



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 3 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Аптекарев А.И., Денисов С.А.,
Ятцелев М.Л.

Самосопряженные матрицы
Якоби на графах и
совместно ортогональные
многочлены

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Аптекарев А.И., Денисов С.А., Ятцелев М.Л. Самосопряженные матрицы Якоби на графах и совместно ортогональные многочлены // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 3. 27 с. doi:[10.20948/prepr-2018-3](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-3)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-3>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А. И. Аптекарев, С. А. Денисов и М. Л. Ятцелев

Самосопряженные матрицы Якоби на графах
и совместно ортогональные многочлены

Москва — 2018

УДК 517.53+517.9

Аптекарев А. И., Денисов С. А., Ятцелев М. Л.

Самосопряженные матрицы Якоби на графах и совместно ортогональные многочлены. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2018

Построены самосопряженные операторы на графах-деревьях с помощью разностных уравнений, связывающих соседей в многомерной решетке совместно ортогональных многочленов. Эта конструкция обобщает матрицы Якоби рекуррентных соотношений для ортогональных многочленов.

Ключевые слова: разностные операторы на графах; совместно ортогональные многочлены; дискретные интегрируемые системы; задача рассеяния.

Aptekarev A. I., Denisov S. A., Yattselev M. L.

Selfadjoint Jacobi matrices on graphs and multiple orthogonal polynomials. Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS Preprint, Moscow, 2018

Selfadjoint operators on the graph-trees are constructed by means of the difference equations connecting nearest neighbors in the lattice of multiple orthogonal polynomials. This construction generalizes the Jacobi matrices of the recurrence relations for orthogonal polynomials.

Key words: difference operators on graphs; multiple orthogonal polynomials; discrete integrable systems; spectral and scattering problem.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00025).

© Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, 2018

© А. И. Аптекарев, 2018, © С. А. Денисов 2018, © М. Л. Ятцелев, 2018

Оглавление

1	Введение	3
2	Построение самосопряженного оператора на графе	8
3	Системы Анжелеско и асимптотики СОМ-ов	15
4	Самосопряженный оператор для систем Анжелеско	21
	Список литературы	25

1. Введение

1.1. Совместно ортогональные многочлены и рекуррентные соотношения на решётках в \mathbb{Z}_+^d . Цель работы.

Пусть $\vec{\mu} := (\mu_1, \dots, \mu_d)$ — вектор вероятностных положительных борелевских мер, и пусть мультииндекс $\vec{n} := (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, $d \in \mathbb{N}$, $|\vec{n}| = \sum_{j=1}^d n_j$.

Определение 1.1. Набор многочленов $\{A_{\vec{n}}^{(j)}\}_{j=1}^d$:

$$\deg A_{\vec{n}}^{(j)} \leq n_j - 1, \quad \int \sum_{j=1}^d A_{\vec{n}}^{(j)}(x) x^l d\mu_j(x) = 0, \quad \forall l < |\vec{n}| - 1, \quad (1.1)$$

называется многочленами совместной ортогональности (тип I).

Определение 1.2. Многочлен $P_{\vec{n}} : \deg P_{\vec{n}} \leq |\vec{n}|$,

$$\int P_{\vec{n}}(x) x^l d\mu_j(x) = 0, \quad \forall l < n_j, \quad j = 1, \dots, d, \quad (1.2)$$

называется многочленом совместной ортогональности (тип II).

Конструкция, обобщающая совместно ортогональные многочлены (СОМ-ы), была введена Эрмитом [1] при доказательстве трансцендентности числа e , поэтому их также называют многочленами Эрмита—Паде (тип I) и (тип II). СОМ-ы (тип II) и просто ортогональные многочлены (при $d = 1$) являются знаменателями рациональных аппроксимаций для преобразований Коши мер, для т.н. марковских функций [2].

Ясно, что соотношения ортогональности (1.1) и (1.2) содержат достаточное количество линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов СОМ-ов. Если многочлен $P_{\vec{n}}$ с точностью до умножения на константу определяется единственным образом, то мультииндекс \vec{n} называется нормальным. В этом случае линейная форма СОМ-ов (тип I):

$$Q_{\vec{n}}(x) := \sum_{j=1}^d A_{\vec{n}}^{(j)}(x) d\mu_j(x) \quad (1.3)$$

также определена, с точностью до умножения на константу, единственно. Для нормальных индексов фиксируется нормировка СОМ-ов:

$$P_{\vec{n}}(x) = x^{|\vec{n}|} + \dots, \quad \int P_{\vec{n}}(x) Q_{\vec{m}}(x) dx = \delta_{|\vec{n}|+1, \vec{m}}. \quad (1.4)$$

Тем самым, нормированные СОМ-ы (тип I) и (тип II) образуют биортонормированную систему.

Определение 1.3. Векторная мера $\vec{\mu}$ называется совершенной, если все мультииндексы $\vec{n} \in \mathbb{Z}_+^d$ для СОМ-ов являются нормальными.

Понятие совершенных систем ввёл Малер (см. [4]). Более детально о СОМ-ах см., например, обзорные статьи [5, 6, 7] и монографию [8].

СОМ-ы удовлетворяют рекуррентным соотношениям различного вида (см. [9, 11]). Нас будут интересовать соотношения, связывающие ближайших соседей в многомерной решётке \mathbb{Z}_+^d . В этих соотношениях СОМ-ы проявляют себя как решения многомерных разностных уравнений. Справедливо (см. [13, 14, 12]) для линейных форм СОМ-ов (тип I):

$$xQ_{\vec{n}}(x) = Q_{\vec{n}-\vec{e}_j} + b_{\vec{n}-\vec{e}_j,j}Q_{\vec{n}} + \sum_{l=1}^d a_{\vec{n},l}Q_{\vec{n}+\vec{e}_l}, \quad j = 1, \dots, d, \quad \vec{n} \in \mathbb{N}^d. \quad (1.5)$$

Отметим, что преобразования Коши:

$$L_{\vec{n}}(z) := \widehat{Q}_{\vec{n}}(z) := \int \frac{Q_{\vec{n}}(x)}{x-z} = - \sum_{j=1}^d A_{\vec{n}}^{(j)} \hat{\mu}_j - A_{\vec{n}}^{(0)}, \quad \hat{\mu}(z) := \int \frac{d\mu(x)}{x-z}, \quad (1.6)$$

удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению (1.5). Рекуррентные соотношения для СОМ-ов (тип II) имеют вид

$$xP_{\vec{n}}(x) = P_{\vec{n}+\vec{e}_j} + b_{\vec{n},j}P_{\vec{n}} + \sum_{l=1}^d a_{\vec{n},l}P_{\vec{n}-\vec{e}_l}, \quad j = 1, \dots, d, \quad \vec{n} \in \mathbb{N}^d. \quad (1.7)$$

При этом множество коэффициентов $\{a_{\vec{n},j}, b_{\vec{n},j}\}_{j=1}^d$ в обеих рекурренциях (1.5) и (1.7) то же самое, и для коэффициентов имеются выражения

$$a_{\vec{n},l} = \frac{\int P_{\vec{n}}(x) x^{n_l} d\mu_l}{\int P_{\vec{n}-\vec{e}_l} x^{n_l-1} d\mu_l}, \quad b_{\vec{n},l} = \int x P_{\vec{n}} Q_{\vec{n}+\vec{e}_l}(x) d\mu(x). \quad (1.8)$$

Для $d = 1$ любые $\{a_n, b_n\} : a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$, с начальными условиями $P_{-1} = 0, P_0 = 1$ порождают (посредством рекуррентных соотношений) последовательность многочленов, ортогональных относительно положительной меры. Это не так для $d > 1$. Коэффициенты рекуррентных соотношений (1.5), (1.7) должны подчиняться условиям "consintensy" (совместимости), таким, чтобы многочлены $P_{\vec{n}}$, полученные посредством (1.7) из граничных

данных в \mathbb{Z}_+^d , были теми же самыми, независимо от пути в многомерной решётке $\vec{n} \in \{0 \leq n_i \leq N_j, j = 1, \dots, d\}$. Эти условия выражаются в виде систем нелинейных разностных уравнений на коэффициенты $\{a_{\vec{n},j}, b_{\vec{n},j}\}_{j=1}^d$ (т.н. дискретных интегрируемых систем, см. [15]). Дискретные интегрируемые системы и коммутационные соотношения Лакса выписаны и изучались в [12, 16].

Для $d = 1$ трехчленные рекуррентные соотношения, порождающие ортогональные многочлены, лежат в основании спектральной теории самосопряжённых разностных операторов второго порядка (см. [8]). Естественно, что различные рекуррентные соотношения для СОМ-ов ($d > 1$) мотивировали их интерпретацию со стороны спектральной теории различных классов разностных операторов. И если рекуррентии вдоль диагональных "лестничных" линий ("step" lines) связывались с несимметричными разностными операторами высокого порядка (см. [17, 9, 10, 11, 18, 19]), то соотношения (1.5), (1.7) для мультииндексов $\vec{n} := (n_1, \dots, n_d)$, принадлежащих всей решётке \mathbb{Z}_+^d , уместно рассматривать с точки зрения спектральной теории многомерных дискретных операторов. Некоторые шаги в этом направлении были сделаны в [20, 21, 22], где, в частности, многомерный дискретный электромагнитный оператор Шредингера был получен путём усреднения рекуррентий (1.7). Однако общих классов разностных потенциалов $\{a_{\vec{n},j}, b_{\vec{n},j}\}_{j=1}^d$, коэффициентов, допускающих симметризацию, приводящую к самосопряжённому в $l_2(\mathbb{Z}_+^d)$ электромагнитному оператору Шредингера, пока получить не удалось.

Целью настоящей работы является построение ограниченных самосопряжённых операторов, определённых на путях в $l_2(\mathbb{Z}_+^d)$, приходящих в точку решётки $\vec{n} = (n_1, \dots, n_d)$, для которых СОМы $\{Q_{\vec{n}}\}$ или $\{P_n\}$ после симметризирующей перенормировки образуют "обобщённый" собственный вектор.

