



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ахметшин Р.З.

«Неполная» краевая задача
для нахождения
многовитковых перелетов с
нулевой малой тягой в
области тени

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ахметшин Р.З. «Неполная» краевая задача для нахождения многовитковых перелетов с нулевой малой тягой в области тени // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 268. 32 с. doi:[10.20948/prepr-2018-268](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-268)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-268>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Р.З. Ахметшин

**«Неполная» краевая задача
для нахождения многовитковых перелетов
с нулевой малой тягой в области тени**

Москва — 2018

Ахметшин Р.З.

«Неполная» краевая задача для нахождения многовитковых перелетов с нулевой малой тягой в области тени

Для начальной эллиптической орбиты (с расстоянием в перигее ≈ 15.6 и в апогее ≈ 83.2 тыс. км и наклоном 13^0) проведены подробные расчеты многовитковых перелетов на геостационарную орбиту космического аппарата с электроракетными двигателями малой тяги, которая обнуляется в области тени Земли. Для получения траекторий решается т.н. "неполная" двухточечная краевая задача, в которой не учитываются условия оптимального пересечения границ тени. По этой причине получаемые траектории неоптимальны, но для многих значений параметров задачи (даты старта t_0 и долготы восходящего узла Ω_0) решения близки по затратам рабочего вещества к затратам на перелет без учета тени. А для $\Omega_0=180^0$ для всех значений t_0 на интервале в 1 год разница менее 1%. Особенностью краевой задачи является то, что при некоторых значениях параметров могут существовать несколько решений.

Ключевые слова: многовитковые траектории, космический аппарат, малая тяга, геостационарная орбита, тень Земли, двухточечная краевая задача

Rauf Zulfarovich Akhmetshin

“Not full” two-boundary problem for finding multi-orbital transfers with zero low thrust in the shadow

A lot of calculations of multi-orbital transfers from elliptical orbit (with perigee distance ≈ 15.6 and apogee distance ≈ 83.2 thousand km, and inclination 13^0) to geostationary orbit of spacecraft with low thrust, which becomes zero in the Earth shadow, is done. To find such trajectories so called "not full" two-boundary problem that do not include a condition of optimal crossing the shadow line is solved. That's why trajectories are not optimal, but in many cases expenditure of working substance is not much more than on a trajectory without switching off the low thrust. For longitude of ascending node equal to 180^0 and different start dates the difference is later than 1%. The peculiarity of two-boundary problem is that in some cases more than one solution may exist.

Key words: multi-orbital trajectories, spacecraft, low thrust, geostationary orbit, Earth shadow, two-boundary problem

Оптимальные траектории многовитковых перелетов с малой тягой обычно получают решением краевых задач, к которым сводится задача оптимального управления в результате применения принципа максимума Понтрягина [1]. Во многих работах при решении краевой задачи правые части уравнений движения численно осредняются (например, см. [2,3]). В данной работе решается краевая задача без осреднения, но в ней не учитываются оптимальные условия пересечения границ тени.

В работе [4] изучались многовитковые перелеты в центральном ньютоновом поле Земли космического аппарата (КА) с электроракетными двигателями (ЭРД) малой тяги, с питанием от солнечных батарей. Конкретно, изучались траектории перелета на геостационарную орбиту (ГСО) с постоянно работающей и постоянной по величине малой тягой. Такие траектории далее будем называть номинальными. Подробно рассматривался вопрос о том, где на таких траекториях могут появляться участки с тенью от Земли: на каких витках, в каком количестве, какой продолжительности. Там же была рассмотрена задача о траекториях перелета на ГСО в случае, когда на участках тени тяга обнуляется. И была сформулирована т.н. "неполная" двухточечная краевая задача для нахождения таких траекторий.

"Неполной" краевая задача была названа потому, что в ней учитываются не все условия, которым должна удовлетворять оптимальная траектория. А именно, игнорируется условие оптимального пересечения границ тени. В принципе максимума Понтрягина [1] это т.н. условие скачка в сопряженных переменных.

Причиной, по которой было решено использовать для поиска траекторий "неполную" краевую задачу, является то, что такая задача существенно проще "полноценной" краевой задачи. Также предполагалось, что, как и в случае учета влияния других возмущений (гравитационного притяжения Луны, Солнца и вариаций геопотенциала [5-7]), ее решения будут не сильно отличаться от номинальных.

Отдельные расчеты, представленные в [4], показали, что решения "неполной" краевой задачи могут быть очень близки к номинальной траектории и даже могут быть лучше ее по функционалу (затратам рабочего вещества $M_{РВ}$), но могут быть и значительно хуже (в приведенном примере превышение $\Delta M_{РВ}$ составило 19%). В данной работе более подробно рассмотрены решения "неполной" краевой задачи для одной номинальной траектории.

«Неполная» краевая задача

Будем использовать уравнения оптимального движения космического аппарата с постоянно работающими ЭРД постоянной по величине малой тяги, с питанием от солнечных батарей, из работы [8]. Они описывают движение в центральном ньютоновом поле Земли, без учета гравитационного влияния Солнца и Луны и других возмущающих факторов, и имеют вид:

$$d\mathbf{x} / dt = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), \quad d\boldsymbol{\lambda} / dt = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}),$$

где t – время, $\mathbf{x} = \langle \varphi, m, h, y, z, v, w \rangle$ – вектор фазовых переменных, $\boldsymbol{\lambda} = \langle \lambda_\varphi, \lambda_m, \lambda_h, \lambda_y, \lambda_z, \lambda_v, \lambda_w \rangle$ – вектор сопряженных переменных. Здесь m – масса КА, а φ, h, y, z, v, w – равноденственные переменные, которые определяются через гравитационную постоянную Земли μ_E и оскулирующие переменные $p, e, \theta, \omega, \Omega, i$ формулами:

$$h = (\mu_E / p)^{1/2}, \quad y = e \cdot \cos(\omega + \Omega), \quad v = \cos \Omega \cdot \tan(i / 2), \\ \varphi = \theta + \omega + \Omega, \quad z = e \cdot \sin(\omega + \Omega), \quad w = \sin \Omega \cdot \tan(i / 2).$$

В отличие от [8], будем предполагать, что если КА попадает в тень Земли, то тяга обнуляется. Будем использовать модель “цилиндрической” тени. Для нее функция тени Sh конкретизирована в [4]:

$$\begin{aligned} \text{при } R_E + h_{\min} < r, (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_S) < 0: & \quad Sh = 1 - (R_E^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_S)^2 / R_S^2) / r^2, \\ \text{при } R_E + h_{\min} < r, (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_S) \geq 0: & \quad Sh = 1 - R_E^2 / r^2, \\ \text{при } R_E + h_{\min} \geq r: & \quad Sh = 1 - R_E^2 / (R_E + h_{\min})^2, \end{aligned}$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор КА, \mathbf{R}_S – радиус-вектор Солнца, $r = |\mathbf{r}|$, $R_S = |\mathbf{R}_S|$, R_E – радиус Земли, h_{\min} – заданная константа (например, высота атмосферы). Функция тени определяет величину тяги: если $Sh < 0$ – тяга нулевая, иначе тяга максимальная.

Заданы начальная и конечная орбиты, между которыми необходимо осуществить перелет. То есть необходимо найти начальные значения сопряженных переменных λ_0 , такие, чтобы в конечный момент времени КА вышел на конечную орбиту.

Дополнительно полагается, что КА стартует из перигея начальной орбиты (т.е. $\theta_0 = 0$), а конечный момент времени определяется заданной угловой дальностью перелета, а именно, целым количеством витков N в переменной φ ($\varphi_k = \varphi_0 + 2\pi N$). Как правило, значение N подбирается оптимальным, для чего приходится решать несколько краевых задач.

Замечание 1. Получившаяся «краевая» задача очень похожа на краевую задачу в [8] без тени, но с возможностью включения/выключения ЭРД. Разница между ними в том, что в [8] величина тяги определяется функцией переключения Sw (если $Sw < 0$ – тяга нулевая, иначе тяга максимальная), а в данном случае – функцией тени Sh .

Замечание 2. От «полноценной» краевой задачи с тенью «неполная» краевая задача отличается тем, что в ней не учитываются условия оптимального пересечения границ тени, т.н. условия скачка в сопряженных переменных [1]:

$$\lambda^+ = \lambda^- + \mu \cdot \partial G / \partial \mathbf{x},$$

где $G = Sh$, λ^- и λ^+ – значения сопряженных переменных слева и справа от границы тени. Другими словами, можно сказать, что в «неполной» краевой задаче в условиях скачка полагается $\mu = 0$.

Замечание 3. В качестве конечной орбиты здесь, как и в [5-7], будем рассматривать геостационарную орбиту, а в качестве начальной – орбиты из табл. 1. Характеристики соответствующих траекторий перелета с постоянной тягой (без обнуления ее в области тени), т.н. «номинальных», представлены в табл. 2. Там же приведены начальные значения массы КА $M_{КА}$ и затраты рабочего вещества на перелет $M_{РВ}$.

Таблица 1

Примеры начальных орбит, с которых осуществляется перелет на ГСО с помощью малой тяги

| | H_{π} [тыс. км] | H_{α} [тыс. км] | R_{π} [тыс. км] | R_{α} [тыс. км] | e | i [град] | T [сут] |
|---|------------------------|---------------------------|------------------------|---------------------------|--------|---------------|--------------|
| 1 | 23 | 55.6 | 29.371 | 61.971 | 0.3569 | 4 | 1.124 |
| 2 | 9.2 | 76.8 | 15.571 | 83.171 | 0.6846 | 13 | 1.264 |
| 3 | 2.793 | 78.8 | 9.164 | 85.171 | 0.8057 | 26 | 1.180 |
| 4 | 0.793 | 68.94 | 7.164 | 75.311 | 0.8263 | 46.5 | 0.965 |

H_{π} , R_{π} – высота и радиус перигея, H_{α} , R_{α} – высота и радиус апогея, e – эксцентриситет, i – наклонение, T – период.

Таблица 2

«Номинальные» траектории перелета на ГСО (в отсутствие возмущений)

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|
| Δi [град] | 4 | 13 | 26 | 46.5 |
| N [витки] | 65 | 157 | 232 | 103 |
| T [сут] | 69.1 | 180 | 269.7 | 120.3 |
| $M_{КА}$ [кг] | 4287 | 5548 | 6397 | 2325 |
| $M_{РВ}$ [кг] | 186.3 | 485.3 | 727.2 | 324.2 |

Δi – изменение наклонения, N – количество витков, T – продолжительность перелета, $M_{КА}$ – начальная масса КА, $M_{РВ}$ – затраты рабочего вещества.

Первые три траектории по продолжительности перелета условно названы так: 1) «короткая» – 2.3 месяца, 2) «средняя» – 6 месяцев, 3) «длинная» – 9 месяцев; последняя (4 месяца) – траектория перелета «легкого» КА.

Говоря о номинальных траекториях, мы имеем в виду, что заданы все параметры начальной орбиты, которые определяют ее конфигурацию и положение относительно конечной орбиты, в частности, параметр ω задан нулевым [3]. Два параметра: Ω_0 и $\tau = t_0$ – в отсутствие возмущающих факторов,

упоминавшихся выше, не влияют на конфигурацию траектории перелета и на минимизируемый функционал (затраты рабочего вещества). Но они влияют на траектории перелета в случае обнуления тяги в области тени и поэтому будут рассматриваться в качестве параметров «неполной» краевой задачи. А соответствующие им траектории можно будет сравнивать по функционалу с номинальными траекториями.

Проблема начального приближения

Как и для «нормальных» краевых задач, возникает проблема выбора хорошего начального приближения. «Естественным кандидатом» на эту роль в данном случае, как представляется, могли бы выступать номинальные траектории.

В табл. 3 представлены данные, какой при $\Omega_0 = 0$ и различных t_0 получается «короткая» номинальная траектория (№1 из табл. 2) в качестве начального приближения. Т.е. как сильно различаются две траектории с одинаковыми начальными значениями фазовых и сопряженных переменных, но разными значениями тяги в области тени – номинальной (максимальной) и нулевой.

Видно, что для шести значений t_0 (из 19) различий нет, так как в этих случаях на номинальных траекториях вообще нет участков с тенью. Для восьми значений t_0 различия невелики: невязка по наклонению меньше 0.3° , по расстоянию в перигее и апогее – меньше 1000 км. В оставшихся пяти случаях невязки по расстоянию в перигее и апогее – больше 1000 км. Из них в одном случае – больше 5000 км.

Как показывают расчеты, для «короткой» номинальной траектории, с угловой дальностью 65 витков, в случаях, когда невязки в перигее и апогее менее 1000 км, краевую задачу обычно удается решить, используя итерационный метод Ньютона, за 3-4 итерации. Получаемая точность по невязке в наклонении – менее 10^{-9} градуса, по невязкам в апогее и перигее – менее 1 см.

В остальных случаях из табл. 3, с невязками > 1000 км (за исключением самого плохого варианта с невязкой > 5800 км), задачу также удается решить за 5-7 итераций. Но это возможно, только если существует решение. А для угловой дальности $N = 65$ витков оно существует только в шести случаях. В четырех случаях оно существует при $N \geq 66$ (помечены звездочкой при дате старта), в трех случаях – при $N \geq 67$ (помечены двумя звездочками). Если задать «хорошее» N , то задача сходится. То есть и в этих случаях номинальная траектория приемлема в качестве начального приближения (ее начальные значения сопряженных переменных λ_0) при условии подбора «хорошего» N .

Исключением является вариант с $t_0 = 280$ суток. Если бы изменение тяги в области тени было в два раза меньше, с номинального (максимального) не до нуля, а до половины номинального значения, то невязка в перигее уменьшилась бы раза в два (см. нижнюю часть табл. 3). В таком случае краевая задача

сходится. Если ее решение использовать в качестве начального приближения, то, чтобы получить решение с нулевой тягой, надо решить еще одну краевую задачу.

Таблица 3

**Изменение номинальной (короткой) траектории
при изменении тяги в области тени**

(жирным выделены варианты с $|\Delta R_{\pi}|$, $|\Delta R_{\alpha}| > 1000$ км и с самым большим Δi)

| t ₀ [сут] | Конечная орбита | | | Невязки | | |
|-------------------------|--|----------------------------|------------|-------------------------|-------------------------|--------------|
| | R _π [тыс.км] | R _α [тыс.км] | T [сут] | ΔR _π [км] | ΔR _α [км] | Δi [град] |
| | Тяга в области тени нулевая | | | | | |
| 0 | 42.0 | 42.2 | 69.1 | -176 | 20 | 0.04 |
| 20* | 41.8 | 42.4 | 69.0 | -349 | 268 | 0.16 |
| 40* | 42.2 | 42.8 | 69.1 | 512 | 655 | 0.25 |
| 60** | 43.0 | 43.1 | 69.6 | 800 | 966 | 0.30 |
| 80* | 38.9 | 41.7 | 67.5 | -3297 | -436 | 0.07 |
| 100 | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 120 | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 140 | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 160 | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 180 | 42.2 | 42.3 | 69.1 | 9 | 118 | 0.01 |
| 200** | 42.9 | 43.1 | 69.4 | 723 | 984 | 0.08 |
| 220** | 45.6 | 46.5 | 71.5 | 3391 | 4354 | 0.08 |
| 240* | 44.5 | 47.0 | 72.6 | 2722 | 4879 | 0.05 |
| 260 | 38.8 | 41.8 | 68.6 | -3388 | -312 | 0.28 |
| 280 | 36.3 | 41.5 | 67.0 | -5824 | -700 | 0.43 |
| 300 | 41.2 | 41.9 | 68.6 | -958 | -239 | 0.05 |
| 320 | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 340 | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 360 | 42.1 | 42.2 | 69.1 | -85 | 4 | 0.02 |
| | Тяга в области тени 0.5 от номинального значения | | | | | |
| 280 | 39.3 | 41.6 | 68.0 | -2851 | -546 | 0.20 |

Этот подход – постепенное уменьшение величины тяги в области тени, с последовательным решением серии краевых задач, в которых в качестве начального приближения берется решение предыдущей краевой задачи, особенно актуален для других номинальных траекторий из табл. 2, более продолжительных по времени и с большим количеством витков, что видно из таблиц 4–7.

