



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 31 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Балашов В.А., Борисов В.Е.,
Ханхасаева Я.В.**

Неявная схема для
уравнений URANS с
моделью турбулентности
SST на основе метода LU-
SGS

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Балашов В.А., Борисов В.Е., Ханхасаева Я.В. Неявная схема для уравнений URANS с моделью турбулентности SST на основе метода LU-SGS // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 31. 20 с. doi:[10.20948/prepr-2018-31](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-31)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-31>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

В.А. Балашов, В.Е. Борисов, Я.В. Ханхасаева

**Неявная схема для уравнений URANS
с моделью турбулентности SST
на основе метода LU-SGS**

Москва, 2018

В.А. Балашов, В.Е. Борисов, Я.В. Ханхасаева, Неявная схема для уравнений URANS с моделью турбулентности SST на основе метода LU-SGS

Аннотация. В работе предложены численные алгоритмы неявной схемы для решения трехмерных нестационарных уравнений URANS совместно с моделью турбулентности SST, разработанные с использованием метода LU-SGS. На основе представленной методики проведено численное исследование ряда задач внешней аэродинамики, продемонстрирована корректность и эффективность метода. Результаты расчетов сравниваются с опубликованными в литературе данными, а также с результатами аналогичных расчетов, проведенных с моделью турбулентности Спаларта–Аллмараса.¹

Ключевые слова: LU-SGS, URANS, модель турбулентности SST.

V.A. Balashov, V.E. Borisov, Ya. V. Khankhasaeva, An implicit scheme based on the LU-SGS method for URANS equations with SST turbulence model

Abstract. In this paper we present a fully implicit scheme for 3D unsteady Reynolds-averaged Navier–Stokes equations with SST turbulence model. The algorithm is based on LU-SGS procedure. Using the developed method some external aerodynamics problems are simulated, the results demonstrated the correctness and efficiency of the method. Numerical results are compared with published data and results of simulations performed with the Spalart–Allmaras turbulence model.

Key words: LU-SGS, URANS, SST turbulence model.

Содержание

1	Введение	3
2	Математическая модель	4
3	Методы решения	7
4	Результаты расчетов	10
5	Заключение	19
	Литература	19

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-31-00399 мол_а

1 Введение

Для эффективного суперкомпьютерного моделирования современных задач внешней аэродинамики требуется построение соответствующих численных алгоритмов, позволяющих воспроизводить сложную структуру трехмерных турбулентных течений и обладающих необходимым запасом устойчивости, экономичности и масштабируемости. В работах [1, 2] авторами был предложен один из возможных подходов, пригодный для решения широкого класса стационарных и нестационарных задач. В качестве математической модели были использованы трехмерные нестационарные осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса URANS, для замыкания которых применялась модель турбулентности Спаларта–Аллмараса SA. Дискретизация по времени проводилась с помощью неявной схемы, для решения возникающих систем нелинейных уравнений использовался метод Ньютона, на каждой итерации которого линейная система решалась на основе методов LU-SGS и BiCGStab. При этом результирующий численный алгоритм принадлежит к классу безматричных методов Ньютона–Крылова [3], что позволило построить его эффективную параллельную реализацию.

В настоящей работе проводится модификация разработанной расчетной схемы в целях ее использования с моделью турбулентности SST (Shear Stress Transport) Ментера [4]. В отличие от однопараметрической модели Спаларта–Аллмараса, модель SST содержит два дифференциальных уравнения, описывающих эволюцию кинетической энергии и удельной диссипации турбулентных пульсаций. Известно, что для некоторых задач, например, течений с ограниченными отрывными зонами [5], использование данной модели позволяет улучшить совпадение с экспериментальными данными. Кроме того, двухпараметрические модели данного типа широко используются при расчете турбулентного горения смесей газов. С помощью разработанного метода проведено численное исследование ряда задач внешней аэродинамики:

1. транзвуковое обтекание крыла с симметричным профилем ($M = 0.8395$, $\alpha = 3.06^\circ$);
2. сверхзвуковое обтекание прототипа летательного аппарата ($M = 2.5$, $\alpha = 0^\circ$);
3. сверхзвуковое обтекание модели возвращаемого космического аппарата ($M = 4.04$, $\alpha = 10^\circ$).

Здесь в скобках указаны параметры набегающего потока – число Маха и угол атаки. Результаты моделирования сравниваются с опубликованными в литературе данными, а также с результатами аналогичных расчетов, проведенных с моделью турбулентности Спаларта–Аллмараса.

2 Математическая модель

2.1 Основные уравнения

Для описания течений совершенного вязкого сжимаемого газа используется система нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (URANS), в декартовой системе координат ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$) имеющая следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{f}_j}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x_j} + \mathbf{w}, \quad (1)$$

где \mathbf{q} – вектор консервативных переменных, \mathbf{f}_j и \mathbf{g}_j – векторы невязких и вязких потоков соответственно, \mathbf{w} – вектор внешних источников:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_j = \begin{pmatrix} \rho u_j \\ \rho u_j u_1 + \delta_{1,j} p \\ \rho u_j u_2 + \delta_{2,j} p \\ \rho u_j u_3 + \delta_{3,j} p \\ u_j (\rho E^* + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{1j} \\ \tau_{2j} \\ \tau_{3j} \\ \tau_{ij} u_i + h_j \end{pmatrix}.$$

Здесь ρ – плотность, u_j – компоненты вектора скорости \mathbf{u} , τ_{ij} – компоненты тензора вязких напряжений, $\delta_{i,j}$ – тензор Кронекера, E^* – полная энергия турбулентного течения:

$$E^* = E + k,$$

где E – полная энергия осредненного течения, k – кинетическая энергия турбулентных пульсаций. Термодинамическое давление p вычисляется по уравнению состояния совершенного газа:

$$p = (\gamma - 1) \rho \left(E - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 u_j^2 \right).$$

Здесь γ – показатель адиабаты (для воздуха $\gamma = 1.4$). Компоненты тензора вязких напряжений и вектора теплового потока имеют вид

$$\tau_{ij} = \mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_{\text{eff}} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{i,j} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{i,j},$$

$$h_j = \lambda_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial x_j}.$$

В приведенных выше уравнениях T является температурой газа и определяется из формулы

$$T = \frac{p}{\rho R},$$

где R – газовая постоянная, для воздуха $R = 287$ Дж/(кг·К).

«Эффективное» значение коэффициентов вязкости и теплопроводности определяется как

$$\begin{aligned} \mu_{\text{eff}} &= \mu + \mu_t, \\ \lambda_{\text{eff}} &= C_p \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \right). \end{aligned}$$

Здесь C_p – коэффициент удельной теплоемкости газа при постоянном давлении. Pr и Pr_t – ламинарное и турбулентное числа Прандтля, для воздуха принимается $\text{Pr} = 0.7$, $\text{Pr}_t = 0.9$. Молекулярная вязкость определяется следующей степенной зависимостью:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^s,$$

где $s = 0.76$, μ_0 – молекулярная вязкость при опорной температуре T_0 .

Величина μ_t обозначает добавочную турбулентную вязкость, которая определяется моделью турбулентности.

Начальные и граничные условия для системы уравнений URANS (1) ставятся стандартным образом [6].

2.2 Модель турбулентности SST Ментера

В работе используется модифицированный вариант двухпараметрической модели SST (Shear Stress Transport) Ментера, т.н. SST-2003 [4].

