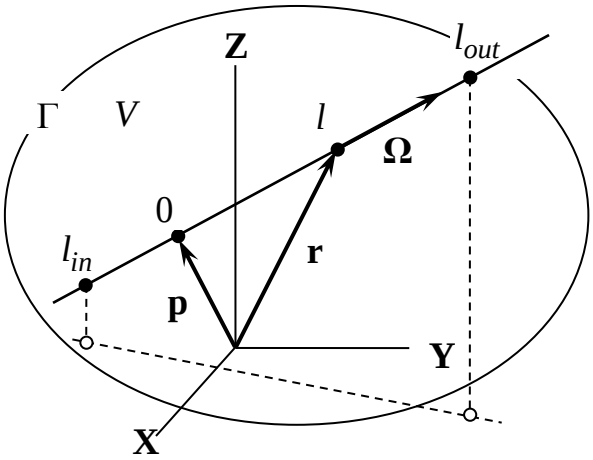

Рис. 1. Траектория пучка частиц (характеристика дифференциального оператора) задается вектором прицельных параметров $\mathbf{p}$ и направлением полета $\mathbf{\Omega}$, ($\mathbf{p\Omega} = 0$). Точки входа и выхода траектории из тела имеют характеристические координаты l_{in} и l_{out}.

Задача формулируется так: найти функцию распределения частиц $\varphi(\mathbf{\Omega},\mathbf{r})$ в области фазового пространства $\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}$, $\mathbf{r}\in V$, удовлетворяющую интегро-дифференциальному уравнению (1) и граничным условиям (4). Если коэффициенты и источники уравнений (1), (4) суть неотрицательные функции, то искомая функция должна быть неотрицательной.

Задача называется близкой к вырожденной, если процессы рассеяния частиц преобладают над процессами поглощения и вылета частиц из тела. Степень вырождения задачи оценивается по близости к единице отношения:

$$\nu\sigma_s/[\sigma_s+\sigma_a+\sigma_L], \tag{5}$$

где $\sigma_L\sim 1/L$, L есть минимальный диаметр тела или его вырожденной зоны.

Система четно-нечетных уравнений переноса излучений. Кроме обычной формулировки задачи (1), (4) в работе исследуется эквивалентная формулировка для системы четно-нечетных уравнений переноса [1], [8], [18]. Введем четную φ^+ и нечетную φ^- части функции распределения относительно направления полета частиц $\mathbf{\Omega}$:

$$\varphi^{\pm}(\mathbf{\Omega})=\frac{\varphi(\mathbf{\Omega})\pm\varphi(-\mathbf{\Omega})}{2}=\pm\varphi^{\pm}(-\mathbf{\Omega}),\qquad \varphi(\mathbf{\Omega})=\varphi^{+}(\mathbf{\Omega})+\varphi^{-}(\mathbf{\Omega}). \tag{6}$$

Уравнения для четной и нечетной частей функций распределения следуют из исходного уравнения (1) в результате сложения и вычитания с этим же уравнением, записанным для противоположного пучка частиц:

$$\begin{cases}\Omega^i\dfrac{\partial\varphi^-}{\partial r^i}+[\sigma_a+\sigma_s]\varphi^+=\dfrac{Q^+}{4\pi}+\nu\sigma_s F^+, & Q^{\pm}(\mathbf{\Omega})=\dfrac{Q(\mathbf{\Omega})\pm Q(-\mathbf{\Omega})}{2},\\ \Omega^i\dfrac{\partial\varphi^+}{\partial r^i}+[\sigma_a+\sigma_s]\varphi^-=\dfrac{Q^-}{4\pi}+\nu\sigma_s F^-, & F^{\pm}(\mathbf{\Omega})=\dfrac{F(\mathbf{\Omega})\pm F(-\mathbf{\Omega})}{2},\end{cases} \tag{7}$$

$$F^+(\mathbf{\Omega},\mathbf{r})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{4\pi}w^+(\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}')\varphi^+(\mathbf{\Omega}')d\mathbf{\Omega}'\approx\sum_{n=0}^{[N/2]}\frac{4n+1}{4\pi}\omega_{2n}(\mathbf{r})P_{2n}^{ijk\ldots}(\mathbf{\Omega})J_{2n}^{ijk\ldots}(\mathbf{r}), \tag{8}$$

$$F^-(\mathbf{\Omega},\mathbf{r})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{4\pi}w^-(\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}')\varphi^-(\mathbf{\Omega}')d\mathbf{\Omega}'\approx\sum_{n=1}^{[N/2]}\frac{4n-1}{4\pi}\omega_{2n-1}(\mathbf{r})P_{2n-1}^{ijk\ldots}(\mathbf{\Omega})J_{2n-1}^{ijk\ldots}(\mathbf{r}).$$

Граничные условия для системы (7) можно получить из условий (4) [19], если воспользоваться (6):

$$\frac{\mathbf{\Omega}\mathbf{n}}{|\mathbf{\Omega}\mathbf{n}|}\varphi^-(\mathbf{\Omega},\mathbf{r}_\Gamma)-\frac{1-\chi}{1+\chi}\varphi^+(\mathbf{\Omega},\mathbf{r}_\Gamma)=-\frac{\varphi_{ext}(\mathbf{\Omega},\mathbf{r}_\Gamma)}{1+\chi}. \tag{9}$$

Здесь $\chi(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_\Gamma)$ есть дробно-линейный функционал, равный отношению интенсивности пучка, отраженного от границы внутрь тела в направлении $\mathbf{\Omega}$ к интенсивности падающего пучка противоположного направления $-\mathbf{\Omega}$:

$$\chi(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_\Gamma)\big|_{\mathbf{\Omega n}<0} = \int\limits_{\mathbf{\Omega}'\mathbf{n}>0} G(\mathbf{\Omega}' \to \mathbf{\Omega})\varphi(\mathbf{\Omega}')d\mathbf{\Omega}' \Big/ \varphi(-\mathbf{\Omega})\big|_{\mathbf{\Omega n}<0} =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{\Omega}'\mathbf{n}>0} G(\mathbf{\Omega}' \to \mathbf{\Omega})[\varphi^+(\mathbf{\Omega}') + \varphi^-(\mathbf{\Omega}')]d\mathbf{\Omega}' \Big/ [\varphi^+(\mathbf{\Omega}) - \varphi^-(\mathbf{\Omega})].$$

Значение функционала χ уточняется при выполнении итераций. Если тело граничит с вакуумом, то $\chi = 0$.

Важно отметить, что при переходе к характеристическим переменным многомерная краевая задача (7)–(9) сворачивается в одномерную задачу на хорде – отрезке характеристики, пересекающем тело (см. Рис. 1), с краевыми условиями, заданными на концах хорды:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi^-}{\partial l} + [\sigma_a + \sigma_s]\varphi^+ = \dfrac{Q^+}{4\pi} + \nu\sigma_s F^+, & \varphi^-_{in} + \dfrac{1-\chi_{in}}{1+\chi_{in}}\varphi^+_{in} = \dfrac{\varphi^{ext}_{in}}{1+\chi_{in}}, \\ \dfrac{\partial\varphi^+}{\partial l} + [\sigma_a + \sigma_s]\varphi^- = \dfrac{Q^-}{4\pi} + \nu\sigma_s F^-, & \varphi^-_{out} - \dfrac{1-\chi_{out}}{1+\chi_{out}}\varphi^+_{out} = -\dfrac{\varphi^{ext}_{out}}{1+\chi_{out}}. \end{cases}$$

Итерационные алгоритмы решения неоднородных интегро-дифференциальных уравнений (1)–(4) или уравнений (7)–(9) состоят в выполнении итераций, на которых уточняются значения переменного источника рассеянных частиц F и источника отраженных от границы частиц. Вместо исходной задачи выполняется решение серии приближенных дифференциальных задач

<u>для уравнения переноса</u>:

$$\Omega^i_\alpha \frac{\partial\varphi_\alpha(t+1)}{\partial r^i} + [\sigma_a + \sigma_s]\varphi_\alpha(t+1) = \frac{Q_\alpha}{4\pi} + \nu\sigma_s F_\alpha(t), \tag{10}$$

$t = 0, 1, 2, ..., T(\varepsilon); \quad \alpha = 1, 2, ...A;$

<u>для четно-нечетных уравнений переноса</u>:

$$\begin{cases} \Omega^i_\alpha \dfrac{\partial\varphi^-_\alpha(t+1)}{\partial r^i} + [\sigma_a + \sigma_s]\varphi^+_\alpha(t+1) = \dfrac{Q^+_\alpha}{4\pi} + \nu\sigma_s F^+_\alpha(t), \\ \Omega^i_\alpha \dfrac{\partial\varphi^+_\alpha(t+1)}{\partial r^i} + [\sigma_a + \sigma_s]\varphi^-_\alpha(t+1) = \dfrac{Q^-_\alpha}{4\pi} + \nu\sigma_s F^-_\alpha(t), \end{cases} \tag{11}$$

$t = 0, 1, 2, ..., T(\varepsilon); \quad \alpha = 1, 2, ...A.$

В приближенных задачах (10), (11) неизвестной функции распределения приписан индекс итерации $t+1$, а источнику рассеянных частиц – индекс предыдущей итерации t, что формально делает его известной функцией на данной итерации. При вычислении источника $F_\alpha(t)$ используется та или иная информация о функции распределения на предыдущей(их) итерации(ях) t. Если итерации сходятся, то они выполняются до итерации с номером $T(\varepsilon)$, на которой достигается требуемая точность решения ε. В задачах (10), (11) выполнена дискретизация уравнений методом дискретных ординат (S_n-методом) [8], [12], [14], [20]–[23]. Функция распределения $\varphi_\alpha(t+1)$ вычисляется в узлах сетки направлений $\mathbf{\Omega}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, ... A$, называемых ординатами. Положение и число ординат, вообще говоря, может зависеть от положения точки $\mathbf{r}$. Уравнения (10), (11) дополняются граничными условиями (4), (9). В левую часть условий подставляется функция $\varphi_\alpha(t+1)$, в правую – функция $\varphi_\alpha(t)$.

