ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 271 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Попков К.А.

О диагностических тестах размыкания для контактных схем

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попков К.А. О диагностических тестах размыкания для контактных схем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 271. 24 с. doi:10.20948/prepr-2018-271
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-271

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

К. А. Попков

О диагностических тестах размыкания для контактных схем

Москва — 2018

Попков К. А.

О диагностических тестах размыкания для контактных схем

Доказано, что при $n \geqslant 2$ любую булеву функцию от n переменных можно реализовать двухполюсной контактной схемой, неизбыточной и допускающей диагностический тест, длина которого не превосходит $n + k(n-2)$, относительно размыканий не более k контактов. Установлено, что при $k = k(n) \leqslant 2^{n-4}$ для почти всех булевых функций от n переменных наименьшая возможная длина указанного теста не превосходит $2k + 2$.

Ключевые слова: контактная схема, размыкание контакта, диагностический тест

Kirill Andreevich Popkov

On diagnostic tests of contact break for contact circuits

We prove that, for $n \geq 2$, one can implement each Boolean function on n variables by a two-pole contact circuit which is irredundant and allows a diagnostic test with a length not exceeding $n+k(n-2)$ under not more than k contact breaks. We obtain that, under $k = k(n) \leq 2^{n-4}$, for almost all Boolean functions on n variables, the least possible length of such a test does not exceed $2k + 2$.

Key words: contact circuit, contact break, diagnostic test

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН № 01 «Фундаментальная математика и ее приложения» (грант PRAS-18-01).

Оглавление

Введение

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых двухполюсных контактных схем [1], реализующих заданные булевы функции. (Слово «двухполюсная» в дальнейшем будем опускать.) Логический подход к тестированию контактных схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [2]. Представим, что имеется контактная схема S, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько контактов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В качестве неисправностей контактов обычно рассматриваются их обрывы и замыкания. При обрыве контакта проводимость между его концами становится тождественно нулевой, а при замыкании — тождественно единичной. Обрывы контактов также называются их размыканиями. В результате схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях контактов схемы S, называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [3, 4, 5]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно контактов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один контакт. Единичные тесты обычно рассматривают для *неизбыточных схем* [5], т. е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного контакта приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой. Если в схеме допускаются только обрывы контактов (или только их замыкания), то говорят о *тестах размыкания* (соответственно о *тестах замыкания*).

Назовём проверяющий (диагностический) тест k-*проверяющим* (k-*диагностическим*), если в схеме могут быть неисправны не более k контактов, где $k \in \mathbb{N}$. Будем рассматривать такие тесты только для *k-неизбыточных схем* (см. [6, с. 68]), в которых любая допустимая неисправность не менее одного и не более k контактов приводит к нетривиальной функции неисправности. Очевидно, что понятия 1-проверяющего теста, 1-диагностического теста и 1-неизбыточной схемы совпадают с понятиями единичного проверяющего теста, единичного диагностического теста и неизбыточной схемы соответственно.

Пусть зафиксирован вид неисправностей контактов и множество T является k-диагностическим тестом для некоторой контактной схемы S. Введём следующие обозначения: $D_{k\text{-Д}}(T)$ — длина теста T; $D_{k\text{-Д}}(S) = \min D_{k\text{-Д}}(T)$, где минимум берётся по всем k-диагностическим тестам T для контактной схемы S; $D_{k\text{-Д}}(f) = \min D_{k\text{-Д}}(S)$, где минимум берётся по всем k-неизбыточным контактным схемам S, реализующим функцию f; $D_{k\text{-Д}}(n) = \max D_{k\text{-Д}}(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных. Функция $D_{k\text{-Д}}(n)$ называется *функцией Шеннона* длины k-диагностического теста. По аналогии с функциями $D_{k\text{-Д}}$ можно ввести функции $D_{k\text{-П}}$, $D_{\text{ЕП}}$, $D_{\text{ЕД}}$, $D_{\text{ПП}}$ и $D_{\text{ПД}}$ для соответственно k-проверяющего, единичного проверяющего и диагностического, полного проверяющего и диагностического тестов, зависящие от T, от S, от f и от n (в определениях функций $D_{\text{ЕП}}(f)$ и $D_{\text{ЕД}}(f)$ предполагается обычная неизбыточность схем, а в определениях функций $D_{\text{ПП}}(f)$ и $D_{\text{ПД}}(f)$ не предполагается неизбыточности схем). Так, например, $D_{\text{ЕП}}(n)$ — функция Шеннона длины единичного проверяющего теста.

Для удобства над буквой D будем ставить символы «$0, 1$», «0» или «1» в случаях, когда в схемах допускаются соответственно обрывы и замыкания контактов, только их обрывы или только их замыкания.

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется *для почти всех булевых функций от n переменных*, если отношение числа булевых функций от n переменных, для которых это свойство не выполняется, к числу всех булевых функций от n переменных (т. е. к 2^{2^n}) стремится к нулю при $n \to \infty$.

Перечислим основные результаты, касающиеся тестирования контактных схем. Х. А. Мадатян в [7] установил равенство $D^{0,1}_{\text{ПД}}(n) = 2^n$; Н. П. Редькин в [8] получил оценку $D^{0,1}_{\text{ПП}}(n) \leqslant \frac{15}{16} \cdot 2^n$. В [5, с. 113, теорема 9] с использованием идей С. В. Яблонского установлено, что функция $D^{0,1}_{\text{ЕД}}(n)$ асимптотически не превосходит $\frac{2^{n+1}}{n}$; аналогично можно показать, что $D^{p}_{\text{ЕД}}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$, $p = 0, 1$. Н. П. Редькиным в [9] получены оценки $D^0_{\text{ПП}}(n) \leqslant 2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}$ и $D^1_{\text{ПП}}(n) \lesssim 2^{\frac{n}{1+\frac{1}{2\log_2 n}} + \frac{5}{2}}$. Д. С. Романов в [10], в частности, установил, что для почти всех булевых функций f от n переменных справедливы оценки $D^{0\,(+1)}_{\text{ЕП}}(f) \leqslant 2n+2$ и $D^{1\,(+1)}_{\text{ЕП}}(f) \leqslant 2n+2$; в [11] для тестов замыкания получены оценки $D^{1\,(+1)}_{\text{ЕП}}(n) \leqslant 2n$ и $D^{1\,(+2)}_{\text{ЕД}}(n) \leqslant 4n$, а для почти всех булевых функций f от n переменных — оценки $D^{1}_{\text{ЕП}}(f) \leqslant 4$ и $D^{1}_{\text{ЕД}}(f) \leqslant 8$. Наличие символов «$(+a)$» над буквой D, где $a \in \{1, 2\}$, означает, что для доказательств соответствующих результатов использовались контактные схемы, содержащие, помимо входных переменных $x_1, \ldots, x_n$, не более a дополнительных входных переменных, причём функции, реализуемые данными схемами в случае исправных состояний всех входящих в них контактов, не зависели существенно от этих a переменных и были равны заданным булевым функциям от n переменных, которые требовалось реализовать. В [12] найдено точное значение величины $D^{0}_{\text{ЕП}}(f)$ для любой булевой функции f от n переменных и установлено, что $D^{0}_{\text{ЕП}}(n) = n$, а для почти всех булевых функций f от n переменных $D^{0}_{\text{ЕП}}(f) = 2$.

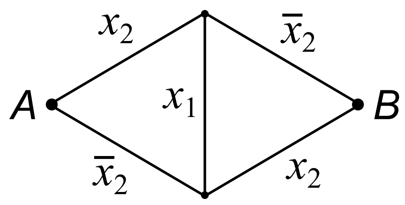
В силу утверждения 1 из работы [12] вышеупомянутые результаты для величин $D^{0}_{\text{ПП}}(n)$, $D^{1}_{\text{ПП}}(n)$ в [9] остаются справедливыми и для $D^{0}_{\text{ЕП}}(n)$, $D^{1}_{\text{ЕП}}(n)$ соответственно, а результаты для величин $D_{\text{ЕП}}(f)$, $D_{\text{ЕП}}(n)$ в [10–12] — для соответствующих величин $D_{\text{ПП}}(f)$, $D_{\text{ПП}}(n)$. В частности, равенство $D^{0}_{\text{ЕП}}(n) = n$ из [12] уточняет неравенство $D^{0}_{\text{ПП}}(n) \leqslant 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ из [9].