В табл. 4 даны невязки для «средней» номинальной траектории (157 витков), когда тяга в области тени обнуляется. На основе предыдущей таблицы только в двух вариантах невязки можно назвать небольшими по абсолютной величине ($t_0 = 0$, $|\Delta R_\pi| = 1765$) и умеренно большими ($t_0 = 120$, $\Delta R_\pi = 2285$, $\Delta R_\alpha = 3639$). Еще в двух вариантах они меньше 10 тыс. км ($t_0 = 20$, $\Delta R_\alpha = 6930$; $t_0 = 240$, $|\Delta R_\pi| = 5819$). В остальных вариантах по крайней мере одна из невязок по модулю превышает 10 тыс. км.

Таблица 4

**Изменение номинальной (средней) траектории
при нулевой тяге в области тени**

(жирным выделены варианты с $|\Delta R_\pi|$, $|\Delta R_\alpha| > 10000$ км и с большими Δi , ΔT)

| t_0 [сут] | Конечная орбита | | | Невязки | | |
|----------------|---------------------|------------------------|--------------|------------------------|---------------------------|----------------------|
| | R_π [тыс.км] | R_α [тыс.км] | T [сут] | ΔR_π [км] | ΔR_α [км] | Δi [град] |
| 0 | 40.4 | 42.7 | 177.6 | -1765 | 575 | 0.16 |
| 20 | 44.0 | 49.1 | 187.8 | 1850 | 6930 | 0.40 |
| 40 | 49.1 | 70.2 | 212.9 | 6900 | 28053 | 0.73 |
| 60 | 45.0 | 65.9 | 211.8 | 2869 | 23786 | 0.25 |
| 80 | 20.7 | 44.3 | 156.1 | -21414 | 2119 | 1.44 |
| 100 | 29.8 | 43.1 | 165.1 | -12400 | 956 | 1.16 |
| 120 | 44.4 | 45.8 | 182.3 | 2285 | 3639 | 0.13 |
| 140 | 49.8 | 53.3 | 189.1 | 7642 | 11171 | 0.23 |
| 160 | 45.2 | 176.3 | 566.4 | 3087 | 134178 | 123.98 |
| 180 | 37.2 | 79.4 | 588.4 | -4933 | 37305 | 124.70 |
| 200 | 46.5 | 52.7 | 589.2 | 4389 | 10573 | 129.88 |
| 220 | 29.3 | 81.2 | 600.5 | -12840 | 39047 | 131.22 |
| 240 | 36.3 | 41.1 | 186.1 | -5819 | -1019 | 0.85 |
| 260 | 15.4 | 46.2 | 153.0 | -26780 | 4042 | 0.25 |
| 280 | 12.4 | 47.4 | 145.6 | -29718 | 5227 | 1.05 |
| 300 | 12.2 | 47.5 | 143.4 | -29939 | 5313 | 0.93 |
| 320 | 13.8 | 46.6 | 145.1 | -28373 | 4487 | 0.17 |
| 340 | 18.2 | 44.7 | 152.0 | -23915 | 2587 | 1.11 |

В следующей табл. 5, в ее верхней части, даны невязки для той же «средней» номинальной траектории, когда тяга в области тени уменьшается всего на 0.1 от номинального значения. В этом случае и невязки существенно уменьшаются. Тем не менее, в восьми вариантах они все еще большие ($|\Delta R_\pi|$ или $|\Delta R_\alpha| > 6$ тыс. км). Для этих вариантов в нижней части таблицы приведены невязки в случае, когда уменьшение тяги в области тени составляет всего 0.03

от номинального значения (т.е. тяга в области тени равна 0.97 от номинала). В результате во всех восьми вариантах невязки $|\Delta R_{\pi}|$, $|\Delta R_{\alpha}|$ стали < 5 тыс. км.

Таблица 5

**Изменение номинальной (средней) траектории
при изменении тяги в области тени**

(жирным выделены варианты с $|\Delta R_{\pi}|$, $|\Delta R_{\alpha}| > 5000$ км – в верхней,
и > 1000 км – в нижней части таблицы)

| t ₀ [сут] | Конечная орбита | | | Невязки | | |
|---|----------------------------|----------------------------|------------|-------------------------|-------------------------|--------------|
| | R _π [тыс.км] | R _α [тыс.км] | T [сут] | ΔR _π [км] | ΔR _α [км] | Δi [град] |
| Тяга в области тени 0.9 от номинального значения | | | | | | |
| 0 | 42.0 | 42.2 | 179.8 | -151 | 63 | 0.02 |
| 20 | 42.3 | 42.8 | 180.7 | 132 | 663 | 0.06 |
| 40 | 42.4 | 44.0 | 182.1 | 243 | 1850 | 0.11 |
| 60 | 42.3 | 43.9 | 182.2 | 133 | 1686 | 0.10 |
| 80 | 38.8 | 42.0 | 176.3 | -3316 | -107 | 0.19 |
| 100 | 40.6 | 42.2 | 178.1 | -1557 | 19 | 0.08 |
| 120 | 42.3 | 42.5 | 180.2 | 177 | 374 | 0.02 |
| 140 | 42.5 | 43.2 | 180.7 | 326 | 1041 | 0.05 |
| 160 | 44.2 | 51.2 | 189.1 | 2042 | 9028 | 0.12 |
| 180 | 46.9 | 61.4 | 201.0 | 4710 | 19266 | 0.37 |
| 200 | 44.7 | 57.0 | 196.9 | 2579 | 14877 | 0.08 |
| 220 | 42.6 | 48.3 | 187.8 | 431 | 6160 | 0.13 |
| 240 | 40.8 | 41.8 | 179.7 | -1373 | -343 | 0.14 |
| 260 | 35.8 | 41.8 | 174.3 | -6309 | -348 | 0.52 |
| 280 | 33.5 | 40.0 | 171.4 | -8634 | -201 | 0.72 |
| 300 | 33.5 | 42.0 | 170.9 | -8698 | -136 | 0.71 |
| 320 | 35.2 | 42.0 | 172.4 | -6944 | -148 | 0.52 |
| 340 | 38.2 | 42.0 | 175.5 | -3960 | -118 | 0.24 |
| Тяга в области тени 0.97 от номинального значения | | | | | | |
| 160 | 42.6 | 44.7 | 182.5 | 403 | 2546 | 0.11 |
| 180 | 42.8 | 46.9 | 185.0 | 671 | 4754 | 0.15 |
| 200 | 42.6 | 45.9 | 184.2 | 405 | 3764 | 0.13 |
| 220 | 42.2 | 43.8 | 182.1 | 82 | 1669 | 0.06 |
| 260 | 40.2 | 42.0 | 178.2 | -1976 | -194 | 0.13 |
| 280 | 39.4 | 42.0 | 177.2 | -2777 | -197 | 0.18 |
| 300 | 39.3 | 42.0 | 177.0 | -2824 | -166 | 0.17 |
| 320 | 39.3 | 42.0 | 177.5 | -2233 | -119 | 0.13 |

Аналогичные данные для «легкого КА» и «длинной» номинальной траектории приведены в таблицах 6 и 7. При сравнимых коэффициентах уменьшения величины тяги в области тени, для них невязки еще больше, чем для «средней» номинальной траектории.

Таблица 6

**Изменение номинальной (для легкого КА) траектории
при изменении тяги в области тени**

(жирным выделены варианты с $|\Delta R_\pi|$, $|\Delta R_\alpha| > 10000$ км в верхней,
и > 5000 км – в нижней части таблицы)

| t ₀ [сут] | Конечная орбита | | | Невязки | | |
|---|----------------------------|----------------------------|------------|-------------------------|-------------------------|--------------|
| | R _π [тыс.км] | R _α [тыс.км] | T [сут] | ΔR _π [км] | ΔR _α [км] | Δi [град] |
| Тяга в области тени 0.97 от номинального значения | | | | | | |
| 0 | 43.5 | 45.5 | 120.5 | 1293 | 3305 | 0.53 |
| 20 | 41.2 | 56.0 | 128.8 | -998 | 12823 | 0.25 |
| 40 | 41.2 | 48.8 | 125.2 | -982 | 6636 | 0.16 |
| 60 | 40.6 | 41.8 | 120.4 | -1514 | -351 | 0.28 |
| 80 | 30.7 | 43.4 | 112.1 | -11465 | 1247 | 0.40 |
| 100 | 33.6 | 43.0 | 114.5 | -8571 | 813 | 0.32 |
| 120 | 38.5 | 42.6 | 117.6 | -3688 | 473 | 0.04 |
| 140 | 41.8 | 48.1 | 124.0 | -405 | 5891 | 0.07 |
| 160 | 39.5 | 61.3 | 133.0 | -2661 | 19130 | 0.90 |
| 180 | 38.6 | 62.5 | 134.4 | -3547 | 20334 | 1.09 |
| 200 | 39.4 | 56.1 | 130.7 | -2764 | 13965 | 0.70 |
| 220 | 40.5 | 48.9 | 126.1 | -1660 | 6780 | 0.39 |
| 240 | 41.5 | 42.9 | 121.8 | -680 | 744 | 0.24 |
| 260 | 38.2 | 42.3 | 118.1 | -3943 | 108 | 0.18 |
| 280 | 34.8 | 42.9 | 115.1 | -7408 | 716 | 0.16 |
| 300 | 32.5 | 43.3 | 112.9 | -9618 | 1161 | 0.11 |
| 320 | 32.1 | 43.6 | 112.0 | -10156 | 1447 | 0.06 |
| 340 | 35.0 | 43.8 | 113.3 | -7113 | 1613 | 0.44 |
| 360 | 42.2 | 43.6 | 118.2 | 82 | 1468 | 0.60 |
| Тяга в области тени 0.99 от номинального значения | | | | | | |
| 20 | 41.9 | 46.0 | 122.7 | -268 | 3868 | 0.02 |
| 80 | 37.6 | 42.6 | 117.1 | -4521 | 474 | 0.07 |
| 160 | 41.6 | 47.5 | 123.9 | -604 | 5290 | 0.11 |
| 180 | 41.4 | 47.6 | 124.3 | -788 | 5486 | 0.15 |
| 200 | 41.4 | 46.1 | 123.4 | -687 | 3961 | 0.13 |
| 320 | 38.5 | 42.8 | 117.3 | -3628 | 605 | 0.09 |

**Изменение номинальной (длинной) траектории
при изменении тяги в области тени**

(жирным выделены варианты с $|\Delta R_\pi|$, $|\Delta R_\alpha| > 10000$ км в верхней,
и > 5000 км – в нижней части таблицы)

| t ₀ [сут] | Конечная орбита | | | Невязки | | |
|---|----------------------------|----------------------------|------------|-------------------------|-------------------------|--------------|
| | R _π [тыс.км] | R _α [тыс.км] | T [сут] | ΔR _π [км] | ΔR _α [км] | Δi [град] |
| Тяга в области тени 0.97 от номинального значения | | | | | | |
| 0 | 42.5 | 66.2 | 306.8 | 308 | 24031 | 0.70 |
| 20 | 41.7 | 63.4 | 304.4 | -508 | 21276 | 0.58 |
| 40 | 41.5 | 52.4 | 288.4 | -672 | 10194 | 0.12 |
| 60 | 39.8 | 42.9 | 267.3 | -2356 | -191 | 0.21 |
| 80 | 32.5 | 42.6 | 253.1 | -9672 | 478 | 0.65 |
| 100 | 35,5 | 43.0 | 255.3 | -6662 | 866 | 0.22 |
| 120 | 40.0 | 43.1 | 262.5 | -2190 | 968 | 0.09 |
| 140 | 43.0 | 44.2 | 270.5 | 794 | 2075 | 0.19 |
| 160 | 42.5 | 46.6 | 275.9 | 347 | 4469 | 0.14 |
| 180 | 42.1 | 45.8 | 276.0 | -95 | 3661 | 0.07 |
| 200 | 41.9 | 43.0 | 272.3 | -308 | 811 | 0.03 |
| 220 | 39.9 | 41.8 | 267.6 | -2300 | -310 | 0.18 |
| 240 | 37.4 | 42.0 | 263.6 | -4745 | -208 | 0.33 |
| 260 | 35.9 | 42.1 | 260.9 | -6264 | -85 | 0.43 |
| 280 | 35.4 | 42.2 | 259.7 | -6714 | 9 | 0.44 |
| 300 | 36.6 | 42.2 | 261.1 | -5538 | 49 | 0.32 |
| 320 | 41.3 | 42.2 | 268.1 | -831 | 87 | 0.01 |
| 340 | 42.6 | 52.5 | 285.3 | 461 | 10300 | 0.05 |
| 360 | 42.7 | 65.0 | 304.7 | 525 | 22810 | 0.60 |
| Тяга в области тени 0.99 от номинального значения | | | | | | |
| 0 | 42.2 | 48.1 | 279.2 | 40 | 5904 | 0.08 |
| 20 | 42.1 | 47.6 | 278.9 | -107 | 5400 | 0.06 |
| 40 | 42.0 | 45.1 | 275.2 | -172 | 2947 | 0.02 |
| 340 | 42.2 | 45.1 | 274.2 | 83 | 2937 | 0.08 |
| 360 | 42.2 | 47.8 | 278.7 | 72 | 5670 | 0.09 |

Для «длинной» траектории это, очевидно, потому, что угловая дальность (232 витка) и продолжительность перелета (270 суток) больше. Для «легкого КА», хотя количество витков (105) раза в полтора меньше, чем на «средней» траектории – потому, что при том же изменении тяги в области тени ускорение изменяется с коэффициентом ≈ 2.4 .

Различные начальные приближения

Если есть какие-то решения краевой задачи с параметрами, близкими к требуемым, то можно пытаться использовать эти решения в качестве начального приближения. В рассматриваемой «неполной» краевой задаче это могут быть решения с близкими значениями даты старта t_0 или долготы восходящего узла Ω_0 .

Если таковых решений нет, то, как указывалось выше, иногда можно использовать в качестве начального приближения номинальные траектории. Но если траектория с большим количеством витков – может потребоваться решить серию краевых задач. Причем иногда, судя по данным таблиц 5-7, на это может потребоваться серия из нескольких десятков краевых задач.

На рис. 1 приведен пример серии из 10 краевых задач, с постепенным уменьшением тяги в области тени до нуля с шагом 0.1 (от максимального значения) для «средней» номинальной траектории. Учитывая, что решения с количеством витков как у номинальной траектории может не существовать для перелета с нулевой тягой в области тени, в процессе решения каждой краевой задачи оптимизировалось количество витков. Оптимальное количество витков выявлялось прямым перебором, т.е. фактически пришлось решить порядка трех десятков краевых задач.