Старт итераций (10) можно начинать с нулевого источника $F_\alpha(0) = 0$. Старт итераций (11) – с функции распределения $\varphi_\alpha^{\pm}(0)$, которая является решением системы уравнений:

$$\begin{cases} \Omega_\alpha^i \dfrac{\partial \varphi_\alpha^-(0)}{\partial r^i} + \left[\sigma_a + \sigma_s[1-\nu]\right]\varphi_\alpha^+(0) = \dfrac{Q_\alpha^+}{4\pi}, \\ \Omega_\alpha^i \dfrac{\partial \varphi_\alpha^+(0)}{\partial r^i} + \left[\sigma_a + \sigma_s[1-\nu\omega_1]\right]\varphi_\alpha^-(0) = \dfrac{Q_\alpha^-}{4\pi}. \end{cases}$$

Метод простых итераций. В методе простых итераций источник рассеянных частиц $F_\alpha(t)$ и моменты функции распределения $J_n^{ijk\cdots}(t)$ вычисляются непосредственно по значениям функции распределения на предыдущей итерации t. Вычисление моментов производится с помощью некоторой квадратурной формулы:

$$F_\alpha(t) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{4\pi} \omega_n P_n^{ijk\cdots}(\mathbf{\Omega}_\alpha) J_n^{ijk\cdots}(t), \tag{12}$$

$$F_\alpha^+(t) \approx \sum_{n=0}^{[N/2]} \frac{4n+1}{4\pi} \omega_{2n} P_{2n}^{ijk\cdots}(\mathbf{\Omega}_\alpha) J_{2n}^{ijk\cdots}(t),$$

$$F_\alpha^-(t) \approx \sum_{n=1}^{[N/2]} \frac{4n-1}{4\pi} \omega_{2n-1} P_{2n-1}^{ijk\cdots}(\mathbf{\Omega}_\alpha) J_{2n-1}^{ijk\cdots}(t),$$

$$J_n^{ijk\cdots}(t) = \int\limits_{4\pi} \underbrace{\Omega^i \Omega^j \Omega^k \ldots}_{n} \varphi(t) d\mathbf{\Omega} \approx \sum_\alpha \lambda_\alpha \underbrace{\Omega_\alpha^i \Omega_\alpha^j \Omega_\alpha^k \ldots}_{n} \varphi_\alpha(t), \qquad \sum_\alpha \lambda_\alpha = 4\pi .$$

λ_α – весовые коэффициенты квадратурной формулы.

Доказательство сходимости метода простых итераций к решению исходной задачи можно найти, например, в [1]. Достоинством метода является простота реализации и то, что для расчета функции распределения на итерации $t+1$ требуется хранить в памяти ЭВМ не всю функцию распределения на предыдущей итерации, а только значения ее моментов $J_m^{ijk\cdots}(t)$, $0 \le m \le M$. Недостатком метода является медленная сходимость итераций при решении вырожденных задач. Чем ближе к единице отношение (5), тем медленнее сходятся простые итерации.

Метод Зейделя. Так как расчет функции распределения на итерации $t+1$ в узлах сетки направлений $\mathbf{\Omega}_\alpha$ производится в некоторой последовательности, то имеется возможность исправлять значения моментов $J_m^{ijk\cdots}(t) \Rightarrow J_{m;\alpha}^{ijk\cdots}(t)$ по мере роста индекса α с помощью уже вычисленных на текущей итерации значений функции $\varphi_\beta(t+1)$, $0 \le \beta \le \alpha - 1$:

$$J_{n;\alpha}^{ijk\cdots}(t) = \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \lambda_\beta \underbrace{\Omega_\beta^i \Omega_\beta^j \Omega_\beta^k \ldots}_{n} \varphi_\beta(t+1) + \sum_{\beta=\alpha}^{A} \lambda_\beta \underbrace{\Omega_\beta^i \Omega_\beta^j \Omega_\beta^k \ldots}_{n} \varphi_\beta(t) = \tag{13}$$

$$= J_{n;\alpha-1}^{ijk\cdots}(t) + \lambda_{\alpha-1} \underbrace{\Omega_{\alpha-1}^i \Omega_{\alpha-1}^j \Omega_{\alpha-1}^k \ldots}_{n} [\varphi_{\alpha-1}(t+1) - \varphi_{\alpha-1}(t)],$$

$$J_{n;1}^{ijk\cdots}(t) = J_n^{ijk\cdots}(t).$$

Исправленные значения моментов $J_{n;\alpha}^{ijk\cdots}(t)$ используются для исправления источника, с которым выполняется решение уравнений (10), (11) относительно функции $\varphi_\alpha(t+1)$:

$$F_\alpha(t) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{4\pi} \omega_n P_n^{ijk\cdots}(\mathbf{\Omega}_\alpha) J_{n;\alpha}^{ijk\cdots}(t). \tag{14}$$

Достоинством метода является простота реализации. В отличие от метода простых итераций, метод Зейделя требует хранить в памяти ЭВМ функцию распределения с предыдущей итерации. Данные по скорости сходимости итераций Зейделя приведены в результатах работы, Таблица 2 и в приложении.

Метод экстраполяции источника

Ускорение простых итераций. Пусть базовым методом решения задачи (10) или (11) является метод простых итераций. Для ускорения сходимости итераций построим параболическую аппроксимацию моментов $J_n^{ijk\cdots}(t,\mathbf{r})$ по индексу итераций t. Аппроксимация $I(t+s-1)$ строится независимо в каждой точке тела $\mathbf{r}\in V$ и точно воспроизводит значения моментов на трех последних итерациях $t, t-1, t-2$. Для удобства аргумент $\mathbf{r}$ и индексы координат $i, j, k, \ldots$ временно опустим:

$$J(t+s-1)\approx I(t+s-1), \tag{15}$$

$$I(t+s-1)=J(t-1)+\frac{s}{2}\big[[s+1]J(t)-2s\,J(t-1)+[s-1]J(t-2)\big],$$

$$J(t+s-1)=I(t+s-1) \qquad \text{при } s=0,\pm 1.$$

Аппроксимация $I(t+s-1)$ интерполирует момент $J(t+s-1)$ на интервале $|s|\le 1$. Рассмотрим возможность использовать аппроксимацию для экстраполяции вперед на интервал $s>1$ с целью получить прогнозное значение момента. Вследствие сходимости простых итераций последовательность $J(t+s-1)$, $s=1,2,\ldots$ стремится к конечному пределу $J(\infty)$. Вместе с тем, аппроксимация (15) при $s\to\infty$ стремится к бесконечности. Поэтому картину необходимо дополнить деталями. Экстремум параболической аппроксимации (15) достигается на итерации с номером $t+s_e-1$ и имеет параметры:

$$s_e=-\frac{1}{2}\frac{J(t)-J(t-2)}{J(t)-2J(t-1)+J(t-2)}, \tag{16}$$

$$I_e(t+s_e-1)=J(t-1)-\frac{1}{8}\frac{[J(t)-J(t-2)]^2}{J(t)-2(t-1)+J(t-2)}.$$

Назовем ситуацию «правильной», если экстремум аппроксимации находится на интервале экстраполяции $1<s_e<N$, где число N имеет порядок числа простых итераций, которые необходимо выполнить для значимого увеличения точности решения задачи (10) или (11). С помощью (16) условие можно записать в виде системы неравенств:

$$\begin{cases}[J(t)-2J(t-1)+J(t-2)]\big[[3J(t)-4J(t-1)+J(t-2)\big]<0,\\ [J(t)-2J(t-1)+J(t-2)]\big[[2N+1]J(t)-4NJ(t-1)+[2N-1]J(t-2)\big]>0.\end{cases}$$

Если ищется неотрицательная функция распределения, то определение правильной ситуации дополняется требованием неотрицательности момента нулевого порядка $J_0\ge 0$ и экстремума $I_{0,e}\ge 0$. В правильной ситуации экстраполяция вперед допустима на интервал, ограниченный справа точкой

экстремума: $1 < s \le s_e$. На этом интервале $I(t+s-1)$ является монотонной функцией и принимает значения между $J(t)$ и $I_e(t+s_e-1)$.

Пусть в процессе итераций (10) или (11) правильные ситуации реализуются неоднократно. Тогда можно предположить, что в большинстве таких реализаций экстраполированные значения $I(t+s-1)$, $1 < s \le s_e$ будут ближе к искомому предельному значению момента $J(\infty)$, чем текущее значение $J(t)$. На основе данной гипотезы можно построить алгоритм ускорения итераций и проверить его при решении конкретных задач.

В работе исследован следующий алгоритм ускорения итераций.

А. Пусть на начало итерации $t+1$ в точке тела $\mathbf{r} \in V$ для момента $J_n^{ijk\cdots}(t,\mathbf{r})$ возникла правильная ситуация и $1 < s_e < N$. Тогда производится ускорение итераций.

А.1. Если экстремум расположен близко: $1 < s_e < K$, где K, $K \le N$ – некоторое число, то прогнозное значение момента полагается равным экстремальному значению (16):

$$J_E(t) = I_e(t+s_e-1).$$

А.2. Если экстремум расположен далеко: $K \le s_e < N$, то прогнозное значение момента полагается равным экстраполированному в точку $t+K-1$ значению:

$$J_E(t) = I(t+K-1) = J(t-1) + \frac{K}{2}\left[[K+1]J(t) - 2KJ(t-1) + [K-1]J(t-2)\right].$$

Б. В остальных случаях (в точке тела $\mathbf{r} \in V$ нет правильной ситуации) ускорение итераций не производится и $J_E(t) = J(t)$.

