ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 33 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Попков К.А.

Короткие единичные тесты для схем при произвольных константных неисправностях на выходах элементов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попков К.А. Короткие единичные тесты для схем при произвольных константных неисправностях на выходах элементов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 33. 23 с. doi:**10.20948/prepr-2018-33**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-33**

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

К. А. Попков

Короткие единичные тесты для схем при произвольных константных неисправностях на выходах элементов

Москва — 2018

Попков К. А.

Короткие единичные тесты для схем при произвольных константных неисправностях на выходах элементов

Рассматривается задача синтеза неизбыточных схем из функциональных элементов, реализующих булевы функции от n переменных и допускающих короткие единичные тесты относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов. Доказано, что любую неконстантную булеву функцию можно реализовать схемой в базисе «конъюнкция, отрицание, сумма по модулю 2 трёх переменных», допускающей единичный проверяющий тест длины не более 2, а также схемой в базисе, состоящем из одной конкретной булевой функции от шести переменных, допускающей единичный диагностический тест длины не более 3.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, константная неисправность, единичный проверяющий тест, единичный диагностический тест

Kirill Andreevich Popkov

Short single tests for logic networks under arbitrary stuck-at faults at outputs of gates

We consider a problem of synthesis of irredundant logic networks implementing Boolean functions on n variables and allowing short single tests regarding arbitrary stuck-at faults at outputs of gates. It is proved that one can implement any non-constant Boolean function by a network in the basis "conjunction, negation, sum of three variables modulo two", allowing a single fault detection test with a length not exceeding 2, and by a network in the basis consisting of one certain Boolean function on six variables, allowing a single diagnostic test with a length not exceeding 3.

Key words: logic network, stuck-at fault, single fault detection test, single diagnostic test

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 14-21-00025 П.

Оглавление

Введение

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданные булевы функции. Логический подход к тестированию электрических схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [1]; этот подход также применим к тестированию схем из функциональных элементов (см. [2, 3, 4]). Пусть имеется схема из функциональных элементов S с одним выходом, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько элементов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В результате схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях элементов схемы S, называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [2, 3, 4]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно элементов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один элемент. Единичные тесты обычно рассматривают для неизбыточных схем [4], т. е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой.

Любое множество булевых функций будем называть *базисом*.

Пусть зафиксирован вид неисправностей элементов, B — произвольный функционально полный базис и T — единичный проверяющий тест (ЕПТ) для некоторой схемы S в базисе B. Введём следующие обозначения: $D^B_{\text{ЕП}}(T)$ — длина теста T; $D^B_{\text{ЕП}}(S) = \min D^B_{\text{ЕП}}(T)$, где минимум берётся по всем ЕПТ T для схемы S; $D^B_{\text{ЕП}}(f) = \min D^B_{\text{ЕП}}(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным схемам S в базисе B, реализующим функцию f; $D^B_{\text{ЕП}}(n) = \max D^B_{\text{ЕП}}(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных, для которых определено значение $D^B_{\text{ЕП}}(f)$.

Функция $D^B_{\text{ЕП}}(n)$ называется *функцией Шеннона* длины ЕПТ. По аналогии с функциями $D^B_{\text{ЕП}}$ можно ввести функции $D^B_{\text{ПП}}$, $D^B_{\text{ЕД}}$ и $D^B_{\text{ПД}}$ для соответственно полного проверяющего, единичного и полного диагностического тестов, зависящие от T, от S, от f и от n (в определениях функций $D^B_{\text{ПП}}(f)$ и $D^B_{\text{ПД}}(f)$ не требуется предполагать неизбыточность схем). Так, например, $D^B_{\text{ПД}}(n)$ — функция Шеннона длины полного диагностического теста.

Перечислим основные результаты, касающиеся тестирования схем из функциональных элементов. Класс допустимых неисправностей функциональных элементов ограничим константными неисправностями на выходах элементов, при которых значение на выходе любого неисправного элемента становится равно некоторой булевой константе. Неисправности на выходах элементов называются однотипными константными типа p, если эта константа одна и та же для каждого неисправного элемента и равна p, и произвольными константными, если эта константа может быть равна как 0, так и 1 для каждого неисправного элемента независимо от неисправностей других элементов. Для удобства над буквой D после символов, обозначающих базис, через точку с запятой будем ставить символы «$0, 1$», «0» или «1» в случаях, когда в схемах допускаются произвольные константные неисправности, однотипные константные неисправности типа 0 или типа 1 на выходах элементов соответственно. Вполне разумно предполагать, что если в базисе содержится булева константа α, то у элемента, её реализующего, не может быть неисправности типа α.