Утверждение 1. *Любая контактная схема S, неизбыточная относительно только обрывов или только замыканий контактов, является k-неизбыточной относительно неисправностей такого же типа для любого $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. В силу неизбыточности схемы S обрыв (замыкание) любого одного её контакта K обнаруживается на каком-то её входном наборе $\tilde{\sigma}(K)$, причём значение схемы S на данном наборе при переходе контакта K в неисправное состояние, очевидно, меняется с 1 на 0 (с 0 на 1). Тогда при дополнительном обрыве (замыкании) не более $k-1$ произвольных других контактов схемы S указанное значение останется равным 0 (равным 1) и неисправность будет обнаружена на наборе $\tilde{\sigma}(K)$. Отсюда следует k-неизбыточность схемы S. Утверждение 1 доказано. □

Далее для краткости всюду вместо «замыкающий (размыкающий) контакт, отвечающий переменной x_i», $i = 1, \ldots, n$, будем говорить «контакт x_i» (соответственно «контакт $\overline{x}_i$»).

Замечание 1. Утверждение 1 в общем виде нельзя распространить на случай, когда в схемах допускаются как обрывы, так и замыкания контактов. Например, схема с полюсами A и B, изображённая на рисунке, как нетрудно убедиться, реализует функцию x_1 и неизбыточна, но при этом не является 4-неизбыточной, поскольку при замыкании обоих контактов x_2 и обрыве обоих контактов $\overline{x}_2$ она по-прежнему будет реализовывать функцию x_1.



Утверждение 2. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ и любого $k \in \mathbb{N}$ справедливы равенства $D^0_{k\text{-П}}(f) = D^0_{\text{ЕП}}(f)$, $D^1_{k\text{-П}}(f) = D^1_{\text{ЕП}}(f)$.*

Доказательство. Неравенства $D^0_{k\text{-П}}(f) \leqslant D^0_{\text{ЕП}}(f)$ и $D^1_{k\text{-П}}(f) \leqslant D^1_{\text{ЕП}}(f)$ следуют из того соображения, что любой единичный проверяющий тест размыкания (замыкания) для неизбыточной контактной схемы является для неё также полным проверяющим (см., например, [5, с. 147–148]), а значит, и k-проверяющим тестом размыкания (замыкания), а сама схема при этом k-неизбыточна в силу утверждения 1. Обратные неравенства очевидны. Утверждение 2 доказано. □

Из утверждения 2 и результатов работ [9–12] можно получить различные соотношения для величин $D_{k\text{-П}}(f)$ и $D_{k\text{-П}}(n)$ при любом $k \in \mathbb{N}$.

Далее в качестве неисправностей контактов будут рассматриваться только их размыкания. Будет установлена линейная по n при фиксированном k верхняя оценка величины $D^0_{k\text{-Д}}(n)$ (теорема 2), в случае $k = 1$ существенно улучшающая упомянутую выше оценку $D^0_{\text{ЕД}}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$. Кроме того, при условии $k = k(n) \leqslant 2^{n-4}$ (в частности, когда k фиксировано) для почти всех булевых функций f от n переменных будет получено соотношение $D^0_{k\text{-Д}}(f) \leqslant 2k + 2$ (теорема 3).

Всюду далее для краткости вместо $D^0_{k\text{-Д}}(n)$, $D^0_{k\text{-Д}}(f)$ будем писать $D_k(n)$, $D_k(f)$ соответственно.

Ключевые множества

Двоичный набор $\tilde{\sigma}$ длины n будем называть *единичным* (*нулевым*) набором булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, если $f(\tilde{\sigma}) = 1$ (соответственно, $f(\tilde{\sigma}) = 0$).

Двоичный набор $\tilde{\sigma}$ длины n будем называть (i, α)-*набором*, если его i-я (слева) компонента равна α.

Множество M (некоторых) единичных наборов булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$, назовём *ключевым* для этой функции, если для любых $\alpha \in \{0,1\}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ таких, что существует хотя бы один единичный (i,α)-набор функции $f(\tilde{x}^n)$, в M найдётся (i,α)-набор.

Очевидно, что в качестве ключевого множества для функции $f(\tilde{x}^n)$ всегда можно взять множество всех её единичных наборов, которое мы будем обозначать через $M_1(f)$.

Понятие ключевого множества будет существенным образом использовано в доказательствах основных теорем данной работы.

Пример 1. Если булева функция $f(\tilde{x}^n)$ обращается в единицу на двух противоположных наборах $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ и $(\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\ldots,\overline{\sigma}_n)$, то в качестве ключевого для f множества можно взять множество, состоящее из этих двух наборов. Действительно, для любых $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\alpha \in \{0,1\}$ либо $\sigma_i = \alpha$, либо $\overline{\sigma}_i = \alpha$.

Пусть M — произвольное множество двоичных наборов длины n. Будем обозначать через $I_M(\tilde{x}^n)$ булеву функцию, равную единице на всех наборах из множества M и нулю на всех остальных наборах.

Лемма 1. *Пусть M — ключевое множество для булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$, а $f'(\tilde{x}^n)$ — такая булева функция, что выполнено функциональное соотношение $I_M \leqslant f' \leqslant f$. Тогда множество M является ключевым и для функции $f'(\tilde{x}^n)$.*

Доказательство. На любом наборе из множества M функция $f'(\tilde{x}^n)$ принимает значение 1 в силу неравенства $I_M \leqslant f'$. Для любых $\alpha \in \{0,1\}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ таких, что существует хотя бы один единичный (i,α)-набор функции $f'(\tilde{x}^n)$, существует и хотя бы один единичный (i,α)-набор функции $f(\tilde{x}^n)$, поскольку $f' \leqslant f$. Так как M — ключевое множество для $f(\tilde{x}^n)$, то в M найдётся (i,α)-набор. Тогда по определению множество M является ключевым для функции $f'(\tilde{x}^n)$. Лемма 1 доказана. $\square$

Лемма 2. *Если какие-то два единичных набора $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}'$ булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ различаются в s компонентах, то для неё существует ключевое множество мощности не более $n-s+2$.*

Доказательство. Обозначим номера компонент, в которых наборы $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}'$ различаются, через $i_1,\ldots,i_s$. Пусть $\tilde{\sigma} = (\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$. Рассмотрим все возможные значения i от 1 до n, отличные от $i_1,\ldots,i_s$, для которых существует единичный $(i,\overline{\sigma}_i)$-набор функции f. Множество всех таких значений i обозначим через $\mathcal{I}$, а соответствующие им единичные $(i,\overline{\sigma}_i)$-наборы функции f — через $\tilde{\delta}_{i,\overline{\sigma}_i}$ (если таких значений нет, полагаем $\mathcal{I} = \varnothing$). Пусть $M = \{\tilde{\sigma}\} \cup \{\tilde{\sigma}'\} \cup \{\tilde{\delta}_{i,\overline{\sigma}_i} \,|\, i \in \mathcal{I}\}$. Тогда $|M| \leqslant 2 + |\mathcal{I}| \leqslant n - s + 2$.

Покажем, что M является ключевым множеством для функции $f(\tilde{x}^n)$. Пусть i — произвольный индекс от 1 до n; α — произвольная булева константа. Если $i \in \{i_1, \ldots, i_s\}$, то (i, α)-набором будет один из наборов $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$. Пусть теперь $i \neq \{i_1, \ldots, i_s\}$. Если $\alpha = \sigma_i$, то в качестве (i, α)-набора можно взять набор $\tilde{\sigma}$. Если же $\alpha = \overline{\sigma}_i$ и существует единичный (i, α)-набор функции f, то $i \in \mathcal{I}$ и в качестве (i, α)-набора можно взять набор $\tilde{\delta}_{i,\overline{\sigma}_i}$. Все указанные наборы принадлежат множеству M. Лемма 2 доказана. □

Введём обозначение

$$\alpha^\beta = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \beta = 1, \\ \overline{\alpha}, & \text{если } \beta = 0, \end{cases}$$

где $\alpha \in \{0, 1\}$.

Два двоичных набора называются *соседними*, если они различаются ровно в одной компоненте.

Лемма 3. *Пусть $n \geqslant 4$ и множество M двоичных наборов длины n таково, что любые два набора из этого множества различаются не более чем в двух компонентах. Тогда либо $|M| = 4$ и j-е компоненты всех наборов из M совпадают для некоторого $j \in \{1, \ldots, n\}$, либо $|M| \leqslant n + 1$ и существует такой двоичный набор $\tilde{\tau}$ длины n, что M является подмножеством множества, состоящего из набора $\tilde{\tau}$ и n соседних с ним наборов.*

Доказательство. Если любые два набора из множества M различаются не более чем в одной компоненте, то очевидно, что $|M| \leqslant 2$ и в качестве набора $\tilde{\tau}$ можно взять любой набор из множества M (при $|M| \geqslant 1$). Пусть теперь какие-то два набора $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}'$ из M различаются ровно в двух компонентах: без ограничения общности, в 1-й и 2-й компонентах. Пусть $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n)$, тогда $\tilde{\sigma}' = (\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n)$.