Данный алгоритм выполняет нелинейную экстраполяцию моментов на интервале $1 < s < K$ на основе экстремальных свойств аппроксимации. При $K = 1$ ускорения простых итераций не происходит. При $K = N$ алгоритм становится однопараметрическим.

Возможна более строгая модификация алгоритма, когда первое предложение пункта А дополняется словами «…, и правильная ситуация имела место на начало предыдущей итерации t».

Прогнозные значения моментов $J_{n,E}^{ijk\cdots}(t,\mathbf{r})$ подставляются в формулы (12) для вычисления источника рассеянных частиц $F_\alpha(t,\mathbf{r})$. Если искомая функция распределения неотрицательна, то дополнительно выполняется проверка условия $F_\alpha(t,\mathbf{r}) \ge 0$.

Ускорение итераций Зейделя. Описанный выше алгоритм ускорения переносится на итерации с применением метода Зейделя. Изменения затрагивают только пункт Б, где прогнозные значения моментов $J_{n,\alpha,E}^{ijk\cdots}(t,\mathbf{r})$ вычисляются по формулам (13).

Результаты расчетов

Метод экстраполяции источника был опробован при решении ряда гомогенных H1–H8 и гетерогенных G1–G6 задач для ускорения итераций уравнения переноса излучений (1) и четно-нечетных уравнений переноса (7). Задачи имели разную степень вырождения. Также были проведены расчеты задач методом простых итераций и методом итераций Зейделя в целях оценки ускорения.

Оценка скорости сходимости методов проводилась с помощью коэффициента ускорения k_A, который равен отношению числа простых итераций $T_0(\varepsilon)$ к числу итераций $T_A(\varepsilon)$ метода «А», выполняемых до достижения уровня точности ε. Коэффициент ускорения метода простых итераций равен единице $k_0 = 1$. Точность на итерации t вычислялась в норме C_0 как максимум относительного отклонения приближенного момента нулевого порядка $J_0(\mathbf{r},t)$ от точного значения момента $J_0(\mathbf{r},\infty)$ в теле V:

$$k_A(\varepsilon) = \frac{T_0(\varepsilon)}{T_A(\varepsilon)}, \qquad \varepsilon(t) = \max_{\mathbf{r}\in V} \frac{|J_0(\mathbf{r},t) - J_0(\mathbf{r},\infty)|}{J_0(\mathbf{r},\infty)}. \tag{17}$$

Коэффициенты ускорения, полученные при решении серии гомогенных и гетерогенных тестовых задач, приведены в Таблица 2. Итерации останавливались при достижении уровня точности $\varepsilon = 10^{-2}\,\%$. В колонке T_0 дано число простых итераций. Таблица содержит два значения коэффициента ускорения: среднее и максимальное (указано в скобках) по совокупности опробованных вариантов. Варианты отличались выбором параметров N и K. В Таблица 3 указана степень вырождения тестовых задач (5). Описание задач дано в конце работы. В приложении приведены графики изменения точности $\varepsilon(t)$ в зависимости от номера итерации t при решении некоторых задач.

Таблица 2. Коэффициенты ускорения итераций

	Уравнение переноса				Четно-нечетные уравнения			
Задача	T_0	Метод Зейд.	Экстр. источника	Экстр. + Зейд.	T_0	Метод Зейд.	Экстр. источника	Экстр. + Зейд.
1	2	3	4	5	6	7	8	9
H1	88	1.8	2.4 (2.5)	3.0 (3.3)	38	1.7 (2.1)	1.8 (1.9)	2.6 (3.2)
H2	88	1.8	2.4 (2.5)	3.0 (3.0)	35	1.5 (1.9)	1.9 (1.9)	2.0 (2.3)
H3	863	1.8	4.7 (6.3)	6.4 (7.5)	387	1.5 (2.1)	2.7 (2.9)	5.6 (6.3)
H4	917	1.8	5.2 (5.5)	8.1 (8.9)	376	1.5 (2.1)	2.6 (2.7)	4.1 (4.4)
H5	5073	1.8	5.9 (7.4)	11.9 (12.2)	4010	2.0 (2.3)	4.2 (5.0)	10.4(12.9)
H6	9175	1.8	8.0 (8.5)	14.6 (15.1)	4032	1.6 (2.1)	3.3 (3.4)	6.0 (6.5)
H7	74	1.8	2.1 (2.2)	2.7 (3.2)	43	1.7 (2.2)	2.0 (2.4)	2.2 (2.7)
H8	912	1.8	4.3 (4.9)	6.5 (7.5)	411	1.7 (2.0)	2.9 (3.2)	4.9 (5.2)

Задача	Уравнение переноса				Четно-нечетные уравнения			
	T_0	Метод Зейд.	Экстр. источника	Экстр. + Зейд.	T_0	Метод Зейд.	Экстр. источника	Экстр. + Зейд.
G1	133	1.8	1.7 (2.1)	2.5 (2.6)	100	1.7 (2.2)	1.7 (2.1)	2.5 (2.8)
G2	615	1.8	3.4 (3.8)	5.6 (6.5)	507	2.0 (2.3)	2.8 (3.0)	5.6 (6.5)
G3	1198	1.8	3.3 (3.6)	6.9 (7.7)	952	2.0 (2.1)	3.5 (4.1)	6.8 (7.9)
G4	72	1.8	2.2 (2.7)	2.3 (2.8)	58	2.1 (2.5)	2.0 (2.3)	3.5 (4.5)
G5	175	1.8	2.5 (2.9)	4.0 (4.2)	142	2.0 (2.2)	3.0 (3.5)	4.2 (4.3)
G6	187	1.8	2.3 (2.5)	3.5 (3.8)	130	2.0 (2.1)	2.1 (2.3)	3.7 (4.2)

1: H1–H8 — гомогенные задачи, G1–G6 — гетерогенные задачи;
2, 6 — число простых итераций при решении уравнения переноса и соответственно четно-нечетных уравнений переноса;
3, 7 — коэффициент ускорения метода Зейделя;
4, 8 — коэффициент ускорения простых итераций методом экстраполяции;
5, 9 — коэффициент ускорения итераций Зейделя методом экстраполяции.

Таблица 3. Параметр вырождения задач

Задача	H1, H2, H7, G1, G4	H3, H4, H8, G2, G5	H5, H6, G3, G6
$\sigma_s/[\sigma_s+\sigma_a]$	0.9	0.99	0.999

Для гетерогенных задач дано максимальное значение параметра.

Обсуждение результатов

Метод простых итераций. Число простых итераций для четно-нечетных уравнений переноса (11) в среднем в 2.1 раза меньше числа простых итераций для обычного уравнения переноса (10) при решении гомогенных задач H1–H8 и в среднем в 1.3 раза меньше при решении гетерогенных задач G1–G6.

Если прикладная задача допускает возможность применения дискретной схемы и алгоритма решения четно-нечетных уравнений, то выбор целесообразно делать в пользу последних. Однако следует учитывать, что схемы и алгоритмы решения четно-нечетных уравнений несколько более сложны (см., например, [8], [24], [25]).

Если в качестве абсолютной точки отсчета брать число простых итераций для обычного уравнения переноса (10), то коэффициенты ускорения итераций для четно-нечетных уравнений (столбцы 7–9 в Таблица 2) следует умножать на множитель 2.1 или 1.3.

Метод итераций Зейделя. При решении уравнения переноса частиц (10) скорость сходимости итераций Зейделя в 1.8 раз выше скорости сходимости простых итераций. Примечательно, что ускорение оказалось одинаковым для всех тестовых задач. Отличия имели место только в следующем знаке после запятой. Более того, ускорение не зависит и от порядка обхода ординат $\mathbf{\Omega}_\alpha$.

Было опробовано пять вариантов обхода, в которых ординаты упорядочивались в порядке убывания функции:

$$f(\mathbf{\Omega}_\alpha) = [\lambda_\alpha]^p \left| \frac{J_2^{ij}}{J_0} P_2^{ij}(\mathbf{\Omega}_\alpha) \right|^q ,$$

$$f(\mu_\alpha) = [\lambda_\alpha]^p \left| \frac{3J_2 - J_0}{2J_0} P_2(\mu_\alpha) \right|^q \text{ для одномерных задач.}$$

Здесь λ_α – весовые коэффициенты квадратурной формулы (12), $P_2^{ij}(\mathbf{\Omega}_\alpha)$ и $P_2(\mu_\alpha)$ приведены в Таблица 1, p и q – варьируемые показатели степени. Вариант З-W: $p=1$, $q=0$ – соответствует порядку убывания коэффициентов λ_α, вариант З-Wинв: $p=-1$, $q=0$ – порядку возрастания коэффициентов. Вариант З-1: $p=1$, $q=1$; вариант З-2: $p=1/2$, $q=1$; вариант З-3 $p=0$, $q=1$.

Иная ситуация наблюдалась при выполнении итераций Зейделя в четно-нечетных уравнениях переноса (11). Оказалось, что порядок обхода ординат влияет на скорость сходимости, и в некоторых задачах влияет существенно. Наилучшее ускорение в 2.2 раза или близкое к нему показали варианты З-1 и З-2. Они занимали 1–2 место во всех тестовых задачах. Поэтому оба варианта можно рекомендовать к практическому использованию.