Турбулентная вязкость задается соотношением

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\max(\omega, SF_2/\alpha)},$$

где k и ω – кинетическая энергия и удельная диссипация турбулентных пульсаций, соответственно. Данные величины определяются из уравнений модели:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho k \mathbf{u}) = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_k \mu_t) \nabla k) + P_k - \beta^* \rho \omega k, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \omega \mathbf{u}) &= \nabla \cdot ((\mu + \sigma_w \mu_t) \nabla \omega) + \\ &+ \gamma_s \frac{\rho}{\mu_t} P_k - \beta \rho \omega^2 + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{w_2}}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Генерационный член P_k вычисляется в виде

$$P_k = \min (P, 10 \beta^* \rho \omega k).$$

Здесь

$$P = \mu_t S^2, \quad S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Следует отметить, что в различных работах выражение для P варьируется в зависимости от типов моделируемых течений. Используемое в настоящей работе выражение – одно из наиболее простых и в тоже время надежных [7].

Стыковочные функции SST модели определяются согласно формулам:

$$F_1 = \tanh (\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500 \mu}{\rho \omega d^2} \right), \frac{4 \rho \sigma_{w_2} k}{C D_{kw} d^2} \right],$$

$$C D_{kw} = \max \left(\frac{2 \rho \sigma_{w_2}}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega, 10^{-10} \right),$$

$$F_2 = \tanh (\arg_2^2), \quad \arg_2 = \max \left(\frac{2 \sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500 \mu}{\rho \omega d^2} \right),$$

где d – расстояние до ближайшей твердой стенки.

Коэффициенты SST модели определяются в виде:

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2, \quad \phi = \sigma_k, \sigma_w, \gamma_s, \beta.$$

Остальные параметры являются константами и представлены в таб. 1.

σ_{k_1}	σ_{k_2}	σ_{w_1}	σ_{w_2}	β_1	β_2	γ_{s_1}	γ_{s_2}	β^*	α
0.85	1.0	0.5	0.856	0.075	0.0828	5/9	0.44	0.09	0.31

Таблица 1. Константы модели SST

Граничные условия для k и ω задаются следующим образом [5]:

- на твердой стенке: $k = 0$, $\omega = \frac{60 \mu}{\rho \beta_1 (\Delta y_1)^2}$, где Δy_1 – величина первого пристеночного шага сетки;
- на выходной границе: k и ω экстраполируются на границу из внутренних точек области;

- на входной границе: полагается, что известны μ_t и \mathcal{T}_u (интенсивность турбулентности в набегающем потоке, в %), тогда:

$$k = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{100} \mathcal{T}_u |\mathbf{u}| \right)^2, \quad \omega = \frac{\rho k}{\mu_t}.$$

Для большинства задач внешней аэродинамики рекомендуемое значение $\mathcal{T}_u \approx 0.1\%$, что соответствует $\mu_t/\mu \sim 2 \times 10^{-7} \cdot \text{Re}$ согласно работе [8].

В качестве начальных условий для k и ω используются параметры набегающего потока.

3 Методы решения

Общий алгоритм решения уравнений математической модели «по блокам» повторяет алгоритм, представленный в работе [2]. Отличие состоит только в части алгоритмов для решения уравнений модели турбулентности. В силу этого сначала кратко опишем общую схему решения, а затем подробно часть методов, соответствующую модели SST.

Уравнения (1) и (2)–(3) дискретизируются по пространственным переменным методом конечных объемов. Для реконструкции значений примитивных переменных используются схемы 2-го (TVD) или 3-го (WENO3) порядка точности. Для вычисления невязких потоков на гранях расчетных ячеек используется обобщенный метод С.К. Годунова. Для аппроксимации уравнений по времени применяется неявная схема. При этом численный алгоритм основан на идее расщепления по физическим процессам: сначала решается система уравнений (1) с использованием значения турбулентной вязкости с предыдущего временного слоя, затем решаются уравнения (2)–(3). Возникающие при применении неявной схемы системы нелинейных уравнений решаются с помощью метода Ньютона, на каждой итерации которого для решения линейных систем используется метод LU-SGS.

Введем следующие обозначения: Δt – шаг по времени, n – номер временного слоя, N – число ячеек расчетной сетки, $i = 1 \dots N$ – индекс ячейки, V_i – ее объем, s_σ – площадь боковой грани ячейки, индекс σ указывает на грань ячейки i , индекс $\sigma(i)$ указывает на ячейку, которая является соседней к текущей ячейке i по грани σ , \mathbf{n}_σ – вектор внешней нормали к грани σ , $u_\sigma = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\sigma$. Также для произвольного x положим $x^\pm = 0.5(x \pm |x|)$. Тогда после дискретизации по времени и пространству система уравнений (2)–(3)

может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \rho_i V_i \frac{\mathbf{r}_i^{n+1} - \mathbf{r}_i^n}{\Delta t} &= \mathbf{R}_i^{n+1}, \quad i = 1 \dots N, \\ \mathbf{R}_i &= - \sum_{\sigma} s_{\sigma} \rho_{\sigma} u_{\sigma} \mathbf{r}_{\sigma} + \sum_{\sigma} s_{\sigma} \mathbf{B}_{\sigma} (\partial_n \mathbf{r})_{\sigma} + V_i \mathbf{C}_i, \\ \mathbf{r} &= \begin{bmatrix} k \\ \omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mu + \sigma_k \mu_t & 0 \\ 0 & \mu + \sigma_{\omega} \mu_t \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} P_k - \beta^* \rho \omega k \\ \gamma_s \rho P_k / \mu_t - \beta \rho \omega^2 + 2(1 - F_1) \rho \sigma_{w_2} \nabla k \cdot \nabla \omega / \omega \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Отдельно отметим, что к моменту решения данной системы уравнений поле основных газодинамических величин на новом временном слое уже известно (за счет использования для решения полной задачи схемы расщепления) и считается фиксированным для системы (4), поэтому в целях избежания путаницы индекс временного слоя для поля газодинамических переменных здесь и далее опущен.

Для аппроксимации конвективного потока используется метод «upwind»:

$$u_{\sigma} \mathbf{r}_{\sigma} = u_{\sigma}^{+} \mathbf{r}_i + u_{\sigma}^{-} \mathbf{r}_{\sigma(i)},$$

коэффициенты матрицы \mathbf{B} на грани σ определяются согласно знаку $(\partial_n k)_{\sigma}$:

$$\mathbf{B}_{\sigma} = \begin{cases} \mathbf{B}_i, & (\partial_n k)_{\sigma} < 0, \\ \mathbf{B}_{\sigma(i)}, & (\partial_n k)_{\sigma} \geq 0. \end{cases}$$

При расчетах на сетках, близких к ортогональным, $(\partial_n \mathbf{r})_{\sigma}$ может быть заменено на $(\mathbf{r}_{\sigma(i)} - \mathbf{r}_i) / h_{\sigma}$, где h_{σ} – расстояние между центрами ячеек.

Система дискретных уравнений (4) решается методом установления по псевдо-временной переменной τ с использованием ньютоновских итераций для определения итерационного приращения $\delta^s \mathbf{r} = \mathbf{r}^{n+1,s+1} - \mathbf{r}^{n+1,s}$:

$$\rho_i V_i \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau} \right) \delta^s \mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i^{n+1,s} - \rho_i V_i \frac{\Delta^s \mathbf{r}_i}{\Delta t} + \delta^s \mathbf{R}_i,$$

где $\Delta^s \mathbf{r} = \mathbf{r}^{n+1,s} - \mathbf{r}^n$ – итерационное приращение по времени, индекс s указывает на номер внутренней ньютоновской итерации, $\Delta \tau$ – шаг дискретизации по псевдо-времени.