Если первые две компоненты какого-то набора из множества $M \setminus \{\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'\}$ равны σ_1, σ_2 соответственно ($\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2$ соответственно), то он отличается от набора $\tilde{\sigma}'$ (соответственно, $\tilde{\sigma}$) по крайней мере в трёх компонентах, что невозможно. Поэтому первые две компоненты любого набора из множества $M \setminus \{\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'\}$ равны либо $\sigma_1, \overline{\sigma}_2$ соответственно, либо $\overline{\sigma}_1, \sigma_2$ соответственно. Рассмотрим два случая.

1. Во множестве $M \setminus \{\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'\}$ содержится хотя бы один набор $\tilde{\pi}$, первые две компоненты которого равны $\sigma_1, \overline{\sigma}_2$ соответственно, и хотя бы один набор $\tilde{\pi}'$, первые две компоненты которого равны $\overline{\sigma}_1, \sigma_2$ соответственно. Так как наборы $\tilde{\pi}$ и $\tilde{\pi}'$ различаются в первых двух компонентах, они должны совпадать во всех остальных компонентах. Пусть $\tilde{\pi} = (\sigma_1, \overline{\sigma}_2, \pi_3, \ldots, \pi_n)$, тогда $\tilde{\pi}' = (\overline{\sigma}_1, \sigma_2, \pi_3, \ldots, \pi_n)$. Если первые две компоненты какого-то набора из множества $M \setminus \{\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}', \tilde{\pi}, \tilde{\pi}'\}$ равны σ_1, σ_2

соответственно ($\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2$ соответственно, $\sigma_1, \overline{\sigma}_2$ соответственно, $\overline{\sigma}_1, \sigma_2$ соответственно), то этот набор отличается от набора $\tilde{\sigma}'$ (набора $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\pi}'$, $\tilde{\pi}$) по крайней мере в трёх компонентах, что невозможно. Поэтому $M = \{\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}', \tilde{\pi}, \tilde{\pi}'\}$ и $|M| = 4$.

Наборы $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\pi}$ различаются во 2-й компоненте, поэтому они могут различаться не более чем в одной из 3-й, . . . , n-й компонент. С учётом неравенства $n \geqslant 4$ получаем, что $\sigma_j = \pi_j$ для некоторого $j \in \{3, \ldots, n\}$. Тогда j-е компоненты всех наборов $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$, $\tilde{\pi}$, $\tilde{\pi}'$ совпадают, что и требовалось доказать.

2. Первые две компоненты каждого набора из множества $M \setminus \{\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'\}$ равны $\sigma_1^c, \sigma_2^{\overline{c}}$ соответственно, где c — булева константа, одинаковая для всех наборов из данного множества. Так как каждый из этих наборов отличается от набора $\tilde{\sigma}$ в одной из первых двух компонент, то он может отличаться от него не более чем в одной из 3-й, $\ldots$, n-й компонент. Всего таких наборов $n-1$, а именно, набор $\tilde{\tau} = (\sigma_1^c, \sigma_2^{\overline{c}}, \sigma_3, \ldots, \sigma_n)$ и $n-2$ набора $\tilde{\tau}_3, \ldots, \tilde{\tau}_n$, отличающихся от набора $\tilde{\tau}$ только в 3-й, . . . , n-й компоненте соответственно. Поэтому $M \setminus \{\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'\} \subseteq \{\tilde{\tau}, \tilde{\tau}_3, \ldots, \tilde{\tau}_n\}$ и $M \subseteq M'$, где $M' = \{\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}', \tilde{\tau}, \tilde{\tau}_3, \ldots, \tilde{\tau}_n\}$. Легко видеть, что $|M'| = n+1$ и множество M' состоит в точности из набора $\tilde{\tau}$ и n соседних с ним наборов. Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Для любой булевой функции* $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 4$*, для которой* $|M_1(f)| \geqslant n+2$*, существует ключевое множество мощности не более* $n-1$.

Доказательство. Если какие-то два единичных набора функции $f(\tilde{x}^n)$ различаются хотя бы в трёх компонентах, то справедливость леммы 4 вытекает из леммы 2. Если же любые два единичных набора функции $f(\tilde{x}^n)$, т. е. любые два набора из множества $M_1(f)$, различаются не более чем в двух компонентах, то в силу леммы 3 и неравенства $4 < n+1$ имеем $|M_1(f)| \leqslant n+1$, однако это противоречит условию $|M_1(f)| \geqslant n+2$. Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. *Если булева функция* $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 3$*, такова, что* j*-е компоненты всех наборов из множества* $M_1(f)$ *совпадают для некоторого* $j \in \{1, \ldots, n\}$*, то для неё существует ключевое множество мощности не более* $n-1$.

Доказательство. Если $|M_1(f)| \leqslant 2$, то в качестве такого ключевого множества можно взять само $M_1(f)$. Пусть $|M_1(f)| \geqslant 3$. Возьмём произвольные три попарно различных набора из множества $M_1(f)$. Очевидно, что какие-то два из них различаются по крайней мере в двух компонентах. Обозначим эти два набора через $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}'$, а номера произвольных двух компонент, в которых они различаются — через i_1 и i_2. По условию $i_1 \neq j$ и $i_2 \neq j$.

Дальнейшие рассуждения похожи на доказательство леммы 2. Пусть $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Рассмотрим все возможные значения i от 1 до n, отличные от i_1, i_2, j, для которых существует единичный $(i, \overline{\sigma}_i)$-набор функции f. Множество всех таких значений i обозначим через $\mathcal{I}$, а соответствующие им единичные $(i, \overline{\sigma}_i)$-наборы функции f — через $\tilde{\delta}_{i,\overline{\sigma}_i}$ (если таких значений нет, полагаем $\mathcal{I} = \varnothing$). Пусть $M = \{\tilde{\sigma}\} \cup \{\tilde{\sigma}'\} \cup \{\tilde{\delta}_{i,\overline{\sigma}_i} | i \in \mathcal{I}\}$. Тогда $|M| \leqslant 2 + |\mathcal{I}| \leqslant n - 1$.

Покажем, что M является ключевым множеством для функции $f(\tilde{x}^n)$. Пусть i — произвольный индекс от 1 до n; α — произвольная булева константа. Если $i = i_1$ или $i = i_2$, то (i, α)-набором будет один из наборов $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$. Если $i = j$ и $\alpha = \overline{\sigma}_j$, то по условию не существует ни одного единичного (i, α)-набора функции $f(\tilde{x}^n)$, так как j-я компонента набора $\tilde{\sigma}$ равна σ_j. Если $i = j$ и $\alpha = \sigma_j$, то (i, α)-набором будет любой набор из множества M. Пусть теперь $i \notin \{i_1, i_2, j\}$. Если $\alpha = \sigma_i$, то в качестве (i, α)-набора можно взять набор $\tilde{\sigma}$. Если же $\alpha = \overline{\sigma}_i$ и существует единичный (i, α)-набор функции f, то $i \in \mathcal{I}$ и в качестве (i, α)-набора можно взять набор $\tilde{\delta}_{i,\overline{\sigma}_i}$. Все указанные наборы принадлежат множеству M. Лемма 5 доказана. □

Лемма 6. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 4$, для которой $|M_1(f)| \geqslant 2n-1$, существуют такое ключевое множество M и такое множество M' двоичных наборов длины n, что M' является ключевым множеством для функции $(f \& \overline{I}_M)(\tilde{x}^n)$ и $|M| + |M'| \leqslant 2n - 2$.*

Доказательство. В силу леммы 4 и неравенства $2n - 1 > n + 2$ для функции $f(\tilde{x}^n)$ существует ключевое множество M мощности не более $n - 1$. Тогда

$$|M_1(f \& \overline{I}_M)| = |M_1(f)| - |M| \geqslant 2n - 1 - (n - 1) = n > 3.$$

В случае $|M| \leqslant n - 2$ возьмём произвольные три попарно различных набора из множества $M_1(f \& \overline{I}_M)$; очевидно, что какие-то два из них различаются по крайней мере в двух компонентах. Тогда для функции $(f \& \overline{I}_M)(\tilde{x}^n)$ в силу леммы 2 существует ключевое множество M' мощности не более n и $|M| + |M'| \leqslant 2n - 2$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $|M| = n - 1$. Если какие-то два единичных набора функции $(f \& \overline{I}_M)(\tilde{x}^n)$ различаются хотя бы в трёх компонентах, то по лемме 2 для этой функции существует ключевое множество M' мощности не более $n - 1$ и $|M| + |M'| \leqslant 2n - 2$, что и требовалось доказать. Пусть любые два единичных набора функции $(f \& \overline{I}_M)(\tilde{x}^n)$ различаются не более чем в двух компонентах. По лемме 3 может выполняться один из двух случаев.