Для удобства сперва будут перечислены результаты для единичных, затем — для полных тестов при произвольных константных неисправностях на выходах функциональных элементов, а в конце — результаты для тестов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов.

В работе С. М. Редди [5] для базиса Жегалкина $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$ была получена оценка $D^{B_1;\,0,1}_{\text{ЕП}}(n) \leqslant n + 3$. В дальнейшем результат работы [5] был обобщён С. С. Колядой в [6, 7] на случай произвольного функционально полного конечного базиса. Последний результат, в свою очередь, был впоследствии усилен Д. С. Романовым, который в [8] для любого функционально полного базиса B получил оценку $D^{B;\,0,1}_{\text{ЕП}}(n) \leqslant 4$ (правда, в указанной работе использовалось несколько другое определение неизбыточных схем). Им же совместно с Е. Ю. Романовой в [9] получена оценка $D^{B_1';\,0,1}_{\text{ЕД}}(n) \leqslant 22$, где $B_1' = \{\&, \oplus, 1\}$, а также доказано существование базиса B_2, состоящего из булевых функций от не более чем девяти переменных, в котором $D^{B_2;\,0,1}_{\text{ЕД}}(n) \leqslant 6$. В работе [10], в частности, получены неравенства $D_{\text{ЕП}}^{B_3;\,0,1}(n) \geqslant 3$ при $n \geqslant 3$ для любого полного базиса B_3, состоящего из булевых функций от не более чем двух переменных, а также, возможно, из некоторых других булевых функций специального вида, и $D_{\text{ЕД}}^{B_4;\,0,1}(n) \geqslant 3$ для любого полного конечного базиса B_4 при n, большем максимального числа существенных переменных у функций из B_4. В [4, с. 113, теорема 9] с использованием идей С. В. Яблонского установлено, что для любого полного базиса B функция $D_{\text{ЕД}}^{B;\,0,1}(n)$ асимптотически не превосходит $\frac{2^{n+1}}{n}$; аналогично можно показать, что $D_{\text{ЕД}}^{B;\,p}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$, $p = 0, 1$.

Для полных проверяющих тестов Н. П. Редькин в [11, 12] получил оценку $D_{\text{ПП}}^{B_4;\,0,1}(n) \leqslant 2\left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + n\right)$ для любого полного конечного базиса B_4; Д. С. Романов в [13] доказал, что существует базис B_5, состоящий из булевых функций от не более чем семи переменных, в котором $2 \leqslant D_{\text{ПП}}^{B_5;\,0,1}(n) \leqslant 4$ при $n \geqslant 1$. В [14] доказано существование базиса B_5', состоящего из двух булевых функций от не более чем четырёх переменных, в котором $D_{\text{ПП}}^{B_5';\,0,1}(n) = 2$ при $n \geqslant 1$. В [15], в частности, установлено неравенство $D_{\text{ПД}}^{B_6;\,0,1}(n) \gtrsim \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt[4]{n}}$ для базиса $B_6 = \{\&, \neg\}$.

Для базиса $B_7 = \{\&, \vee, \neg\}$ Н. П. Редькин в [16, 17] получил оценки $D_{\text{ПП}}^{B_7;\,p}(n) \leqslant n$ и $D_{\text{ЕД}}^{B_7;\,p}(n) \leqslant 2n + 1$ для $p = 0, 1$. Первая из этих двух оценок впоследствии была улучшена Ю. В. Бородиной, которая в [18] установила, что $D_{\text{ПП}}^{B_7;\,p}(n) = 2$ при $n \geqslant 2$; вторая оценка улучшена в [19], где, в частности, доказано, что $D_{\text{ЕД}}^{B_7;\,p}(n) = 2$ при $n \geqslant 2$. Для базиса B_6 в работе [20], в том числе, получены равенства $D_{\text{ЕП}}^{B_6;\,p}(n) = 3$ для $p = 0, 1$ при $n \geqslant 2$. Ю. В. Бородина в базисе $B_8 = \{|\}$ (штрих Шеффера) при $n \geqslant 2$ получила оценку $D_{\text{ПП}}^{B_8;\,1}(n) \geqslant n + 1$ [21]. Ей же для базиса Жегалкина B_1 при $n \geqslant 1$ удалось найти точное значение функций Шеннона $D_{\text{ЕП}}^{B_1;\,1}(n) = 1$ [22] и $D_{\text{ПП}}^{B_1;\,0}(n) = 1$ [23] (совместно с П. А. Бородиным). В работе [24], в частности, установлено равенство $D_{\text{ЕД}}^{B_1;\,0}(n) = 2$ при $n \geqslant 2$, а в работе [15] — неравенство $D_{\text{ПД}}^{B_8;\,1}(n) \gtrsim \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt[4]{n}}$.