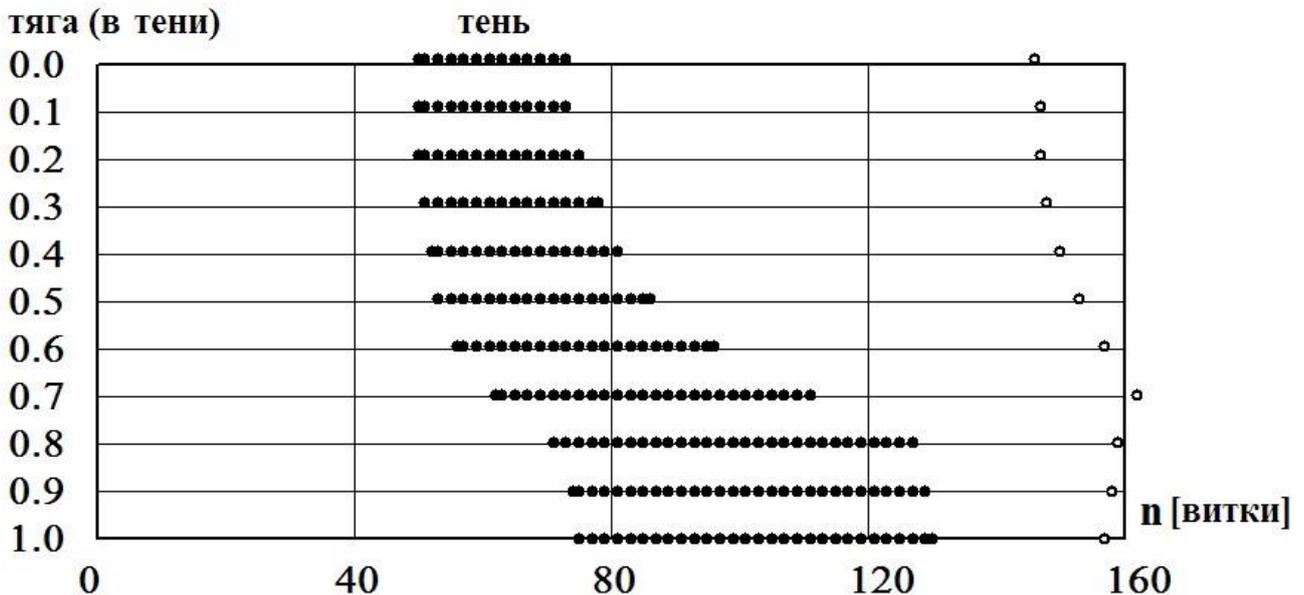


Рис. 1. Серия краевых задач с постепенным уменьшением тяги в области тени.

На рисунке представлены данные по траекториям с оптимальным количеством витков, последние витки отмечены белыми кружками. Черными кружками отмечены витки с участками тени (при данном масштабе – каждый второй и крайние в группе). В этом примере «эволюция» решения краевой задачи довольно существенна. На траектории с максимальной тягой в области тени количество витков с участками тени – 54 (это витки с 76-го по 129-й), при

общем количестве витков 157. На траектории с нулевой тягой в области тени количество витков с тенью – 24 (это витки с 50-го по 73-й), при общем количестве витков 146. То есть общее количество витков уменьшилось на 11, количество витков с тенью – на 30.

Но надо отметить, что это «очень плохой» вариант – различие в затратах рабочего вещества – 147 кг, или 30.3% от массы рабочего вещества (см. табл. 8 на стр. 14 для $t_0 = 137$ и $\Omega_0 = 50^0$). В «хороших» случаях различие невелико и по функционалу – затратам рабочего вещества, и по другим характеристикам траекторий.

Оптимизация количества витков N в процессе решения серии краевых задач – шаг и полезный, и необходимый. Но, тем не менее, не всегда удается таким образом получить решение краевой задачи. Одна из причин – если на какой-то промежуточной траектории мы столкнемся с ситуацией, когда на одном из витков участок тени окажется очень маленьким – траектория почти касается цилиндра тени. Особенно если это виток в начале траектории. Тогда существенно возрастает чувствительность к вариациям начальных значений сопряженных переменных и, при плохой обусловленности матрицы Якоби и ограниченной точности вычислений, итерационный процесс не сходится с достаточной точностью. Участок с тенью то исчезает, то появляется, но при этом иногда он не выявляется (из-за его малости), хотя он должен быть. В результате вектор Ньютона вычисляется недостаточно точно, и возникает «болтанка».

Такая ситуация не редкость, если решается большой массив задач, как, например, в табл. 8. Или если серия краевых задач длинная и много раз происходит «сдвиг» набора витков с участками тени по виткам. Но даже если в результате и удастся получить решение, часто эффективней может оказаться сдвиг по параметрам t_0 или Ω_0 , при условии, конечно, что уже есть близкие решения. При этом может быть полезным линейный прогноз изменения λ_0 при сдвиге по параметру. Но главной причиной, почему необходимо использовать разные начальные приближения и способы получения решения, является возможность существования нескольких решений. И чтобы получить наилучшее по функционалу решение, надо использовать разные подходы.

Возможность существования нескольких решений

Побочные решения были получены уже для «короткой» номинальной траектории. Но они были хуже по функционалу. Для «средней» траектории в некоторых случаях также были получены два или даже три решения.

В табл. 8, 9 приведены подробные данные по решениям «неполной» краевой задачи для параметра $\Omega_0 \in [0^0 - 350^0]$, и $t_0 = 0, 46$ ($\approx 1/8$ года), 91 (\approx четверть года), 137 ($\approx 3/8$ года), 183 (\approx полгода), 228 ($\approx 5/8$ года), 274 (\approx три четверти года) и 320 ($\approx 7/8$ года) суток.

Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ («средняя» траектория)

| t_0 [сут] | 0 | 46 | 91 | 137 | 183 | 228 | 274 | 320 |
|-------------------|---|-------------|------|--------------|-------------|-------------|------|--------------|
| Ω_0 [град] | $\Delta M_{РВ}$ [кг] (2% - 9.7 кг, 20% - 97 кг) | | | | | | | |
| 0 | 1.1 | 2.4 | 2.9 | 8.4 | 16.9 | 4.5 | 2.2 | 0.3 |
| 10 | 7.0 | 3.8 | 2.7 | 42.7 | 33.3 | 1.4 | 1.1 | 2.4 |
| 20 | 11.6 | 4.0 | 3.3 | 99.0 | 51.3 | 4.6 | 0.2 | 5.7 |
| 30 | 5.3 | 2.2 | 3.8 | 132.0 | 64.5 | 11.4 | -0.4 | 5.1 |
| 40 | 0.5 | -0.1 | 4.1 | 144.2 | 71.3 | 16.4 | -0.8 | 2.0 |
| 50 | -0.9 | -1.2 | 4.0 | 147.1 | 73.0 | 17.9 | -1.1 | -0.7 |
| 60 | 0.6 | -1.3 | 3.2 | 145.4 | 71.3 | 16.5 | -1.4 | -1.0 |
| 70 | 4.3 | -0.9 | 2.0 | 140.5 | 63.0 | 13.2 | -0.7 | 1.6 |
| 80 | 9.1 | -0.1 | 0.5 | 133.7 | 26.6 | 8.6 | 1.0 | 7.2 |
| 90 | 14.1 | 0.8 | -0.6 | 23.9 | 7.9 | 0.7 | 3.1 | 14.4 |
| 100 | 18.6 | 1.9 | -1.2 | 6.2 | 0.1 | -1.6 | 4.6 | 21.8 |
| 110 | 22.0 | 3.0 | -1.2 | -0.9 | 1.5 | -1.0 | 5.1 | 27.9 |
| 120 | 23.8 | 4.0 | -1.0 | 5.8 | 14.1 | 1.2 | 4.8 | 31.4 |
| 130 | 23.4 | 4.6 | -0.8 | 28.8 | 39.8 | 2.6 | 4.0 | 31.1 |
| 140 | 20.6 | 4.8 | -0.6 | 24.5 | 28.6 | 2.9 | 3.2 | 26.1 |
| 150 | 15.4 | 4.5 | -0.5 | 13.4 | 16.3 | 2.6 | 2.6 | 17.5 |
| 160 | 9.1 | 3.7 | -0.4 | 5.7 | 7.7 | 2.1 | 2.3 | 8.9 |
| 170 | 3.7 | 2.4 | -0.4 | 1.6 | 2.5 | 1.4 | 2.3 | 3.3 |
| 180 | 1.9 | 1.1 | -0.3 | 0.3 | 0.8 | 1.1 | 2.4 | 2.7 |
| 190 | 8.2 | 0.6 | -0.4 | 1.3 | 2.0 | 1.3 | 2.9 | 8.4 |
| 200 | 24.9 | 3.2 | -0.4 | 3.4 | 4.7 | 2.3 | 3.6 | 25.4 |
| 210 | 42.8 | 10.3 | -0.6 | 4.3 | 6.5 | 3.9 | 4.1 | 52.8 |
| 220 | 57.8 | 18.0 | -0.7 | 3.3 | 5.9 | 4.7 | 4.2 | 78.6 |
| 230 | 70.1 | 25.4 | -0.6 | 1.2 | 3.4 | 3.9 | 4.0 | 96.9 |
| 240 | 79.8 | 32.0 | 0.2 | -0.7 | 0.7 | 1.8 | 3.6 | 110.5 |
| 250 | 87.2 | 37.7 | 2.0 | -1.2 | -0.9 | -0.1 | 2.4 | 120.5 |
| 260 | 92.0 | 42.0 | 4.4 | 0.3 | -0.6 | -1.1 | 0.5 | 127.1 |
| 270 | 59.5 | 44.8 | 6.8 | 4.0 | 1.9 | -0.5 | -1.4 | 131.1 |
| 280 | 28.8 | 45.5 | 8.6 | 9.6 | 7.1 | 2.1 | -2.3 | 19.8 |
| 290 | 9.4 | 21.2 | 9.5 | 16.6 | 14.7 | 6.2 | -2.1 | 3.6 |
| 300 | -0.3 | 4.3 | 8.8 | 23.3 | 24.5 | 10.6 | -1.1 | -1.1 |
| 310 | 3.2 | -0.9 | 4.8 | 27.7 | 29.1 | 14.5 | 0.5 | 8.2 |
| 320 | 23.4 | 6.6 | 0.8 | 26.9 | 28.9 | 17.1 | 2.0 | 27.8 |
| 330 | 50.2 | 22.5 | 0.8 | 19.6 | 23.2 | 17.4 | 3.2 | 19.6 |
| 340 | 24.1 | 15.0 | 1.8 | 9.2 | 13.4 | 14.9 | 3.5 | 9.5 |
| 350 | 7.3 | 6.5 | 2.4 | 3.1 | 8.8 | 9.8 | 3.1 | 2.6 |

Изменение оптимального числа витков ΔN («средняя» траектория)

| t_0 [сут] | 0 | 46 | 91 | 137 | 183 | 228 | 274 | 320 |
|-------------------|--------------------|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Ω_0 [град] | ΔN [витки] | | | | | | | |
| 0 | +2 | +4 | +4 | +3 | -1 | +1 | 0 | +1 |
| 10 | +5 | +5 | +3 | 0 | -3 | +1 | 0 | +2 |
| 20 | +8 | +4 | +3 | -3 | -5 | 0 | 0 | +2 |
| 30 | +7 | +4 | +4 | -8 | -7 | -2 | 0 | +1 |
| 40 | +3 | +3 | +4 | -11 | -8 | -3 | 0 | +1 |
| 50 | +1 | +1 | +4 | -11 | -9 | -5 | 0 | +1 |
| 60 | 0 | 0 | +4 | -11 | -9 | -5 | +1 | +2 |
| 70 | 0 | 0 | +4 | -12 | +1 | -4 | +3 | +3 |
| 80 | 0 | -1 | +3 | -13 | -1 | -4 | +4 | +6 |
| 90 | +1 | -1 | +2 | +21 | -1 | -3 | +5 | +8 |
| 100 | +2 | -1 | +1 | +11 | +1 | 0 | +5 | +10 |
| 110 | +3 | -1 | +1 | +2 | +5 | +3 | +4 | +11 |
| 120 | +4 | -1 | 0 | -4 | +16 | +5 | +4 | +12 |
| 130 | +5 | 0 | 0 | -1 | +36 | +4 | +4 | +11 |
| 140 | +5 | 0 | 0 | +3 | +6 | +3 | +3 | +9 |
| 150 | +4 | 0 | 0 | +3 | +5 | +3 | +3 | +7 |
| 160 | +3 | 0 | 0 | +2 | +3 | +3 | +3 | +5 |
| 170 | +2 | 0 | 0 | +1 | +2 | +2 | +3 | +3 |
| 180 | +2 | 0 | 0 | +1 | +2 | +2 | +3 | +2 |
| 190 | +3 | 0 | 0 | +1 | +2 | +2 | +3 | +3 |
| 200 | 0 | +1 | 0 | +2 | +3 | +2 | +4 | +4 |
| 210 | -3 | -1 | 0 | +1 | +3 | +4 | +4 | +2 |
| 220 | -4 | -3 | 0 | 0 | +3 | +4 | +5 | -1 |
| 230 | -5 | -4 | 0 | 0 | +3 | +5 | +5 | -7 |
| 240 | -7 | -5 | +1 | 0 | +2 | +4 | +6 | -5 |
| 250 | -6 | -6 | +1 | +1 | +1 | +2 | +6 | -9 |
| 260 | -8 | -6 | +1 | +3 | +1 | +1 | +5 | -9 |
| 270 | +25 | -7 | 0 | +5 | +1 | 0 | +3 | -10 |
| 280 | +13 | -8 | 0 | +7 | +2 | -1 | +2 | +22 |
| 290 | +6 | -6 | 0 | +10 | +3 | -1 | 0 | +10 |
| 300 | +2 | -4 | -1 | +11 | +5 | 0 | -1 | 0 |
| 310 | +3 | +2 | -2 | +12 | +8 | 0 | -1 | -7 |
| 320 | +13 | +14 | +2 | +10 | +10 | +1 | -1 | +1 |
| 330 | +8 | +27 | +4 | +9 | +8 | +2 | 0 | +3 |
| 340 | +8 | +8 | +5 | +6 | +5 | +2 | 0 | +2 |
| 350 | +3 | +5 | +4 | +3 | +2 | +2 | 0 | +2 |

В табл. 8 показано, как изменяются затраты рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ [кг], а в табл. 9 – как меняется оптимальное количество витков ΔN , в сравнении с номинальной траекторией с $M_{РВ} = 485.31$ кг, $N = 157$ (см. табл. 2).

Из табл. 8 видно, что некоторые соседние варианты в столбцах, т.е. с одинаковым t_0 и близкими значениями Ω_0 , сильно отличаются по функционалу. Например, варианты с $t_0 = 137$ и $\Omega_0 = 80^\circ$ и 90° , $t_0 = 0$ и $\Omega_0 = 260^\circ$ и 270° , $t_0 = 320$ и $\Omega_0 = 270^\circ$ и 280° , и другие. «Очевидно», что они принадлежат разным ветвям решений. Особенно наглядно это видно из табл. 9, где соответствующие ΔN большие по абсолютной величине и разного знака: -13 и 21, -8 и 25, -10 и 22. Часто в этих случаях существует два, а иногда и три решения.

На рис. 2, 3 представлены графики зависимости $\Delta M_{РВ}$ и ΔN от Ω_0 для двух ветвей решений для $t_0 = 183$. Основная ветвь, решения которой существуют во всем диапазоне изменения параметра Ω_0 , помечена квадратиками: белыми – где функционал меньше, чем на второй ветви, черными – когда функционал больше. Решения второй ветви существуют в небольшом диапазоне углов и дают лучшие решения для Ω_0 в диапазоне $70^\circ - 130^\circ$ (помечены крестиками).