1. Множество $M_1(f\&\overline{I}_M)$ содержит четыре набора, причём все эти наборы совпадают друг с другом в какой-то компоненте. Тогда в силу леммы 5 для функции $(f\&\overline{I}_M)(\tilde{x}^n)$ существует ключевое множество M' мощности не более $n-1$ и $|M|+|M'| \leqslant 2n-2$, что и требовалось доказать.

2. Множество $M_1(f\&\overline{I}_M)$ является подмножеством множества $M_{\tilde{\tau}}$, состоящего из некоторого набора $\tilde{\tau}$ и n соседних с ним наборов. Положим $\tilde{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\tilde{\tau}^i = (\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \overline{\tau}_i, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_n)$ для $i = 1, \ldots, n$; тогда $M_{\tilde{\tau}} = \{\tilde{\tau}, \tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_n\}$. Рассмотрим два подслучая.

2.1. Существует такое $i \in \{1, \ldots, n\}$, что $\tilde{\tau}_i \notin M_1(f\&\overline{I}_M)$. Легко видеть, что i-е компоненты всех наборов из множества $M_{\tilde{\tau}} \setminus \{\tilde{\tau}_i\} \supseteq M_1(f\&\overline{I}_M)$ совпадают с i-й компонентой набора $\tilde{\tau}$, т. е. совпадают между собой. Тогда в силу леммы 5 для функции $(f\&\overline{I}_M)(\tilde{x}^n)$ существует ключевое множество M' мощности не более $n-1$ и $|M|+|M'| \leqslant 2n-2$, что и требовалось доказать.

2.2. Множество $M_1(f\&\overline{I}_M)$ содержит все наборы $\tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_n$. Во множестве M содержится хотя бы один набор, отличный от наборов $\tilde{\tau}$ и $(\overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_n)$, поскольку $|M| = n-1 \geqslant 3$. Ясно, что указанный набор не принадлежит множеству $M_1(f\&\overline{I}_M)$, поэтому отличается от набора $\tilde{\tau}$ не менее чем в двух и не более чем в $n-1$ компонентах. Среди всех таких наборов из множества M выберем произвольный набор $\tilde{\pi}$, совпадающий с набором $\tilde{\tau}$ в наименьшем числе компонент; число этих компонент обозначим через s, а их номера — через $i_1, \ldots, i_s$. Из сказанного выше следует, что $1 \leqslant s \leqslant n-2$. Переопределим множество M, положив его равным $\{\tilde{\pi}, \tilde{\tau}^{i_1}, \ldots, \tilde{\tau}^{i_s}\}$. «Старое» множество M обозначим через $\hat{M}$.

Полученное множество M по-прежнему будет ключевым для функции $f(\tilde{x}^n)$. Действительно, пусть i — произвольный индекс от 1 до n. Если $i \in \{i_1, \ldots, i_s\}$, то (i, τ_i)-набором будет набор $\tilde{\pi}$, а $(i, \overline{\tau}_i)$-набором — набор $\tilde{\tau}^i$. Если же $i \notin \{i_1, \ldots, i_s\}$, то (i, τ_i)-набором будет любой из наборов $\tilde{\tau}^{i_1}, \ldots, \tilde{\tau}^{i_s}$, а $(i, \overline{\tau}_i)$-набором — набор $\tilde{\pi}$. Все указанные наборы принадлежат множеству M.

Заметим, что $|M| = s+1$. Если $1 \leqslant s \leqslant n-3$, то $|M| \leqslant n-2$, а этот случай был разобран в начале доказательства леммы 6. Пусть теперь $s = n-2$, тогда $|M| = n-1$. Наборы $\tilde{\pi}$ и $\tilde{\tau}$ совпадают ровно в $s = n-2$ компонентах, т. е. различаются в двух компонентах, номера которых мы обозначим через i'_1 и i'_2. Из соотношения $|\hat{M}| = n-1 \geqslant 3$ следует существование во множестве $\hat{M}$ набора $\tilde{\pi}'$, отличного от наборов $\tilde{\tau}$, $\tilde{\pi}$, который в силу предположения подслучая 2.2 отличен также от наборов $\tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_n$; из определения множества M вытекает, что $\tilde{\tau}^{i'_1}, \tilde{\tau}^{i'_2}, \tilde{\pi}' \notin M$, а тогда $\tilde{\tau}^{i'_1}, \tilde{\tau}^{i'_2}, \tilde{\pi}' \in M_1(f\&\overline{I}_M)$. Согласно выбору числа s, возможны два подслучая.

2.2.1. Наборы $\tilde{\pi}'$ и $\tilde{\tau}$ совпадают не менее чем в $s = n-2$ компонентах, т. е. различаются не более чем в двух компонентах; тогда они различаются ровно в двух компонентах, номера которых мы обозначим через i_1'' и i_2''. При этом $\{i_1'', i_2''\} \neq \{i_1', i_2'\}$, так как $\tilde{\pi}' \neq \tilde{\pi}$. Значит, хотя бы одно из чисел i_1', i_2' не принадлежит множеству $\{i_1'', i_2''\}$; без ограничения общности это i_1'. Тогда наборы $\tilde{\tau}^{i_1'}$ и $\tilde{\pi}'$ различаются в трёх компонентах — i_1'-й, i_1''-й и i_2''-й, и из соотношений $\tilde{\tau}^{i_1'}, \tilde{\pi}' \in M_1(f \& \overline{I}_M)$ и леммы 2 вытекает, что для функции $(f \& \overline{I}_M)(\tilde{x}^n)$ существует ключевое множество M' мощности не более $n-1$ и $|M| + |M'| \leqslant 2n-2$, что и требовалось доказать.

2.2.2. Набор $\tilde{\pi}'$ равен $(\overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_n)$. Тогда наборы $\tilde{\tau}^{i_1'}$ и $\tilde{\pi}'$ различаются во всех компонентах, кроме i_1'-й, т. е. в $n-1 \geqslant 3$ компонентах; далее см. подслучай 2.2.1. Лемма 6 доказана. $\square$

Лемма 7. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 4$, для которой $|M_1(f)| \geqslant 2n+1$, существует ключевое множество мощности не более $n-2$.*

Доказательство. Если какие-то два единичных набора функции $f(\tilde{x}^n)$ различаются хотя бы в четырёх компонентах, то справедливость леммы 7 вытекает из леммы 2. Если любые два единичных набора функции $f(\tilde{x}^n)$ различаются не более чем в двух компонентах, то в силу леммы 3 и неравенства $4 < n+1$ имеем $|M_1(f)| \leqslant n+1$, однако это противоречит неравенствам $|M_1(f)| \geqslant 2n+1$ и $n \geqslant 4$, выполненным по условию леммы 7.

Пусть теперь какие-то два набора $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}'$ из множества $M_1(f)$ различаются ровно в трёх компонентах — без ограничения общности, в 1-й, 2-й и 3-й компонентах, а любые два набора из множества $M_1(f)$ различаются не более чем в трёх компонентах. Пусть $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \ldots, \sigma_n)$, тогда $\tilde{\sigma}' = (\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \overline{\sigma}_3, \sigma_4, \ldots, \sigma_n)$. Если i-я и j-я компоненты какого-то набора из множества $M_1(f) \setminus \{\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'\}$ равны $\overline{\sigma}_i$ и $\overline{\sigma}_j$ соответственно для некоторых $i, j \in \{4, \ldots, n\}$, $i \neq j$, то этот набор отличается от одного из наборов $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'$ по крайней мере в четырёх компонентах, что невозможно. Поэтому не более одной из 4-й, ..., n-й компонент каждого набора из множества $M_1(f) \setminus \{\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'\}$, а значит, и из множества $M_1(f)$, отлично от $\sigma_4, \ldots, \sigma_n$ соответственно. Тогда

$$M_1(f) = A \cup A_4 \cup \ldots \cup A_n, \tag{1}$$

где A — подмножество множества $M_1(f)$, состоящее из всех наборов, 4-я, ..., n-я компоненты которых равны $\sigma_4, \ldots, \sigma_n$ соответственно; A_i, $i = 4, \ldots, n$ — подмножество множества $M_1(f)$, состоящее из всех наборов, 4-я, ..., n-я компоненты которых равны $\sigma_4, \ldots, \sigma_n$ соответственно, за исключением i-й компоненты, которая равна $\overline{\sigma}_i$.