При этом на меры ортогональности $\vec{\mu}$ и на коэффициенты $\{a_{\vec{n},j}, b_{\vec{n},j}\}_{j=1}^d$ соответствующих рекуррентий (1.5), (1.7) накладываются (не ограничивающие общности) условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \vec{\mu} \text{ — совершенна} \\ 2.1. 0 < a_{\vec{n},j}, \quad \sup_{\vec{n},j} a_{\vec{n},j} < \infty; \\ 2.2. \sup_{\vec{n},j} b_{\vec{n},j} < \infty. \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Мы изучим спектр для общего класса таких операторов, порождённых рекуррентными соотношениями (1.5), (1.7): для СОМов из класса Анжелеско (см. [3, 23, 24]), т.е. в случае, когда отрезки носители координат вектора $\vec{\mu}$

мер ортогональности в (1.1), (1.2) попарно не пересекаются:

$$\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_d), \quad \Delta_i := \text{supp } \mu_i, \quad \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset, \quad i, j = 1, \dots, d. \quad (1.10)$$

1.2. Ортогональные многочлены, трехчленные рекуррентии и самосопряженные матрицы Якоби. В этом пункте мы напомним ключевые соотношения теории ортогональных многочленов, связывающие её с самосопряжёнными операторами в $l_2(\mathbb{Z}_+)$. Именно аналоги этих соотношений нас будут интересовать при построении самосопряжённых операторов в случае $d > 1$.

Имеем при $d = 1$: $n \in \mathbb{N}$, $\mu > 0$, $\|\mu\| = 1$,

$$P_n(x) = x^n + \dots : \int P_n(x)x^\nu d\mu(x) = 0, \quad \nu = 0, \dots, n-1, \quad (1.11)$$

P_n — ортогональные многочлены (со старшим коэффициентом единица),

$$L_n(z) = \int \frac{P_n(x)}{x-z} d\mu(x) = P_n(z) \hat{\mu}(z) - A_n^{(0)}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right),$$

L_n — функции второго рода, а $A_n^{(0)}$ многочлены второго рода. Все введённые последовательности удовлетворяют трёхчленному рекуррентному соотношению (в которое превращается (1.7) при $d = 1$)

$$xP_n = P_{n+1} + b_n P_n + a_{n-1} P_{n-1}, \quad a_n > 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad a_{-1} = 1, \quad (1.12)$$

с начальными условиями

$$P_0 = 1, \quad P_{-1} = 0, \quad A_0^{(0)} = 0, \quad A_{-1}^{(0)} = 1. \quad (1.13)$$

Рассмотрим два оператора

$$\mathcal{H} \equiv \begin{bmatrix} b_0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_0 & b_1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & b_2 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & b_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}_N \equiv \begin{bmatrix} b_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_0 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{N-1} & b_N \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

действующие на пространстве последовательностей. Из (1.12), (1.13) формально следует для $\vec{P} = (P_0, P_1, \dots)$ и $\vec{L} = (L_0, L_1, \dots)$:

$$\mathcal{H}\vec{P} = x\vec{P}, \quad (\mathcal{H} - Iz)\vec{L} = \vec{e}_0, \quad (1.15)$$

тем самым при рассмотрении \mathcal{H} на подходящем Гильбертовом пространстве (например, $l^2(\mathbb{Z}_+)$) вектор \vec{P} будет обобщённым собственным вектором, а вектор \vec{L} будет вектор-функцией Грина:

$$\vec{L} = R_z \vec{e}_0, \quad R_z = (\mathcal{H} - zI)^{-1}, \quad (1.16)$$

R_z — резольвента оператора \mathcal{H} . Обозначим

$$m_n := \|P_n\|_{2,\mu} := \left(\int P_n^2(x) d\mu(x) \right)^{1/2}. \quad (1.17)$$

Тогда из (1.11) и (1.12) имеем

$$a_n = \frac{m_{n+1}^2}{m_n^2} > 0, \quad b_n = \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{m_n^2}. \quad (1.18)$$

Проведём симметризацию оператора \mathcal{H} . Для этого поделим обе части (1.12) на $m_n = (a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1 a_0)^{1/2}$. В результате для ортонормированных многочленов $p_n := \frac{P_n}{m_n}$ из (1.12) получим

$$xp_n(x) = c_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_{n-1} p_{n-1}(x), \quad c_n = \sqrt{a_n}. \quad (1.19)$$

Тем самым для симметричного оператора J , действующего на векторы $l^2(\mathbb{Z}_+)$, умножением на бесконечную матрицу

$$\mathcal{J} \equiv \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & \dots \\ c_0 & b_1 & c_1 & 0 & \dots \\ 0 & c_1 & b_2 & c_2 & \dots \\ 0 & 0 & c_2 & b_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

имеем для векторов $\vec{p} := (p_0, p_1, \dots)$, $\vec{l} := (l_0, l_1, \dots)$, $l_n = \frac{L_n}{m}$

$$J\vec{p} = x\vec{p}, \quad (J - z)\vec{l} = \vec{e}_0, \quad \vec{l}(z) = R - z\vec{e}_0. \quad (1.21)$$

Интересное выражение имеет место для функции Грина или резольвентной функции

$$G_{n,m}(z) := \langle R_z \vec{e}_n, \vec{e}_m \rangle \quad (1.22)$$

конечномерного оператора

$$\mathcal{J}_N \equiv \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_0 & b_1 & c_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c_1 & b_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{N-1} & b_N \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

Справедливо

$$G_{n,N}^N(z) := \langle R_z^N \vec{e}_n, \vec{e}_N \rangle = -\frac{P_n(z)}{C_N P_{N+1}(z)}. \quad (1.24)$$

Замечание 1.1. Традиционно симметризация рекуррентных соотношений (1.12) производится делением их на корень из произведения коэффициентов, связывающих n -ый и $(n-1)$ -ый члены рекуррентности, с последующей перенормировкой этих членов. В то же время симметризацию можно провести по-другому. Например, для симметризации конечномерного оператора \mathcal{H}_N из (1.14) умножим на

$$(a_N \dots a_n)^{1/2}$$

рекуррентные соотношения (1.12) (вместо деления на t_n) и перенормируем многочлены P_n :

$$\widehat{P}_n := \left(\prod_{k=n}^N a_k \right)^{1/2} P_n.$$

Полученные многочлены будут удовлетворять рекуррентным соотношениям (1.19), они отличаются от ортонормированных (относительно вероятностной меры) многочленов p_n на мультипликативную константу:

$$\frac{\widehat{P}_n}{p_n} = \left(\prod_{k=0}^N a_k \right)^{1/2},$$

и для них будут выполнены все соотношения (1.21) – (1.24). Аналогичную симметризацию мы будем использовать при построении самосопряжённых операторов, порождаемых рекуррентными соотношениями для СОМ-ов (1.5), (1.7).

2. Построение самосопряженного оператора на графе

В этой секции мы построим самосопряжённые операторы на графах-деревьях, соответствующих путям в d -мерной решётке СОМ-ов. Не ограничивая общности (для большей наглядности) мы будем считать $d = 2$. Напомним, что для таблиц СОМ-ов мы предполагаем выполненным условие (1.9).

Нашей целью будет построение самосопряжённых операторов, для которых решения разностных уравнений (1.5), (1.7) (после соответствующей перенормировки) будут формировать обобщенные собственные векторы, т.е. будут справедливы аналоги (1.21) – (1.24).

2.1. СОМ-ы (тип I) и бесконечные матрицы Якоби на дереве. Рассмотрим бесконечную решётку \mathbb{N}^d и множество \mathcal{P} бесконечных путей на \mathbb{N}^d , стартовых из точки $(1,1)$, и за один шаг путь увеличивает координату на одну единицу (т.е. либо шаг "вверх", либо шаг "вправо"). Каждый такой путь будет соответствовать пути на графе \mathcal{T} . (Т.е. $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{T}$). \mathcal{T} является бесконечным однородным порядка $d = 2$ с корнем в O , который соответствует точке $(1,1) \in \mathbb{N}^2$, см. Рис. 1.

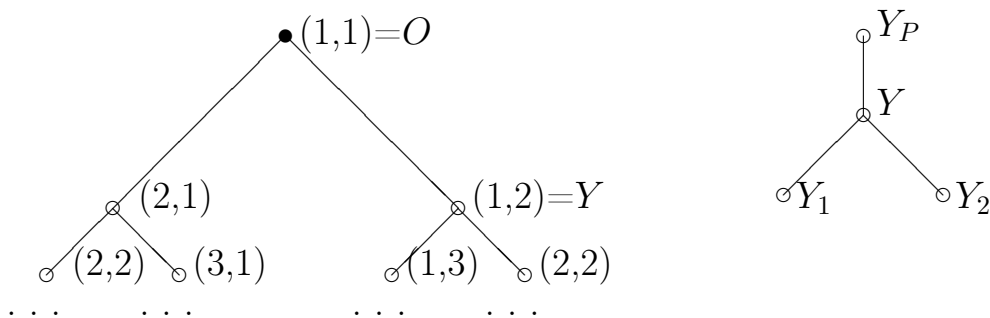


Рис. 1. Бесконечный граф-дерево. Соседи вершины Y .

Каждой вершине $Y \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ графа \mathcal{T} соответствует точка $\vec{n} \in \mathbb{N}^d$. Проекция $\pi : \mathcal{V}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{N}^d$ не взаимно однозначна. Как функция от $\vec{n} \in \mathbb{N}^d$, линейная форма СОМ-ов (тип I) Q может быть перенесена на \mathcal{T} , таким образом, определим Q_Y , $Y \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$.

Имея в виду рекуррентные соотношения (1.5), построим для $d = 2$ на множестве $\mathcal{V}(\mathcal{T})$ аналог несимметричного оператора \mathcal{H} , $d = 1$, см. (1.14).

Для любого $Y \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$, $Y \neq O$, обозначим Y_P вершину "родителя", из которой ребро \mathcal{T} приходит в Y , а через Y_j , $j = 1, \dots, d (= 2)$, — вершины "детей", в которые рёбра \mathcal{T} приходят из Y , см. Рис.1.

Определим семейство операторов \mathcal{H}^κ для $\kappa \in [0,1]$:

$$(\mathcal{H}^\kappa f)_Y = f_{Y_P} + \sum_{j=1}^{d=2} a_{\pi(Y),j} f_{Y_j} + \begin{cases} b_{\pi(Y)-\vec{e}_1,1} f_Y, & [\pi(Y_P), \pi(Y)] = \rightarrow \\ b_{\pi(Y)-\vec{e}_2,2} f_Y, & [\pi(Y_P), \pi(Y)] = \uparrow \\ (\kappa b_{(0,1),2} + (1-\kappa) b_{(1,0),1}) f, & Y = O \end{cases} \quad (2.1)$$

Обозначая величину в фигурных скобках через \tilde{B}_Y , а также $W_{Y_j} := a_{\pi(Y),j}$, с учётом того, что $f_{O_P} = 0$, т.к. $O_P = \emptyset$, имеем для (2.1)

$$(\mathcal{H}^\kappa f)_Y = \tilde{B}_Y f_Y + f_{Y_P} + \sum_{j=1}^d W_{Y_j} f_{Y_j}. \quad (2.2)$$

Обращаясь к (1.3), обозначим

$$Q_O^\kappa := - \left(\kappa A_{(1,0)}^{(1)} d\mu_1 + (1 - \kappa) A_{(0,1)}^{(2)} d\mu_2 \right),$$

(μ_j – вероятностные меры), тогда по построению оператора \mathcal{H}^κ , см. (2.1), имеем

$$((\mathcal{H}^\kappa - Ix)Q)_Y = Q_O^\kappa \delta_{Y,O}, \quad (2.3)$$

что есть аналог (1.15).