Метод экстраполяции источника. Гипотеза о возможности экстраполировать источник рассеянных частиц для ускорения итераций оказалась верной. Примечательно, что коэффициент ускорения растет с ростом вырождения задачи. В относительно легких задачах ($\nu\sigma_s/[\sigma_s+\sigma_a]=0.9$), требующих мало итераций, коэффициент ускорения сопоставим или выше, чем у метода Зейделя. В сильно вырожденных задачах Н5, Н6 ($\nu\sigma_s/[\sigma_s+\sigma_a]=0.999$) коэффициент достигает значения 8 против 1.8 у метода Зейделя. При решении четно-нечетных уравнений – значений 3.4, 5.0 против 2.1, 2.3. Сочетание метода экстраполяции источника и метода Зейделя дает еще большее ускорение – 12, 15 при решении уравнения переноса и 6.5, 12.9 при решении четно-нечетных уравнений. Напомним, что для четно-нечетных уравнений в Таблица 2 приведены относительные коэффициенты ускорения. Для получения коэффициентов в абсолютных величинах их следует умножать на множитель 2.1 или 1.3 (для гетерогенных задач). На основе данных Таблица 2 получена эмпирическая зависимость коэффициента ускорения от числа простых итераций T_0:

$$k_A(T_0) \approx 1 + D_A \ln T_0 + E_A \ln^2 T_0. \qquad (18)$$

Параметры D_A и E_A для метода экстраполяции источника и для сочетания метода с методом Зейделя приведены в Таблице 4. В скобках даны параметры для оценки максимальных коэффициентов ускорения.

Таблица 4. Параметры эмпирической формулы (18)

Параметр	Уравнение переноса		Четно-нечетные уравнения	
	Экстр. источника	Экстр + Зейд.	Экстр. источника	Экстр + Зейд.
D	–0.21 (–0.20)	–0.72 (–0.60)	0.08 (0.12)	–0.26 (–0.36)
E	0.10 (0.11)	0.24 (0.23)	0.04 (0.04)	0.16 (0.20)

В расчетах пробовались разные варианты метода, отличавшиеся выбором параметров N и K. Последний задавался в пределах $K \sim [0.6 \div 1.0] \cdot N$. Максимальное ускорение обычно наблюдалось при $K \approx 0.75N$. Параметр N задавался в широких пределах, таких, что отношение наибольшего и наименьшего значений составляло $N_{\max}/N_{\min} \sim 3 \div 4$. Ускорение, которое демонстрировали варианты, отличалось от максимального ускорения незначительно. Это свидетельствует о большом радиусе сходимости метода. Максимальное ускорение простых итераций обычно наблюдалось при $N \approx 0.4T_0$, итераций Зейделя при $N \approx 0.2T_0$, если решалось уравнение переноса. Для четно-нечетных уравнений максимальное ускорение простых итераций наблюдалось при $N \approx 0.67T_0$, итераций Зейделя при $N \approx 0.26T_0$.

Ускорение итераций на основе экстраполяции источника не зависит от конкретной дискретной схемы, которая применяется для пространственной аппроксимации уравнений переноса частиц. Результаты данной работы получены с помощью аналитической схемы интегрирования уравнения вдоль характеристик. Аналогичная схема использовалась для решения четно-нечетных уравнений [24]. Аналитические схемы не зависят от шага интегрирования и воспроизводят точное решение уравнения как в толстых (в пробегах частиц), так и в тонких ячейках. Поэтому результаты сохраняют значимость при использовании любой другой разумной схемы аппроксимации уравнения.

Описание тестовых задач

Тестирование метода проводилось на одномерных задачах с симметрией плоского слоя. Слой имеет толщину $L = 1\,см$ и занимает область пространства $|x| \le 0.5\,см$. На внешних границах ставились условия излучения в вакуум. Внешнее излучение на слой не падает. Множитель ν полагался равным единице. Рассеяние считалось изотропным. Все задачи являются вырожденными и требуют выполнения заметного числа итераций. Для удобства оценки влияния зон, заполненных разными материалами, помимо размерной координаты зон приводится их безразмерная координата в пробегах частиц:

$$\tau(x) = \int_0^x [\sigma_a + \sigma_s] dx .$$

Гомогенные задачи H1–H8. Слой состоит из однородного материала, занимающего область пространства $|x| \le 0.5\,см$. Сечения взаимодействия частиц с материалом (в $см^{-1}$) даны в Таблица 5.

Таблица 5. Параметры задач H1–H8

Задача	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8
σ_a	6	30	0.6	3	0.06	0.3	1	1
σ_s	54	270	59.4	297	59.94	299.7	9	99
$\sigma = \sigma_a + \sigma_s$	60	300	60	300	60	300	10	100
σ_s / σ	0.9	0.9	0.99	0.99	0.999	0.999	0.9	0.99
Q/σ_a	1	1	1	1	1	1	$1 < Q/\sigma_a < 10$	
Размещение материала	$\lvert\tau\rvert < 30$	$\lvert\tau\rvert < 150$	$\lvert\tau\rvert < 30$	$\lvert\tau\rvert < 150$	$\lvert\tau\rvert < 30$	$\lvert\tau\rvert < 150$	$\lvert\tau\rvert < 5$	$\lvert\tau\rvert < 50$

В задачах H1–H6 источник частиц равен единице (в условных единицах). В задачах H7 и H8 источник меняется линейно от значения 1 на одной границе до значения 10 на другой границе слоя.
Параметры гетерогенных задач G1–G6 приведены в Таблица 6 – Таблица 8.

Таблица 6. Параметры задач G1, G2 и G3

Задача	G1, G2, G3	G1	G2	G3	G1, G2, G3
Материал	1	2			3
σ_a	50	5	0.5	0.05	25
σ_s	0	45	49.5	49.95	25
$\sigma = \sigma_a + \sigma_s$	50	50	50	50	50
σ_s / σ	0	0.9	0.99	0.999	0.5
Q/σ_a	0	0	0	0	1
Размещение материала	$\lvert x\rvert < 0.02$ см, $\lvert\tau\rvert < 1$	$0.02 < \lvert x\rvert < 0.4$ см, $1 < \lvert\tau\rvert < 20$			$0.4 < \lvert x\rvert < 0.5$ см, $20 < \lvert\tau\rvert < 25$

Таблица 7. Параметры задач G4 и G5

Задача	G4, G5	G4	G5	G4, G5
Материал	1	2		3
σ_a	10	2	0.2	20
σ_s	10	18	19.8	0
$\sigma = \sigma_a + \sigma_s$	20	20	20	50
σ_s / σ	0.5	0.9	0.99	0
Q/σ_a	1	0	0	0

Задача	G4, G5	G4	G5	G4, G5
Размещение материала	$\lvert x\rvert < 0.15$ см, $\lvert\tau\rvert < 3$	$0.15 < \lvert x\rvert < 0.48$ см, $3 < \lvert\tau\rvert < 9.6$		$0.48 < \lvert x\rvert < 0.5$ см, $9.6 < \lvert\tau\rvert < 10$

Таблица 8. Параметры задачи G6

Материал	1	2	3	4
σ_a	25	0.05	50	25
σ_s	25	49.95	0	25
$\sigma = \sigma_a + \sigma_s$	50	50	50	50
σ_s/σ	0.5	0.999	0	0.5
Q/σ_a	1	0	0	4
Размещение материала	$\lvert x\rvert < 0.04$ см, $\lvert\tau\rvert < 2$	$0.04 < \lvert x\rvert < 0.16$ $0.32 < \lvert x\rvert < 0.44$ $2 < \lvert\tau\rvert < 8$, $16 < \lvert\tau\rvert < 22$	$0.16 < \lvert x\rvert < 0.32$ $8 < \lvert\tau\rvert < 16$	$0.44 < \lvert x\rvert < 0.5$ $22 < \lvert\tau\rvert < 25$

Заключение

Метод ускорения итераций с помощью экстраполяции источника рассеянных частиц показал хорошую эффективность. Основным достоинством метода является простота реализации и малый объем хранимой информации. По этим показателям метод сопоставим с методом простых итераций. При сочетании с методом Зейделя эффективность метода удваивается. Однако, как и в методе Зейделя, это требует хранения информации о функции распределения с предыдущей итерации.

Благодарности. Автор благодарен Е.Н. Аристовой за ценные обсуждения.

Приложение

В данном графическом приложении на рис. 2 – рис. 15 приведены графики изменения точности $\varepsilon(t)$ (17) в % в зависимости от номера итерации t при решении тестовых задач. На левой фигуре рисунка приведены графики изменения точности итераций уравнения переноса (10), на правой – четно-нечетных уравнений переноса (11). Черным цветом обозначена точность простых итераций, зеленым цветом – точность итераций Зейделя, красным – точность простых итераций, ускоренных методом экстраполяции источника, и синим цветом – точность ускоренных итераций Зейделя. Сплошная кривая соответствует варианту с максимальной скоростью сходимости. Пунктирные кривые соответствуют остальным вариантам. Варианты метода экстраполяции источника отличаются выбором параметров N и K. Варианты метода Зейделя отличаются порядком обхода ординат.

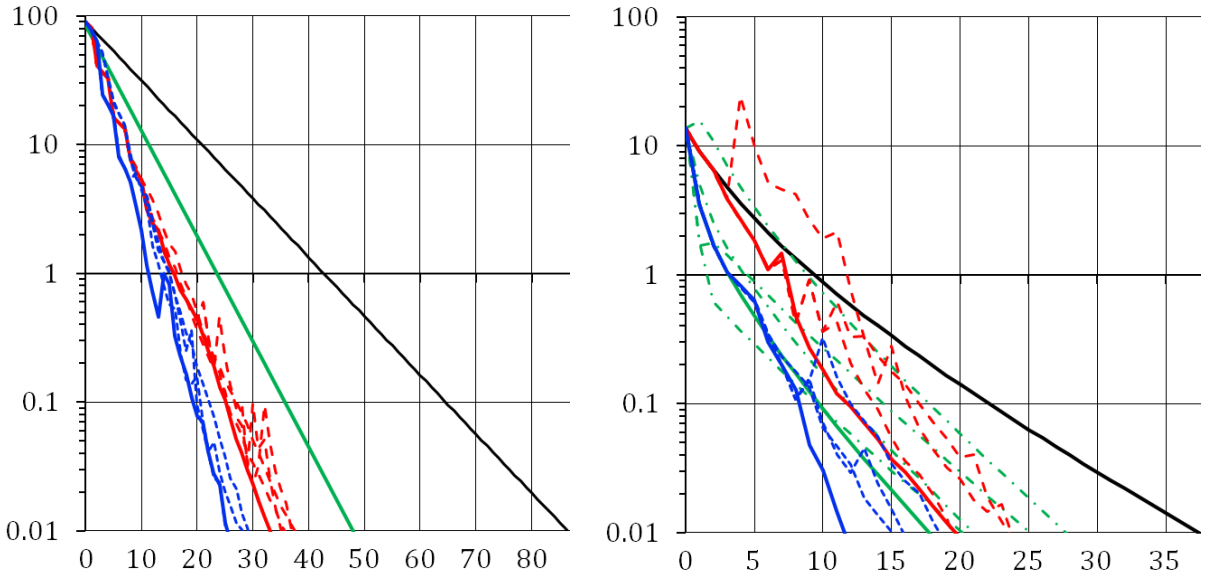

Рис. 2. Сходимость итераций в задаче Н1.