Среди множеств $A_4, \ldots, A_n$ выберем произвольное множество наибольшей мощности; без ограничения общности это A_4. Заметим, что множество $A \cup A_4$ может содержать только наборы, последние $n-4$ компоненты каждого из которых равны $\sigma_5, \ldots, \sigma_n$ соответственно (при $n \geqslant 5$). Всего таких наборов 16, причём для любых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \{0,1\}$ во множестве $A \cup A_4$ может содержаться не более одного из наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \sigma_5, \ldots, \sigma_n)$ и $(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3, \overline{\alpha}_4, \sigma_5, \ldots, \sigma_n)$, поскольку данные два набора различаются в четырёх компонентах. Таким образом,

$$|A \cup A_4| \leqslant 8. \tag{2}$$

В случае $n = 4$ в силу (1), (2) имеем

$$|M_1(f)| = |A \cup A_4| \leqslant 8 = 2n,$$

что противоречит условию леммы 7. Далее считаем, что $n \geqslant 5$. Если $|A_4| \leqslant 2$, то

$$|M_1(f)| \leqslant |A \cup A_4| + \sum_{i=5}^{n} |A_i| \leqslant 8 + \sum_{i=5}^{n} |A_4| \leqslant 8 + 2(n-4) = 2n,$$

в силу (1), (2) и неравенства $|A_i| \leqslant |A_4|$ для любого $i \in \{5, \ldots, n\}$; вновь получаем противоречие.

Пусть теперь $|A_4| \geqslant 3$. Выберем из множества A_4 произвольные три различных набора $\tilde{\pi}_j = (\pi_1^j, \pi_2^j, \pi_3^j, \overline{\sigma}_4, \sigma_5, \ldots, \sigma_n)$, $j = 1, 2, 3$. Для любого $s \in \{1, 2, 3\}$ среди чисел $\pi_s^1, \pi_s^2, \pi_s^3$ хотя бы два числа принимают одно и то же булево значение, которые мы обозначим через π_s. Предположим, что $|A_i| \geqslant 2$ для некоторого $i \in \{5, \ldots, n\}$. Тогда во множестве A_i содержится хотя бы один набор $\tilde{\tau}$, отличный от набора $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \sigma_4, \ldots, \sigma_{i-1}, \overline{\sigma}_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$, причём последние $n-3$ компоненты набора $\tilde{\tau}$ должны совпадать с соответствующими компонентами указанного набора в силу определения множества A_i. Значит, хотя бы одна из первых трёх компонент набора $\tilde{\tau}$ отлична от π_1, π_2, π_3 соответственно; пусть это s-я компонента, которая равна $\overline{\pi}_s$. Среди чисел $\pi_s^1, \pi_s^2, \pi_s^3$ не менее двух равны π_s, поэтому набор $\tilde{\tau}$ отличается по крайней мере от двух из наборов $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3$ в трёх компонентах: s-й, 4-й и i-й. Значит, во всех остальных компонентах он должен совпадать с каждым из этих двух наборов, откуда следуют, что данные два набора из множества $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3\}$ совпадают. Получаем противоречие с выбором указанных наборов. Тем самым доказано, что для любого $i \in \{5, \ldots, n\}$ должно выполняться неравенство $|A_i| \leqslant 1$. Тогда

$$|M_1(f)| \leqslant |A \cup A_4| + \sum_{i=5}^{n} |A_i| \leqslant 8 + \sum_{i=5}^{n} 1 = 8 + (n-4) < 2n$$

в силу (1), (2), что противоречит условию леммы 7. Поэтому случай, когда какие-то два набора из множества $M_1(f)$ различаются ровно в трёх компонентах, а любые два набора из множества $M_1(f)$ — не более чем в трёх компонентах, выполняться не может. Лемма 7 доказана. □

Методы построения схем

Два контакта будем называть *противоположными*, если один из них имеет вид x_i, а другой — вид $\overline{x}_i$, где $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Под *длиной цепи* в контактной схеме будем понимать число содержащихся в этой цепи контактов.

Теорема 1. *Пусть M — ключевое множество для булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$. Тогда эту функцию можно реализовать k-неизбыточной контактной схемой, для которой множество M является k-проверяющим тестом размыкания.*

Доказательство получается упрощением доказательства теоремы 1 работы [12]. Определим контактные деревья $\hat{D}$ и D так же, как это сделано в [12, с. 75], при этом полагаем $T = M$. А именно, возьмём контактное дерево $\hat{D}$, реализующую систему всех 2^n элементарных конъюнкций вида $x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}$ и содержащее $2 \cdot 2^n - 2$ контактов (см. [1, с. 39]). Для каждого нулевого набора $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ функции $(f \oplus I_T)(\tilde{x}^n)$ удалим из дерева $\hat{D}$ концевую вершину вместе с инцидентным ей ребром, в которой реализуются элементарная конъюнкция $x_1^{\tau_1} \& \ldots \& x_n^{\tau_n}$. Если после всех этих операций в дереве возникли новые концевые вершины, удалим и их вместе с инцидентными им рёбрами, и т. д. Легко проверить, что полученное дерево D обладает следующими свойствами:

(i) в каждой концевой вершине дерева D реализуется элементарная конъюнкция вида $x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}$, причём единственный двоичный набор длины n, на котором эта конъюнкция обращается в единицу, является единичным для функции $(f \oplus I_T)(\tilde{x}^n)$;

(ii) для каждого единичного набора $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ функции $(f \oplus I_T)(\tilde{x}^n)$ в дереве D найдётся такая концевая вершина, что единственная цепь, связывающая корень дерева D с этой вершиной, содержит n контактов: $x_1^{\pi_1}$, …, $x_n^{\pi_n}$.

Далее вместо преобразования дерева D в дерево D' при помощи процедуры П (см. [12, с. 76–77]) положим просто $D' = D$. В таком случае из свойств (i), (ii) сразу следует

Лемма 8 [12]. *Дизъюнкция всех функций, реализуемых в концевых вершинах дерева D', равна $(f \oplus I_T)(\tilde{x}^n)$.*

(В работе [12] данная лемма имеет номер 3, а нижеследующие леммы 9 и 10 — номера 4 и 5 соответственно. Лемму 9 необходимо будет доказать заново, поскольку определение дерева D' отличается от определения этого дерева в [12]. Доказательство леммы 10 остаётся без изменений.)

Рассмотрим произвольный контакт K в дереве D'; пусть это контакт x_i^α, где $i \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha \in \{0, 1\}$. По построению дерева D' существует хотя бы одна несамопересекающаяся цепь, соединяющая его корень с какой-то концевой вершиной и проходящая через контакт K. По свойству (i) данная цепь проводит на каком-то наборе $\tilde{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$, причём

$$(f \oplus I_T)(\tilde{\pi}) = 1. \tag{3}$$

Если $\tilde{\pi} \in T$, то $I_T(\tilde{\pi}) = 1$ и $f(\tilde{\pi}) = 1$, так как $T = M$ — ключевое множество для функции $f(\tilde{x}^n)$, т. е. состоит только из её единичных наборов. Получаем противоречие с (3), откуда вытекает, что $\tilde{\pi} \notin T$, $I_T(\tilde{\pi}) = 0$ и $f(\tilde{\pi}) = 1$. Контакт K проводит на набор $\tilde{\pi}$, поэтому $\pi_i = \alpha$. Получаем, что $\tilde{\pi}$ является единичным (i, α)-набором функции $f(\tilde{x}^n)$, а тогда по определению ключевого множества в T найдётся (i, α)-набор, которые мы обозначим через $\tilde{\sigma}(K)$. Контакт K проводит на наборе $\tilde{\sigma}(K)$, так как является контактом x_i^α. Тем самым для каждого контакта K в дереве D' определён набор $\tilde{\sigma}(K) \in T$, на котором этот контакт проводит.

Корень дерева D' обозначим через a_0.

Лемма 9 [12]. *Любой контакт K из дерева D' проводит на наборе $\tilde{\sigma}(K)$, и в поддереве $D'_{\tilde{\sigma}(K)}$, образованном всеми проводящими на наборе $\tilde{\sigma}(K)$ контактами дерева D', компонента связности, содержащая контакт K, а также компонента связности, содержащая вершину a_0, представляют собой несамопересекающиеся цепи (возможно, нулевой длины), в которых ни одна внутренняя вершина не совпадает с вершиной a_0.*

Доказательство. Пусть K — произвольный контакт в дереве D'. То, что он проводит на наборе $\tilde{\sigma}(K)$, следует из выбора этого набора. Рассмотрим компоненту связности R_K (R_0) поддерева $D'_{\tilde{\sigma}(K)}$, содержащую контакт K (соответственно, вершину a_0). Так как дерево D' не содержит циклов, то и граф R_K (R_0) не содержит циклов. Отметим следующие свойства дерева D':

- любая его вершина инцидентна в нём не более чем трём контактам, и если трём, то два из них противоположны (а именно, x_i и $\overline{x}_i$ для некоторого $i \in \{2, \dots, n\}$);

- вершина a_0 инцидентна в нём не более чем двум контактам, и если двум, то это противоположные контакты (а именно, x_1 и $\overline{x}_1$).