Пусть L обозначает пересадку $L_{\vec{n}}$ на $\mathcal{V}(\mathcal{T})$. Можно показать (см. (1.6)), что $L_Y(z) \in l^2(\mathcal{T})$, для $|z| \gg 1$ и справедлив аналог (1.16):

$$((\mathcal{H}^\kappa - Iz)L)_Y = \widehat{Q}_O^\kappa \delta_{Y,O}. \quad (2.4)$$

Теперь, аналогично симметризации $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{J}$ при $d = 1$, см. (1.19), мы симметризуем семейство операторов \mathcal{H}^κ . Речь идёт о нахождении функции σ на $\mathcal{V}(\mathcal{T})$, такой, что оператор $\sigma \mathcal{H}^\kappa \sigma^{-1}$ будет симметричным, для $f(Y)$, $Y \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$. В качестве σ можно предложить

$$\sigma_Y := \left(\prod_{y \in \text{path}(Y,O) \subset \mathcal{T}} W_y \right)^{1/2}, \quad W_O = 1, \quad (2.5)$$

где путь $\text{path}(Y, O)$ соединяет без самосопересечений вершины Y и O . Тогда в условиях (1.9) можем определить семейство симметрических операторов

$$(\mathcal{J}^\kappa g)_Y = \widetilde{B}_Y g_Y + W_Y^{1/2} g_{Y_P} + \sum_{j=1}^{d=2} W_{Y_j}^{1/2} g_{Y_j}, \quad g \in l^2(\mathcal{V}(\mathcal{T})), \quad (2.6)$$

умножая (2.2) на σ_Y и перенормируя $g_Y = f_Y \sigma_Y$. Теперь для \vec{l} такого, что $l_Y := L_Y \cdot \sigma_Y$, справедливо

$$(\mathcal{J}^\kappa - Iz) \vec{l} = \widehat{Q}_O^\kappa \cdot \vec{e}_O. \quad (2.7)$$

Оператор \mathcal{J}^κ ограничен, потому что \widetilde{B} и W ограничены. Так как $\sup_Y |W_Y| < \infty$, получаем

$$|l_Y(z)| \leq (C|z|^{-1})^{\text{dist}(Y,O)}$$

для $z \in \mathbb{C} : |z| \gg 1$. Следовательно, $\vec{l} \in \ell^2(\mathcal{T})$ для достаточно больших $|z|$, и с учетом аналитичности по z вне спектра \mathcal{J}^κ получаем:

$$\vec{l} = (\kappa \hat{\mu}_1 A_{(1,0)}^{(1)} + (1 - \kappa) \hat{\mu}_2 A_{(0,1)}^{(2)}) (\mathcal{J}^\kappa - z)^{-1} \vec{e}_O, \quad z \notin S(\mathcal{J}^\kappa). \quad (2.8)$$

Для матричного элемента (резольвентной функции) имеем:

$$m^\kappa(z) = \langle (\mathcal{J}^\kappa - z)^{-1} \vec{e}_O, \vec{e}_O \rangle = - \frac{A_{(1,1)}^{(1)} \hat{\mu}_1 + A_{(1,1)}^{(2)} \hat{\mu}_2}{\kappa \hat{\mu}_1 A_{(1,0)}^{(1)} + (1 - \kappa) \hat{\mu}_2 A_{(0,1)}^{(2)}} =$$

$$= - \frac{A_{(1,1)}^{(1)} + A_{(1,1)}^{(2)} (\hat{\mu}_2 / \hat{\mu}_1)}{\kappa A_{(1,0)}^{(1)} + (1 - \kappa) A_{(0,1)}^{(2)} (\hat{\mu}_2 / \hat{\mu}_1)}, \quad (2.9)$$

где последнее равенство справедливо вне \mathbb{R} там, где $\hat{\mu}_{1(2)} \neq 0$. Заметим, что

$$A_{(1,1)}^{(2)} = -A_{(1,1)}^{(1)} = - \left(\int_{\mathbb{R}} x (d\mu_1 - d\mu_2) \right)^{-1} \neq 0$$

и

$$A_{(0,1)}^{(1)} = A_{(1,0)}^{(2)} = 1.$$

Тем самым, справедлива

Теорема 2.1. Пусть система (μ_1, μ_2) порождает решётку СОМ-ов, удовлетворяющих (1.9), тогда

$$m^1 = \left(\int_{\mathbb{R}} x (d\mu_1 - d\mu_2) \right)^{-1} \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1}$$

функция из класса Херглотца (Неванлинны), т.е. отображает верхнюю полуплоскость в себя. Более того, преобразование Коши спектральной меры (резольвентная функция) (2.9) имеет вид

$$m^\kappa = \left(\int_{\mathbb{R}} x (d\mu_1 - d\mu_2) \right)^{-1} \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}{\kappa \hat{\mu}_1 + (1 - \kappa) \hat{\mu}_2}. \quad (2.10)$$

2.2. СОМ-ы (тип II) и конечные матрицы Якоби на дереве.

Цель пункта – построить на графе-дереве аналог конечномерного оператора (1.24), для которого справедливо обобщение (1.24). Фиксируем $\vec{N} \in \mathbb{N}^2$ и параметр $\kappa \in \mathbb{R}$. Сначала мы определим оператор $\mathcal{H}_{\vec{N}}^\kappa$, аналог укороченного (конечномерного) оператора \mathcal{H}_N , который порождает рекуррентии (1.7) для СОМ-ов $P_{\vec{n}}(x) = x^{|\vec{n}|} + \dots$. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{N} = (N_1, N_2)$ и ограничение $(\mathbb{Z}^+)^2$ на прямоугольник $\mathcal{R}_{\vec{N}} = \{\vec{n} : n_1 \leq N_1, n_2 \leq N_2\}$. Возьмем семейство $\mathcal{P}_{\vec{N}}$ всех путей длины $|\vec{N}| = N_1 + N_2$, соединяющих точки $(0,0)$ и (N_1, N_2) (т.е. идущие из точки $(0,0)$ "вверх" или "направо"). Построим граф-дерево $\mathcal{T}_{\vec{N}}$ с корнем \mathcal{O} , который мы зафиксируем в точке, соответствующей

точке \vec{N} и с ветвями длины $|\vec{N}|$, повторяющимися пути из $\mathcal{P}_{\vec{N}}$ (см. Рис. 2 для $\vec{N} = (2,1)$).*. Ясно, что число "детей" в каждой вершине равно двум, пока путь не достигнет границы (т.е. одной из осей). Каждая точка в $\mathcal{R}_{\vec{N}}$ может соответствовать нескольким точкам на дереве, например, точка $(0,0)$ будет иметь $C_{N_1+N_2}^{N_1}$ копий в кроне дерева.

Определим оператор $\mathcal{H}_{\vec{N}}^\kappa$ на вершинах $\mathcal{V}_{\vec{N}}$ графа $\mathcal{T}_{\vec{N}}$. Напомним, посредством Y_1 и Y_2 мы обозначаем "детей" Y . Если имеется только одно "дитя", мы обозначаем его Y_1 . Родитель Y называется Y_p . Пусть путь, проходящий через вершину $\pi(Y)$, содержит отрезок $(\pi(Y), \pi(Y) + \vec{e}_1)$. Тогда действие оператора $\mathcal{H}_{\vec{N}}^\kappa$ на Y координату вектора $f \in \ell^2(\mathcal{V}_{\vec{N}})$ определяется как

$$\left(\mathcal{H}_{\vec{N}}^\kappa f\right)_Y = f_{Y_p} + b_{\vec{n},1}f_Y + \sum_l a_{\vec{n},l}f_{Y_l}.$$

Аналогично, если путь содержит ребро $(\pi(Y), \pi(Y) + e_2)$, то по определению

$$\left(\mathcal{H}_{\vec{N}}^\kappa f\right)_Y = f_{Y_p} + b_{\vec{n},2}f_Y + \sum_l a_{\vec{n},l}f_{Y_l}.$$

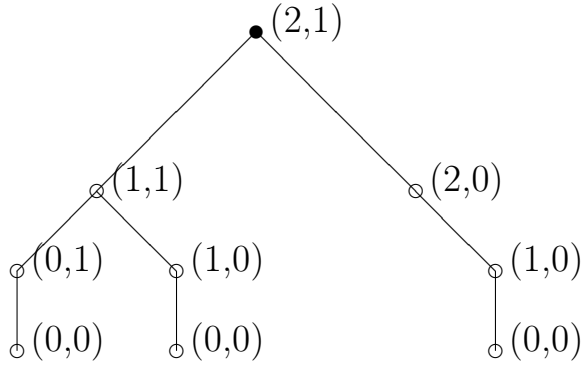


Рис. 2. Конечное дерево для $\vec{N} = (2,1)$.

В кроне дерева мы опускаем сумму по "детям" в определении оператора, так как в точках кроны нет "детей". Для определения оператора в корне \mathcal{O} мы используем параметр κ . Полагаем

$$\left(\mathcal{H}_{\vec{N}}^\kappa f\right)_\mathcal{O} = (\kappa b_{\vec{N},1} + (1 - \kappa)b_{\vec{N},2})f_\mathcal{O} + \sum_l a_{\vec{N},l}f_{\mathcal{O}_l},$$

где $\{\mathcal{O}_l\}$ являются "детьми" \mathcal{O} .

*Полученное дерево $\mathcal{T}_{\vec{N}}$ уже не является однородным, поскольку все вершины с проекциями $(0, n_1)$ и $(n_2, 0)$ имеют только по одному "дитя".

"Пересаживая" многочлен $P_{\vec{n}}$ с решетки $\mathcal{R}_{\vec{N}}$ на дерево, получаем функцию P_Y , определенную на вершинах графа-дерева, и

$$(\mathcal{H}_{\vec{N}}^\kappa P)_Y = xP_Y - \left(\kappa P_{\vec{N}+\vec{e}_1} + (1 - \kappa) P_{\vec{N}+\vec{e}_2} \right) \delta_O, \quad (2.11)$$

как это прямо следует из (1.7).