В данной работе в качестве неисправностей функциональных элементов будут рассматриваться только произвольные константные неисправности на выходах элементов. Будут рассмотрены базисы $B_9 = \{x\&y, \overline{x}, x \oplus y \oplus z\}$, $B_{10} = \{\varphi(x_1, \ldots, x_6), \overline{x}\}$ и $B_{11} = \{\overline{\varphi}(x_1, \ldots, x_6)\}$, где $\varphi(x_1, \ldots, x_6)$ — булева функция, определённая ниже, и получены, в частности, равенства $D_{\text{ЕП}}^{B_9;\,0,1}(n) = 2$ при $n \geqslant 1$ (следствие 1), $D_{\text{ЕД}}^{B_{10};\,0,1}(n) = D_{\text{ЕД}}^{B_{11};\,0,1}(n) = 3$ при $n \geqslant 2$ (следствия 2 и 3).

В дальнейшем для краткости вместо величин $D_{\text{ЕП}}^{B;\,0,1}$ и $D_{\text{ЕД}}^{B;\,0,1}$ (зависящих от f или от n) будем писать соответственно $D_{\text{ЕП}}^{B}$ и $D_{\text{ЕД}}^{B}$.

Введём обозначения $\tilde{0}^d = \underbrace{0,\ldots,0}_{d}$, $\tilde{1}^d = \underbrace{1,\ldots,1}_{d}$, где $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Будем говорить, что функциональный элемент E' расположен в схеме S или в цепочке Z *выше* (*ниже*) функционального элемента E, если в этой схеме (цепочке) существует ориентированный путь от E' к E (соответственно от E к E').

Единичные проверяющие тесты

Рассмотрим базис $B_9 = \{x\&y, \overline{x}, x \oplus y \oplus z\}$. Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $x\&y$ (вида $\overline{x}$, $x \oplus y \oplus z$), будем называть *конъюнктором* (соответственно *инвертором*, *сумматором*).

Выделим возможное представление функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = x_i, \tag{1}$$

где $i \in \{1,\ldots,n\}$.

В [10] доказано (теорема 4), что для любого полного базиса B_3, состоящего из булевых функций от не более чем двух переменных, а также, возможно, из некоторых других булевых функций специального вида, справедливо неравенство $D_{\text{ЕП}}^{B_3}(n) \geqslant 3$ при $n \geqslant 3$. Нижеследующая теорема 1 показывает, что при рассмотрении базиса B_9, в котором, помимо булевых функций от одной и двух переменных, присутствует только одна, причём «просто устроенная», функция от трёх переменных, подобное неравенство уже не выполняется.

Теорема 1. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, отличной от констант, справедливо равенство*

$$D_{\text{ЕП}}^{B_9}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (1), \\ 2, & \text{если функция } f \text{ не представима в виде } (1). \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, то значение $D_{\text{ЕП}}^{B_9}(f)$ не определено.

Следствие 1. *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство $D_{\text{ЕП}}^{B_9}(n) = 2$.*

Доказательство теоремы 1. Вместо $D_{\text{ЕП}}^{B_9}(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. Пусть вначале $f \equiv 0$ ($f \equiv 1$); S — произвольная схема в базисе B_9, реализующая функцию f. Выход схемы S, очевидно, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности типа 0 (типа 1) этого элемента получающаяся схема по-прежнему будет реализовывать тождественный нуль (тождественную единицу), т. е. схема S избыточна. Получаем, что неизбыточных схем, реализующих функцию f, не существует и, следовательно, значение $D(f)$ не определено. Далее будем считать, что $f \not\equiv 0$ и $f \not\equiv 1$.

Если функция f представима в виде (1), то её, очевидно, можно реализовать схемой, не содержащей функциональных элементов. У такой схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому пустое множество является для неё ЕПТ, откуда следует равенство $D(f) = 0$.

Пусть функция f не представима в виде (1). Выход любой схемы, реализующей эту функцию, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности типа 0 (типа 1) этого элемента получающаяся схема будет реализовывать константу 0 (константу 1), которую надо отличить от функции f хотя бы на одном наборе. Отсюда следует, что в любой ЕПТ для рассматриваемой схемы должен входить хотя бы один набор, на котором функция f принимает значение 1 (значение 0), поэтому $D(f) \geqslant 2$.