Из указанных свойств и того, что противоположные контакты не могут оба проводить на наборе $\tilde{\sigma}(K)$, следует, что в дереве D' на наборе $\tilde{\sigma}(K)$ проводит не более двух контактов, инцидентных какой-либо вершине компоненты связности R_K (R_0), и не более одного контакта, инцидентного вершине a_0. Отсюда вытекает, что любая вершина графа R_K (R_0) инцидентна в нём не более чем двум контактам, а вершина a_0, если она содержится в этом графе — не более чем одному контакту. Учитывая, что граф R_K (R_0) связный и не содержит циклов, получаем, что он представляет собой несамопересекающуюся цепь (возможно, нулевой длины), в которой ни одна внутренняя вершина не совпадает с вершиной a_0. Лемма 9 доказана. □

Преобразуем дерево D' в контактную схему S' методом, описанным в [12, с. 82]. А именно, возьмём две копии дерева D' и соединим каждую концевую вершину одной из них с той же концевой вершиной другой. Корни этих копий будем считать полюсами A и B полученной «симметричной» контактной схемы, которую обозначим S'. Из леммы 8 нетрудно получить, что схема S' реализует функцию $(f \oplus I_T)(\tilde{x}^n)$ (каждая цепь между полюсами схемы S' представляет собой «удвоенную» цепь из дерева D', соединяющую его корень с какой-то концевой вершиной), а из леммы 9 — что для любого контакта K схемы S' во множестве T найдётся такой набор $\tilde{\sigma}(K)$, что контакт K проводит на этом наборе и в подсхеме, образованной всеми проводящими на наборе $\tilde{\sigma}(K)$ контактами схемы S', компонента связности, содержащая контакт K, а также компоненты связности, содержащие полюса схемы S', представляют собой несамопересекающиеся цепи (возможно, нулевой длины), в которых ни одна внутренняя вершина не совпадает ни с одним из двух полюсов схемы S'.

Лемма 10 [12]. *Пусть контактная схема S' и множество T (некоторых) единичных наборов булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ таковы, что выполнены следующие условия:*

1) *схема S' реализует функцию $(f \oplus I_T)(\tilde{x}^n)$;*

2) *для любого контакта K схемы S' в T найдётся такой набор $\tilde{\sigma}(K)$, что контакт K проводит на этом наборе и в подсхеме, образованной всеми проводящими на наборе $\tilde{\sigma}(K)$ контактами схемы S', компонента связности, содержащая контакт K, а также компоненты связности, содержащие полюса схемы S', представляют собой несамопересекающиеся цепи (возможно, нулевой длины), в которых ни одна внутренняя вершина не совпадает ни с одним из двух полюсов схемы S'.*

Тогда из схемы S' путём, быть может, присоединения к ней некоторых контактов можно получить реализующую функцию $f(\tilde{x}^n)$ и неизбыточную (*относительно обрывов контактов*) *схему S, для которой множество T является единичным проверяющим тестом размыкания.*

Из леммы 10 и предыдущих рассуждений следует, что функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной контактной схемой S, для которой множество $T = M$ является единичным проверяющим тестом размыкания. Но тогда M является и k-проверяющим тестом размыкания для схемы S, которая при этом k-неизбыточна (см. доказательство утверждения 2). Теорема 1 доказана. $\square$

Лемма 11. *Если $f(\tilde{x}^n) \equiv 0$ или $f(\tilde{x}^n) \equiv 1$, то $D_k(f) = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Каждую из булевых констант можно реализовать контактной схемой, не содержащей ни одного контакта. У такой схемы, очевидно, нет ни одной функции неисправности, поэтому она k-неизбыточна и пустое множество является для неё k-диагностическим тестом, откуда следует равенство $D_k(f) = 0$. Лемма 11 доказана. $\square$

Лемма 12. *Если булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$, можно представить дизъюнктивной нормальной формой* (*д. н. ф.*)*, содержащей только переменные из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$, в которой все элементарные конъюнкции попарно ортогональны, а их число равно s, то $D_k(f) \leqslant s$ для любого $k \in \mathbb{N}$.*

(Определения элементарной конъюнкции и д. н. ф. можно найти, например, в [13, с. 297]. Две элементарные конъюнкции называются ортогональными, если их конъюнкция тождественно равна 0.)

Доказательство. Пусть $f = K_1 \vee \ldots \vee K_s$, где $K_1, \ldots, K_s$ — попарно ортогональные элементарные конъюнкции, содержащие только переменные из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Реализуем каждую конъюнкцию K_i, $i = 1, \ldots, s$, цепью Z_i из контактов, длина которой равна рангу этой конъюнкции. Затем все цепи $Z_1, \ldots, Z_s$ соединим параллельно. Очевидно, что построенная схема S реализует функцию f, а всевозможные её функции неисправности равны дизъюнкциям некоторых не более $s - 1$ конъюнкций из множества $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_s\}$ (дизъюнкцию 0 конъюнкций из этого множества считаем равной константе 0).

Пусть $\tilde{\sigma}_i$ — произвольный двоичный набор длины n, на котором конъюнкция K_i обращается в единицу, $i = 1, \ldots, s$. Все наборы $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_s$ попарно различны в силу попарной ортогональности конъюнкций $K_1, \ldots, K_s$. Пусть $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ — произвольные две булевы функции, представимые в виде различных дизъюнкций некоторых конъюнкций из множества $\mathcal{K}$. Тогда существует такое $i \in \{1, \ldots, s\}$, что конъюнкция K_i входит в представление одной из этих функций (без ограничения общности g_1) и не входит в представление другой (g_2). Легко видеть, что $g_1(\tilde{\sigma}_i) = 1$, а $g_2(\tilde{\sigma}_i) = 0$, поскольку конъюнкция K_i ортогональна всем остальным конъюнкциям из множества $\mathcal{K}$. Следовательно, $g_1 \not\equiv g_2$. Отсюда вытекает, что любую функцию неисправности схемы S можно отличить от функции $f(\tilde{x}^n)$, а любые две различные функции неисправности схемы S — друг от друга на наборах из множества $\{\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_s\}$. Поэтому схема S является k-неизбыточной и указанное множество составляет для неё k-диагностический тест. Лемма 12 доказана. $\square$

Лемма 13. *Любую булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$, отличную от константы 0, можно представить д. н. ф., содержащей только переменные из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$, в которой все элементарные конъюнкции попарно ортогональны, а их число не превосходит 2^{n-1}.*

Доказательство. Разобьём все двоичные наборы длины n на 2^{n-1} пар наборов, различающихся только в последней компоненте. Если оба набора из какой-то пары являются единичными для функции f, то рассмотрим конъюнкцию ранга $n-1$, обращающуюся в единицу в точности на этих двух наборах; если же ровно один набор из какой-то пары является единичным для f, то рассмотрим конъюнкцию ранга n, обращающуюся в единицу на одном этом наборе. Д. н. ф., являющаяся дизъюнкцией всех рассмотренных элементарных конъюнкций (число которых не меньше 1 и не больше 2^{n-1}), очевидно, будет искомой. Лемма 13 доказана. $\square$

Лемма 14. *Пусть булева функция $f(\tilde{x}^n)$, натуральное число k, попарно непересекающиеся множества $T_1, \ldots, T_{k+1}$ её единичных наборов и k-неизбыточные контактные схемы $S_1, \ldots, S_{k+1}$ таковы, что выполнены следующие условия:*

1) схема S_i, $i = 1, \ldots, k+1$, реализует булеву функцию $(f \& \overline{I}_{T \setminus T_i})(\tilde{x}^n)$, где $T = T_1 \cup \ldots \cup T_{k+1}$;

2) множество T_i, $i = 1, \ldots, k+1$, является k-проверяющим тестом размыкания для схемы S_i.

Тогда схема S, представляющая собой параллельное соединение схем $S_1, \ldots, S_{k+1}$, реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$ и k-неизбыточна, а множество T является для неё k-диагностическим тестом размыкания.