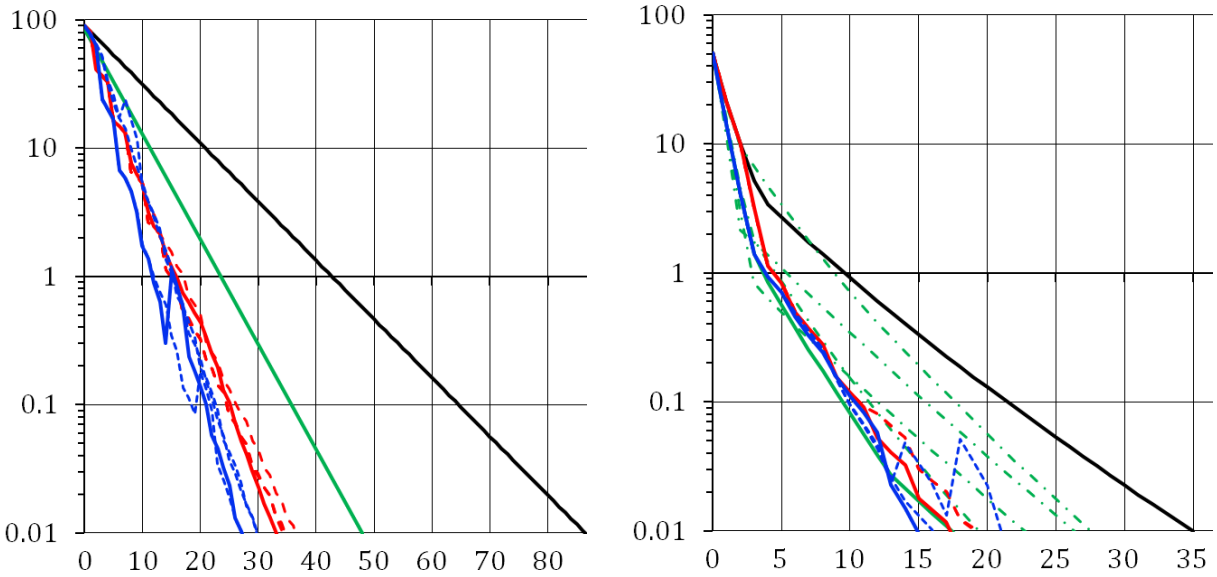

Рис. 3. Сходимость итераций в задаче Н2.

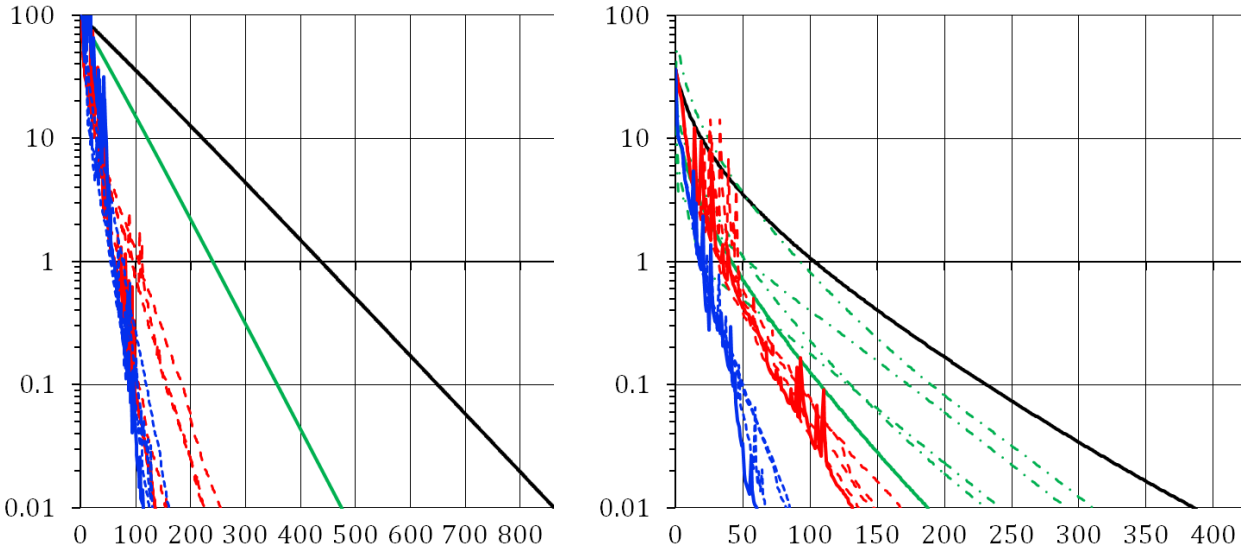

Рис. 4. Сходимость итераций в задаче Н3.

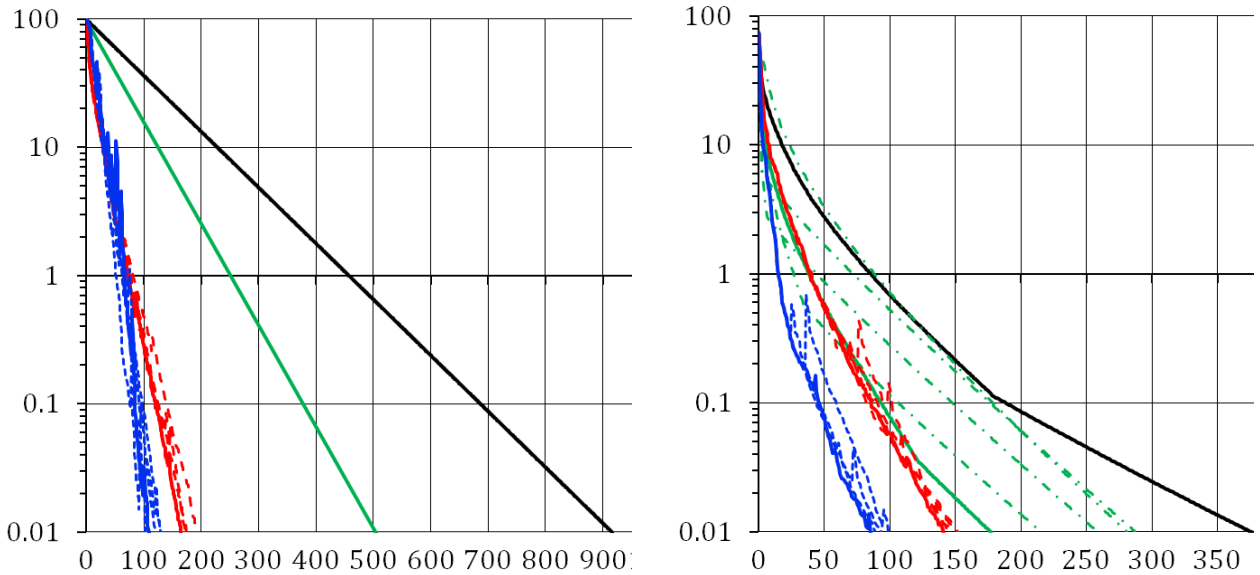

Рис. 5. Сходимость итераций в задаче H4.

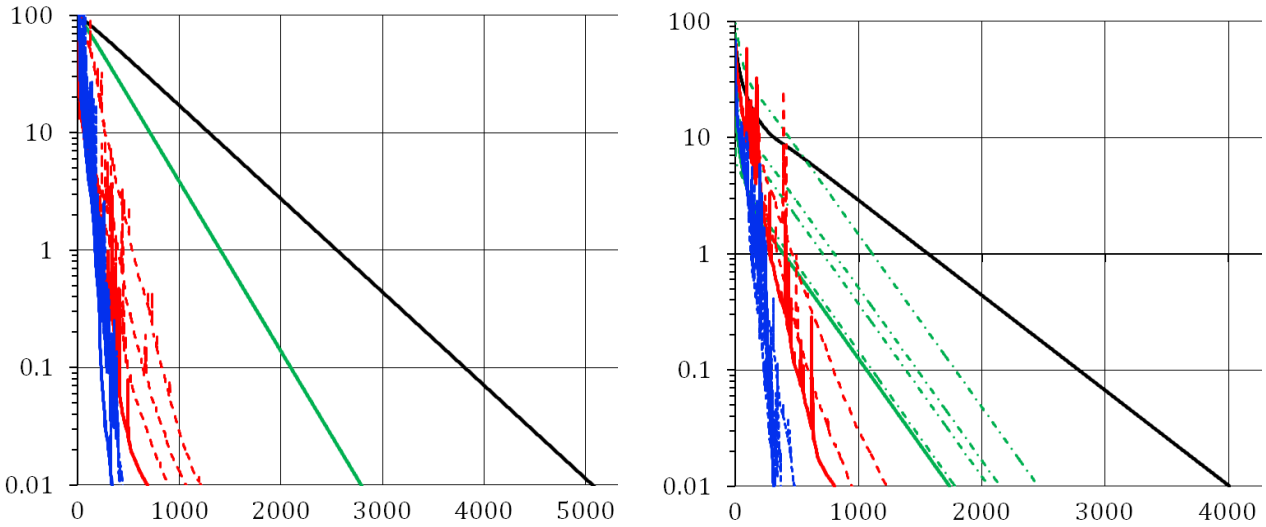

Рис. 6. Сходимость итераций в задаче H5.