Докажем неравенство $D(f) \leqslant 2$. Доказательство основано на некоторых идеях, использованных при установлении неравенства $D(f) \leqslant 2$ в доказательстве теоремы 1 из [14], а также неравенства $D(f) \leqslant 3$ в случае 4 из доказательства теоремы 1 из [20]. Представим функцию f полиномом Жегалкина:

$$f(\tilde{x}^n) = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m \oplus c, \tag{2}$$

где $m \geqslant 1$, $c \in \{0, 1\}$, а K_1 — самая короткая конъюнкция в этом полиноме. Пусть $K_i = x_{j_1(i)} \& \ldots \& x_{j_{t_i}(i)}$, $i = 1, \ldots, m$. Рассмотрим два случая.

Случай А. Пусть $f(\tilde{1}^n) \neq f(\tilde{0}^n)$. Пусть $\tilde{\sigma}$ — произвольный двоичный набор длины n, на котором каждая из конъюнкций $K_1, \ldots, K_m$ принимает значение 0, тогда из представления (2) следует, что $f(\tilde{0}^n) = f(\tilde{\sigma}) = c$, поэтому

$$f(\tilde{1}^n) \neq f(\tilde{\sigma}). \tag{3}$$

В качестве $\tilde{\sigma}$, очевидно, можно взять набор $(\tilde{0}^n)$. Пусть в наборе $\tilde{\sigma}$ содержится ровно k единиц, где $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Без ограничения общности $\tilde{\sigma} = (\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$. Тогда в каждую конъюнкцию K_i, $i = 1, \ldots, m$, входят $p_i \in \{1, \ldots, t_i\}$ переменных из числа $x_{k+1}, \ldots, x_n$.

Случай Б. Пусть $f(\tilde{1}^n) = f(\tilde{0}^n)$. Без ограничения общности будем считать, что $j_1(1) = 1, \ldots, j_k(1) = k$, где $k = t_1$. Тогда $K_1 = x_1 \& \ldots \& x_k$. Положим $\tilde{\sigma} = (\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$. Поскольку K_1 — самая короткая конъюнкция в полиноме Жегалкина для функции f, то в каждую конъюнкцию $K_2, \ldots, K_m$

входит хотя бы одна переменная из числа $x_{k+1}, \ldots, x_n$. Отсюда и из представления (2) следует, что $f(\tilde{0}^n) = c$, а $f(\tilde{\sigma}) = 1 \oplus \underbrace{0 \oplus \ldots \oplus 0}_{m-1} \oplus c = \overline{c}$, т. е. $f(\tilde{0}^n) \neq f(\tilde{\sigma})$. Тогда верно соотношение (3), в частности, $(\tilde{1}^n) \neq \tilde{\sigma}$, поэтому $k < n$. Если в полиноме Жегалкина для функции f присутствует слагаемое $x_1\& \ldots \&x_k\&x_{k+1}$, то будем без ограничения общности считать, что это слагаемое K_m. Представим K_1 в виде $K_1' \oplus K_{m+1}$, где $K_1' = x_1\& \& \ldots \&x_k\&\overline{x}_{k+1}$, $K_{m+1} = x_1\& \ldots \&x_k\&x_{k+1}$. Тогда

$$f(\tilde{x}^n) = K_1' \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_m \oplus K_{m+1} \oplus c = K_1' \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_r \oplus c, \tag{4}$$

где $r = m - 1$ при $K_m = K_{m+1}$ и $r = m + 1$ при $K_m \neq K_{m+1}$ (в случае $r = 1$ полагаем $K_2 \oplus \ldots \oplus K_r = 0$). Так как K_1 — самая короткая конъюнкция в полиноме Жегалкина для функции f, то в каждую конъюнкцию K_i, $i = 2, \ldots, r$ (при $r \geqslant 2$), входят $p_i \in \{1, \ldots, t_i\}$ переменных из числа $x_{k+1}, \ldots, x_n$.