Теперь условие (1.9) оказывается решающим для построения самосопряженного оператора $\mathcal{J}_{\vec{N}}^\kappa$, подобного оператору $\mathcal{H}_{\vec{N}}^\kappa$ и который является аналогом \mathcal{J}_N . Для этого рассмотрим на множестве узлов $\mathcal{V}_{\vec{N}}$ функцию σ , такую, чтобы оператор $\sigma \mathcal{H}_{\vec{N}}^\kappa \sigma^{-1}$ стал симметричным на $\ell^2(\mathcal{V}_{\vec{N}})$. Это условие нетрудно удовлетворить. В самом деле, $\mathcal{H}_{\vec{N}}^\kappa$ определен таким образом, что он приписывает каждому ребру графа-дерева два значения. Любое ребро графа может быть параметризовано в виде $[Y, Y_p]$. Затем взаимодействию Y с Y_p присваивается значение 1, а взаимодействие Y_p с Y задается функцией, которую назовем W_Y , где W_Y принимает значения либо $a_{\vec{n},1}$, либо $a_{\vec{n},2}$ с $\vec{n} = \pi(Y_p)$. Если через B_Y обозначить потенциал в точке Y , т.е. либо $b_{\pi(Y),1}$, либо $b_{\pi(Y),2}$, (иначе, взаимодействие Y с самим собой), тогда действие оператора $\mathcal{H}_{\vec{N}}^\kappa$ на функцию f , определённую на $\mathcal{V}_{\vec{N}}$, можно записать в следующем виде:

$$(\mathcal{H}_{\vec{N}}^\kappa f)_Y = B_Y f_Y + f_{Y_p} + \sum_j W_{Y_j} f_{Y_j}.$$

Здесь функция W задана на $\mathcal{V}_{\vec{N}} \setminus \mathcal{O}$. Определяя σ , как и ранее, см. (2.5),

$$\sigma_Y = \left(\prod_{y \in \text{path}(Y, \mathcal{O})} W_y \right)^{1/2}, \quad W_{\mathcal{O}} = 1,$$

мы приходим к самосопряженному оператору $\mathcal{J}_{\vec{N}}^\kappa$. Из (2.11) следует

$$(\mathcal{J}_{\vec{N}}^\kappa p)_Y = xp_Y - \left(\kappa P_{\vec{N}+\vec{e}_1} + (1 - \kappa) P_{\vec{N}+\vec{e}_2} \right) \delta_O \quad (2.12)$$

для $p_Y := \sigma_Y P_Y$. Таким образом, имеем

$$(\mathcal{J}_{\vec{N}}^\kappa f)_Y = B_Y f_Y + (W_Y)^{1/2} f_{Y_p} + \sum_j (W_{Y_j})^{1/2} f_{Y_j}, \quad (2.13)$$

$$(\mathcal{J}_{\vec{N}}^\kappa f)_O = B_O f_Y + \sum_j (W_{Y_j})^{1/2} f_{O_j}.$$

Мы можем назвать $\mathcal{J}_{\vec{N}}^\kappa$ матрицей Якоби на графе-дереве, соответствующей СОМ-ам (тип II) и параметру \vec{N} . Тожество (2.12) влечет

$$G^{(\vec{N})}(Y, \mathcal{O}, z) = -\frac{p_Y}{\kappa P_{\vec{N}+\vec{e}_1} + (1 - \kappa) P_{\vec{N}+\vec{e}_2}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus S(\mathcal{J}_{\vec{N}}^\kappa), \quad (2.14)$$

что есть аналог (1.24), а $S(\mathcal{J}_{\vec{N}}^\kappa)$ обозначает спектр оператора $\mathcal{J}_{\vec{N}}^\kappa$. В частности,

$$M_{\vec{N}}^\kappa := \langle (\mathcal{J}_{\vec{N}}^\kappa - z)^{-1} \vec{e}_O, \vec{e}_O \rangle = -\frac{P_{\vec{N}}}{\kappa P_{\vec{N}+\vec{e}_1} + (1-\kappa)P_{\vec{N}+\vec{e}_2}}. \quad (2.15)$$

Полагая $\kappa = 0$ и $\kappa = 1$, получим отношение двух СОМ-ов с соседними мульти-индексами. Эти отношения рассматривались ранее в [16] (см. формулы (5.5) и (5.6)). Определим

$$M_{\vec{N}}^{(2)} = -\frac{P_{\vec{N}}}{P_{\vec{N}+\vec{e}_2}}, \quad M_{\vec{N}}^{(1)} = -\frac{P_{\vec{N}}}{P_{\vec{N}+\vec{e}_1}}; \quad (2.16)$$

в соответствии с выбором κ : $\kappa = 0$ дает $M_{\vec{N}}^{(2)}$ и $\kappa = 1$ дает $M_{\vec{N}}^{(1)}$.

Поделим (1.7) на $P_{\vec{N}}$, получим

$$x = -\frac{1}{M_{\vec{N}}^{(1)}} + b_{\vec{N},1} - a_{\vec{N},1} M_{\vec{N}-\vec{e}_1}^{(1)} - a_{\vec{N},2} M_{\vec{N}-\vec{e}_2}^{(2)}, \quad (2.17)$$

$$x = -\frac{1}{M_{\vec{N}}^{(2)}} + b_{\vec{N},2} - a_{\vec{N},1} M_{\vec{N}-\vec{e}_1}^{(1)} - a_{\vec{N},2} M_{\vec{N}-\vec{e}_2}^{(2)}.$$

Уместно заметить, что $P_{\vec{N}+\vec{e}_1}$ и $P_{\vec{N}+\vec{e}_2}$ связаны очень простым неравенством. Вычитая одно из другого рекуррентные соотношения (1.8), получим

$$P_{\vec{n}+\vec{e}_2} + b_{\vec{n},2} P_{\vec{n}} = P_{\vec{n}+\vec{e}_1} + b_{\vec{n},1} P_{\vec{n}},$$

и, таким образом,

$$\frac{P_{\vec{n}+\vec{e}_2}}{P_{\vec{n}}} = \frac{P_{\vec{n}+\vec{e}_1}}{P_{\vec{n}}} + b_{\vec{n},1} - b_{\vec{n},2}$$

влечет

$$-\frac{1}{M_{\vec{N}}^{(2)}} = -\frac{1}{M_{\vec{N}}^{(1)}} + b_{\vec{N},1} - b_{\vec{N},2}. \quad (2.18)$$

Итерации (2.17) приводят значения $M_{\vec{N}}^{2(1)}$ к значениям $M_{(j_1,0)}^{(2)}$ и $M_{(0,j_2)}^{(1)}$, которые, в свою очередь, могут быть приведены к $M_{(j_1,0)}^{(1)}$ и $M_{(0,j_2)}^{(2)}$ посредством (2.18), а в итоге к $M_{(0,0)}^{2(1)}$, реализуя разложение в ветвящуюся непрерывную дробь.

Рассмотрим произвольную вершину Y и применим свойство функции Грина к (2.14). Так как оператор $\mathcal{J}_{\vec{N}}^\kappa$ самосопряженный и все коэффициенты

$P_{\vec{n}}$ действительны, это дает

$$\begin{aligned} G^{(\vec{N})}(\mathcal{O}, Y, z) &= \overline{G^{(\vec{N})}(\mathcal{O}, Y, \bar{z})} = \\ &= -\frac{p_Y}{\kappa P_{\vec{N}+\vec{e}_1} + (1-\kappa)P_{\vec{N}+\vec{e}_2}} = -\frac{\sigma_Y P_Y}{\kappa P_{\vec{N}+\vec{e}_1} + (1-\kappa)P_{\vec{N}+\vec{e}_2}}. \end{aligned}$$

В частности, взяв в качестве Y_b произвольную точку в кроне дерева и замечая, что $\pi(Y_b) = (0,0)$, $P(Y_b) = 1$, получим

$$G^{(\vec{N})}(\mathcal{O}, Y_b, x) = -\frac{\sigma_{Y_b}}{\kappa P_{\vec{N}+\vec{e}_1} + (1-\kappa)P_{\vec{N}+\vec{e}_2}}.$$

2.3. Резольвентная функция оператора на поддереве и бесконечная ветвящаяся непрерывная дробь. Рассмотрим произвольную подрешетку $n_1 \geq N_1$, $n_2 \geq N_2$ и соответствующее ей поддерево. Вообще, существует два типа таких поддеревьев. Если Y — произвольная точка на \mathcal{T} с $\pi(Y) = \vec{N}$, тогда или $[\pi(Y_p), \pi(Y)] = [(N_1 - 1, N_2), (N_1, N_2)]$, или $[\pi(Y_p), \pi(Y)] = [(N_1, N_2 - 1), (N_1, N_2)]$. Рассмотрим, к примеру, второй случай (см. Рис. 1 для $Y = (1,2)$). Заметим, что та же самая форма L , задаваемая (1.6), (2.4), будучи ограниченной на поддерево \mathcal{T}_Y (т.е. поддерево дерева \mathcal{T} , имеющее корень в Y), будет решать следующую задачу

$$(\mathcal{H}_Y^1 - x)L = (\hat{\mu}_1 A_{(N_1, N_2-1)}^{(1)} + \hat{\mu}_2 A_{(N_1, N_2-1)}^{(2)}) + B_{(N_1, N_2-1)} \delta_Y.$$

Здесь оператор \mathcal{H}_Y^1 определен на поддереве \mathcal{T}_Y таким же образом, как и ранее (2.1). Затем, после соответствующей симметризации, мы получим самосопряженный оператор $\tilde{\mathcal{J}}_Y^1$ и функцию \tilde{l} , являющуюся его функцией Грина на $\mathcal{V}(\mathcal{T}_Y)$. Эта функция \tilde{l} , будучи ограничением на поддерево \mathcal{T}_Y , кратно l . Для матричного элемента оператора резольвенты имеем

$$m_Y^1(z) = \langle (\tilde{\mathcal{J}}_Y^1 - z)^{-1} \vec{e}_Y, \vec{e}_Y \rangle = -\frac{L_{\vec{N}}}{L_{\vec{N}-\vec{e}_2}}. \quad (2.19)$$

Заметим, что эти матричные элементы, определенные во всех вершинах дерева, могут быть разложены в ветвящуюся непрерывную дробь похожим образом, как и в (2.15). Отличие, однако, в том, что получаемое разложение будет *бесконечной* ветвящейся непрерывной дробью.

3. Системы Анжелеско и асимптотики СОМ-ов

Как мы уже отмечали в конце пункта 1.1, мы будем рассматривать более подробно операторы, порождаемые рекуррентными соотношениями для многочленов, совместно ортогональных относительно систем Анжелеско (1.10).