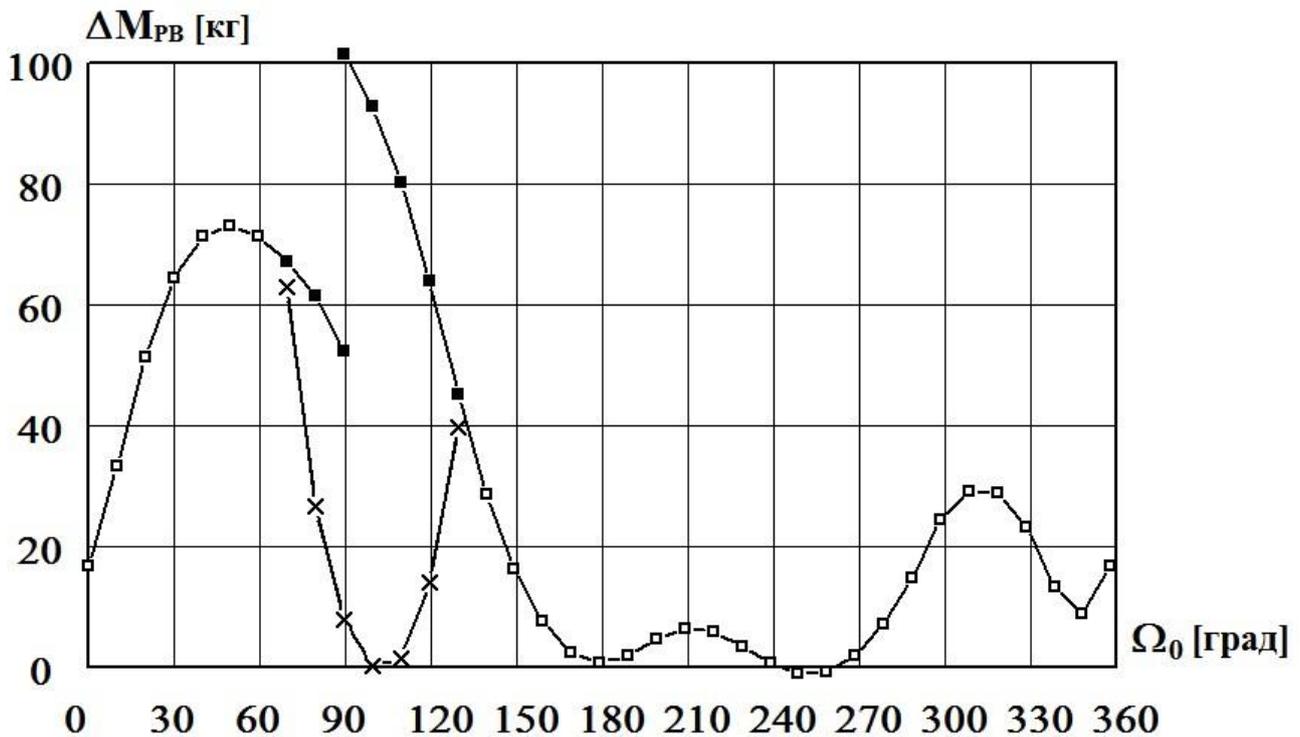


Рис. 2. Две ветви решений «неполной» краевой задачи для $t_0 = 183$ сут.
Зависимость $\Delta M_{РВ}$ от Ω_0 .

Если рассматривать небольшую окрестность значений Ω_0 вокруг 90° , можно сделать вывод, что имеются три ветви решений, однако это не так.

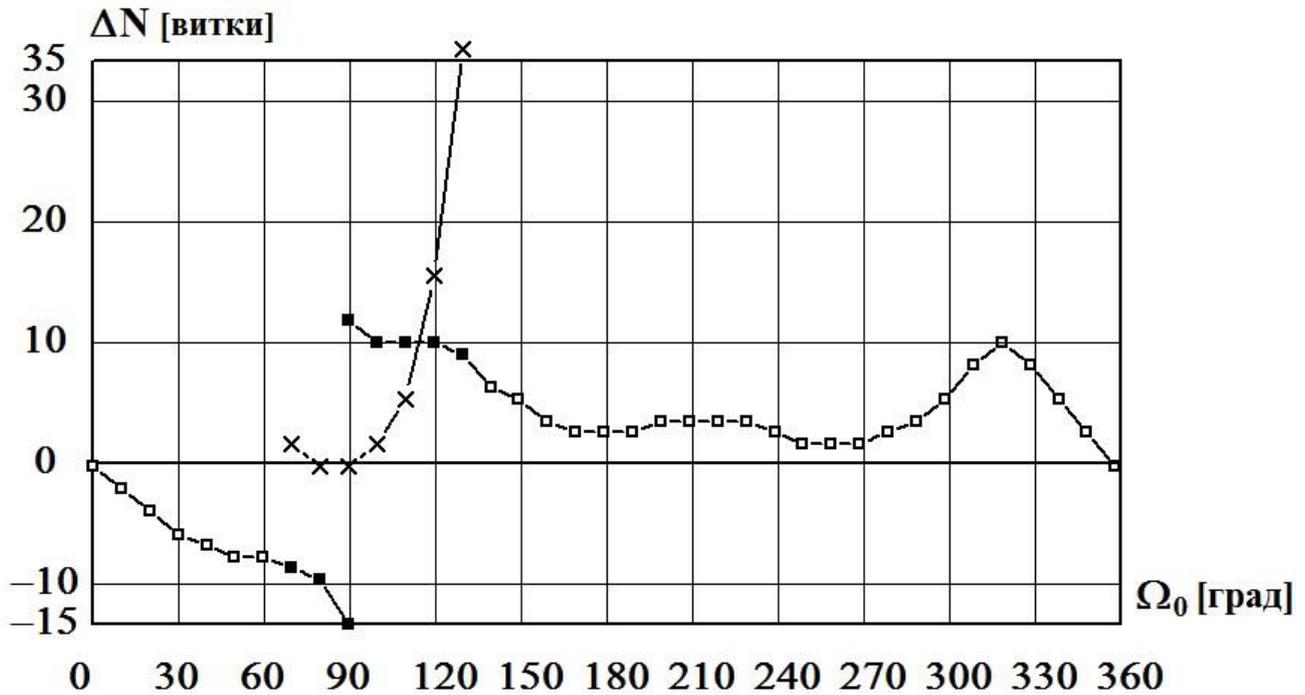


Рис. 3. Две ветви решений «неполной» краевой задачи для $t_0 = 183$ сут.
Зависимость ΔN от Ω_0 .

Особенностью первой ветви является то, что она не замкнута, хотя ее решения существуют для всех значений Ω_0 : при приближении Ω_0 к 90° слева мы получаем одно решение, при приближении Ω_0 к 90° справа – другое решение. В результате для $\Omega_0 = 90^\circ$ имеем три решения. Они приведены в табл. 10. Причем в данном случае все три решения существуют не только для оптимальных N (помечены звездочкой *), но и для $N = 157$ (как на номинальной траектории).

Таблица 10

Три решения «неполной» краевой задачи

(«средняя» траектория, $N = 157$, $t_0 = 183$ сут, $\Omega_0 = 90^\circ$, $\Delta M_{PB} = 485.31$ кг)

| | N [витки] | ΔN | T [сут] | ΔT [сут] | T_{Sh} [сут] | n_{Sh} [витки] | k_{Sh} | M_{PB} [кг] | ΔM_{PB} [кг] | ΔM_{PB} [%] |
|---|--------------|------------|------------|---------------------|-------------------|---------------------|----------|------------------|-------------------------|------------------------|
| 1 | 157 | 0 | 184.67 | 4.68 | 1.73 | 37-79 | 43 | 493.3 | 7.97 | 1.64 |
| | 156* | -1 | 184.61 | 4.62 | 1.70 | 37-78 | 42 | 493.2 | 7.87 | 1.62 |
| 2 | 157 | 0 | 205.07 | 25.08 | 1.29 | 30-58 | 29 | 549.4 | 64.14 | 13.22 |
| | 142* | -15 | 200.54 | 20.55 | 1.18 | 31-56 | 26 | 537.5 | 52.23 | 10.76 |
| 3 | 157 | 0 | 221.08 | 41.09 | 1.40 | 36-68 | 33 | 592.3 | 107.03 | 22.05 |
| | 165* | +8 | 219.25 | 39.26 | 1.59 | 37-74 | 38 | 586.9 | 101.59 | 20.93 |

В табл. 10 N , T , M_{PB} – количество витков, продолжительность перелета и затраты рабочего вещества; ΔN , ΔT , ΔM_{PB} – разница в количестве витков, продолжительности перелета и затратах рабочего вещества (в кг и % от 485.31 кг) на траектории с нулевой тягой в тени и на номинальной траектории; T_{Sh} – суммарная продолжительность участков с нулевой тягой; n_{Sh} , k_{Sh} – номера витков с тенью и их количество.

Эти три решения отличаются друг от друга очень сильно. Но могут быть и очень близкие по всем характеристикам решения. В табл. 11 приведены два таких решения для двух угловых дальностей: $N = 152$ и 153 витка. Все обозначения те же, что и в табл. 10.

Таблица 11

Два близких по характеристикам решения «неполной» краевой задачи
(«средняя» траектория, $N = 157$, $t_0 = 183$ сут, $\Omega_0 = 90^\circ$)

| | N [витки] | ΔN | ΔT [сут] | n_{Sh} [витки] | ΔM_{PB} [кг] | ΔM_{PB} [%] |
|---|----------------|------------|---------------------|---------------------|-------------------------|------------------------|
| 1 | 152 | -6 | 12.788 | 17-50 | 32.109 | 6.616 |
| | 153* | -5 | 12.753 | 17-50 | 32.003 | 6.594 |
| 2 | 152* | -6 | 12.761 | 17-50 | 32.026 | 6.599 |
| | 153 | -5 | 12.837 | 17-51 | 32.208 | 6.637 |

Для угловой дальности $N = 152$ на этих траекториях одинаковы даже витки с участками тени, но положение участков тени на витках немного отличается. На 17-м витке тень в диапазоне $[291.139^\circ, 296.049^\circ]$ углов θ на 1-й траектории, и в диапазоне $[291.148^\circ, 296.039^\circ]$ – на 2-й. На 50-м витке тень в диапазоне углов $[333.289^\circ, 339.147^\circ]$ и $[332.291^\circ, 339.702^\circ]$ соответственно.

Слабое влияние тени на витках в конце траектории

В табл. 8 все результаты расчетов разделены на две группы. В первой – условно говоря, «хорошие» варианты, у которых затраты рабочего вещества либо не хуже, чем на номинальной траектории, либо превышают их не более чем на 9.7 кг, или 2%. Во второй – все остальные, с $\Delta M_{PB} > 9.7$ кг – они выделены жирным. Сразу бросается в глаза, что в двух столбцах, с $t_0 = 91$ и 274 суток, все варианты «хорошие». На первый взгляд, то, что ΔM_{PB} слабо меняется с изменением Ω_0 , выглядит странно, особенно в сравнении с другими столбцами, в которых изменения очень большие. Но это частично, а именно в отношении того, почему группа витков в конце траектории с изменением параметра Ω_0 почти не влияет на функционал, объясняется просто.

Даты $t_0 = 91$ и 274 суток (от начала года) дней на 10 позже весеннего и осеннего равноденствия. Продолжительность номинальной траектории 180 суток – около полугода, поэтому концы траекторий – лишь на неделю позже

осеннего и весеннего равноденствия, когда Солнце находится вблизи экватора. Поэтому витки в конце траектории, имеющие малое наклонение, пересекают цилиндр тени. Но эти витки имеют и малый эксцентриситет. Изменение параметра Ω_0 означает поворот номинальной траектории как целого вокруг оси вращения Земли. На это можно посмотреть по-другому: что Солнце вращается в плоскости экватора вокруг траектории, так что участки тени смещаются по кругу вдоль почти круговых витков. Насколько ситуация близка к симметричной, видно из рис. 4, где показаны каждый седьмой виток из группы последних витков с тенью со 129-го по 157-й на номинальной траектории с $t_0 = 274$ суток, $\Omega_0 = 0^0$.

Отметим, что в данном случае группа витков с тенью в конце траектории (есть еще витки с тенью в начале траектории) состоит из 29 витков – это 18.5%, или почти пятая часть от всей угловой дальности перелета, а по продолжительности – 32.4 суток, или 17.7%.

На траектории, реализующей такой перелет (т.е. с $t_0 = 274$ суток, $\Omega_0 = 0^0$) с нулевой тягой в области тени, количество витков с тенью увеличивается до 31 (127-й – 157-й витки), $\Delta M_{PB} = 2.19$ кг. А на траектории с $\Omega_0 = 50^0$ группа витков с тенью состоит из 34 витков (124-й – 157-й витки), $\Delta M_{PB} = -1.15$ кг. По угловой дальности это 21.7%, по продолжительности перелета 19.4%.

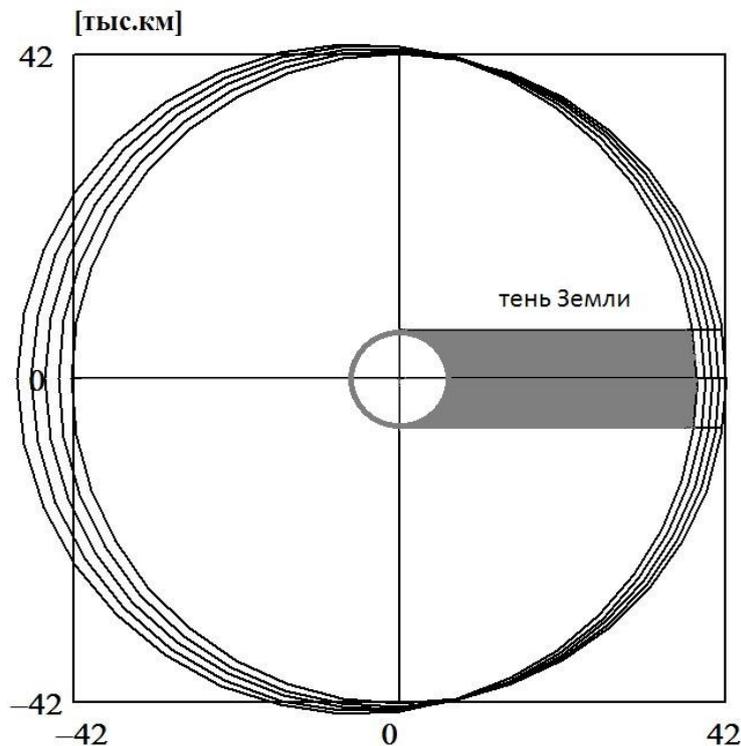


Рис. 4. Витки 129, 136, 143, 150, 157 с тенью на номинальной траектории, наклонение уменьшается с 1^0 до 0^0 .

Особое положение начальной орбиты по отношению к орбите Солнца

Из табл. 8 видно, что наряду с «хорошими» столбцами есть несколько строк, в которых также все или почти все варианты «хорошие». Это строки с Ω_0 , равным $160^\circ - 190^\circ$, и 350° . Среди них особо выделяется строка с $\Omega_0 = 180^\circ$, в которой значения $\Delta M_{РВ}$ не превышают 2.7 кг, или 0.56%. Ясно, что дело, скорее всего, именно в начальной орбите, представляющей собой сильно вытянутый эллипс с эксцентриситетом $e = 0.685$ (радиус перигея 15.6, апогея 83.2 тыс. км). К тому же наибольшее наклонение на многовитковой траектории перелета на ГСО именно в начальный момент времени, в данном случае $i = 13^\circ$.

Еще один аргумент в пользу высказанного предположения – то, что возмущения в начале траектории обычно сильнее влияют на конечные значения, чем возмущения в середине траектории, и тем более в конце. Из общих соображений также можно предположить, что дело не только в параметрах самой начальной орбиты и ее положении относительно орбиты ГСО, но и в ее положении относительно орбиты Солнца.

В чем особенность положения начальной орбиты с $\Omega_0 = 180^\circ$, хорошо видно на рис. 5. На нем показаны в проекции на плоскость $\langle Y, Z \rangle$ небесной системы координат: плоскость эклиптики, в которой находится орбита Солнца, плоскость экватора, в которой находится ГСО, плоскость начальной орбиты для $\Omega_0 = 180^\circ$ и плоскость начальной орбиты для $\Omega_0 = 0^\circ$. Все эти плоскости проходят через ось X (на рисунке в проекции дает точку O на пересечении осей Y, Z , направлена в сторону от зрителя).

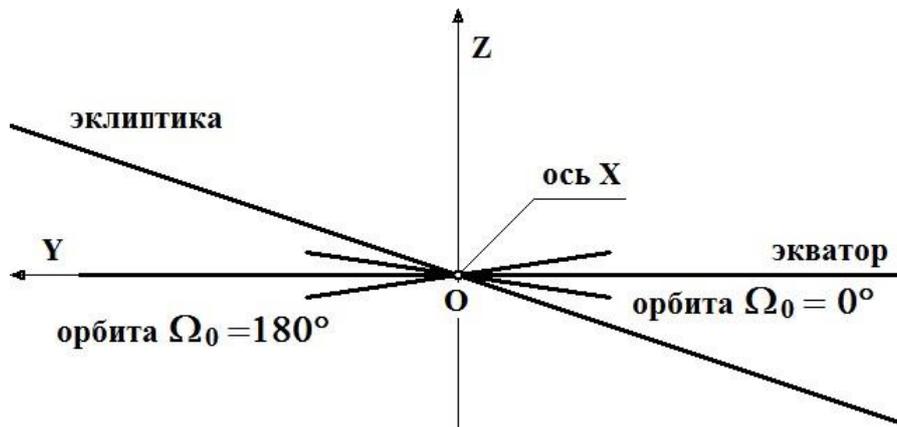


Рис. 5. Проекция плоскостей эклиптики, экватора и начальной орбиты на плоскость $\langle Y, Z \rangle$ небесной системы координат.