Линеаризация вектора правой части проводится следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta^s \mathbf{R}_i &= - \sum_{\sigma} s_{\sigma} \rho_{\sigma} \left(u_{\sigma}^{+} \delta^s \mathbf{r}_i + u_{\sigma}^{-} \delta^s \mathbf{r}_{\sigma(i)} \right) + \\ &+ \sum_{\sigma} \mathbf{B}_{\sigma} \left(\delta^s \mathbf{r}_{\sigma(i)} - \delta^s \mathbf{r}_i \right) s_{\sigma} / h_{\sigma} + V_i \mathbf{J}_i^{n+1,s} \delta^s \mathbf{r}_i. \end{aligned}$$

Здесь

$$\mathbf{J} = \left[\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{r}} \right] = \begin{bmatrix} -\beta^* \rho \omega & -\beta^* \rho k \\ 0 & -2\beta \rho \omega - 2(1 - F_1) \rho \sigma_{w_2} \nabla k \cdot \nabla \omega / \omega^2 \end{bmatrix}.$$

Практика показывает, что отбрасывание внедиагонального члена $-\beta^* \rho k$ не вносит существенного вклада в конечный результат, однако позволяет упростить его получение. Кроме того, из соображений устойчивости вместо матрицы \mathbf{J} используется ее расщепление $\tilde{\mathbf{J}}^-$, которое в данном случае сводится к замене $\nabla k \cdot \nabla \omega$ на $|\nabla k \cdot \nabla \omega|$. Получающийся после двух указанных преобразований якобиан обозначим как $\tilde{\mathbf{J}}$.

В результате получается линейная система уравнений для определения итерационных вариаций $\delta^s \mathbf{r}$, имеющая размерность $2N$:

$$\left[\rho_i V_i \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau} \right) \mathbf{I} + \sum_{\sigma} s_{\sigma} \rho_{\sigma} \mathbf{A}_{\sigma}^1 - V_i \tilde{\mathbf{J}}_i^{n+1,s} \right] \delta^s \mathbf{r}_i + \sum_{\sigma} [s_{\sigma} \rho_{\sigma} \mathbf{A}_{\sigma}^2] \delta^s \mathbf{r}_{\sigma(i)} = \mathbf{R}_i^{n+1,s} - \rho_i V_i \frac{\Delta^s \mathbf{r}_i}{\Delta t}, \quad (5)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица и

$$\mathbf{A}_{\sigma}^1 = \begin{bmatrix} u_{\sigma}^+ + (\mu + \sigma_k \mu_t) / h_{\sigma} & 0 \\ 0 & u_{\sigma}^+ + (\mu + \sigma_{\omega} \mu_t) / h_{\sigma} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{\sigma}^2 = \begin{bmatrix} u_{\sigma}^- + (\mu + \sigma_k \mu_t) / h_{\sigma} & 0 \\ 0 & u_{\sigma}^- + (\mu + \sigma_{\omega} \mu_t) / h_{\sigma} \end{bmatrix}.$$

Определим элементы блочно-диагональной матрицы \mathbf{D} , блочной нижнетреугольной матрицы \mathbf{L} , блочной верхнетреугольной матрицы \mathbf{U} и вектора правой части \mathbf{G} следующим образом:

$$\mathbf{D}_i = \rho_i V_i \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau} \right) \mathbf{I} + \sum_{\sigma} s_{\sigma} \rho_{\sigma} \mathbf{A}_{\sigma}^1 - V_i \tilde{\mathbf{J}}_i^{n+1,s},$$

$$\mathbf{L}(\delta^s \mathbf{r}_{\sigma(i)}) = \sum_{\sigma: \sigma(i) < i} [s_{\sigma} \rho_{\sigma} \mathbf{A}_{\sigma}^2] \delta^s \mathbf{r}_{\sigma(i)},$$

$$\mathbf{U}(\delta^s \mathbf{r}_{\sigma(i)}) = \sum_{\sigma: \sigma(i) > i} [s_{\sigma} \rho_{\sigma} \mathbf{A}_{\sigma}^2] \delta^s \mathbf{r}_{\sigma(i)},$$

$$\mathbf{G}_i^s = \mathbf{R}_i^{n+1,s} - \rho_i V_i \frac{\Delta^s \mathbf{r}_i}{\Delta t}.$$

Тогда система уравнений (5) примет вид:

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}) \delta^s \mathbf{r} = \mathbf{G}^s.$$

Она может быть переписана эквивалентным образом как

$$(\mathbf{D} + \mathbf{L}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{D} + \mathbf{U}) \delta^s \mathbf{r} = \mathbf{G}^s - \mathbf{L} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{U} \delta^s \mathbf{r}. \quad (6)$$

Факторизация методом LU-SGS заключается в пренебрежении последним слагаемым в правой части уравнения (6), в результате чего факторизованная система разбивается на две подсистемы, решение которых реализуется двумя расчетными циклами по ячейкам сетки: первый – в прямом направлении (от первой ячейки к последней), а второй – в обратном:

$$\begin{aligned} \delta^{s,*} \mathbf{r}_i &= \mathbf{D}_i^{-1} [\mathbf{G}_i - \mathbf{L}(\delta^{s,*} \mathbf{r}_{\sigma(i)})], & i = 1 \dots N, \\ \delta^s \mathbf{r}_i &= \delta^{s,*} \mathbf{q}_i - \mathbf{D}_i^{-1} \mathbf{U}(\delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)}), & i = N \dots 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Получающаяся при этом итерационная невязка служит для обновления итерационного вектора, $\mathbf{r}^{n+1,s+1} = \mathbf{r}^{n+1,s} + \delta^s \mathbf{r}$, после чего процедура (7) повторяется.

4 Результаты расчетов

Представленный в предыдущем разделе численный алгоритм был реализован в рамках разрабатываемого авторами программного комплекса, предназначенного для моделирования трехмерных турбулентных течений вязкого сжимаемого газа на высокопроизводительных вычислительных системах. С его помощью было проведено моделирование ряда задач внешней аэродинамики, результаты которого представлены в настоящем разделе. Расчеты проводились в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН на суперкомпьютерах К-100 и К-60 [9] с использованием от 72 до 280 вычислительных ядер на задачу.

Задача 1.

Трансзвуковое обтекание крыла с симметричным профилем.

Задача об обтекании крыла является стандартным тестом при валидации программных комплексов для расчета аэродинамических течений. В настоящей работе рассмотрена задача о трансзвуковом обтекании крыла с симметричным профилем ONERA M6 [10], геометрические параметры которого представлены на рис. 1. Постановка задачи аналогична используемой авторами в работе [1].

Расчеты проводились при следующих параметрах набегающего потока: угле атаки $\alpha = 3.06^\circ$, числе Маха $M = 0.8396$, нормированном на 1 м числе Рейнольдса $Re = 19\,318\,611$. Для расчётов использовалась гексагональная блочно-структурированная сетка, ячейки которой сгущались по мере приближения к крылу. Сетка содержала $N = 1\,898\,960$ ячеек.