Это хорошо изученный общий класс СОМ-ов. Сначала мы должны зафиксировать, что эти СОМ-ы действительно удовлетворяют условиям (1.9), которые позволяют связать их рекурренции с самосопряженными операторами, построенными в предыдущей секции.

Совершенство системы Анжелеско (пункт 1. из (1.9)) – очевидный и известный факт (впервые отмеченный в [23]). Условие 2.1 из (1.9) тоже очевидно. Действительно, используя факторизацию $P_{\vec{n}} = p_{\vec{n}}^- p_{\vec{n}}^+$, где многочлен $p_{\vec{n}}^-$ имеет все свои нули на отрезке I_1 , а $p_{\vec{n}}^+$ – на I_2 , имеем для (1.8)

$$a_{\vec{n},j} = \frac{\int (p_{\vec{n}}^-)^2 p_{\vec{n}}^+ d\mu_j}{\int (p_{\vec{n}-e_j}^-)^2 p_{\vec{n}-e_j}^+ d\mu_j},$$

откуда следует $a_{\vec{n},j} > 0$. Условия равномерной ограниченности коэффициентов рекурренций в (1.9) для системы Анжелеско также справедливы (здесь мы опустим детальное доказательство). При $d = 1$ эти условия проверяются просто. Имеем из (1.19)

$$\sqrt{a_n} = c_n = \int_{\mathbb{R}} x p_{n-1} p_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} (x - \lambda) p_{n-1} p_n d\mu, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Неравенство Коши-Шварца и определение (1.18) дают

$$\|\{c_n\}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)} \leq |I|/2, \quad \|\{b_n\}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)} \leq \sup_{x \in I} |x|,$$

где I – минимальный интервал, содержащий $\text{supp}(\mu)$. Соответствующий результат для рекуррентных соотношений вдоль "лестничных" диагоналей при $d > 1$ был доказан в [11] (см. Следствие 1.1. Теоремы 1.1).

Итак, порожденный с помощью (1.2), (1.6) системами Анжелеско оператор \mathcal{J}^k является ограниченным и самосопряженным в гильбертовом пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}_+^d)$. Ниже мы ограничиваем наше внимание последовательностями \mathcal{N}_c мультииндексов, таких, что

$$\begin{cases} 0 < n_1 = c|\vec{n}| + o(|\vec{n}|), \\ 0 < n_2 = (1 - c)|\vec{n}| + o(|\vec{n}|), \end{cases} \quad c \in [0,1]. \quad (3.1)$$

3.1. Векторные задачи равновесия. Гончаром и Рахмановым в [24] было замечено, что асимптотическое поведение нулей многочленов, совместно ортогональных относительно систем Анжелеско, определяется экстремальными мерами некоторой векторной задачей минимизации энергии логарифмического потенциала $V^\sigma(z) := - \int \ln |z - x| d\sigma(x)$. Для определения этих мер, сперва

обозначим ω_1 и ω_2 равновесные (чебышевские) меры отрезков I_1 и I_2 . Теперь, дано $c \in (0,1)$, определим

$$M_c := \{(\sigma_1, \sigma_2) : \text{supp}(\sigma_i) \subseteq I_i, \|\sigma_1\| = c, \|\sigma_2\| = 1 - c\}.$$

Известно [24], что существуют меры $\{\omega_{c,i}\} \in M_c$, а также существуют константы $\ell_{c,i}$, $i \in \{1,2\}$, такие, что

$$\begin{cases} \ell_{c,1} - V^{2\omega_{c,1} + \omega_{c,2}} \equiv 0 & \text{on } \text{supp}(\omega_{c,1}), \\ \ell_{c,2} - V^{\omega_{c,1} + 2\omega_{c,2}} \equiv 0 & \text{on } \text{supp}(\omega_{c,2}), \end{cases} \quad (3.2)$$

где $\text{supp}(\omega_{c,1}) = [a_1, b_{c,1}] =: I_{c,1}$ и $\text{supp}(\omega_{c,2}) = [a_{c,2}, b_2] =: I_{c,2}$. Эти меры $\{\omega_{c,i}\}_{i=1,2}$ являются слабыми пределами вероятностных мер, равно распределенных в нулях СОМ-ов с мультииндексами (3.1). Зависимость носителей предельных мер при $c \in [0,1]$ и непрерывность решения задачи (3.2) при стремлении параметра c к граничным значениям описывает следующее

Предложение 3.1. *Существуют константы $0 < c^* < c^{**} < 1$, такие, что*

$$\begin{cases} b_{c,1}(a_1, a_2, b_2) < b_1 \in (b_{c,1}, a_2), & a_{c,2} = a_2, & 0 < c < c^*, \\ b_{c,1} = b_1, & a_{c,2} = a_2, & c^* \leq c \leq c^{**}, \\ b_{c,1} = b_1, & a_{c,2}(a_1, b_1, b_2) > a_2, & 1 > c > c^{**}, \end{cases} \quad (3.3)$$

при этом $b_1 = a_1 \Rightarrow c^* = c^{**}$.

Более того, $\omega_{c,i} \xrightarrow{*} \omega_{c_0,i}$ при $c \rightarrow c_0 \in (0,1)$ (в частности $\ell_{c,i} \rightarrow \ell_{c_0,i}$, $a_{c,2} \rightarrow a_{c_0,2}$, $b_{c,1} \rightarrow b_{c_0,1}$, $V^{\omega_{c,i}} \rightarrow V^{\omega_{c_0,i}}$ равномерно на $K \Subset \mathbb{C}$, $i \in \{1,2\}$), и

$$\begin{cases} b_{c,1} \rightarrow a_1, \omega_{c,2} \xrightarrow{*} \omega_2, \ell_{c,2} \rightarrow 2\ell_2, \ell_{c,1} \rightarrow V^{\omega_2}(a_1) & \text{при } c \rightarrow 0, \\ a_{c,2} \rightarrow b_2, \omega_{c,1} \xrightarrow{*} \omega_1, \ell_{c,1} \rightarrow 2\ell_1, \ell_{c,2} \rightarrow V^{\omega_1}(b_2) & \text{при } c \rightarrow 1, \end{cases}$$

и $V^{\omega_{c,i}} \rightarrow V^{\omega_i}$ равномерно на $K \Subset \mathbb{C}$, $i \in \{1,2\}$) при $c \rightarrow 2 - i$, $i \in \{1,2\}$.

Введем понятия, связанные с задачей равновесия (3.2), которые нам потребуются для формулировки асимптотических результатов. Пусть \mathfrak{R}_c , $c \in (0,1)$ будет следующая трехлистная риманова поверхность. Лист, обозначаемый $\mathfrak{R}_c^{(0)}$, есть разрезанная вдоль отрезков $I_{c,1} \cup I_{c,2}$ комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. Два других листа $\mathfrak{R}_c^{(1)}$ и $\mathfrak{R}_c^{(2)}$: разрезанные вдоль отрезков $I_{c,1}$ и $I_{c,2}$ соответственно два экземпляра $\overline{\mathbb{C}}$, заклеивают разрезы $\mathfrak{R}_c^{(0)}$, образуя риманову поверхность \mathfrak{R}_c рода 0. Обозначим через π естественную проекцию \mathfrak{R}_c на $\overline{\mathbb{C}}$ и используем обозначение z для точек на \mathfrak{R}_c с проекцией $\pi(z) = z$, так же как $z^{(i)}$ для точек на $\mathfrak{R}_c^{(i)}$ с $\pi(z^{(i)}) = z$.

Как нетрудно видеть из принципа симметрии Шварца (см., например, [26, 27], [25, Proposition 2.1]), функция

$$H_c(z) := \begin{cases} -V^{\omega_{c,1}+\omega_{c,2}}(z) + \frac{\ell_{c,1}+\ell_{c,2}}{3}, & z \in \mathfrak{R}_c^{(0)}, \\ V^{\omega_{c,i}}(z) - \ell_{c,i} + \frac{\ell_{c,1}+\ell_{c,2}}{3}, & z \in \mathfrak{R}_c^{(i)}, \quad i \in \{1,2\}, \end{cases}$$

является гармонической на $\mathfrak{R}_c \setminus \{\infty^{(0)}, \infty^{(1)}, \infty^{(2)}\}$. Следовательно, функция $h_c(z) := 2\partial_z H_c(z)$, где $2\partial_z := \partial_x - i\partial_y$, рациональна на \mathfrak{R}_c и справедливо

$$\begin{cases} h_c(z^{(0)}) := \int \frac{d(\omega_{c,1} + \omega_{c,2})(x)}{z - x}, & z \in \mathbb{C} \setminus (I_{c,1} \cup I_{c,2}), \\ h_c(z^{(i)}) := \int \frac{d\omega_{c,i}(x)}{x - z}, & z \in \mathbb{C} \setminus I_{c,i}, \quad i \in \{1,2\}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Дивизор нулей и полюсов функции h_c имеет вид

$$\infty^{(0)} + \infty^{(1)} + \infty^{(2)} + z_c - \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_{c,1} - \mathbf{a}_{c,2} - \mathbf{b}_2$$

с нулем в некоторой точке $z_c \in \mathfrak{R}_c$, и $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_{c,1}, \mathbf{a}_{c,2}, \mathbf{b}_2$ — точки ветвления \mathfrak{R}_c . Имеет место: $z_c \in \mathfrak{R}_c^{(0)}$ и $z_c \in [b_{c,1}, a_{c,2}]$. Кроме того, z_c непрерывно растущая функция от c , и

$$\begin{cases} z_c = b_{c,1}, & c \leq c^*, \\ z_c = a_{c,2}, & c \geq c^{**}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Теперь, полагая $b_{*,1} = \min\{b_1, z_*\}$ и $a_{*,2} = \max\{a_2, z_*\}$ для $z_* \in (a_1, b_2)$, построим (как ранее) риманову поверхность \mathfrak{R}_* с разрезами $[a_1, b_{*,1}]$ и $[a_{*,2}, b_2]$, и пусть h_* будет рациональной на \mathfrak{R}_* функцией с дивизором

$$\infty^{(0)} + \infty^{(1)} + \infty^{(2)} + z_* - \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_{*,1} - \mathbf{a}_{*,2} - \mathbf{b}_2, \quad z_* \in \mathfrak{R}_*^{(0)}.$$

Очевидно, что $h_*(z^{(0)}) + h_*(z^{(1)}) + h_*(z^{(2)}) \equiv 0$. Нормируя h_* так, чтобы $h_*(z^{(0)}) = 1/z + \mathcal{O}(1/z^2)$ при $z \rightarrow \infty$, полагаем $c := -\lim_{z \rightarrow \infty} zh(z^{(1)})$. Тогда $\mathfrak{R}_* = \mathfrak{R}_c$, $z_* = z_c$ и, соответственно, $h_* = h_c$. Кроме того,

$$d\omega_{c,i}(x) = \left(h_{*+}^{(i)}(x) - h_{*-}^{(i)}(x) \right) \frac{dx}{2\pi i}, \quad i \in \{1,2\}.$$

Для значений c , обеспечивающих столкновение равновесной меры с одного из концов отрезков I_i , см. (3.5), нетрудно выписать уравнение для функции h_c :

$$h^3 + \frac{h(z(c - c^2 - 1) + d)}{(z - a_1)(z - b_1)(z - b_2)} + \frac{c - c^2}{(z - a_1)(z - b_1)(z - b_2)} = 0, \quad c \leq c^*, \quad (3.6)$$

где параметр d находится из условия существования единственного однократного корня $(b_{c,1})$ у числителя дискриминанта уравнения (3.6).