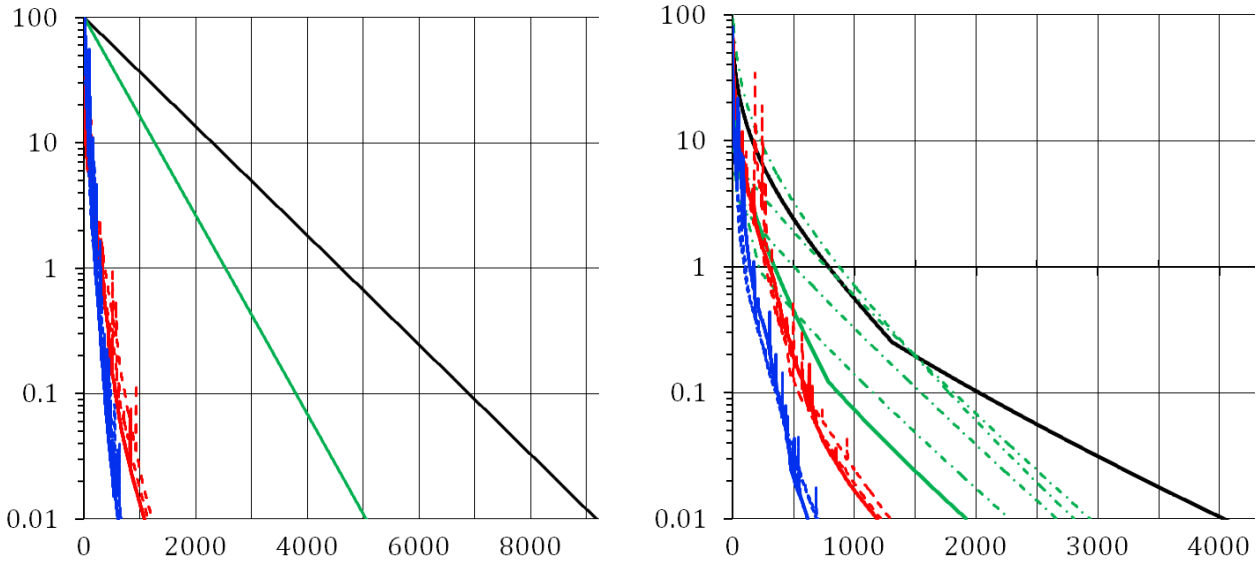

Рис. 7. Сходимость итераций в задаче H6.

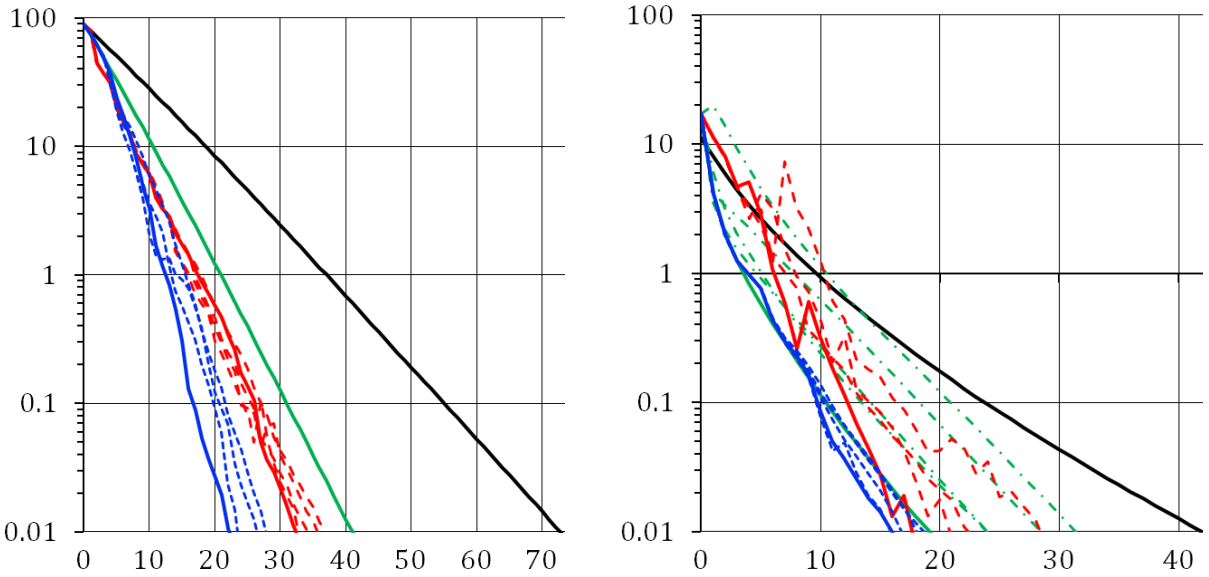

Рис. 8. Сходимость итераций в задаче H7.

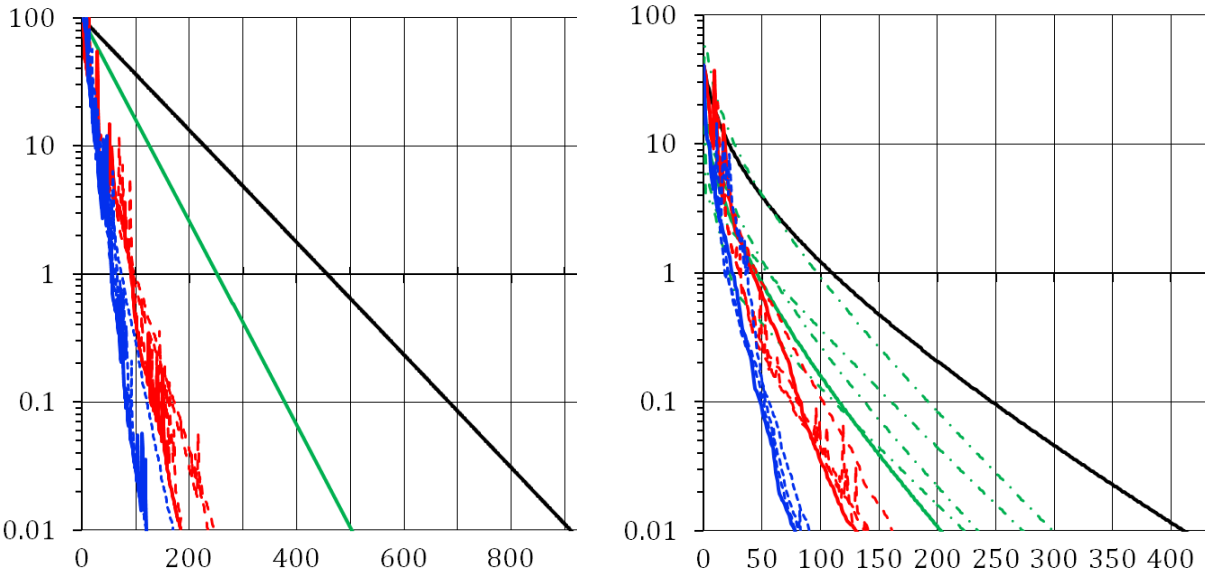

Рис. 9. Сходимость итераций в задаче H8.

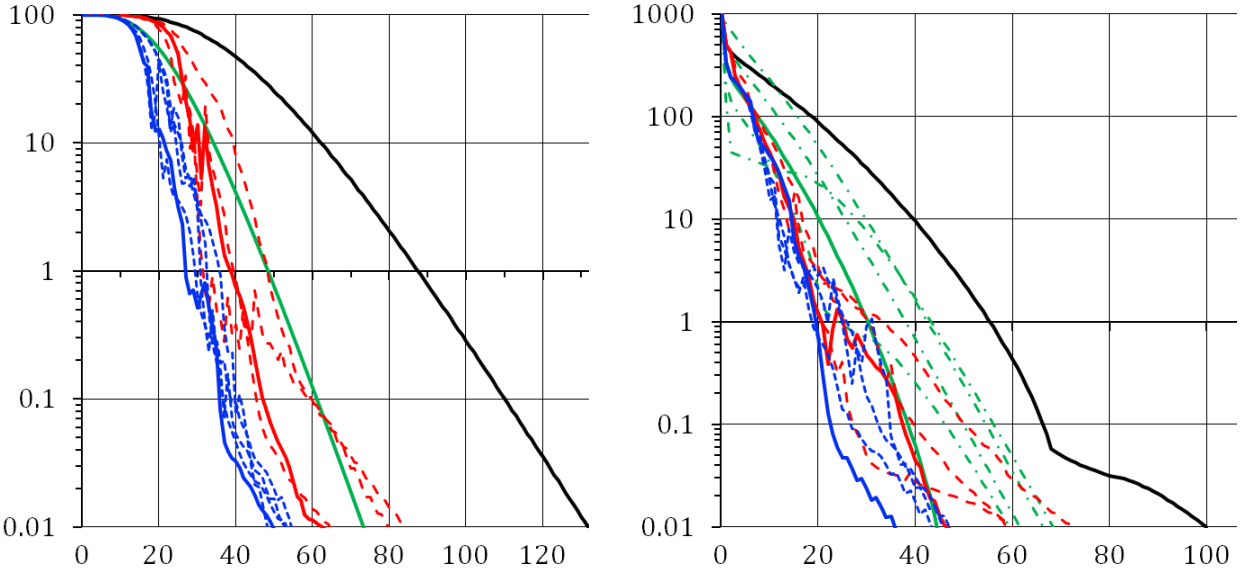

Рис. 10. Сходимость итераций в задаче G1.