FIGURE B1-1

SWEPT WING M6

Aspect ratio $A = 3.8$
 Taper ratio $\lambda = 0.56$
 Sweep angle $\Lambda_{25\%} = 26.7^\circ$

ROWS OF PRESSURE TAPS

N°	y/b	upper	under
1	0.20	23	11
2*	0.44	23	11
3	0.65	23	11
4	0.80	23	11
5	0.90	31	14
6	0.95	31	14
7	0.99	31	14

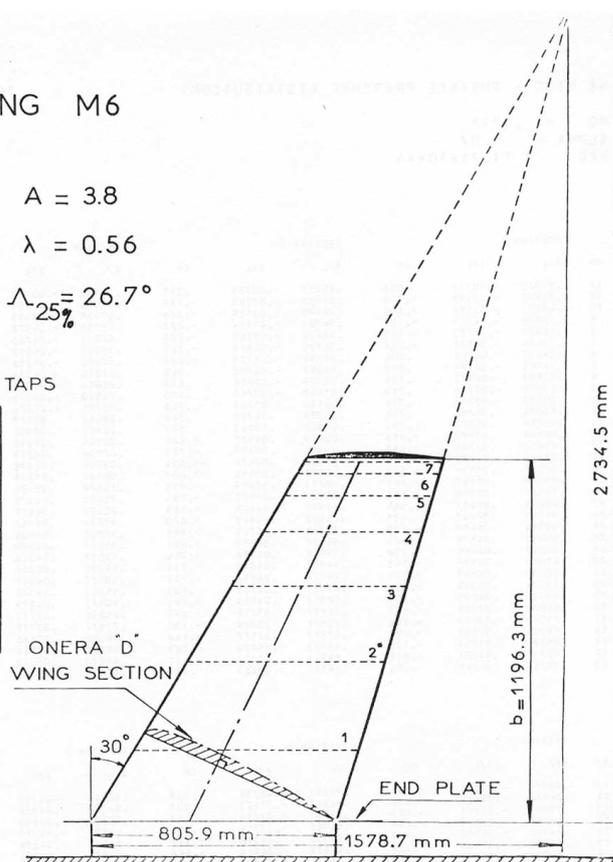


Рис. 1. Описание геометрии крыла ONERA M6 [10]

Численный расчёт проводился по неявной схеме с моделью турбулентности SST, его результаты сравнивались с экспериментальными данными [10] и результатом аналогичного расчета по неявной схеме с моделью турбулентности SA. Стационарное решения находилось с помощью метода установления.

На рис. 2 и 3 представлено получившееся распределение полей давления и турбулентной вязкости по поверхности крыла в расчетах с моделями турбулентности SA Спаларта–Аллмараса и SST Ментера. На рис. 4 показано поле давления (слева) и сравнение полученного в расчетах коэффициента давления C_p (взятого со знаком минус) с результатами эксперимента в аэротрубе (справа) в плоскости сечения крыла $z/(L/2) = 0.95$. Видно, что несмотря на ряд различий в турбулентной вязкости, общая картина течения качественно совпадает, результаты по моделям SA и SST хорошо согласуются между собой и экспериментальными данными.

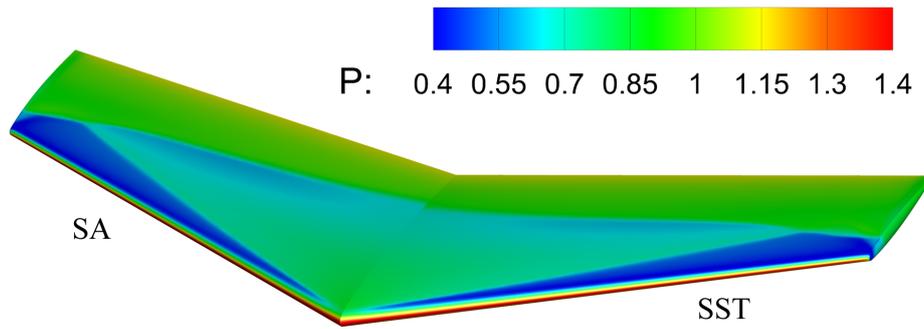


Рис. 2. Распределение поля давления по поверхности крыла, расчеты с моделями SA (слева) и SST (справа)

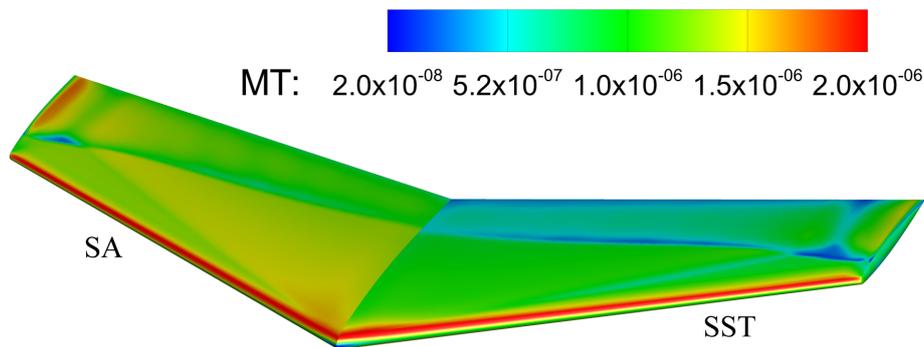


Рис. 3. Распределение поля турбулентной вязкости по поверхности крыла, расчеты с моделями SA (слева) и SST (справа)