Плоскости начальных орбит с $\Omega_0 = 0^\circ$ и 180° расположены симметрично относительно плоскости экватора. Большие оси орбит – линии апсид – совпадают с осью X , но направлены противоположно друг другу. При движении Солнца по орбите цилиндр тени замечает окрестность плоскости эклиптики, пересекая начальные орбиты вблизи оси X , т.е. вблизи их линий

апсид, в окрестности перигея и апогея. Линии апсид являются осями симметрии эллипса, и именно это является главной особенностью орбит с $\Omega_0 = 0^\circ$ и 180° , т.к. возмущения от участков тени, расположенных вблизи оси симметрии, по-видимому, легче нивелировать.

Но между двумя этими орбитами есть различия. Во-первых, это противоположные направления больших осей. Во-вторых – разное положение плоскостей орбит по отношению к плоскости эклиптики. Для орбиты с $\Omega_0 = 180^\circ$ угол между плоскостью орбиты и плоскостью эклиптики равен $23.5^\circ + 13^\circ = 36.5^\circ$, для орбиты с $\Omega_0 = 0^\circ$ он равен $23.5^\circ - 13^\circ = 10.5^\circ$. А чем меньше этот угол, тем больший отрезок орбиты заматывается цилиндром тени. Например, при наклонении орбиты $i = 23.5^\circ$ угол будет равен 0° , т.е. начальная орбита с $\Omega_0 = 0^\circ$ будет лежать в плоскости эклиптики, и цилиндр тени будет заматывать всю орбиту. В результате по затратам $\Delta M_{РВ}$ строка с $\Omega_0 = 0^\circ$ в табл. 8 оказывается хуже, чем с $\Omega_0 = 180^\circ$.

Тень как барьер

В отличие от других возмущающих факторов – гравитационного влияния Луны, Солнца, вариаций геопотенциала, которые представляют собой поле сил, рассматриваемое влияние тени таковым не является. Тень ведет себя, скорее, как барьер. А проявляется это, в частности, в сильном изменении количества витков, как на рис. 1, 2, 3. Каков механизм такого воздействия?

В [8], где рассматривались перелеты без тени, было показано, что существует много решений краевой задачи, различающихся количеством витков. Причем в большом диапазоне изменения витков (он тем больше, чем больше угловая дальность перелета на ГСО) функционал меняется не сильно. В случае постоянно работающей и постоянной по величине тяги это эквивалентно тому, что в этом диапазоне витков почти постоянна продолжительность перелета.

И здесь напрашивается аналогия со спирально закрученной пружиной будильника. Только в случае с пружиной постоянна длина пружины. При скручивании пружины увеличивается количество витков, а так как общая длина не изменяется – уменьшаются длина каждого витка и его размеры. Так же и с многовитковой траекторией: с увеличением количества витков при почти постоянной общей продолжительности перелета продолжительность каждого витка и его размеры уменьшаются. С уменьшением количества витков их размеры, наоборот, увеличиваются. Частично за счет этого можно "обогнуть" препятствие в виде цилиндра тени. А в зависимости от того, с наружной или внутренней стороны витков находится цилиндр тени, количество витков будет уменьшаться или увеличиваться. Именно этим, по-видимому, можно объяснить эффекты, проявляющиеся на рис. 1,2,3. Хотя в реальности все сложнее, поскольку витков с тенью много, цилиндр тени от витка к витку смещается в пространстве, и продолжительность перелета может изменяться очень сильно.

Ω_0 -портреты с тенью для «средней» траектории

На рис. 6-13 даны Ω_0 -портреты с тенью для 8 значений t_0 – тех же, что и в табл. 8. Напомним, что на этих «портретах» по оси ординат отсчитываются номера витков, по оси абсцисс – параметр Ω_0 (при заданном значении t_0), и черными кружками помечены витки с участками тени. На них особенно хорошо проявляются разные ветви решений.

Для каждого t_0 даны два портрета: вверху – портреты для решений «неполной» краевой задачи с нулевой тягой в области тени, внизу – для номинальной траектории. Из их сравнения видно, как изменяется количество участков с тенью и их местоположение на траектории. Наименьшие различия, как и следовало ожидать, на рис. 8 ($t_0 = 91$ сут) и 12 ($t_0 = 274$ сут). А также на рис. 11 ($t_0 = 228$ сут).

На верхних рисунках дополнительно отмечены белыми кружками последние витки, если на них нет участков с тенью, что позволяет увидеть, как изменяется оптимальное количество витков. Отметим, что на рис. 7(а) на двух траекториях с $\Omega_0 = 270$ и 280 на последнем витке есть участок с тенью, на всех остальных траекториях тени на последнем витке нет. Поэтому для двух значений параметра Ω_0 последний виток отмечен черным кружком, для всех остальных – белым.

Основные результаты

Рассматривается многовитковый перелет на ГСО с начальной эллиптической орбиты с расстоянием в перигее ≈ 15.6 и в апогее ≈ 83.2 тыс. км, и наклоном 13° , в центральном ньютоновом поле Земли, с постоянной по величине малой тягой. Начальное значение истинной аномалии и аргумент перицентра начальной орбиты заданы нулевыми. Дата старта t_0 и начальное значение долготы восходящего узла Ω_0 рассматриваются как параметры задачи. В отсутствие возмущений затраты рабочего вещества $M_{РВ}$ на перелет (т.н. номинальное значение) не зависят от этих параметров. Но величина $M_{РВ}$ меняется с изменением параметров, если тяга обнуляется в области тени. Для нахождения траекторий перелета с учетом возмущения от тени решается краевая задача. Однако при этом не учитываются оптимальные условия пересечения границ тени. Такая краевая задача названа «неполной». Получаемые в результате ее решения траектории неоптимальны. С целью выяснить, насколько может быть полезной «неполная» краевая задача, т.е. при каких значениях параметров величина $M_{РВ}$ близка к номинальному значению, проведены подробные расчеты для 8 значений t_0 (с интервалом в полтора месяца) и 36 значений Ω_0 (с шагом 10°). Они показали, что для $\Omega_0 = 180^\circ$ и всех значений t_0 отличие $M_{РВ}$ от номинального значения менее 1%. Особенностью краевой задачи является возможность существования разных ветвей решений. Поэтому важно использовать разные начальные приближения, решая задачу.

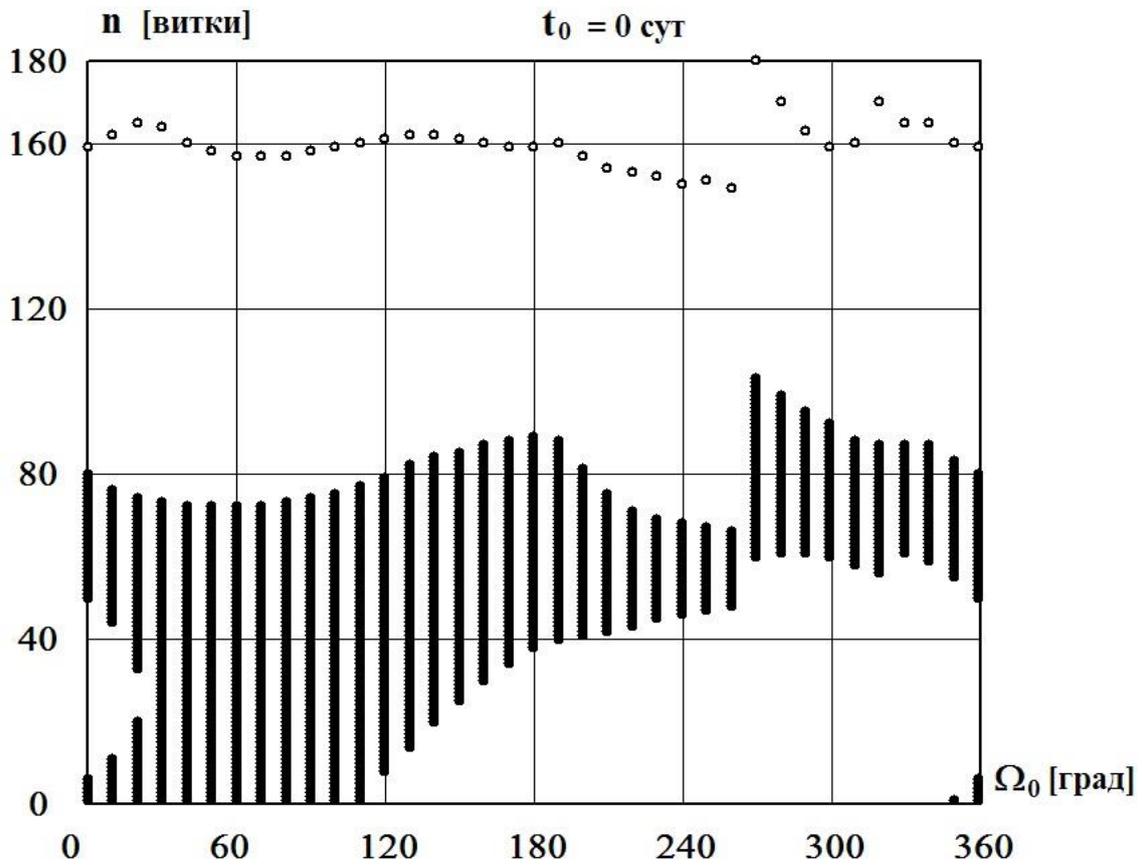


Рис. 6(а). Ω_0 -портрет траекторий с нулевой тягой в области тени; $t_0 = 0$ сут.

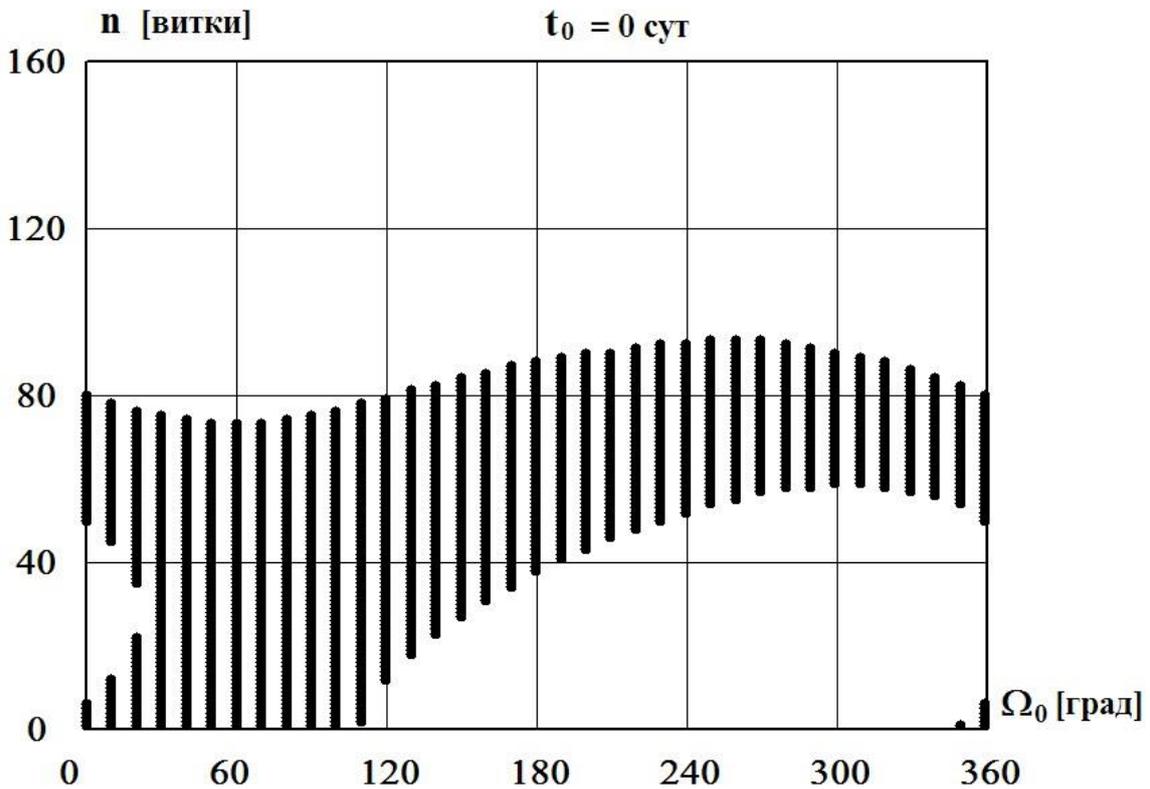


Рис. 6(б). Ω_0 -портрет номинальной «средней» траектории; $t_0 = 0$ сут.

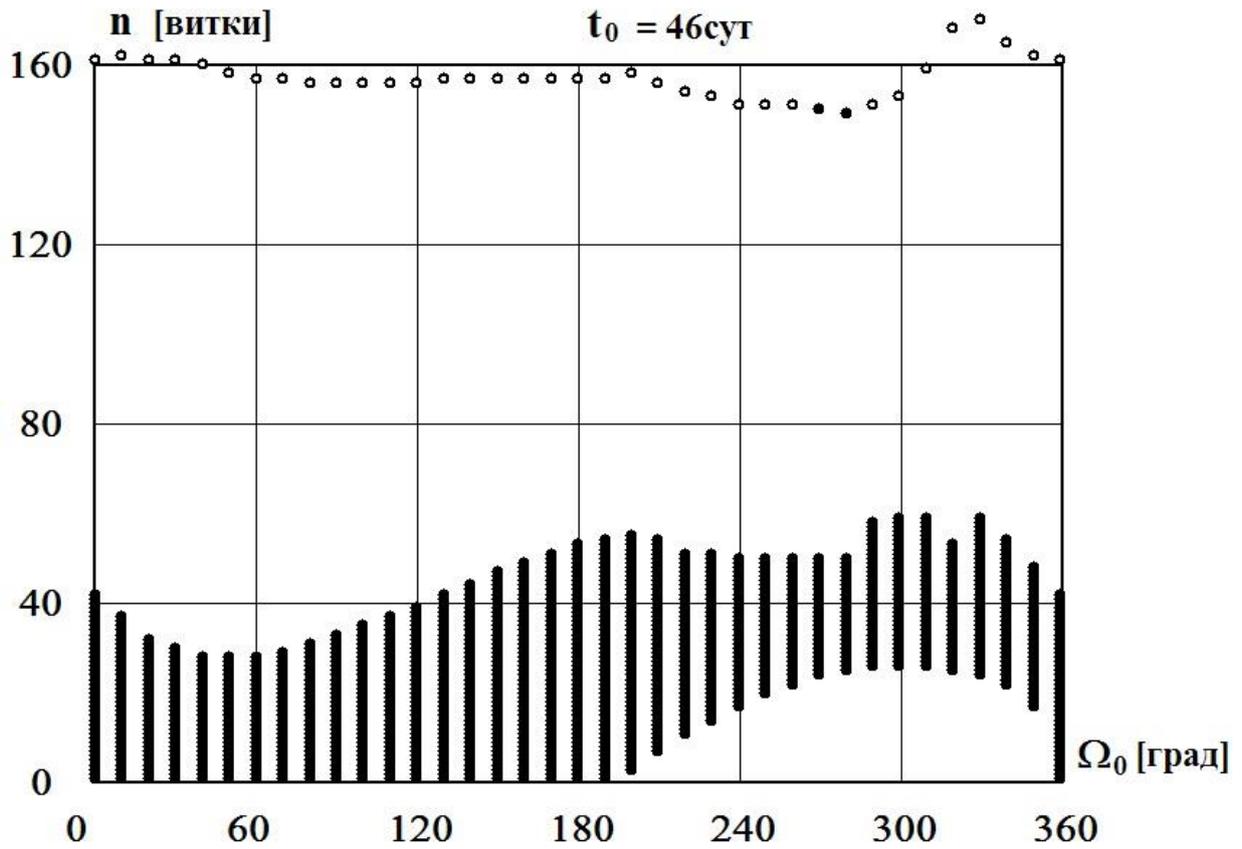


Рис. 7(а). Ω_0 -портрет траекторий с нулевой тягой в области тени; $t_0 = 0$ сут.