3.2. Пределы рекуррентных коэффициентов. Род \mathfrak{R}_c , $c \in (0,1)$ равен нулю, поэтому нули и полюса рациональных функций на \mathfrak{R}_c можно задавать в произвольных точках \mathfrak{R}_c , лишь бы число их (нулей и полюсов, с учетом кратностей) было одинаково. Следовательно, мы можем определить рациональную функцию $\Upsilon_{c,i}$, $i \in \{1,2\}$, на \mathfrak{R}_c с простым нулем в точке $\infty^{(0)}$, простым полюсом в $\infty^{(i)}$ и не зануляющуюся, конечную в других точках \mathfrak{R}_c .

Предложение 3.2. *Нормировка $\Upsilon_{c,i}(z^{(i)}) = z + \mathcal{O}(1)$ при $z \rightarrow \infty$ определяет константы $\alpha_{c,i}, \beta_{c,i}$ такими, что*

$$\Upsilon_{c,i}(z^{(0)}) = \alpha_{c,i} \left(\frac{1}{z} + \frac{\beta_{c,i}}{z^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^3}\right) \right).$$

при $z \rightarrow \infty$. Существуют пределы при $c \rightarrow 0$ (аналогично и при $c \rightarrow 1$):

$$\lim_{c \rightarrow 0} \begin{cases} \alpha_{c,1} = 0 & =: \alpha_{0,1}, \\ \beta_{c,1} = a_1 & =: \beta_{0,1}, \end{cases} \quad u \quad \lim_{c \rightarrow 0} \begin{cases} \alpha_{c,2} = [(b_2 - a_2)/4]^2 & =: \alpha_{0,2}, \\ \beta_{c,2} = (b_2 + a_2)/2 & =: \beta_{0,2}. \end{cases}$$

Теорема 3.1 (см. [22] для $c \in (0,1)$). *Пусть меры $d\mu_i(x) = \rho_i(x)dx$ с голоморфными и незануляющимися в некоторой окрестности $[a_i, b_i]$ плотностями ρ_i , $i = 1,2$. Тогда для $\{a_{\vec{n},i}, b_{\vec{n},i}\}$, см. (1.8) и (3.1), равномерно по $c \in [0,1]$ имеют место*

$$\lim_{n \in N_c} a_{\vec{n},i} = \alpha_{c,i}, \quad \lim_{n \in N_c} b_{\vec{n},i} = \beta_{c,i}, \quad i \in \{1,2\}. \quad (3.7)$$

3.3. Функции Сегё. В этом пункте мы введем необходимые понятия для описания сильных асимптотик СОМ-ов (тип I). Асимптотики для СОМ-ов (тип II) см. в [25, 22]. Задан мультииндекс \vec{n} , и пусть $c_{\vec{n}} := n_1/|\vec{n}|$. Так как $\text{gen}(\mathfrak{R}_{c_{\vec{n}}}) = 0$, можно определить рациональную на $\mathfrak{R}_{c_{\vec{n}}}$ функцию $\Phi_{\vec{n}}$, не зануляющуюся и конечную везде на $\mathfrak{R}_{c_{\vec{n}}} \setminus \bigcup_{k=0}^d \{\infty^{(k)}\}$, с полюсом порядка $|\vec{n}|$ в $\infty^{(0)}$ и с нулем кратности n_i в каждой точке $\infty^{(i)}$, с условием нормировки

$$\prod_{k=0}^d \Phi_{\vec{n}}(z^{(k)}) \equiv 1. \quad (3.8)$$

Известно (см., например, [25, Propositions 2.1 and 2.3]), что имеет место

$$\Phi_{\vec{n}}(\mathbf{z}) = \exp \left\{ \int^{\mathbf{z}} h_{c_{\vec{n}}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\}, \quad \frac{1}{|\vec{n}|} \log |\Phi_{\vec{n}}(\mathbf{z})| = H_{c_{\vec{n}}}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathfrak{R}_{c_{\vec{n}}}, \quad (3.9)$$

где начальные условия интегрирования соответствуют (3.8). Функции $\Phi_{\vec{n}}$ определяют главный член асимптотического поведения СОМ-ов.

Более тонкие детали асимптотики описываются функциями Сегё. Пусть веса ρ_1, ρ_2 удовлетворяют условиям Теоремы 3.1. Положим

$$S_{\rho_i}(z) := \exp \left\{ \frac{w_i(z)}{2\pi i} \int_{I_i} \frac{\log(\rho_i w_{i+})(x)}{z-x} \frac{dx}{w_{i+}(x)} \right\}, \quad i \in \{1, 2\},$$

где $w_i(z) := \sqrt{(z-a_i)(z-b_i)}$ – голоморфные вне I_i ветви, выбранные так, чтобы $w_i(z)/z \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$ и ветвь $\log(\rho_i w_{i+})$ выбрана непрерывной на (a_i, b_i) . Тогда каждая $S_i(z)$ есть голоморфная и необращающаяся в ноль в $\overline{\mathbb{C}} \setminus I_i$ с граничными значениями на I_i , удовлетворяющими

$$S_{\rho_i+} S_{\rho_i-}(\rho_i w_{i+}) \equiv 1,$$

и такая, что $|S_{\rho_i}(z)| \sim |z - \epsilon|^{-1/4}$ при $z \rightarrow \epsilon \in \{a_i, b_i\}$. Более общо, пусть контур $\Delta_{c,i} := \pi^{-1}(I_{c,i})$ на \mathfrak{R}_c ориентирован так, что лист $\mathfrak{R}_c^{(0)}$ при обходе в положительном направлении. Дана функция F на \mathfrak{R}_c , мы будем обозначать $F^{(k)}$ ее проекцию на комплексную плоскость с $\mathfrak{R}_c^{(k)} \setminus (\Delta_{c,1} \cup \Delta_{c,2})$, $k \in \{0, 1, 2\}$. Обозначим через

$$w_{c,1}(z) := \sqrt{(z-a_1)(z-b_{c,1})}, \quad w_{c,2}(z) := \sqrt{(z-a_{c,2})(z-b_2)} \quad (3.10)$$

голоморфные вне $I_{c,1}$ и $I_{c,2}$ соответственно ветви, такие, что $w_{c,i}(z)/z \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$. Справедливо следующее

Предложение 3.3. *Дано $c \in (0, 1)$, и веса ρ_i удовлетворяют условиям Теоремы 3.1. Существует единственная функция S_c , не обращающаяся в ноль и голоморфная в $\mathfrak{R}_c \setminus \bigcup_{i=1}^2 \Delta_{c,i}$, такая, что*

$$S_{c\pm}^{(i)} = S_{c\mp}^{(0)}(\rho_i w_{c,i+}) \quad \text{на } I_{c,i}, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (3.11)$$

удовлетворяющая $\prod_{k=0}^2 S_c^{(k)}(z) \equiv 1$, и ведущая себя как

$$|S_c^{(0)}(z)| \sim |S_c^{(i)}(z)|^{-1} \sim |z - \epsilon|^{-1/4} \quad \text{при } z \rightarrow \epsilon \in \{a_1, b_{c,1}, a_{c,2}, b_2\}. \quad (3.12)$$

Кроме того, если $c \rightarrow c_0 \in (0, 1)$, то

$$S_c^{(k)} = [1 + o(1)] S_{c_0}^{(k)}, \quad (3.13)$$

локально равномерно в $\overline{\mathbb{C}} \setminus I_{c_0,k}$ для $k \in \{1, 2\}$ и в $\overline{\mathbb{C}} \setminus (I_{c_0,1} \cup I_{c_0,2})$ для $k = 0$. Далее, локально равномерно в соответствующих областях, справедливо

$$\begin{cases} S_c^{(0)} = [1 + o(1)] S_{\rho_2} & \text{в } \overline{\mathbb{C}} \setminus (I_2 \cup \{a_1\}) \\ S_c^{(2)} = [1 + o(1)] / S_{\rho_2} & \text{в } \overline{\mathbb{C}} \setminus I_2 \end{cases}, \quad c \rightarrow 0. \quad (3.14)$$

† Аналогичный предел справедлив и при $c \rightarrow 1$.

†((3.14) влечет $S_c^{(1)} = 1 + o(1)$ в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1\}$).

3.4. Асимптотики СОМ-ов тип (I). Пусть \mathfrak{R} — риманова поверхность, описанная ранее (см. пункт 3.1). Определим функцию Π на \mathfrak{R} посредством её дивизора (нули)/(полюсы): $2\infty^{(1)} + 2\infty^{(2)} - \mathcal{X}$, где эффективный дивизор \mathcal{X} степени 4 и состоит из точек ветвления \mathfrak{R} . Такие функции однозначны с точностью до мультипликативной константы, которую мы фиксируем нормировкой: $\Pi(\infty^{(0)}) = 1$. Справедлива

Теорема 3.2. Пусть $\{\mu_i\}_{i=1}^2$ — система мер, удовлетворяющая (1.10), и такая, что

$$d\mu_i(x) = \rho_i(x)dx, \quad (3.15)$$

где ρ_i голоморфны и не обращаются в ноль в некоторой окрестности $[a_i, b_i]$. Далее, пусть $\mathcal{N}_{\vec{c}} = \{\vec{n}\}$ будет последовательность мультииндексов, как в (3.1), для некоторого $\vec{c} \in [0, 1]^2$. Тогда

$$\begin{cases} R_{\vec{n}} &= -[1 + \mathcal{O}(\widehat{\varepsilon}_{\vec{n}})]\Pi^{(0)}/C_{\vec{n}}(S\Phi_{\vec{n}})^{(0)}, \\ A_{\vec{n}}^{(i)} &= [1 + \mathcal{O}(\widehat{\varepsilon}_{\vec{n}})]w_i\Pi^{(i)}/C_{\vec{n}}(S\Phi_{\vec{n}})^{(i)}, \end{cases} \quad (3.16)$$

равномерно на замкнутых подмножествах $\overline{\mathbb{C}} \setminus [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]$, где $\widehat{\varepsilon}_{\vec{n}} \rightarrow 0$ при $|\vec{n}| \rightarrow \infty$ и константа $C_{\vec{n}}$ такая, что $\lim_{z \rightarrow \infty} C_{\vec{n}}(S\Phi_{\vec{n}})^{(0)}(z)z^{-|\vec{n}|} = 1$.