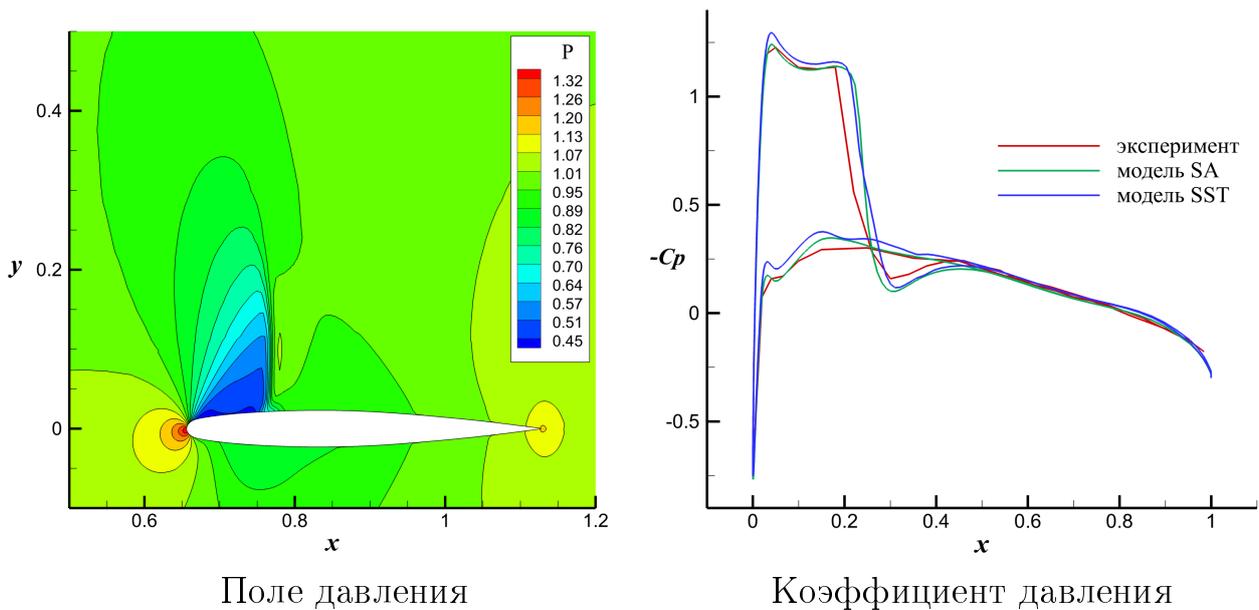


Рис. 4. Распределение величин в сечении $z/(L/2) = 0.95$

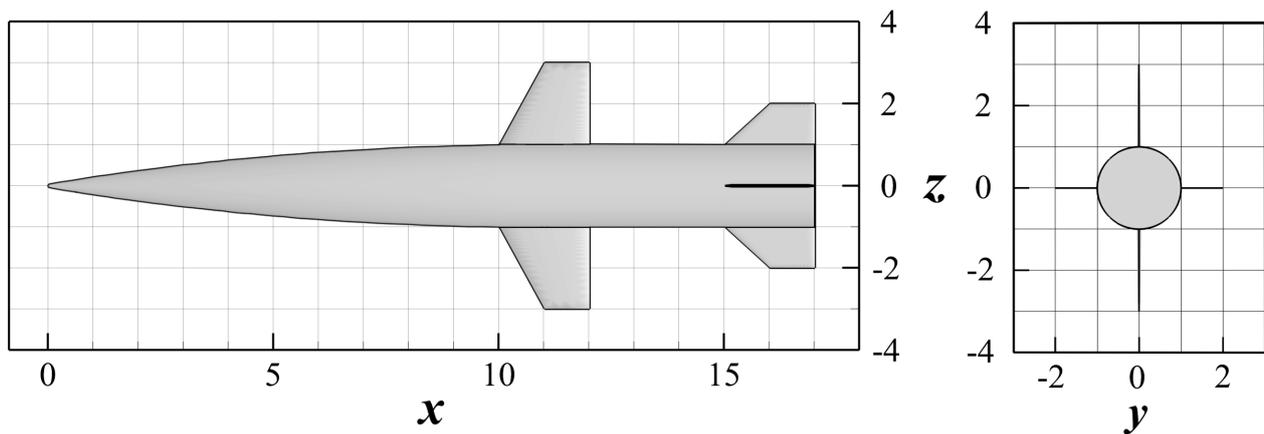


Рис. 5. Описание геометрии модели летательного аппарата

Задача 2.

Сверхзвуковое обтекание прототипа летательного аппарата.

Сверхзвуковое обтекание тел со сложной геометрией характеризуется несколькими явлениями: наличием головной ударной волны, присоединенной ударной волны от кормового расширения, областей отрывного и вихревого течения, протяженных отрывных зон в донной области, взаимодействием ударных волн с пограничным слоем и друг с другом и т.д. Корректный расчет всех этих особенностей предъявляет высокие требования к качеству используемой для моделирования вычислительной модели.

В качестве исследуемой задачи рассмотрено обтекание модели летательного аппарата ТРК, схематично его геометрия представлена на рис. 5. Летательный аппарат представляет собой заостренный цилиндр с двумя крыльями и четырьмя стабилизаторами, радиус скругления носа $r = 0.03$ м.

Расчеты проводились при нулевом угле атаки, числе Маха $M = 2.5$, и числе Рейнольдса $Re = 10^7$, нормированном на 1 м. Расчетная область представляла собой конус, в центре которого располагался аппарат. Расчеты проводились на гексагональной блочно-структурированной сетке, состоящей из $N = 1\,596\,672$ элементов. Ее боковые конические границы располагались на достаточном удалении от тела, так, чтобы они не пересекались с ударными волнами.

Аналогично предыдущей рассмотренной задаче численные расчёты проводились по неявной схеме с моделями турбулентности SST и SA. Целью расчетов было определение донного давления и параметров следа вниз по потоку, результаты расчетов сравнивались между собой и известными экспериментальными [11] и расчетными [12] данными по донному давлению для более простой модели. Несмотря на то, что в данной работе донный срез за счет наличия стабилизаторов несколько отличается от рассматриваемого в [11] и [12], такое сравнение является осмысленным.

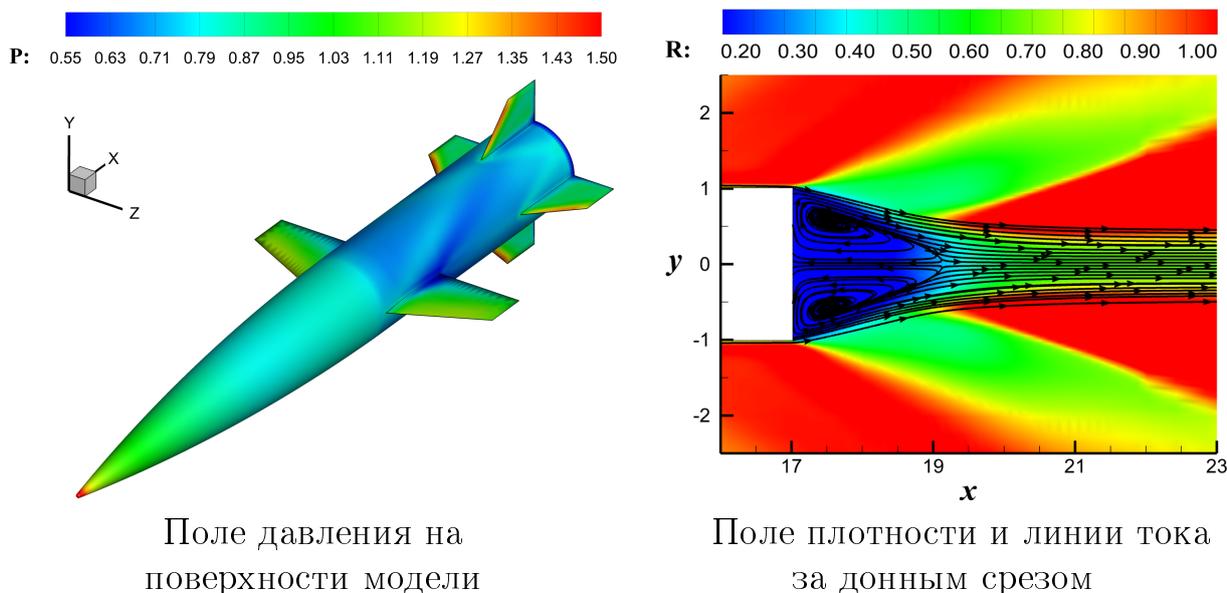


Рис. 6. Расчет с моделью турбулентности SST

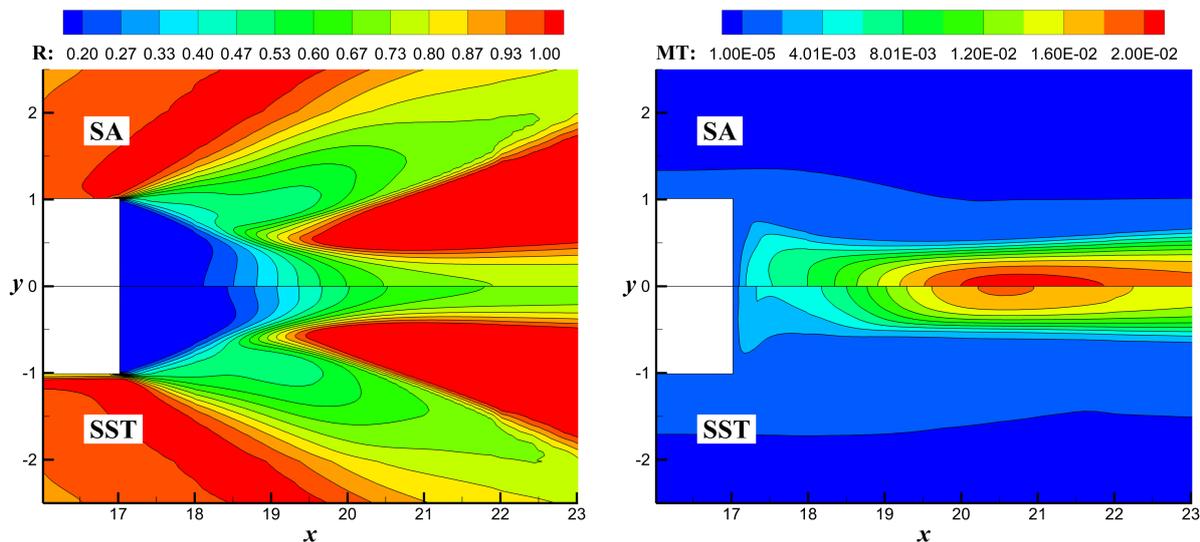


Рис. 7. Распределение плотности (слева) и турбулентной вязкости (справа) за донным срезом, расчеты с моделями SA ($y > 0$) и SST ($y < 0$)