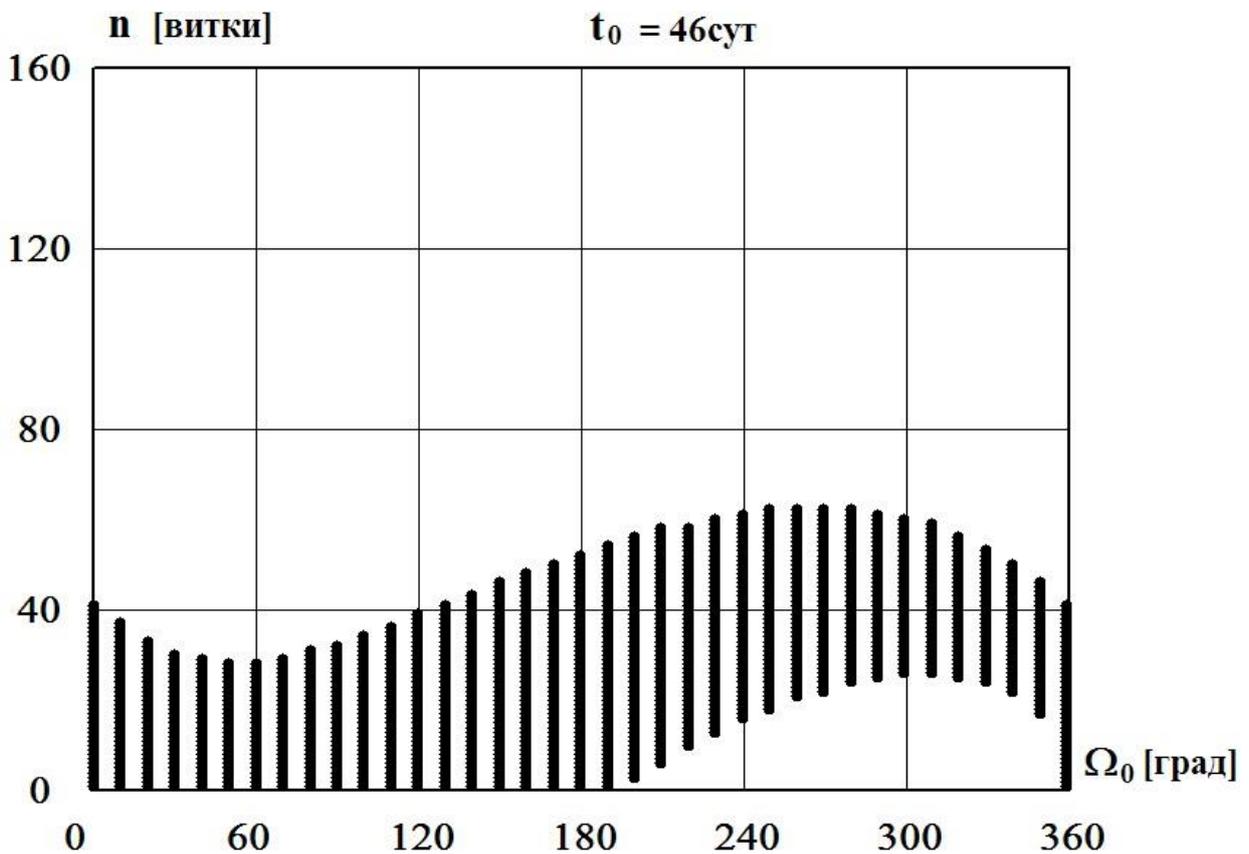


Рис. 7(б). Ω_0 -портрет номинальной «средней» траектории; $t_0 = 46$ сут.

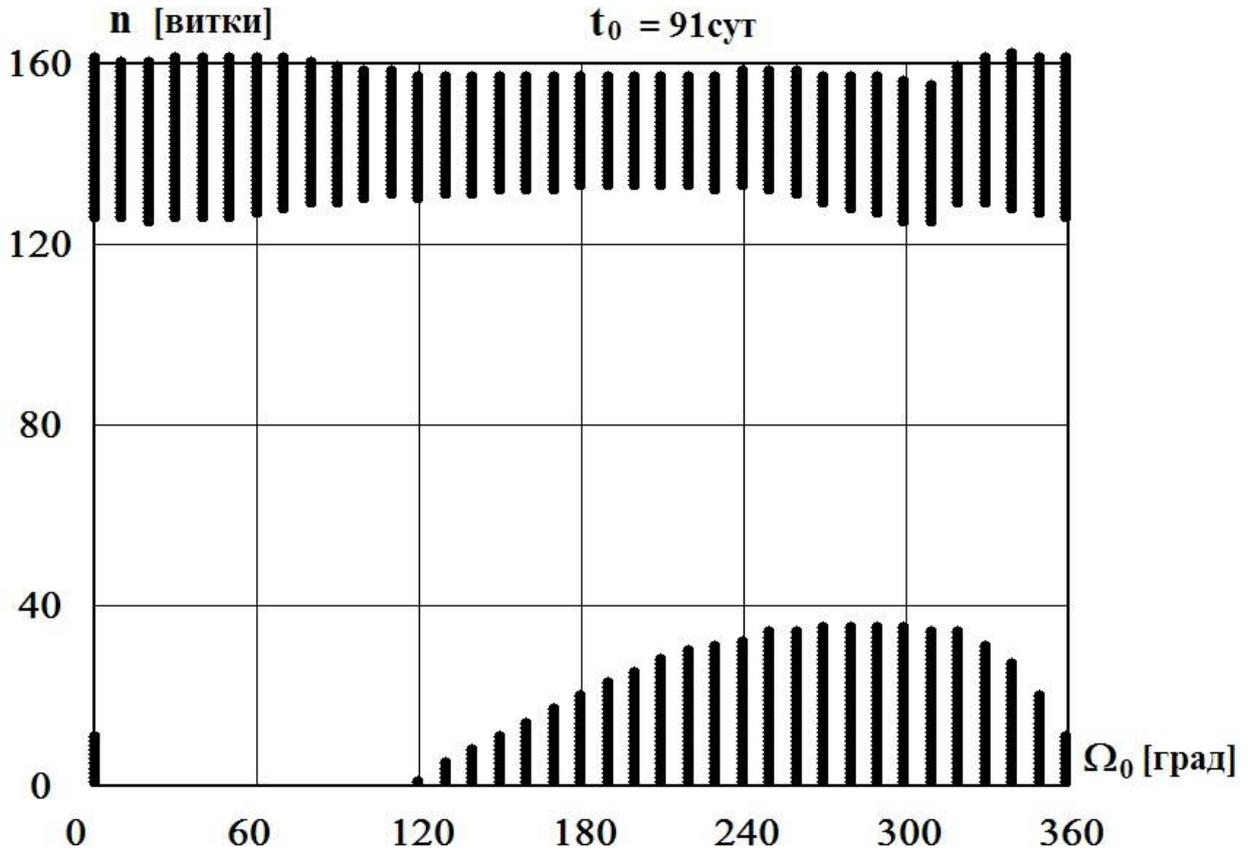


Рис. 8(а). Ω_0 -портрет траекторий с нулевой тягой в области тени; $t_0 = 91$ сут.

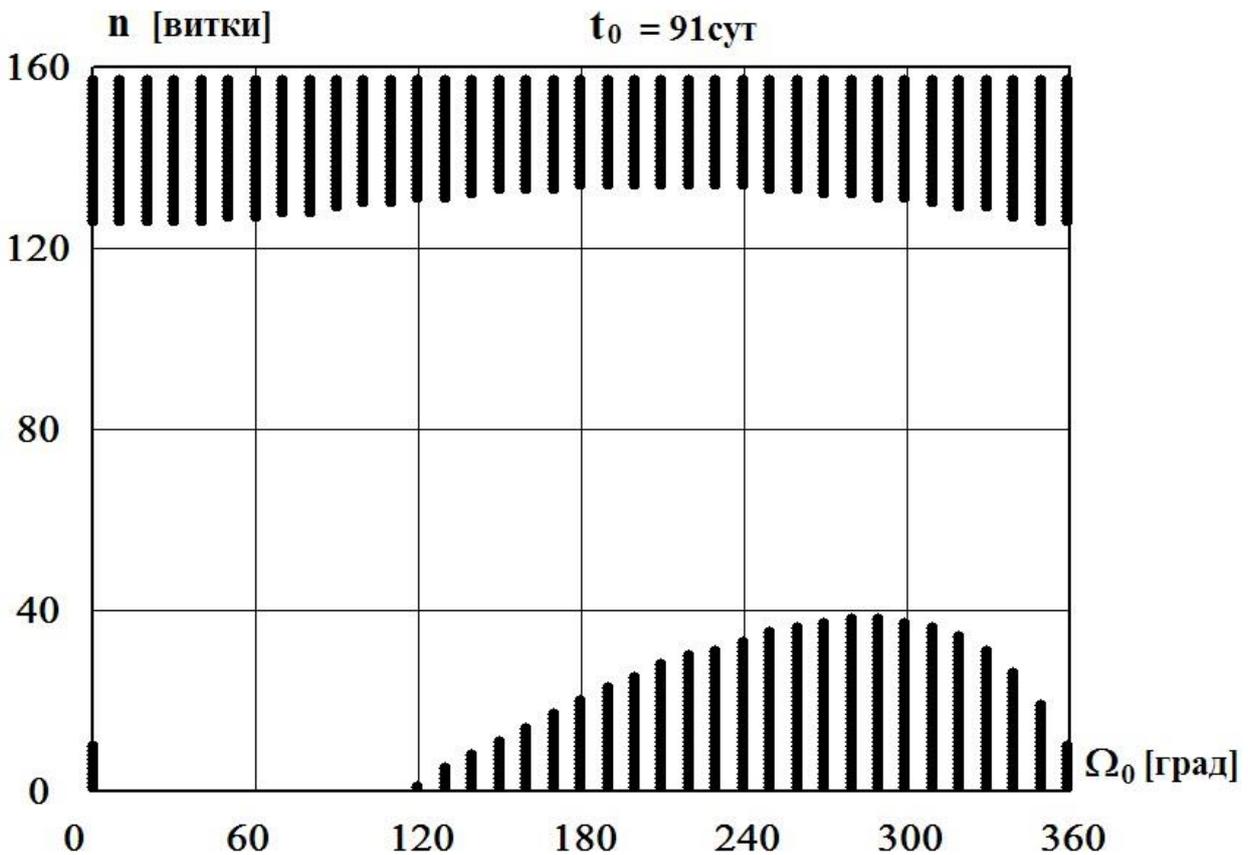


Рис. 8(б). Ω_0 -портрет номинальной «средней» траектории; $t_0 = 91$ сут.

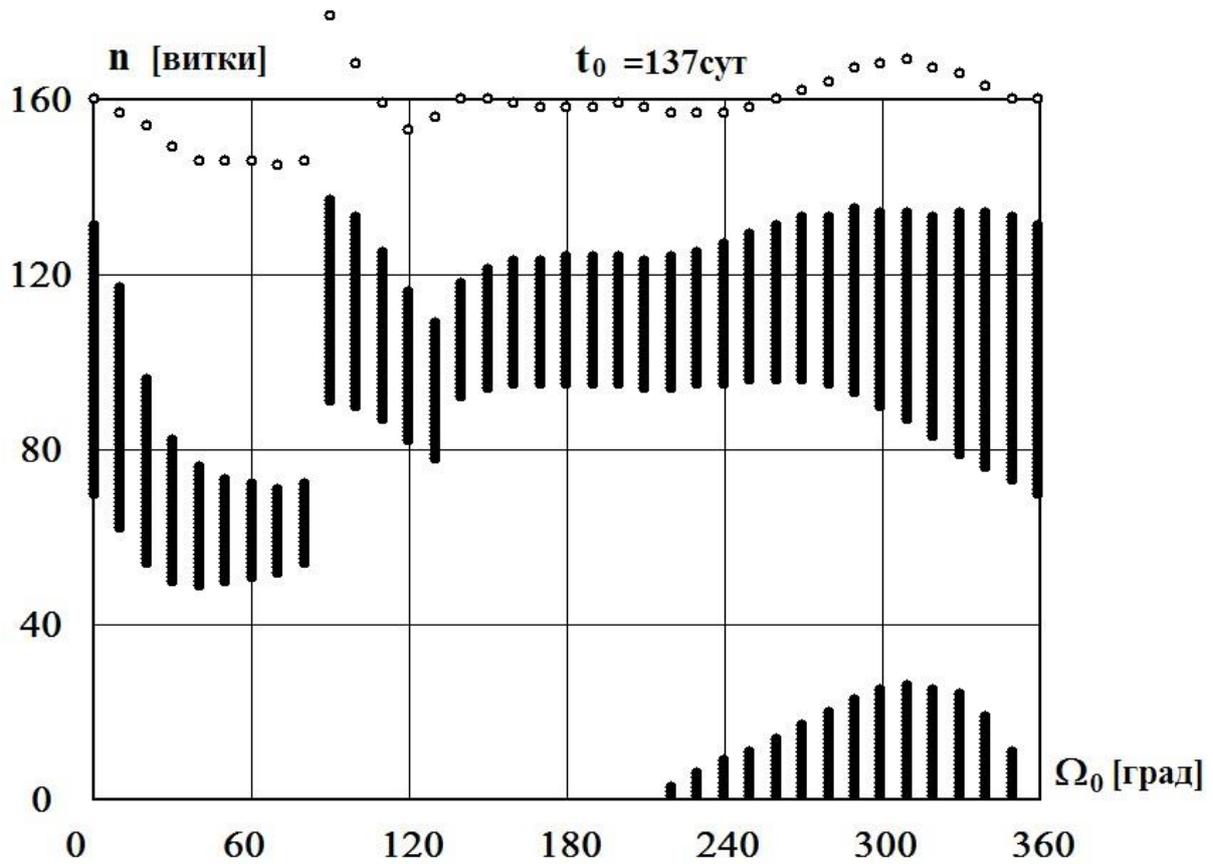


Рис. 8(а). Ω_0 -портрет траекторий с нулевой тягой в области тени; $t_0 = 137$ сут.