Доказательство. Схема S реализует функцию

$$(f \& \overline{I}_{T \setminus T_1}) \vee \ldots \vee (f \& \overline{I}_{T \setminus T_{k+1}}) = f \& (\overline{I}_{T \setminus T_1} \vee \ldots \vee \overline{I}_{T \setminus T_{k+1}}) = \\ = f \& \overline{I_{T \setminus T_1} \& \ldots \& I_{T \setminus T_{k+1}}} = f \& \overline{0} = f$$

в силу условия 1). Докажем, что данная схема k-неизбыточна. Пусть в ней неисправен хотя бы один контакт и он содержится в подсхеме S_i, $i \in \{1, \ldots, k+1\}$. Хотя бы на одном наборе $\tilde{\sigma}$ из множества T_i подсхема S_i

выдаст значение, отличное от

$$f(\tilde{\sigma})\&\overline{I}_{T\setminus T_i}(\tilde{\sigma}) = 1\&\overline{0} = 1$$

в силу условий 1), 2), т. е. значение 0. Любая подсхема S_j, $j \notin \{1,\ldots, k+1\} \setminus \{i\}$, по условию 1) выдаст на наборе $\tilde{\sigma}$ значение

$$f(\tilde{\sigma})\&\overline{I}_{T\setminus T_j}(\tilde{\sigma}) = 1\&\overline{1} = 0$$

при отсутствии в ней неисправностей, а значит, очевидно, и при обрыве произвольного числа её контактов. Поэтому схема S выдаст на указанном наборе значение $\underbrace{0 \vee \ldots \vee 0}_{k+1} = 0$, отличное от значения $f(\tilde{\sigma}) = 1$, откуда следует, что она k-неизбыточна.

Найдём все возможные функции неисправности схемы S при неисправностях не более k контактов. На любом нулевом наборе функции $f(\tilde{x}^n)$ каждая из схем $S_1, \ldots, S_{k+1}$ по условию 1) выдаст значение $0\&\ldots = 0$ при отсутствии в ней неисправностей, а значит, очевидно, и при обрыве произвольного числа её контактов. Следовательно, любая функция неисправности схемы S выдаст на указанном наборе значение $\underbrace{0 \vee \ldots \vee 0}_{k+1} = 0$. Далее, при обрыве не более k контактов схемы S хотя бы в одной из подсхем $S_1, \ldots, S_{k+1}$ все контакты исправны. На любом единичном наборе функции $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащем множеству T, указанная подсхема выдаст значение $1\&\overline{0} = 1$ по условию 1). Отсюда вытекает, что и значение схемы S на этом наборе будет равно 1. Тем самым показано, что любая функция неисправности g данной схемы принимает такие же значения, как и функция $f(\tilde{x}^n)$, на всех двоичных наборах длины n, не принадлежащем множеству T, причём $g \not\equiv f$ в силу k-неизбыточности схемы S. Поэтому любую её функцию неисправности можно отличить от функции f, а любые две различные функции неисправности схемы S — друг от друга на наборах из множества T, откуда получаем, что данное множество является k-диагностическим тестом для схемы S. Лемма 14 доказана. $\square$

Основные теоремы

Теорема 2. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$D_k(n) \leqslant \begin{cases} n, & \text{\textit{если} } n \in \{0,1,2\}, \\ n+1, & \text{\textit{если} } n = 3, \\ n + k(n-2), & \text{\textit{если} } n \geqslant 4. \end{cases}$$

Следствие 1. *Для любых* $k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ *справедливо неравенство* $D_k(n) \leqslant$ $\leqslant n + k(n-2)$.

Следствие 2. *Справедливо неравенство*

$$D_1(n) \leqslant \begin{cases} n, & \text{если } n \in \{0,1,2\}, \\ n+1, & \text{если } n = 3, \\ 2n-2, & \text{если } n \geqslant 4. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 2. Достаточно доказать аналогичное неравенство с заменой левой части на $D_k(f)$ для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$. В случае $n = 0$, а также в случае $n \geqslant 1$ и $f(\tilde{x}^n) \in \{0,1\}$ оно следует из леммы 11. Далее будем считать, что функция $f(\tilde{x}^n)$ отлична от констант. Если $n \in \{1,2,3\}$, то требуемое неравенство следует из лемм 12, 13 и очевидных равенств $2^{n-1} = n$ при $n \in \{1,2\}$, $2^{n-1} = n+1$ при $n = 3$.

Пусть $n \geqslant 4$. Надо доказать, что $D_k(f) \leqslant n + k(n-2)$. Обозначим через s число единичных наборов функции $f(\tilde{x}^n)$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $s \leqslant n + k(n-2)$. Функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно представить в виде совершенной д. н. ф. (см., например, [13, с. 27]), содержащей s попарно ортогональных конъюнкций. В силу леммы 12 имеем $D_k(f) \leqslant s \leqslant n +$ $+ k(n-2)$, что и требовалось доказать.

2. Пусть $s \geqslant n + 1 + k(n-2)$. В случае $k \geqslant 2$ выполнено соотношение $s \geqslant 3n-3 \geqslant 2n+1$ и в силу леммы 7 для функции $f_1(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n)$ существует ключевое множество T_1 мощности не более $n-2$. Если $k \geqslant 3$, то функция $f_2(\tilde{x}^n) = (f \& \overline{I}_{T_1})(\tilde{x}^n)$ принимает значение 1 на

$$s - |T_1| \geqslant n+1+k(n-2)-(n-2) = n+1+(k-1)(n-2) \geqslant 3n-3 \geqslant 2n+1$$

наборах и в силу леммы 7 для этой функции существует ключевое множество T_2 мощности не более $n-2$. Если $k \geqslant 4$, то функция $f_3(\tilde{x}^n) = (f \& \overline{I}_{T_1 \cup T_2})(\tilde{x}^n)$ принимает значение 1 на

$$s - |T_1 \cup T_2| \geqslant n+1+k(n-2)-2(n-2) = n+1+(k-2)(n-2) \geqslant 3n-3 \geqslant 2n+1$$

наборах, и т. д. В итоге при $k \geqslant 2$ можно определить такие попарно непересекающиеся множества $T_1, \ldots, T_{k-1}$ двоичных наборов длины n, что для любого $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ множество T_i имеет мощность не более $n-2$ и является ключевым для функции

$$f_i(\tilde{x}^n) = (f \& \overline{I}_{T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1}})(\tilde{x}^n) \tag{4}$$

(в случае $i = 1$ множество $T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1}$ считаем пустым).

Пусть теперь $k \geqslant 1$. Функция $f_k(\tilde{x}^n)$, определяемая формулой (4) при $i = k$, принимает значение 1 на

$$s - (k-1)(n-2) \geqslant n + 1 + k(n-2) - (k-1)(n-2) = 2n - 1$$

наборах. Тогда по лемме 6 для неё существуют такое ключевое множество T_k и такое множество T_{k+1} двоичных наборов длины n, что T_{k+1} является ключевым множеством для функции $f_{k+1}(\tilde{x}^n) = (f_k \& \overline{I}_{T_k})(\tilde{x}^n)$ и

$$|T_k| + |T_{k+1}| \leqslant 2n - 2. \tag{5}$$

Отметим, что функция f_{k+1} также удовлетворяет представлению (4) при $i = k + 1$.

Пусть $T = T_1 \cup \ldots \cup T_{k+1}$. Легко видеть, что множества $T_1, \ldots, T_{k+1}$ попарно не пересекаются и для любого $i \in \{1, \ldots, k+1\}$ выполнены соотношения $T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1} \subseteq T \setminus T_i$, $I_{T_i} \leqslant f \& \overline{I}_{T \setminus T_i} \leqslant f_i$ (см. (4)). Так как T_i — ключевое множество для функции $f_i(\tilde{x}^n)$, то из леммы 1 следует, что множество T_i является ключевым и для функции $(f \& \overline{I}_{T \setminus T_i}(\tilde{x}^n)$. Тогда по теореме 1 последнюю функцию можно реализовать k-неизбыточной контактной схемой S_i, для которой множество T_i является k-проверяющим тестом. Получаем, что выполнены все условия леммы 14, из которой с использованием (5) следует соотношение

$$D_k(f) \leqslant |T| = |T_1 \cup \ldots \cup T_{k-1}| + |T_k| + |T_{k+1}| \leqslant (k-1)(n-2) + 2n - 2 = n + k(n-2).$$

Теорема 2 доказана. □

Теорема 3. *При условии $k = k(n) \leqslant 2^{n-4}$ для почти всех булевых функций f от n переменных выполняется соотношение $D_k(f) \leqslant 2k + 2$.*

Следствие 3. *Для почти всех булевых функций f от n переменных выполняется соотношение $D_1(f) \leqslant 4$.*

Доказательство теоремы 3. Обозначим через $F_{n,k}$ множество всех булевых функций от n переменных, каждая из которых принимает пару значений $(1, 1)$ не более, чем на k различных парах противоположных наборов длины n. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция, не принадлежащая множеству $F_{n,k}$. Тогда существуют такие различные множества $T_1, \ldots, T_{k+1}$, каждое из которых состоит из двух противоположных наборов длины n, что все наборы из множества $T = T_1 \cup \ldots \cup T_{k+1}$ являются единичными для функции f. Оба набора из множества T_i, $i = 1, \ldots, k+1$, очевидно, являются единичными и для функции $(f \& \overline{I}_{T \setminus T_i})(\tilde{x}^n)$. Отсюда, а также из примера 1 и теоремы 1 следует, что функцию $(f \& \overline{I}_{T \setminus T_i})(\tilde{x}^n)$ можно реализовать k-неизбыточной контактной схемой S_i, для которой множество T_i является k-проверяющим тестом. Тогда выполнены все условия леммы 14, из которой следует соотношение $D_k(f) \leqslant |T| = 2k+2$.