4. Самосопряженный оператор для систем Анжелеско

4.1. Спектральная мера и меры ортогональности. Обратимся к Теореме 2.1. Применительно к системе Анжелеско имеем[‡]

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x(d\mu_2 - d\mu_1) \right)^{-1} > 0.$$

Также заметим, что в этом случае функция $1 - \hat{\mu}_2/\hat{\mu}_1$ принадлежит классу Херглотца (или Неванлинны): имеет положительную мнимую часть в верхней полуплоскости \mathbb{C}^+ . В самом деле,

$$\mathfrak{S}^+(1 - \hat{\mu}_2/\hat{\mu}_1) = \hat{\mu}_2 \mathfrak{S}^+ \left(-\frac{1}{\hat{\mu}_1} \right) \chi_{[a_1, b_1]} + (-\hat{\mu}_1^{-1} \mu_2') \geq 0,$$

где $\mathfrak{S}^+ f(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x + \varepsilon)$. Если обе меры $\mu_{1,(2)}$ задаются весами $\rho_{1,(2)}$ почти всюду положительными на соответствующих $[a_j, b_j]$ (и тождественно равными нулю вне), то спектральные меры операторов в корне δ_O (к примеру, для $\kappa = 1$): \mathcal{J}^1 (см. (2.9), (2.10)) есть

$$(\sigma^1)' := \mathfrak{S}^+(m^1) = \pi \left(\int_{\mathbb{R}} x(d\mu_2 - d\mu_1) \right)^{-1} \frac{\hat{\mu}_2 \rho_1 - \hat{\mu}_1 \rho_2}{|\hat{\mu}_1|^2}. \quad (4.1)$$

[‡] это проще увидеть при $I_1 \subset \mathbb{R}_-, I_2 \subset \mathbb{R}_+$

Формулы (2.9), (2.10), (4.1) определяют спектральную меру по мерам ортогональности. Имеется и обратная процедура. Справедлива

Лемма 4.1. Пусть оператор $\mathcal{J}^{1,(2)}$ определен соотношениями (2.6) с коэффициентам рекуррентий (1.5) для СОМ-ов, порожденных системой Анжеслеско $\mu_{1,(2)}$. Если $A_{(1,1)}^{(1)}$ и спектральная мера оператора $\mathcal{J}^{1,(2)}$ по отношению $\delta_{\mathcal{O}}$ известны, то меры $\mu_{1,(2)}$ определяются единственным образом.

Доказательство. Пусть $\kappa = 1$. Формула (2.9) определяет $\hat{\mu}_2/\hat{\mu}_1$ в $\mathbb{C} \setminus I_1 \cup I_2$, причем сами $\hat{\mu}_{2,(1)}$ аналитичны в $\mathbb{C} \setminus I_{2,(1)}$. Проведем факторизацию $\hat{\mu}_2/\hat{\mu}_1$ на части, аналитические вне $I_{2,(1)}$, в соответствующей нормировке: прологарифмируем выражение для $\hat{\mu}_2/\hat{\mu}_1$, проинтегрируем вдоль контуров вокруг отрезков I_2 и I_1 , пропотенцируем результаты. В мнимых частях полученных выражений для $\hat{\mu}_2$ и $\hat{\mu}_1$ перейдем из \mathbb{C}^+ к пределам на I_2 и I_1 соответственно и получим искомые μ_2 и μ_1 . ■

4.2. "Резольвентный" предел оператора $\mathcal{J}_{\vec{N}}^{\kappa}$. Рассмотрим однородное (порядка $d = 2$) дерево \mathcal{T} с вершинами \mathcal{V} и корнем \mathcal{O} . Для любого \vec{N} , выбирая соответствующие краевые условия Дирихле, можно определить оператор $\mathcal{J}_{\vec{N}}^{\kappa}$ (см. (2.13)) на $\ell^2(\mathcal{V})$. Мы видим из асимптотических результатов предыдущей секции (3.7), что в режиме (3.1): $\vec{N} \in \mathcal{N}_c$, $|\vec{N}| \rightarrow \infty$ коэффициенты оператора $\mathcal{J}_{\vec{N}}^{\kappa}$ в окрестности его корня сходятся к коэффициентам периодического оператора Шредингера $\mathcal{J}^{\kappa}(c)$, определяемого следующим образом. Напомним, что каждая вершина Y имеет двух "детей". Скажем, что каждое "дитя" либо "первое" (с индексом 1), либо "второе" (с индексом 2). "Родитель" вершины Y обозначен Y_p . Следовательно,

$$(\mathcal{J}^{\kappa}(c)f)_Y = \sqrt{\alpha_1(c)}f_{Y_1} + \sqrt{\alpha_2(c)}f_{Y_2} + \beta_{1(2)}(c)f_Y + \sqrt{\alpha_{1(2)}(c)}f_{Y_p}, \quad (4.2)$$

где мы выбрали $\beta_1(c)$ если Y "первое дитя" для Y_p . В этом случае, полагаем в последнем члене $\sqrt{\alpha_1(c)}f_{Y_p}$. Если, с другой стороны, Y является "вторым дитем" для Y_p , соответствующий индекс заменяется на 2. Выбор "первого" или "второго дитя" может быть прослежен назад вдоль пути в \mathbb{N}^2 , идя "вверх" или "направо". В корне определяем

$$(\mathcal{J}^{\kappa}(c)f)_{\mathcal{O}} = \sqrt{\alpha_1(c)}f_{\mathcal{O}_1} + \sqrt{\alpha_2(c)}f_{\mathcal{O}_2} + (\kappa\beta_1(c) + (1 - \kappa)\beta_2(c))f_{\mathcal{O}}. \quad (4.3)$$

Обратимся к резольвентной функции $M_{(\vec{N})}^{\kappa}$ (матричный элемент оператора резольвенты) в корне \mathcal{O} см. (2.15), рассмотрим её предел в режиме (3.1):

$$M_{(c)}^{1(2)}(z) = \lim_{|\vec{N}| \rightarrow \infty} M_{(\vec{N})}^{1(2)}(z), \quad \vec{N} \in \mathcal{N}_c. \quad (4.4)$$

Переходя к пределу в (2.17), имеем алгебраические уравнения, характеризующие пределы $M_{(c)}^{1(2)}$:

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{M_{(c)}^1(z)} + \beta_{c,1} - \alpha_{c,1}M_{(c)}^1(z) - \alpha_{c,2}M_{(c)}^2(z); \\ z &= -\frac{1}{M_{(c)}^2(z)} + \beta_{c,2} - \alpha_{c,1}M_{(c)}^1(z) - \alpha_{c,2}M_{(c)}^2(z). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Теперь покажем, что "корневые" резольвентные функции периодического оператора $\mathcal{J}^{1(2)}(c)$

$$m_{(c)}^{1(2)} := \langle (\mathcal{J}^{1(2)}(c) - z)^{-1} \delta_O, \delta_O \rangle \quad (4.6)$$

удовлетворяют тем же алгебраическим уравнениям (4.5). Получим для $m_{(c)}^{1(2)}$ первое уравнение из (4.5). Обозначим $u \equiv (\mathcal{J}^1(c) - z)^{-1} \delta_O \in \ell^2(\mathcal{V})$. Отсюда

$$(\mathcal{J}^1(c) - z)u = \delta_O \Leftrightarrow \beta_{c,1}u(\mathcal{O}) + \alpha_{c,1}u(\mathcal{O}_1) + \alpha_{c,2}u(\mathcal{O}_2) = zu(\mathcal{O}) + 1.$$

Обозначая компоненты вектора[§] u : $x \equiv u(\mathcal{O}_1)$, $y \equiv u(\mathcal{O}_2)$, (см. (4.6)) имеем

$$\beta_{c,1}m_{(c)}^1 + \alpha_{c,1}x + y\alpha_{c,2} = zm_{(c)}^1 + 1. \quad (4.7)$$

Получим выражение для x . Рассмотрим вектор u , ограниченный на поддереве с корнем в вершине \mathcal{O}_1 и запишем уравнение для u в \mathcal{O}_1 в следующем виде: $\alpha_{c,1}u((\mathcal{O}_1)_1) + \alpha_{c,2}u((\mathcal{O}_1)_2) + \beta_{c,1}u(\mathcal{O}_1) = zu(\mathcal{O}_1) - \alpha_{c,1}u(\mathcal{O})$ или

$$\alpha_{c,1} \frac{u((\mathcal{O}_1)_1)}{-\alpha_{c,1}u(\mathcal{O})} + \alpha_{c,2} \frac{u((\mathcal{O}_1)_2)}{-\alpha_{c,1}u(\mathcal{O})} + \beta_{c,1} \frac{u(\mathcal{O}_1)}{-\alpha_{c,1}u(\mathcal{O})} = z \frac{u(\mathcal{O}_1)}{-\alpha_{c,1}u(\mathcal{O})} + 1,$$

откуда видно, что u , ограниченное на поддереве и поделенное на $-\alpha_{c,1}u(\mathcal{O})$, равно $(\mathcal{J}^1(c)_1 - z)^{-1} \delta_{\mathcal{O}_1}$, где $\mathcal{J}^1(c)_1$ есть ограничение $\mathcal{J}^1(c)$ на поддереве с корнем \mathcal{O}_1 . Оператор $\mathcal{J}^1(c)_1$ совпадает с оператором $\mathcal{J}^1(c)$ (по периодичности), таким образом, последнее уравнение влечет

$$\frac{u(\mathcal{O}_1)}{-\alpha_{c,1}u(\mathcal{O})} = m_{(c)}^1 \Leftrightarrow x = -\alpha_{c,1}(m_{(c)}^1)^2.$$

Аналогичные соображения, связанные с периодичностью операторов $\mathcal{J}^{1(2)}(c)$, приводят к выражению $y = -\alpha_{c,2}m_{(c)}^1 m_{(c)}^2$. Подставляя полученные выражения для x и y в (4.7), получим, что функции $m_{(c)}^1$, $m_{(c)}^2$ удовлетворяют первому

[§]вектор-функции Грина см. (1.16)