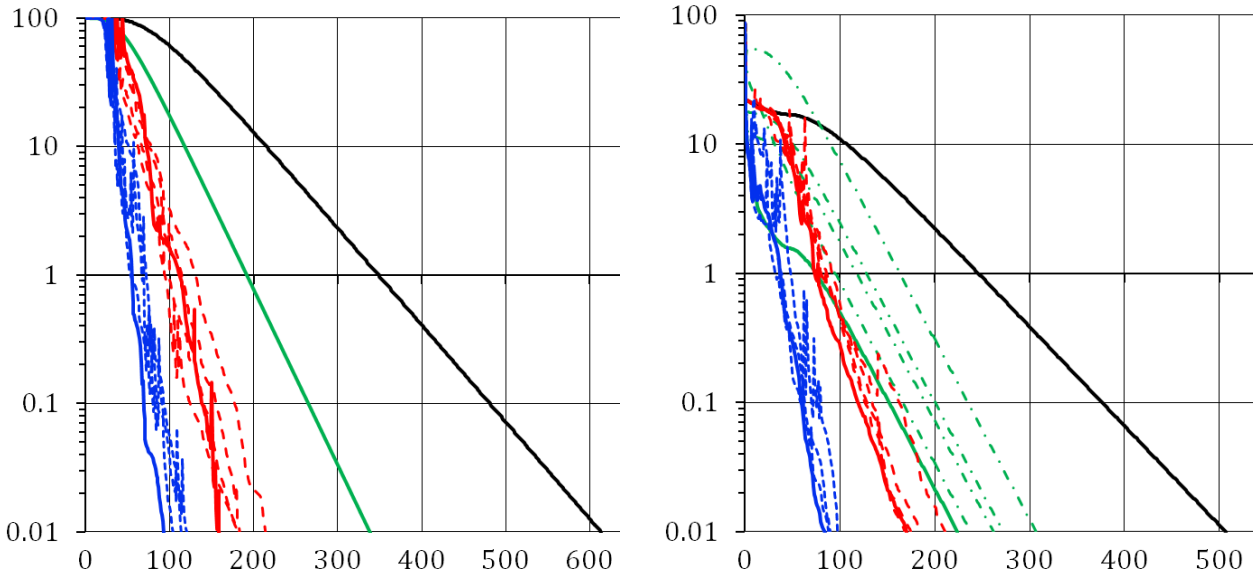

Рис. 11. Сходимость итераций в задаче G2.

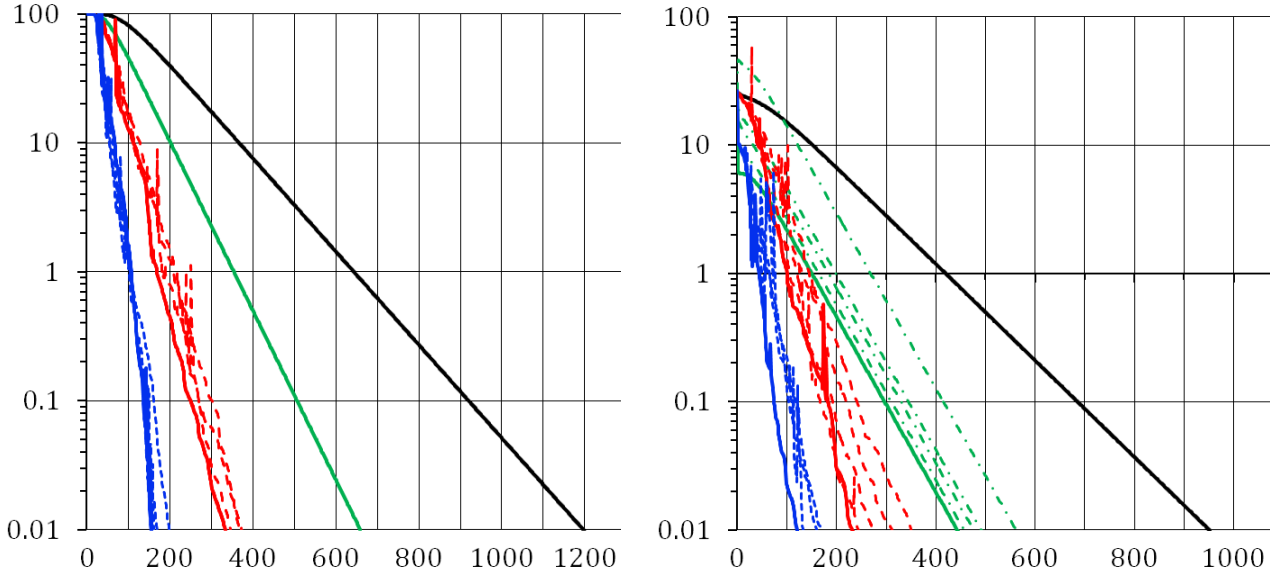

Рис. 12. Сходимость итераций в задаче G3.

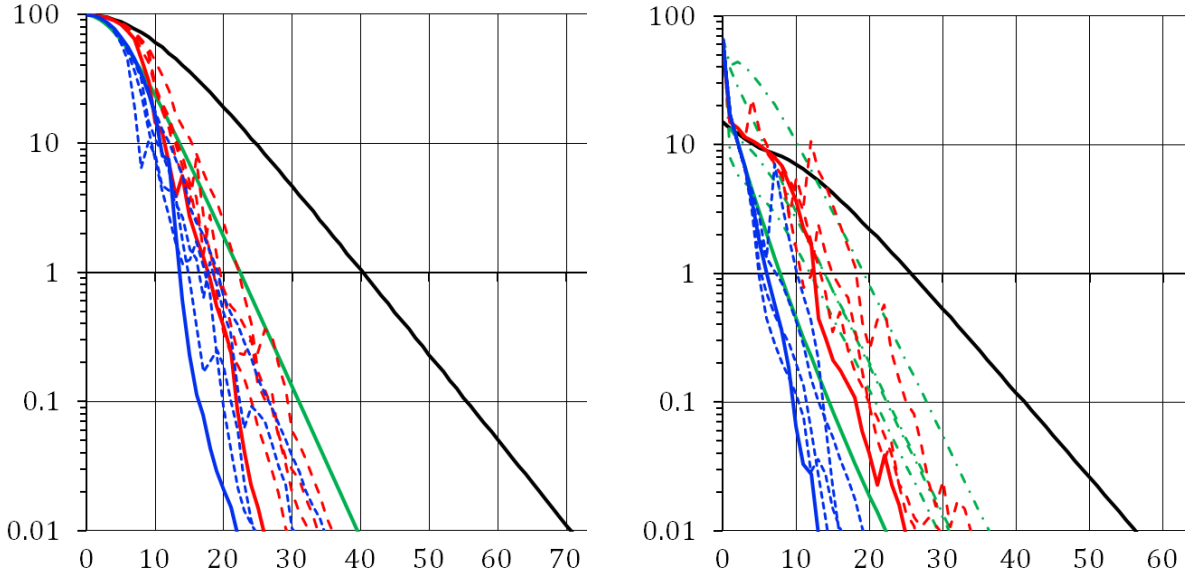

Рис. 13. Сходимость итераций в задаче G4.

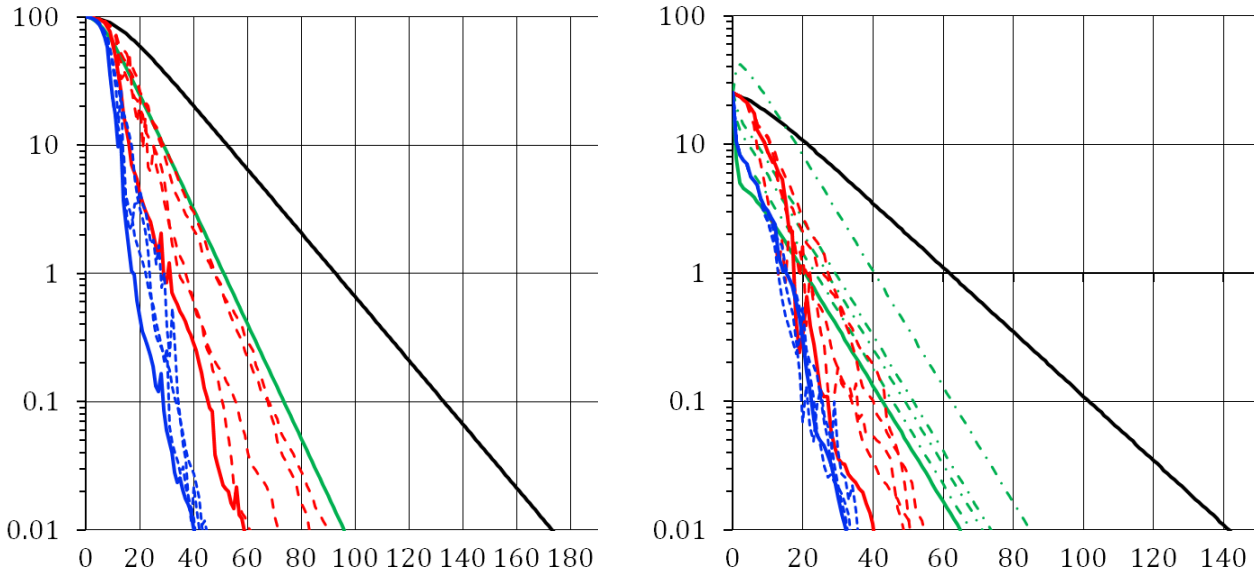

Рис. 14. Сходимость итераций в задаче G5.