На рис. 6 представлены результаты расчета с моделью турбулентности SST: распределение давления по поверхности модели (слева) и распределение плотности и линий тока за донным срезом (справа) в центральной плоскости. Видно, что структура течения в донной области хорошо согласуется с теорией [13]: между ударной волной и пограничным слоем расположена область слабовязкого течения; пограничный слой срывается с задней кромки конуса, образуя вязкий слой смешения, который ограничивает образующуюся у донного среза замкнутую область возвратно-циркуляционного течения; у задней кромки конуса поток разворачивается в сторону оси течения через

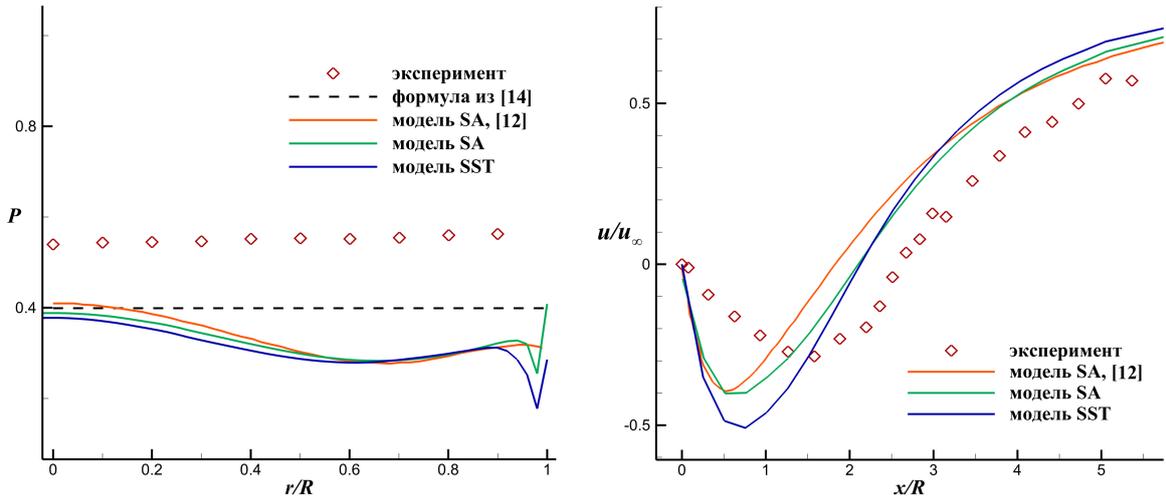


Рис. 8. Распределение давления (слева) и продольной скорости по оси симметрии от донного среза (справа), сравнение с данными из работ [11] и [12]

веер волн разрежения; на некотором расстоянии от донного торца происходит присоединение оторвавшегося вязкого слоя, при этом образуется серия волн сжатия, переходящая в замыкающий скачок уплотнения; после точки присоединения образуется турбулентный след.

В целом, результаты, полученные с моделями SA и SST, сравнимы. Основные различия между ними наблюдаются в следе донного течения, представленном на рис. 7, где SA обладает несколько более высокими показателями турбулентной вязкости. На рис. 8 показано получившееся в расчетах с SA и SST распределение давления (слева) и продольной скорости по оси симметрии от донного среза (справа) в сравнении с экспериментальными данными [11] и данными по моделированию с SA [12]. Также на графике показано давление $P_b = 0.399$, полученное согласно приближенной формуле из работы [14]:

$$P_b = 0.15 + \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-(\gamma+1)/\gamma}. \quad (8)$$

Аналогично результатам работы [12], полученные давление на донном срезе, продольная скорость по оси симметрии от донного среза и расположение точки присоединения плохо совпадают с экспериментальными данными [11], где $\bar{P}_b = 0.554$ (усредненное по донному срезу). Однако это также может быть эффектом стабилизаторов, поскольку, согласно [15], наличие стабилизаторов при нулевом угле атаки уменьшает донное давление. Также для тела, схожего с рассматриваемым в данной работе за исключением отсутствия крыльев, $\bar{P}_b = 0.493$ [15]. При этом совпадение получившихся в настоящей работе результатов с численными данными [12] и формулой (8) хорошее, как в количественном, так и качественном смысле.

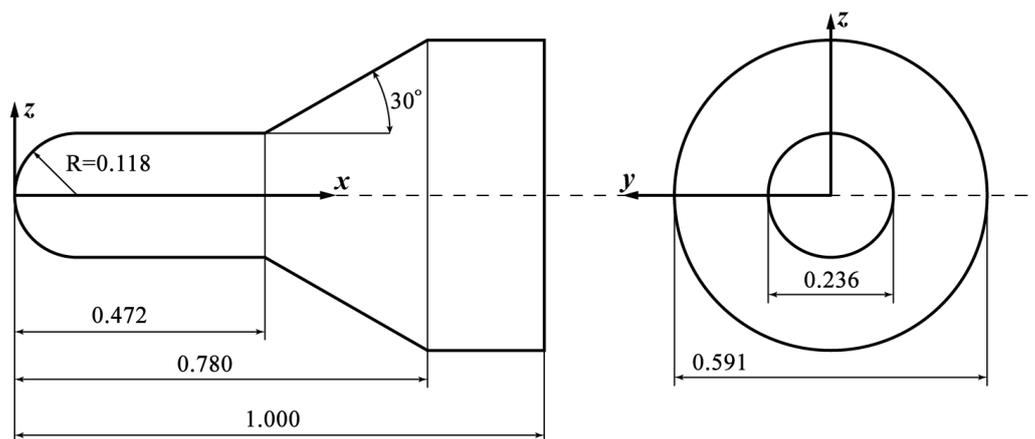


Рис. 9. Описание геометрии модели возвращаемого космического аппарата

Задача 3.

Сверхзвуковое обтекание модели возвращаемого космического аппарата.

Третьей рассматриваемой в настоящей работе задачей является сверхзвуковое обтекание модели возвращаемого космического аппарата, имеющего характерную для таких изделий форму: затупленный цилиндр, сопряженный с хвостовым конусом («юбкой»). Существенное влияние на его аэродинамические характеристики оказывает отрыв потока с подветренной стороны, который сильно влияет на сопротивление, подъемную силу, нагрев и стабильность аппарата, особенно при больших углах атаки. Увеличение давления на ударной волне от «юбки» вызывает возникновение зоны рециркуляции при угле, образованном расширением. Благодаря этим эффектам течение вокруг подобных тел имеет сложную трехмерную структуру.