уравнению в (4.5). Применяя похожие рассуждения к резольвенте оператора $\mathcal{J}^2(c)$, получаем

$$\beta_{c,2}m_{(c)}^2 + \alpha_{c,1}\alpha + a\beta = zm_{(c)}^1 + 1, \quad \alpha = -\alpha_{c,1}m_{(c)}^1m_{(c)}^2, \quad \beta = -\alpha_{c,2}(m_{(c)}^2)^2,$$

что эквивалентно второму уравнению в (4.5). Тем самым доказана

Теорема 4.1. Пусть оператор $\mathcal{J}_{\vec{N}}^{1,(2)}$ определен соотношениями (2.13) с коэффициентами рекуррентных соотношений (1.5) для СОМ-ов, порожденной системой Анжелеско $\mu_{1,(2)}$, (1.10). Тогда имеет место сходимость резольвентных функций (матричных элементов оператора резольвенты) операторов $\mathcal{J}_{\vec{N}}^{1,(2)}$ при $\vec{N} \in \mathcal{N}_c$ к резольвентным функциям периодического оператора Шредингера $\mathcal{J}^{1,(2)}(c)$, (4.2) - (4.3):

$$\lim_{|\vec{N}| \rightarrow \infty} \langle (\mathcal{J}_{\vec{N}}^{1,(2)} - z)^{-1} \delta_O, \delta_O \rangle = \langle (\mathcal{J}^{1,(2)}(c) - z)^{-1} \delta_O, \delta_O \rangle, \quad (4.8)$$

равномерно по z на компактах $K \Subset \bar{\mathbb{C}} \setminus S(\mathcal{J}^{1,(2)}(c))$.

Преобразуем уравнения (4.5) в уравнения, определяющие алгебраические функции $M_{(c)}^{1,(2)}$ (или $m_{(c)}^{1,(2)}$). Обозначая $\Phi := M_{(c)}^1$, $\Psi := M_{(c)}^2$, а также $-\delta = \beta_{c,1} - \beta_{c,2} = \Phi^{-1} - \Psi^{-1}$, получаем для Φ и Ψ

$$\alpha_{c,1}\delta\Phi^3 + \Phi^2(\alpha_{c,1} + \alpha_{c,2} + z\delta - \delta\beta_{c,1}) + \Phi(z + \delta - \beta_{c,1}) + 1 = 0, \quad (4.9)$$

$$\delta\alpha_{c,2}\Psi^3 + \Psi^2(\delta z - \alpha_{c,1} - \alpha_{c,2} - \delta\beta_{c,2}) + \Psi(\beta_{c,2} - z + \delta) - 1 = 0. \quad (4.10)$$

Обращаясь к (4.5), (2.17) для проверки нормировок функций Φ , Ψ и $\Upsilon_{c,i}$, $i \in \{1,2\}$, из Предложения 3.2 мы получаем для $\Upsilon_{c,i}$, $i \in \{1,2\}$:

$$\Upsilon_{c,1} = -(\Phi)^{-1}, \quad \Upsilon_{c,2} = -(\Psi)^{-1}.$$

Таким образом, для $\Upsilon_{c,i}$, $i \in \{1,2\}$, из Предложения 3.2 имеем

$$\Upsilon_{c,1}^3 - (z + \delta - \beta_{c,1})\Upsilon_{c,1}^2 + (\alpha_{c,1} + \alpha_{c,2} + z\delta - \delta\beta_{c,1})\Upsilon_{c,1} - \alpha_{c,1}\delta = 0. \quad (4.11)$$

Для рациональной функции на \mathfrak{A}_c функции $\Upsilon_{c,1}$ имеем

$$\Upsilon_{c,1}(z) = \begin{cases} \frac{\alpha_{c,1}}{z} + \frac{\alpha_{c,1}\beta_{c,1}}{z^2} + \dots, & z \rightarrow \infty^{(0)}, \\ z - \beta_{c,1} + \dots, & z \rightarrow \infty^{(j)}, \\ \beta_{c,1} - \beta_{c,2} + \frac{\alpha_{c,2}}{z} + \dots, & z \rightarrow \infty^{(j)}, \end{cases}$$

что соответствует и Предложению 3.2 и (4.9). Аналогично, из (4.10) вытекает

$$\Upsilon_{c,2}^3 - (z - \delta - \beta_{c,2})\Upsilon_{c,2}^2 + (\alpha_{c,1} + \alpha_{c,2} - z\delta + \delta\beta_{c,2})\Upsilon_{c,2} + \alpha_{c,2}\delta = 0. \quad (4.12)$$

Список литературы

- [1] C. Hermite, *Sur la fonction exponentielle*, C.R. Acad. Sci. Paris **77** (1873), 18–24; 74–79; 226–233.
- [2] A. A. Markov, *Deux demonstrations de la convergence de certaines fractions continues*, Acta Math. **19** (1895), 93–104.
- [3] A. Angelesco, *Sur deux extensions des fractions continues algébriques*, C.R. Acad. Sci. Paris **168** (1919), 262–265.
- [4] K. Mahler, *Perfect systems*, Compositio Math. **19** (1968), 95–166.
- [5] J. Nuttall, *Asymptotics of diagonal Hermite-Pade polynomials*, J. Approx. Theory **42** (1984), no. 4, 299–386.
- [6] A. I. Aptekarev and H. Stahl, *Asymptotics of Hermite-Pade polynomials*, in ‘Progress in Approximation Theory’ (A. Gonchar, E. B. Saff, eds.), Springer-Verlag, Berlin, 1992, pp. 127–167.
- [7] A. I. Aptekarev, *Multiple orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **99** (1998), no. 1–1, 423–448.
- [8] E. M. Nikishin and V. N. Sorokin, *Rational Approximations and Orthogonality*, Nauka, Moscow, 1988; Translations of Mathematical Monographs **92**, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1991.
- [9] A. I. Aptekarev, V. Kalyagin, *Complex rational approximation and difference operators*, Rend. Circ. Matem. Palermo, Ser. II, suppl 52, 3–21
- [10] A. I. Aptekarev, G. Lopez Lagomasino, I. Alvarez Rocha, *Ratio asymptotics of Hermite–Pade polynomials for Nikishin systems*, Sb. Math., **196**:8 (2005), 1089–1107
- [11] A. I. Aptekarev, V. Kalyagin, G. L. Lagomasino, I. A Rocha, *On the limit behavior of recurrence coefficients for multiple orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory **139** (1–2), 346–370.
- [12] W. Van Assche, *Nearest neighbor recurrence relations for multiple orthogonal polynomials* J. Approx. Theory **163** (10), (2011), 1427–1448.
- [13] M. E. H. Ismail. *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, volume **98** of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2005.

- [14] A. I. Aptekarev, *Integrable Semidiscretization of Hyperbolic Equations – “Computational” Dispersion and Multidimensional Perspective*, Keldysh Institute preprints, 2012, 020, 28 pp.
- [15] Bobenko A I 2004 Discrete differential geometry. Integrability as consistency Discrete Integrable Systems (Lecture Notes in Physics vol 644) (Berlin: Springer), 85–110
- [16] A.I. Aptekarev, M. Derevyagin, W. van Assche, *Discrete integrable systems generated by multiple orthogonal polynomials*, Nonlinearity **29** (2016) 1487–1506, arXiv:1409.4053.
- [17] V. A. Kaliaguine, *Hermite-Padé approximants and spectral analysis of nonsymmetric operators*, Math. Sb. Russian Acad. Sci. **185** (1994), 79–100; English transl.: Russian Acad. Sci. Sb. Math. **82** (1995), 199–216. MR1280397 (95d:47038)
- [18] A. I. Aptekarev, V. A. Kaliaguine and E. B. Saff, *Higher-Order Three-Term Recurrences and Asymptotics of Multiple Orthogonal Polynomials*, Constr. Approx. **30** (2009), 175–223. MR2519660 (2010h:42049)
- [19] A. I. Aptekarev, *Spectral Problems of High-Order Recurrences*, Amer. Math. Soc. Transl., **233**, 2014, 43 - 61
- [20] A. I. Aptekarev, M. Derevyagin, W. van Assche, *On 2D discrete Schrödinger operators associated with multiple orthogonal polynomials*, J. Phys. A: Math. Theor. **48** (2015), 065201.
- [21] A. I. Aptekarev, M. Derevyagin, Hiroshi Miki, W. van Assche, *Multidimensional Toda Lattices: Continuous and Discrete Time*, SIGMA, **12** (2016), 054, 30 pp.
- [22] A. I. Aptekarev, S. A. Denisov, M. Yattselev, *Completely integrable on \mathbb{Z}_+^d potentials for electromagnetic Schrodinger operator: rays asymptotics and scattering problem*, Keldysh Institute preprints, 2015, 088, 20 pp.
- [23] E. M. Nikishin, *A system of Markov functions*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. (1979), 4, 60–63; Moscow Univ. Math. Bull. **34** (1979), 4, 63–66.
- [24] A. A. Gonchar and E. A. Rakhmanov, *On the convergence of simultaneous Padé approximants for systems of functions of Markov type*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **157** (1981), 31–48; English transl. in Proc. Steklov Inst. Math. **157** (1983), 31–50.

- [25] M. Yattselev, *Strong asymptotics of Hermite-Padé approximants for Angelesco systems*, *Canad. J. Math.* 68(2016), 5, 1159-1201
- [26] A. I. Aptekarev and V. A. Kalyagin, *Asymptotic behavior of an n th degree root of polynomials of simultaneous orthogonality, and algebraic functions*, Preprint No. 60, Keldysh Inst. Appl. Math. Acad. Sci. USSR, Moscow, 1986. (Russian) MR 88f:41051.
- [27] A. I. Aptekarev, V. A. Kalyagin, V. G. Lysov, D. N. Toulyakov, “Equilibrium of vector potentials and uniformization of the algebraic curves of genus 0”, *J. Comput. Appl. Math.*, 233:3 (2009), 602–616

Alexander I. Aptekarev (*aptekaa@keldysh.ru*)

Keldysh Institute of Applied Mathematics,
Russian Academy of Science, Moscow, Russian Federation

Sergey A. Denisov (*denissov@math.wisc.edu*)

Keldysh Institute of Applied Mathematics,
Russian Academy of Science, Moscow, Russian Federation
and

Department of Mathematics,
University of Wisconsin-Madison,
480nLincoln Dr., Madison, WI 53706, USA

Maxim L. Yattselev (*maxyatts@math.iupui.edu*)

Department of Mathematical Sciences,
Indiana University-Purdue University Indianapolis,
402 North Blackford Street, Indianapolis, IN 46202, USA