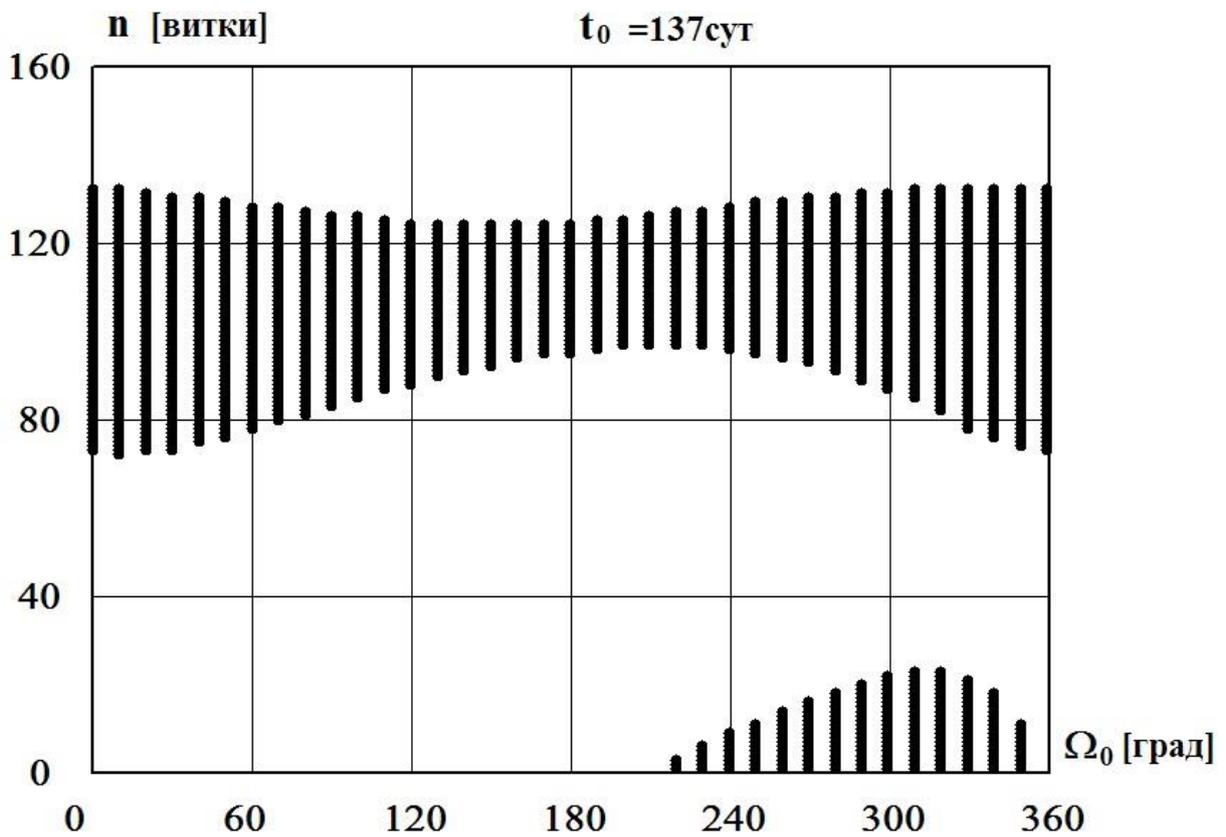


Рис. 9(б). Ω_0 -портрет номинальной «средней» траектории; $t_0 = 137$ сут.

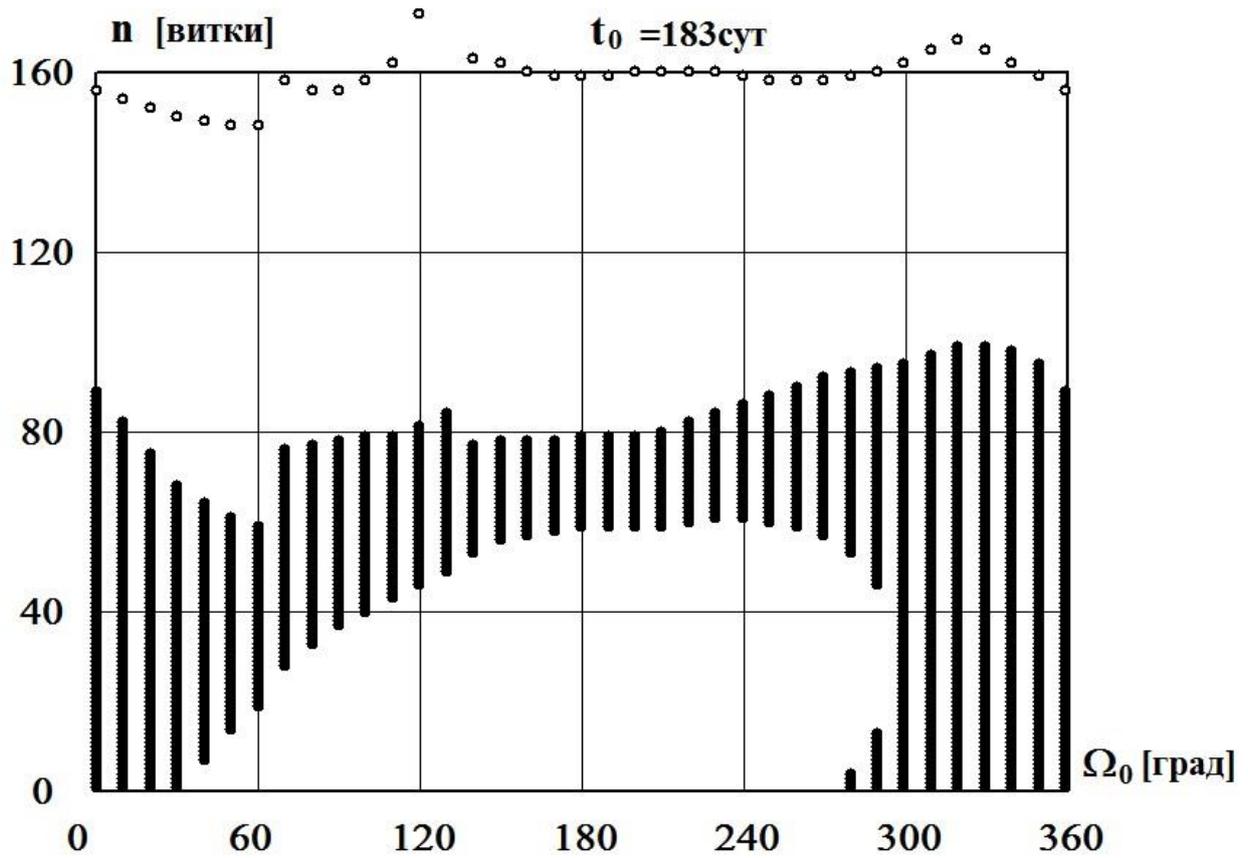


Рис. 10(а). Ω_0 -портрет траекторий с нулевой тягой в области тени; $t_0 = 183$ сут.

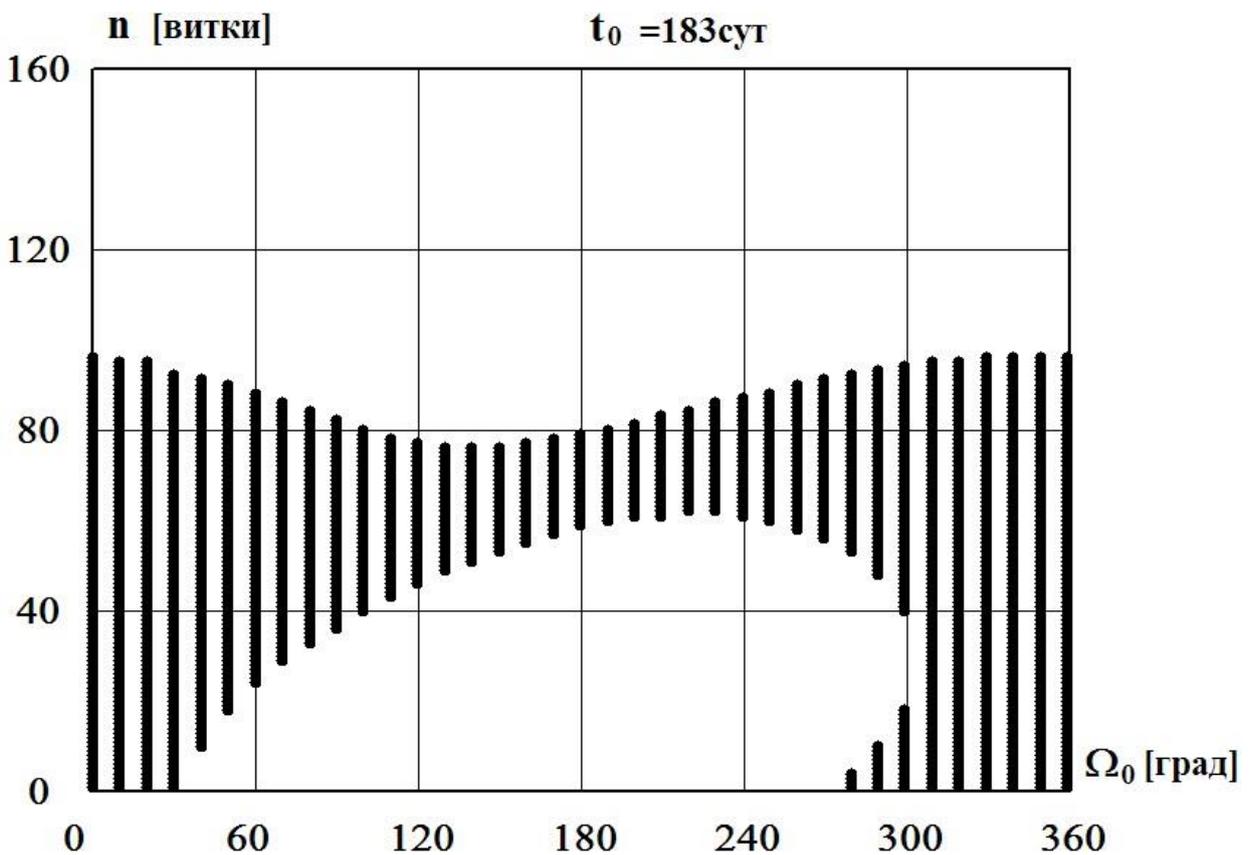


Рис. 10(б). Ω_0 -портрет номинальной «средней» траектории; $t_0 = 183$ сут.

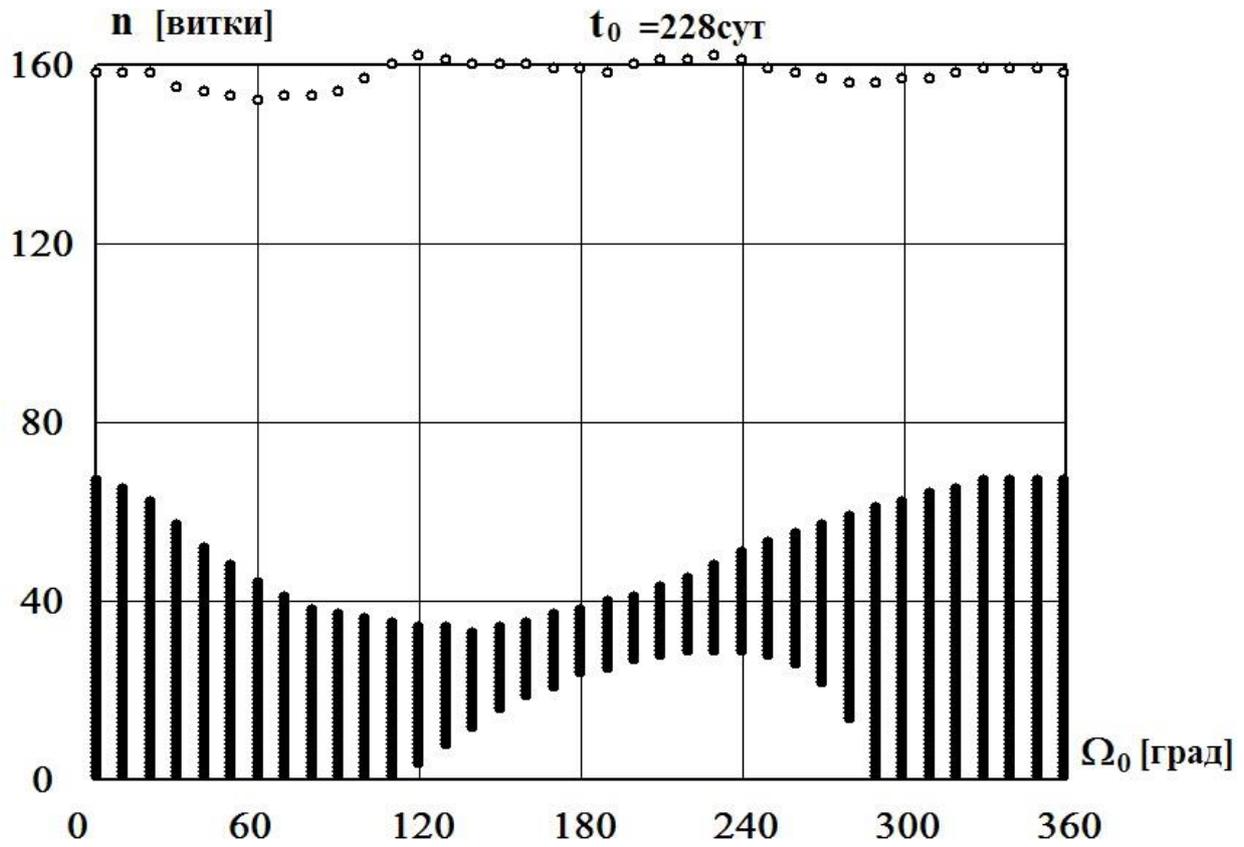


Рис. 11(а). Ω_0 -портрет траекторий с нулевой тягой в области тени; $t_0 = 228$ сут.

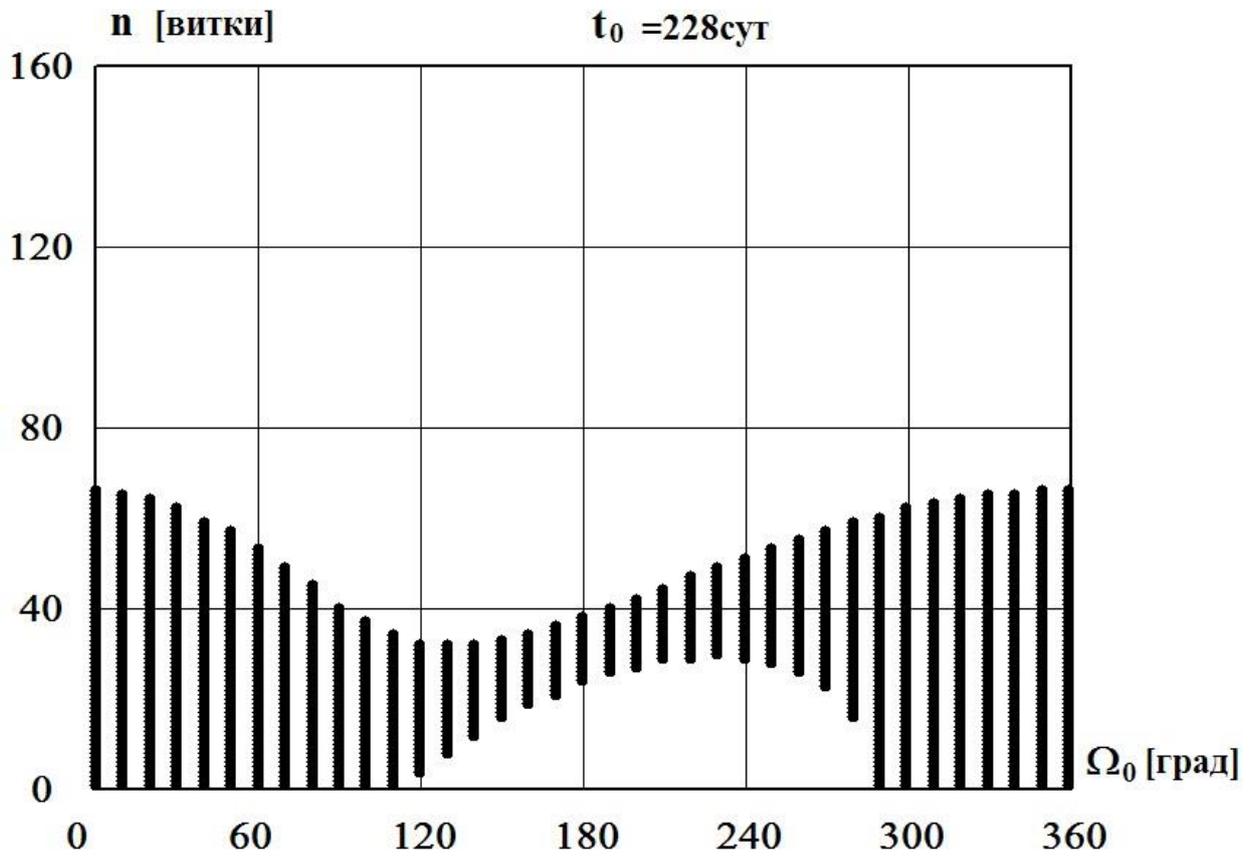


Рис. 11(б). Ω_0 -портрет номинальной «средней» траектории; $t_0 = 228$ сут.