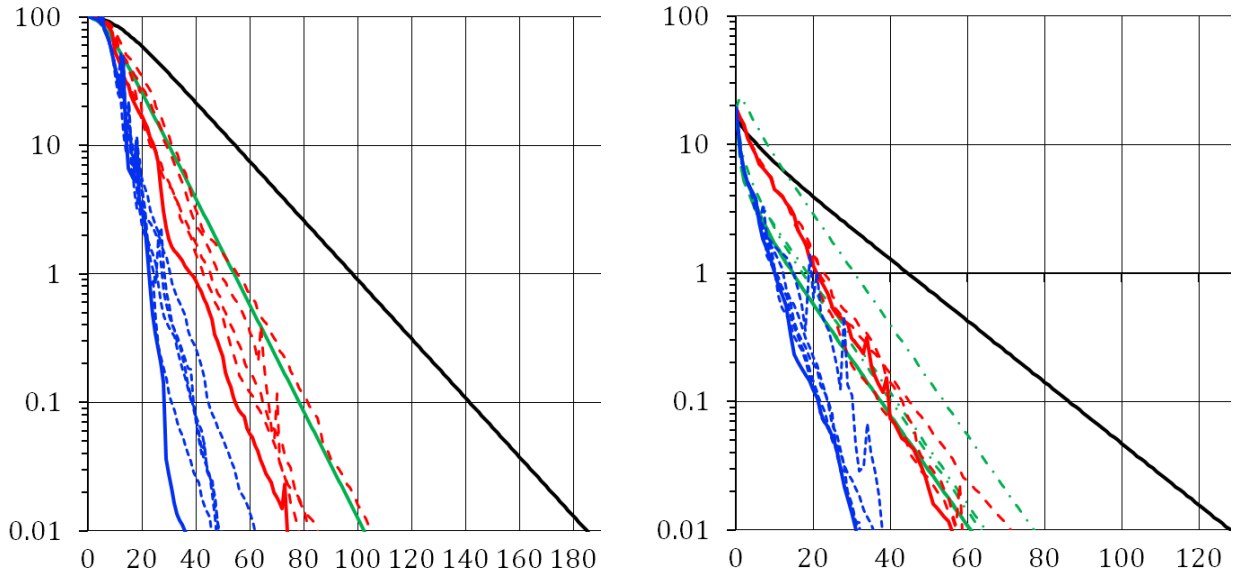

Рис. 15. Сходимость итераций в задаче G6.

Список литературы

[1] *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. Труды Мат. ин-та им.В.А. Стеклова (МИАН СССР). М.: Изд-во АН СССР. 1961. Т. 61. С. 3–158.
URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=tm&paperid=1576
Vladimirov V.S., Mathematical Problems in the One-Velocity Theory of Particle Transport. Ontario: Atomic Energy of Canada. 1963.
URL: https://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:43103493

[2] *Люстерник Л.А.* Замечания к численному решению краевых задач уравнения Лапласа и вычислению собственных значений методом сеток // Тр. Мат. ин-та им.В.А. Стеклова (МИАН СССР). 1947. Т. 20, С. 49–64.
http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?jrnid=tm&wshow=issue&bshow=contents&series=0&year=1947&volume=20

[3] *Карлсон Б., Белл Дж.*, Решение транспортного уравнения Sn-методом // Труды Второй межд. конф. по мирному исп. атомной энергии. Избр. докл. иностр. ученых. Т. 3. М.: Атомиздат. 1959, с. 408.

[4] *Морозов В.Н.* О решении кинетических уравнений с помощью Sn-метода / Теория и методы расчета ядерных реакторов. Под ред. Г.И. Марчука. М.: Госатомиздат. 1962. С. 91. URL: https://www.twirpx.com/file/1398223/

[5] *Wachspress E.L.*, Iterative Solution of Elliptic Systems and Applications to the Neutron Diffusion Equations of Reactor Physics. Ch. 9. Prentice-Hall. Englewood Cliffs. N.J. 1966.

[6] *Reed W.H.*, The Effectiveness of Acceleration Techniques for Iterative Methods in Transport Theory // J. Nucl. Sci. Eng. 1971. V. 45. No 3. P. 245-254. URL: http://www.ans.org/pubs/journals/nse/a_19077

[7] *Cefus G.R., Larsen E.W.*, Stability Analysis of Coarse-Mesh Rebalance // J. Nucl. Sci. Eng. 1990. V. 105. No 1. P. 31–39.
URL: http://www.ans.org/pubs/journals/nse/a_19210

[8] *Lewis E.E., Miller W.F. Jr.*, Computational Methods of Neutron Transport. Wiley-Interscience Publ. 1984. 401 pp. URL: https://www.twirpx.com/file/1105219/

[9] *Гольдин В.Я.* Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения. // Ж. выч. мат. и мат. физики. 1964. Т. 4 № 6, С. 1078–1087.
URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=7676
Gol'din V.Ya., A Quasi-Diffusion Method of Solving the Kinetic Equation // USSR Comp. Math. and Math. Physics. 1964. V. 4. No 6. P. 136–149.
URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0041555364900850

[10] *Лебедев В.И.* О Нахождении Решений Кинетических Задач // Ж. выч. мат. и мат. физики. 1966. Т. 6. № 5, С. 895–912.
URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=7447
Lebedev V.I., On Finding Solutions of Kinetic Problems // USSR Comp. Math. and Math. Physics. 1966. V. 6. No 5. P. 152–177.
URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0041555366901200?via%3Dihub

[11] *Alcouffe R.E.*, Diffusion Synthetic Acceleration Methods for the Diamond-Differenced Discrete-Ordinates Equations // J. Nucl. Sci. Eng. Engineering. 1977. V. 64. No 2. P. 344–355. URL: http://www.ans.org/pubs/journals/nse/a_27375

[12] *Марчук Г.И., Лебедев В.И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. 2-изд. М.: Атомиздат, 1981. 456 с.
URL: https://www.twirpx.com/file/1205303/
Marchuk G.I., Lebedev V.I., Numerical Methods in the Theory of Neutron Transport. London: Harwood Academic Publ., 1986. 601 pp.

[13] *Adams M.L., Larsen E.W.*, Fast Iterative Methods for Discrete-Ordinates Particle Transport Calculations // J. Progress in Nucl. Energy. 2002. V. 40. No 1. P. 3–159. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0149197001000233

[14] *Четверушкин Б.Н.* Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985. 304 с. URL: https://www.twirpx.com/file/1442442/

[15] *Varga R.S.*, Matrix Iterative Analysis, 2-nd ed. Heidelberg: Springer-Verlag. 2000. 358 pp. URL: https://www.twirpx.com/file/1255791/

[16] *Деммель Дж.*, Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001. URL: http://www.twirpx.com/file/525565/
Demmel J.W., Applied Numerical Linear Algebra. SIAM, Philadelphia, PA, USA, 1997. URL: http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611971446.bm

[17] *Шильков А.В.* Разложение оператора рассеяния уравнения переноса частиц в ряд по сферическим тензорам // Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН. 2018. № 249 . 28 с.

[18] *Кузнецов Е.С.* Об установлении баланса лучистой энергии в поглощающей и рассеивающей атмосфере // Изв. АН СССР, серия Географ. и геофизическая. 1940. Т. 4, № 6. С. 813–842. *Кузнецов Е.С.* Избранные научные труды. М.: Физматлит. 2003. С. 262.
URL:https://www.twirpx.com/file/2483095/

[19] *Шильков А.В.* Четно-нечетные кинетические уравнения переноса частиц. 1: Алгебраическая и центрированная формы интеграла рассеяния // Математ. моделирование. 2014. Т. 26. № 3. С. 75–96.
URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3460
Shilkov A.V., Even- and Odd-Parity Kinetic Equations of Particle Transport. 1: Algebraic and Centered Forms of the Scattering Integral // Math. Models and Comp. Simulations. 2014. V. 6. No 5. P. 465–479.
URL: https://link.springer.com/article/10.1134%2FS2070048214050123

[20] *Wick G.C.*, Ober Ebene Diffusion Probleme // Z. Physik. 1943. V. 121. P. 702.

[21] *Чандрасекар С.* Перенос лучистой энергии. М.: Иностр. лит. 1953. 432 с.
URL: https://www.twirpx.com/file/195970/
Chandrasekhar S., Radiative Transfer. Oxford: Clarendon Press. 1950. 400 pp.
URL: https://www.twirpx.com/file/564936/

[22] *Carlson B.G.*, Solution of the Transport Equation by Sn Approximations. Rep. of Los Alamos Sci. Lab. LA–1599. 1953. 14 pp.; LA–1891. 1955. 28 pp.
URL: https://fas.org/sgp/othergov/doe/lanl/lib-www/la-pubs/00407787.html

[23] *Карлсон Б.Г., Латроп К.Д.* Теория переноса. Метод дискретных ординат / В кн. Вычислительные методы в физике реакторов. Под ред. Гринспена Х., Келбера К., Окрента Д.. М.: Атомиздат. 1972. С. 102–157.
URL: https://www.twirpx.com/file/1209652/

Carlson B.G., *Lathrop K.D.*, Transport Theory. The Method of Discrete Ordinates // Computing methods in reactor physics. Eds: Greenspan H., Kelber C., Okrent D. New York: Gordon & Breach, 1968.

[24] *Шильков А.В.* Четно-нечетные кинетические уравнения переноса частиц. 2: Конечно-аналитическая характеристическая схема для одномерных задач // Матем. моделирование. 2014. Т. 26. № 7. С. 33–53.
URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3495
Shilkov A.V., Even and Odd Parity Kinetic Equations of Particle Transport. 2: A Finite Analytic Characteristic Scheme for One Dimensional Problems // Math. Models and Comp. Simulations. 2015. V. 7. No 1. P. 36–50.
URL: https://link.springer.com/article/10.1134%2FS2070048215010093

[25] *Шильков А.В.* Четно-нечетные кинетические уравнения переноса частиц. 3: Конечно-аналитическая схема на тетраэдрах // Матем. моделирование. 2015. Т. 27. № 2. С. 34–62.
URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3570
Shilkov A.V., Even and Odd Parity Kinetic Equations of Particle Transport. 3: Finite Analytic Schemes on Tetrahedral // Math. Models and Comp. Simulations. 2015. V. 7. No 5. P. 409–429.
URL: https://link.springer.com/article/10.1134%2FS2070048215050117

Оглавление