Аппарат состоит из цилиндра, затупленного по сфере, конической «юбки», переходящей в цилиндр, и плоской донной области. Параметры геометрии тела взяты из работы [16], при этом за единицу длины принят продольный размер аппарата, равный 1 м., см. рис. 9.

Расчеты проводились при числе Маха $M = 4.04$, угле атаки $\alpha = 10^\circ$ и числе Рейнольдса $Re = 7.6 \times 10^6$, нормированном на 1 м. Расчетная сетка состояла из $N = 5\,963\,967$ гексагональных ячеек и имела сгущения к боковой поверхности тела, а также к донной области. Численные расчёты проводились по неявной схеме с моделями турбулентности SST и SA, их результаты сравнивались между собой и экспериментальными данными из работы [16].

На рис. 10 представлены результаты расчета с моделью турбулентности SST: распределение поля давления по поверхности модели (слева) и в сечении $z = 0$ (справа). Рост давления на подветренной стороне перед конусом соответствует области отрыва. Поле давления и линии тока около «юбки» для расчетов с моделями SA и SST показаны на рис. 11. Отчетливо видно

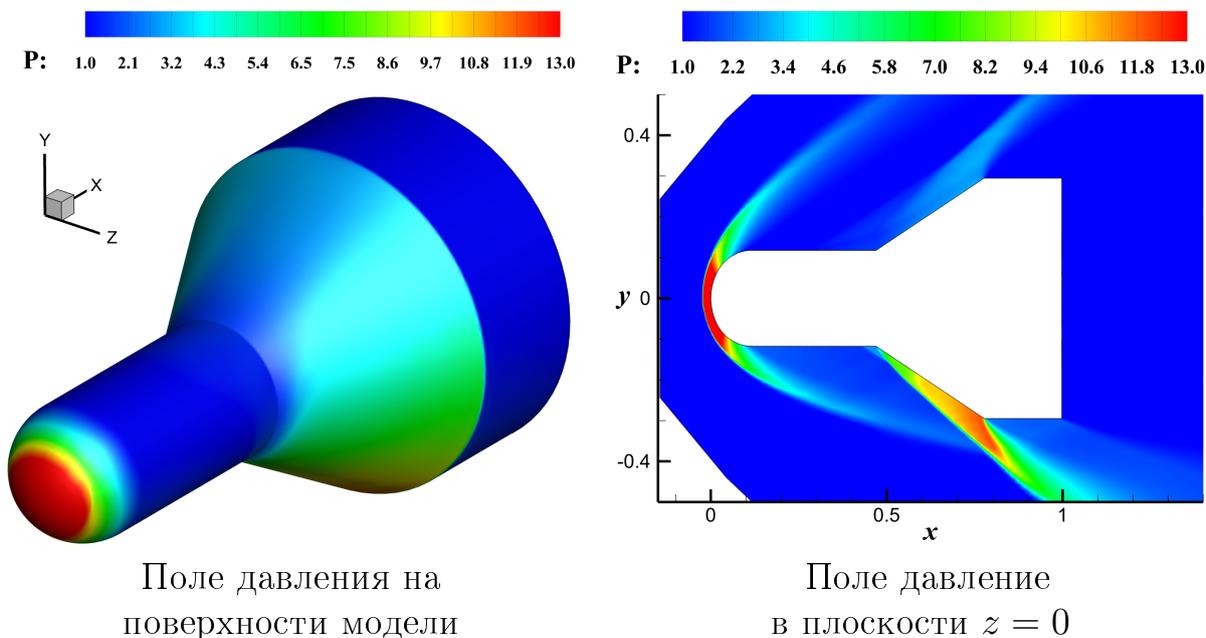


Рис. 10. Расчет с моделью турбулентности SST

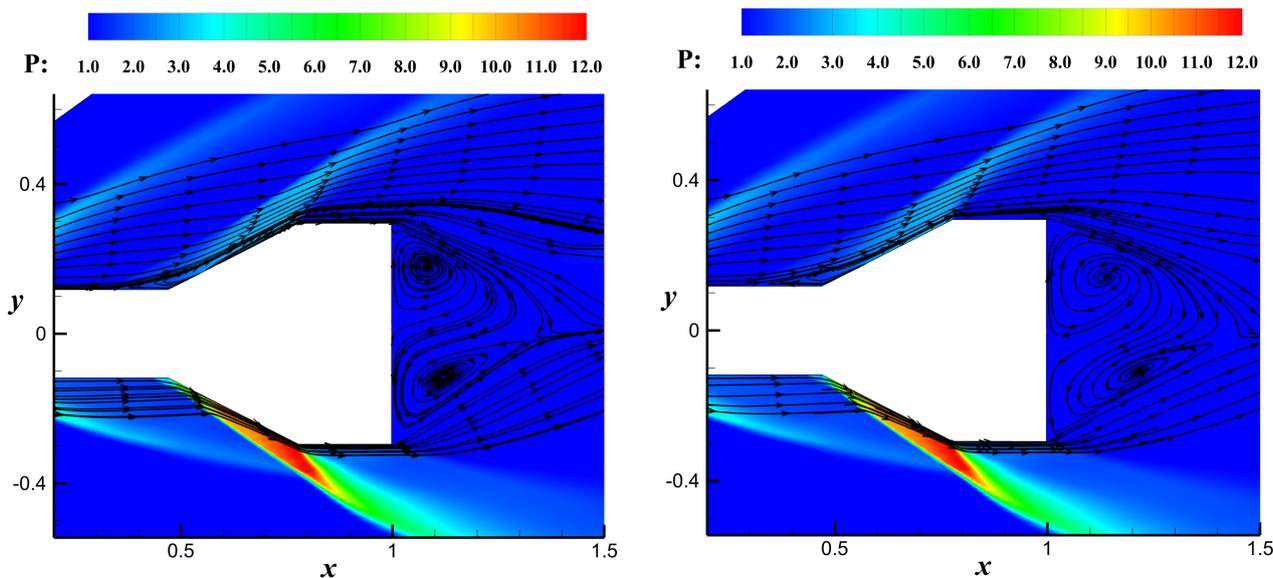


Рис. 11. Поле давления и мгновенные линии тока около «юбки», расчеты с моделями SA (слева) и SST (справа)

отрывную зону и область возвратного течения на подветренной стороне тела в области перехода от цилиндра к конусу, при этом для модели SST рециркуляционная зона имеет больший размер (вытянута вверх по течению). За донным срезом образуется мощный тороидальный вихрь, его структуры также имеют некоторые различия для моделей SA и SST.