Оценим мощность множества $F_{n,k}$. Очевидно, что его можно представить в виде объединения попарно непересекающихся множеств $F_n^0, \dots, F_n^k$, где множество F_n^i, $i = 0, \dots, k$, состоит из всех булевых функций от n переменных, каждая из которых принимает пару значений $(1,1)$ ровно на i различных парах противоположных наборов длины n. Такие i пар можно выбрать $C^i_{2^{n-1}}$ способами; на наборах из каждой такой пары значения функции определены однозначно, а на каждой из остальных $2^{n-1}-i$ пар наборов длины n она может принимать одну из трёх пар значений $(0,0)$, $(0,1)$ или $(1,0)$. Отсюда и из асимптотики для биномиальных коэффициентов (см., например, [13, с. 211]) следуют соотношения

$$|F_n^i| = C^i_{2^{n-1}} \cdot 3^{2^{n-1}-i},$$

$$\frac{|F_n^i|}{|F_n^{i+1}|} = \frac{(2^{n-1})! \cdot 3^{2^{n-1}-i}}{i! \cdot (2^{n-1}-i)!} : \frac{(2^{n-1})! \cdot 3^{2^{n-1}-i-1}}{(i+1)! \cdot (2^{n-1}-i-1)!} = \frac{3i+3}{2^{n-1}-i} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3k}{2^{n-1}-k} \leqslant \frac{3 \cdot 2^{n-4}}{2^{n-1}-2^{n-4}} = \frac{3}{7} \text{ (при } i \leqslant k-1),$$

$$|F_n^i| \leqslant \frac{3}{7}|F_n^{i+1}| \leqslant \ldots \leqslant \left(\frac{3}{7}\right)^{2^{n-4}-i} \left|F_n^{2^{n-4}}\right|,$$

$$|F_{n,k}| = \sum_{i=0}^{k} |F_n^i| \leqslant \left|F_n^{2^{n-4}}\right| \cdot \sum_{i=0}^{2^{n-4}} \left(\frac{3}{7}\right)^{2^{n-4}-i} =$$

$$= C^{2^{n-4}}_{2^{n-1}} \cdot 3^{2^{n-1}-2^{n-4}} \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{7}\right)^{2^{n-4}+1}}{1-\frac{3}{7}} \lesssim$$

$$\lesssim \frac{\sqrt{2^{n-1}}}{\sqrt{2\pi \cdot 2^{n-4} \cdot (2^{n-1}-2^{n-4})}} \cdot \frac{2^{(n-1)\cdot 2^{n-1}}}{2^{(n-4)\cdot 2^{n-4}} \cdot (2^{n-1}-2^{n-4})^{2^{n-1}-2^{n-4}}} \cdot 3^{7\cdot 2^{n-4}} \cdot \frac{7}{4} =$$

$$= \sqrt{\frac{2^{n-1}}{2\pi \cdot 2^{n-4} \cdot 7 \cdot 2^{n-4}}} \cdot \frac{2^{(n-1)\cdot 2^{n-1}}}{2^{(n-4)\cdot 2^{n-4}} \cdot (7 \cdot 2^{n-4})^{7\cdot 2^{n-4}}} \cdot 3^{7\cdot 2^{n-4}} \cdot \frac{7}{4} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{7\pi \cdot 2^{n-6}}} \cdot \frac{2^{(n-1)\cdot 2^{n-1}}}{7^{7\cdot 2^{n-4}} \cdot 2^{(n-4)\cdot 8 \cdot 2^{n-4}}} \cdot 3^{7\cdot 2^{n-4}} \cdot \frac{7}{4} = \sqrt{\frac{1}{7\pi \cdot 2^{n-6}}} \cdot 2^{3\cdot 2^{n-1}} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{7\cdot 2^{n-4}} \cdot \frac{7}{4},$$

$$\frac{|F_{n,k}|}{2^{2^n}} \lesssim \sqrt{\frac{1}{7\pi \cdot 2^{n-6}}} \cdot 2^{2^{n-1}} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{7\cdot 2^{n-4}} \cdot \frac{7}{4}.$$

Прологарифмируем последнее соотношение по основанию 2:

$$\log_2 \frac{|F_{n,k}|}{2^{2^n}} \lesssim -\frac{\log_2(7\pi) + n - 6}{2} + 2^{n-1} + 7 \cdot 2^{n-4} \cdot \log_2 \frac{3}{7} + \log_2 \frac{7}{4} \lesssim$$
$$\lesssim 2^{n-4} \left(8 + 7 \cdot \log_2 \frac{3}{7}\right) = 2^{n-4} \log_2 \frac{2^8 \cdot 3^7}{7^7} < -0,5 \cdot 2^{n-4} \to -\infty \ \ (n \to \infty).$$

Таким образом, отношение числа булевых функций из множества $F_{n,k}$ к общему числу булевых функций от n переменных $\left(2^{2^n}\right)$ стремится к 0 при $n \to \infty$. Выше было показано, что для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащей множеству $F_{n,k}$, выполнено неравенство $D_k(f) \leqslant 2k+2$, откуда следует справедливость теоремы 3. $\square$

Заключение

В работе рассмотрен случай размыкания не более k контактов в контактных схемах. Конструктивно доказано, что при фиксированном k любую (почти любую) булеву функцию от n переменных можно реализовать k-неизбыточной контактной схемой, допускающей k-диагностический тест линейной по n (соответственно, константной) длины. Тем самым предложены методы синтеза контактных схем, допускающих существенно более короткие диагностические тесты, чем тривиальный тест из 2^n наборов. С учётом экономии времени на тестирование схем, которая при этом получается, указанные методы могут найти практическое применение.

Вместе с тем, открытым пока остаётся вопрос, насколько окончательными являются полученные верхние оценки длин тестов. Дальнейшая работа может идти либо в направлении получения нетривиальных нижних оценок длин k-диагностических тестов размыкания для контактных схем, либо в направлении усовершенствования методов синтеза схем, дающих верхние оценки длин таких тестов. Также представляет интерес изучение возможностей построения контактных схем, допускающих короткие k-диагностические тесты, при рассмотрении других типов неисправностей, в первую очередь — замыканий контактов.

Список литературы

1. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 138 с.

2. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.

3. Яблонский С. В. Надёжность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.). — М.: МГУ. — 1986. — С. 7–12.

4. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

5. Редькин Н. П. Надёжность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992. — 192 с.

6. Коляда С. С. Верхние оценки длины проверяющих тестов для схем из функциональных элементов. — Дисс. . . . канд. физ.-мат. наук. — М., 2013. — 77 с.

7. Мадатян Х. А. Полный тест для бесповторных контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 23. — М.: Наука, 1970. — С. 103–118.

8. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для контактных схем // Методы дискретного анализа в исследовании экстремальных структур. — Т. 39. — Новосибирск, 1983. — С. 80–87.

9. Редькин Н. П. О проверяющих тестах замыкания и размыкания // Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем. — Вып. 40. — Новосибирск, 1983. — С. 87–99.

10. Романов Д. С. О синтезе контактных схем, допускающих короткие проверяющие тесты // Учёные записки Казанского университета. Физико-математические науки. — 2014. — Т. 156, кн. 3. — С. 110–115.

11. Попков К. А. О тестах замыкания для контактных схем // Дискретная математика. — 2016. — Т. 28, вып. 1. — С. 87–100.

12. Попков К. А. О проверяющих тестах размыкания для контактных схем // Дискретная математика. — 2017. — Т. 29, вып. 4. — С. 66–86.

13. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. — 384 с.