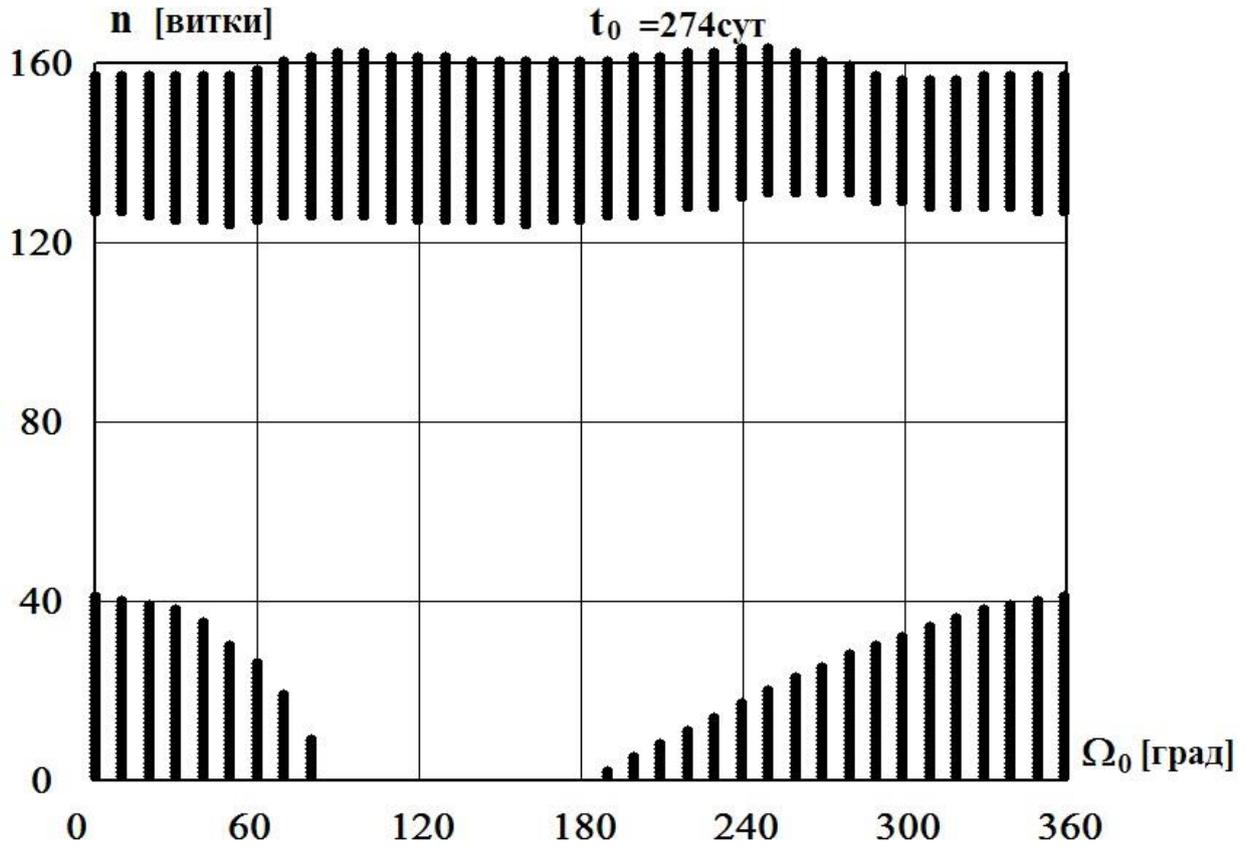


Рис. 12(а). Ω_0 -портрет траекторий с нулевой тягой в области тени; $t_0 = 274$ сут.

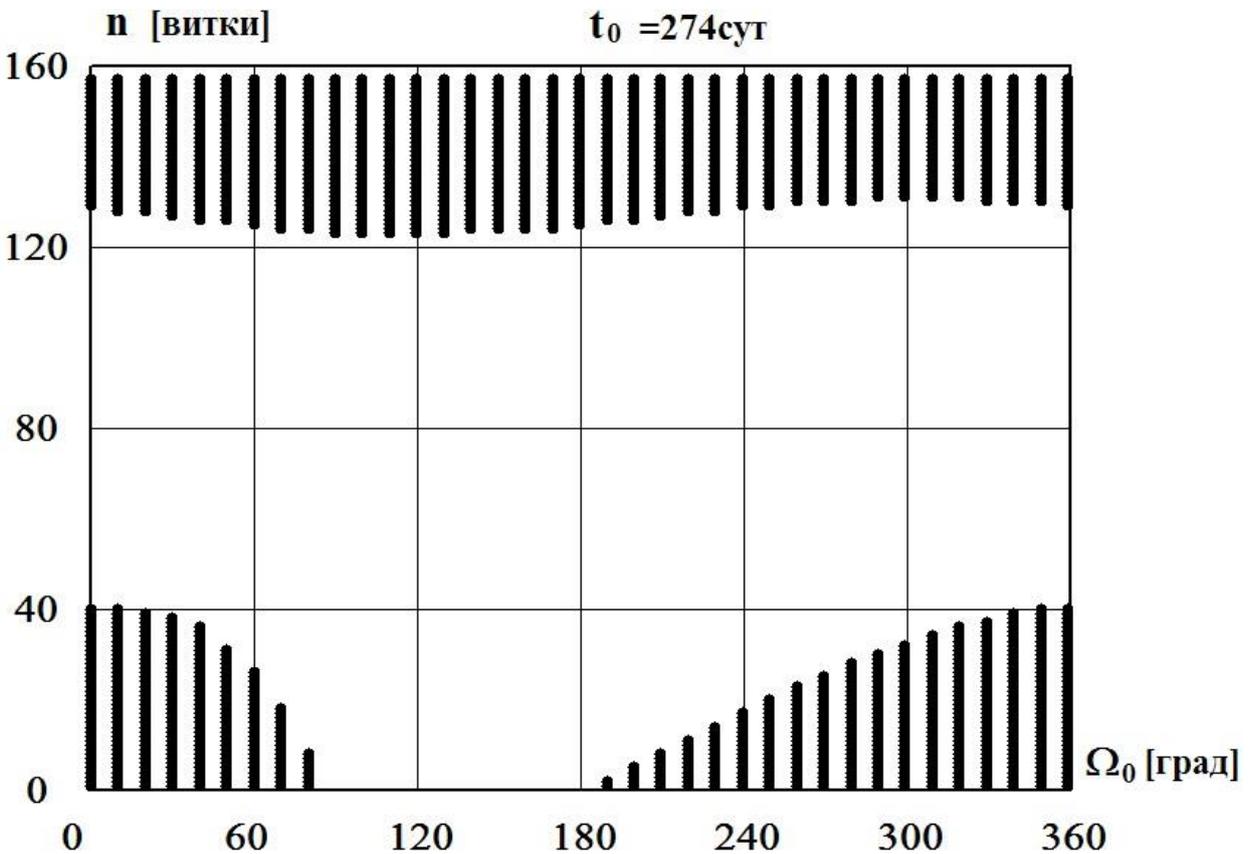


Рис. 12(б). Ω_0 -портрет номинальной «средней» траектории; $t_0 = 274$ сут.

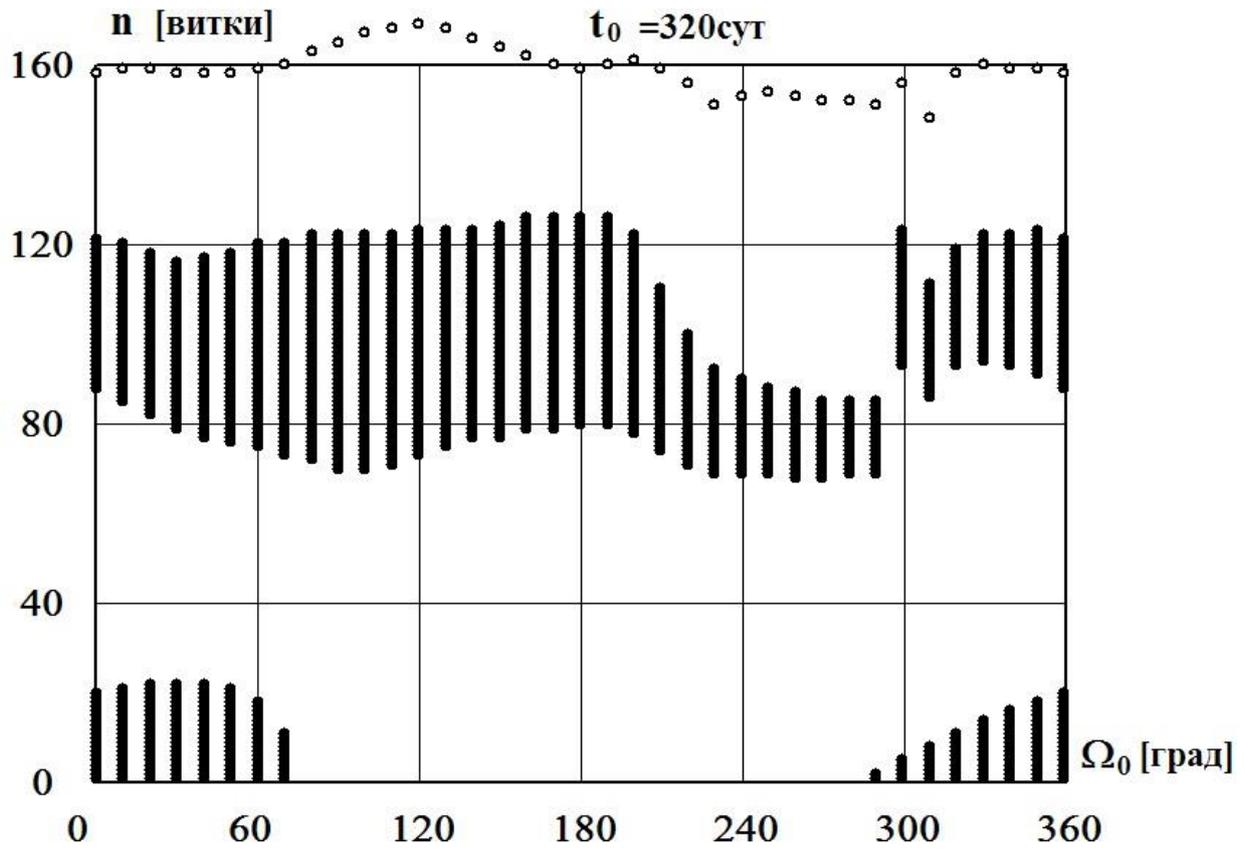


Рис. 13(а). Ω_0 -портрет траекторий с нулевой тягой в области тени; $t_0 = 320$ сут.

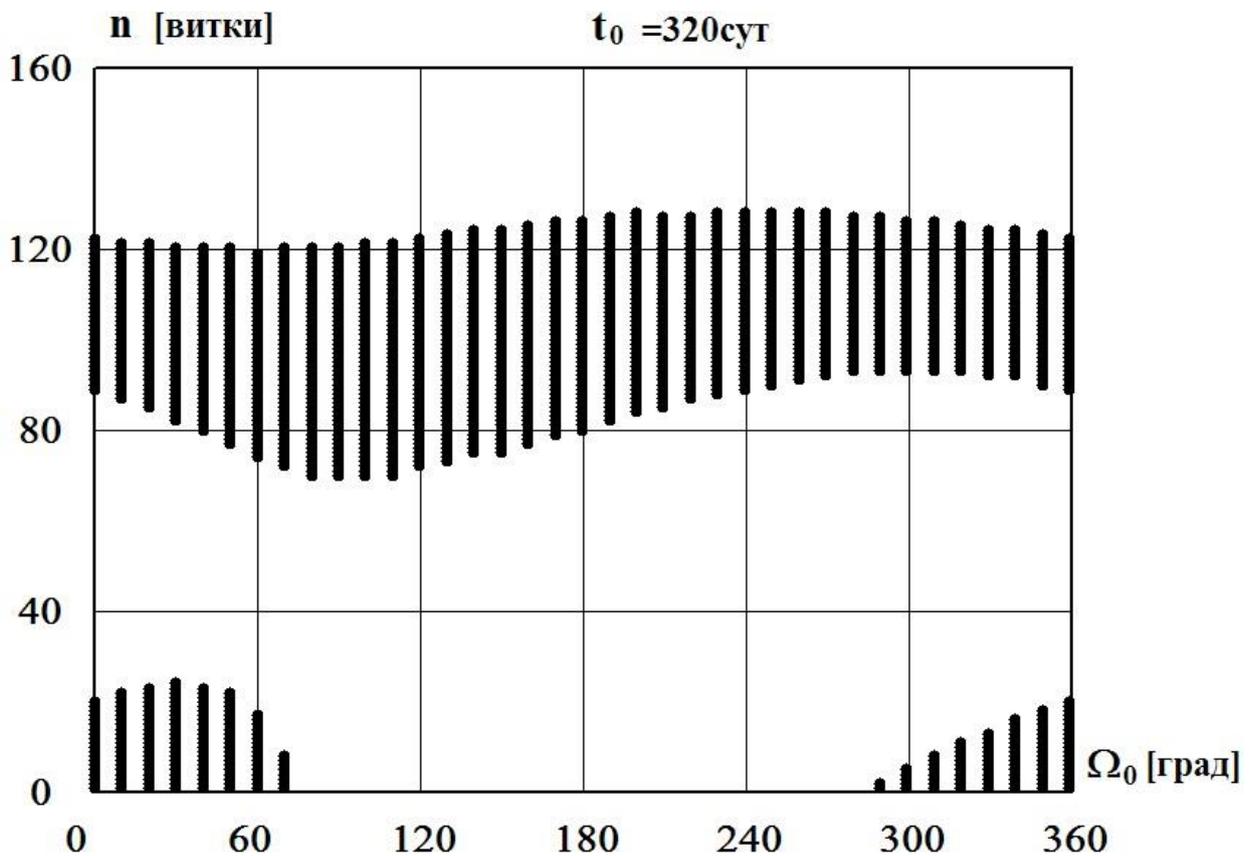


Рис. 13(б). Ω_0 -портрет номинальной «средней» траектории; $t_0 = 320$ сут.

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
2. Sackett L. L., Malchow H. L. and Edelbaum T. N. (1975) Solar Electric Geocentric Transfer with Attitude Constraints: Analysis, NASA CR 134927, Washington, DC.
3. Petukhov V. G. Optimization of multi-orbit transfers between noncoplanar elliptic orbits // Cosmic Research. 2004, Vol. 42, No. 3, pp. 250–268; Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования. 2004, т. 42. № 3. с. 260-279.
4. Ахметшин Р.З. Многовитковые траектории с учетом пауз в работе ЭРД малой тяги при попадании КА в тень Земли // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2018. — № 266. — 31 с. — URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-266>
5. Ахметшин Р.З. Возмущения от Луны при многовитковых перелетах на геостационарную орбиту космического аппарата с малой тягой // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2015. — № 107. — 32 с. — URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-107>
6. Ахметшин Р.З. Возмущения от Солнца при многовитковых перелетах на геостационарную орбиту космического аппарата с малой тягой // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2016. — № 77. — 32 с. — URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-77>
7. Ахметшин Р.З. Влияние вариаций геопотенциала при многовитковых перелетах на геостационарную орбиту космического аппарата с малой тягой // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2016. — № 111. — 27 с. — URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-111>
8. Ахметшин Р.З. Плоская задача оптимального перелета космического аппарата с малой тягой с высокоэллиптической орбиты на геостационар // Космические исследования. 2004, т.42, №3, с.248-259; Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2002. — № 37. — 32 с. — URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2002-37>

Оглавление

| | |
|--|----|
| «Неполная» краевая задача | 3 |
| Проблема начального приближения | 6 |
| Различные начальные приближения | 12 |
| Возможность существования нескольких решений | 13 |
| Слабое влияние тени на витках в конце траектории | 18 |
| Особое положение начальной орбиты по отношению к орбите Солнца | 20 |
| Тень как барьер | 21 |
| Ω_0 -портреты с тенью для «средней» траектории | 22 |
| Основные результаты..... | 22 |
| Литература | 31 |