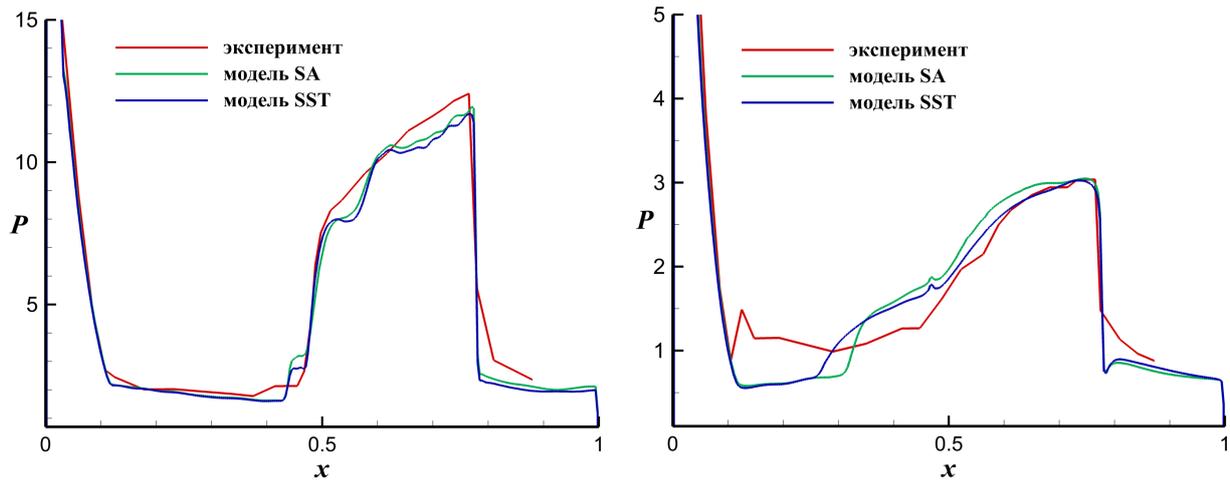


Рис. 12. Распределение давления в плоскости $z = 0$ на нижней (слева) и верхней (справа) поверхности тела

В работе [16] приведены данные по распределению давления на поверхности модели в плоскости симметрии $z = 0$. Результаты сравнения численных и экспериментальных данных представлены на рис. 12. Видно, что результаты расчетов с моделями SA и SST удовлетворительно согласуются друг с другом и с экспериментальными данными.

На рис. 13 показано получившееся в расчетах с моделями SA и SST распределение донного давления по оси симметрии, также на рисунке отмечено значение $P_b = 0.233$, полученное по формуле (8). Результат расчета с моделью SST $\bar{P}_b = 0.214$ оказывается значительно ближе к этому значению, чем аналогичный $\bar{P}_b = 0.136$ для SA. Следует отметить, что полученные с моделью SST данные практически не зависят от радиуса, тогда как для SA наблюдается отчетливый максимум вблизи оси симметрии модели.

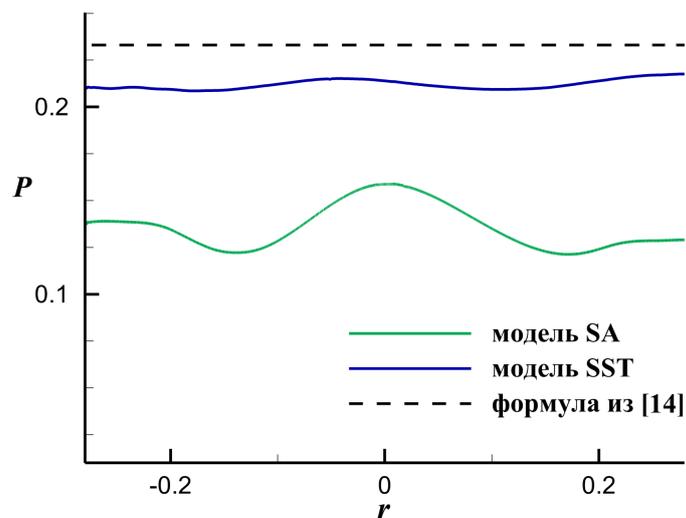


Рис. 13. Распределение донного давления по оси симметрии

5 Заключение

В настоящей работе представлен численный алгоритм неявной схемы на основе метода LU-SGS для решения трехмерных нестационарных уравнений URANS совместно с моделью турбулентности SST Ментера, являющийся модификацией алгоритма, предложенного авторами в работах [1, 2].

На основе представленной методики было проведено численное моделирование трех задач внешней аэродинамики, а именно: трансзвукового обтекания крыла с симметричным профилем ONERA M6, сверхзвукового обтекания прототипа летательного аппарата и сверхзвукового обтекания модели возвращаемого космического аппарата. Во всех рассмотренных случаях получено приемлемое совпадение с результатами аналогичных расчетов с моделью турбулентности Спаларта–Аллмараса, а также с опубликованными в литературе экспериментальными данными и работами других авторов.

Результаты расчетов продемонстрировали корректность и эффективность разработанной методики, что позволяет сделать вывод о возможности применения реализованного неявного метода для решения задач современной аэродинамики.

Список литературы

- [1] В.Е. Борисов, А.А. Давыдов, И.Ю. Кудряшов, А.Е. Луцкий, И.С. Меньшов. Параллельная реализация неявной схемы на основе метода LU-SGS для моделирования трехмерных турбулентных течений // Математическое моделирование, 2014, Т.26, № 10, С. 64–78.
- [2] В.Е. Борисов, А.Е. Луцкий. Моделирование перехода между регулярным и маховским отражением ударных волн с помощью неявной схемы на основе методов LU-SGS и BiCGStab // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 68. 36 с.
<http://library.keldysh.ru/preprints.asp?id=2016-68>
- [3] D.A. Knoll, D.E. Keyes, Jacobian-free Newton–Krylov methods: a survey of approaches and applications // Journal of Computational Physics, 2004. V. 193, No 2, pp. 357–397.
- [4] F.R. Menter, M. Kuntz and R. Langtry. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, ed: K. Hanjalic, Y. Nagano and M. Tummers, Begell House, Inc., 2003, pp. 625–632.

- [5] А.В. Гарбарук, М.Х. Стрелец, М.Л. Шур. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений: учебное пособие // СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2012, 88 с.
- [6] Л.В. Быков, А.М. Молчанов, М.А. Щербаков, Д.С. Янышев. Вычислительная механика сплошных сред в задачах авиационной и космической техники. М.: ЛЕНАНД, 2015, 688 с.
- [7] Ansys Fluent 17.0: Theory Guide. ANSYS, Inc., 2016.
- [8] P.R. Spalart and C.L. Rumsey. Effective Inflow Conditions for Turbulence Models in Aerodynamic Calculations // AIAA Journal, 2007. V. 45, No. 10, pp. 2544–2553.
- [9] Вычислительные ресурсы ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.
<http://www.kiam.ru/MVS/resources/>
- [10] V. Schmitt, F. Charpin. Pressure Distributions on the ONERA-M6-Wing at Transonic Mach Numbers. Experimental Data Base for Computer Program Assessment. Report of the Fluid Dynamics Panel Working Group 04, AGARD AR 138, 1979.
- [11] J.L. Herrin and J.C. Dutton. Supersonic Base Flow Experiments in the Near Wake of a Cylindrical Afterbody // AIAA Journal, 1994. V. 32, No. 1, pp. 77–83.
- [12] Franck Simon, Sebastien Deck, Philippe Guillen and Pierre Sagaut. Reynolds–Averaged Navier–Stokes/Large–Eddy Simulations of Supersonic Base Flow // AIAA Journal, 2006. V. 44, No. 11, pp. 2578–2590.
- [13] А.Н. Крайко. Теоретическая газовая динамика (краткий курс). М.: МФТИ, 2007, 300 с.
- [14] А.И. Зубков, А.Ф. Гаранин, В.Ф. Сафронов, Л.Д. Сухановская, П.К. Третьяков. Сверхзвуковое обтекание осесимметричных тел при горении в передних и донных зонах отрыва // Теплофизика и аэромеханика, 2005, том 12, № 1.
- [15] B. Boswell, J. Dutton. Flow Visualizations and Measurements of a Three-Dimensional Supersonic Separated Flow // AIAA Journal, 2001. V. 39, No. 1, pp. 113–121.
- [16] E.M. Houtman, W. J. Bannink, B.H. Timmerman. Experimental and Computational Study of a Blunt Cylinder–Flare Model in High Supersonic Flow, Report LR-796, 1995.