Далее будем параллельно рассматривать случаи А и Б. Введём для удобства обозначение

$$q = \begin{cases} 1 & \text{в случае А,} \\ 2 & \text{в случае Б.} \end{cases}$$

В случае А положим $r = m$. Тогда в каждом из случаев А, Б имеем $\tilde{\sigma} = (\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$, а в каждую конъюнкцию $K_q, \ldots, K_r$ (при $r \geqslant q$) входят $p_i \in \{1, \ldots, t_i\}$ переменных из числа $x_{k+1}, \ldots, x_n$. Без ограничения общности это переменные $x_{j_1(i)}, \ldots, x_{j_{p_i}(i)}$, а каждая из переменных $x_{j_{p_i+1}(i)}, \ldots, x_{j_{t_i}(i)}$ (при $p_i < t_i$) принадлежит множеству $\{x_1, \ldots, x_k\}$. В случае $p_i \geqslant 3$ представим конъюнкцию K_i, $i = q, \ldots, r$, в виде $K_i^{(2)} \oplus \ldots \oplus K_i^{(p_i-1)} \oplus K_i^{(2)} \oplus \oplus \ldots \oplus K_i^{(p_i-1)} \oplus K_i$, где $K_i^{(s)} = x_{j_1(i)}\& \ldots \&x_{j_s(i)}$, $s = 2, \ldots, p_i - 1$ (конъюнкция первых s переменных из K_i). Тогда в случае А представление (2) примет вид

$$f = \bigoplus_{i=q}^{r} \left(\bigoplus_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus \bigoplus_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus K_i \right) \oplus c, \tag{5}$$

а в случае Б представление (4) примет вид

$$f = K_1' \oplus \bigoplus_{i=q}^{r} \left(\bigoplus_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus \bigoplus_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus K_i \right) \oplus c \tag{6}$$

(если $p_i \in \{1,2\}$, то полагаем $\bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus \bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus K_i = K_i$, а если $r < q$, то полагаем $\bigoplus\limits_{i=q}^{r} (\ldots) = 0$).

В случае А заметим, что

$$f(\tilde{\sigma}) = \bigoplus_{i=q}^{r} \left(\bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 0 \oplus \bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 0 \oplus 0 \right) \oplus c = c,$$

$$f(\tilde{1}^n) = \bigoplus_{i=q}^{r} \left(\bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus \bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus 1 \right) \oplus c,$$

а тогда в силу (3) имеем $\bigoplus\limits_{i=q}^{r} \left(\bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus \bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus 1 \right) = 1$, следовательно, число слагаемых в выражении $\bigoplus\limits_{i=q}^{r} \left(\bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus \bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus K_i \right)$ (после раскрытия всех скобок) нечётно.

В случае Б заметим, что

$$f(\tilde{\sigma}) = 1 \oplus \bigoplus_{i=q}^{r} \left(\bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 0 \oplus \bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 0 \oplus 0 \right) \oplus c = 1 \oplus c,$$

$$f(\tilde{1}^n) = 0 \oplus \bigoplus_{i=q}^{r} \left(\bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus \bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus 1 \right) \oplus c = \bigoplus_{i=q}^{r} \left(\bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus \bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus 1 \right) \oplus c,$$

а тогда в силу (3) имеем $\bigoplus\limits_{i=q}^{r} \left(\bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus \bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus 1 \right) = 0$, следовательно, число слагаемых в выражении $K_1' \oplus \bigoplus\limits_{i=q}^{r} \left(\bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus \bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus K_i \right)$ (после раскрытия всех скобок) нечётно.

Реализуем функцию $f(\tilde{x}^n)$ схемой S в базисе B_9 в соответствии с представлением (5) в случае А и представлением (6) в случае Б. Конъюнкцию K_1' в случае Б реализуем цепочкой Z_1 из одного инвертора и k конъюнкторов, верхним элементом в которой является инвертор; на вход этого инвертора подадим переменную x_{k+1}, а на правые входы конъюнкторов — последовательно переменные $x_1, \ldots, x_k$. Каждую конъюнкцию K_i, $i = q, \ldots, r$ (при $r \geqslant q$), реализуем цепочкой Z_i из $t_i - 1$ конъюнкторов $E_{i,1}, \ldots, E_{i,t_i-1}$, занумерованных «сверху вниз», на входы которой последовательно подадим переменные $x_{j_1(i)}, \ldots, x_{j_{t_i}(i)}$ (в частности, переменная $x_{j_1(i)}$ будет подана на один из входов элемента $E_{i,1}$ — верхнего конъюнктора цепочки Z_i; в случае $t_i = 1$ в этой цепочке не содержится элементов, а её выход совпадает со входом схемы S, отвечающим переменной $x_{j_1(i)}$).

Далее, для каждого $i \in \{q, \ldots, r\}$ (при $r \geqslant q$) такого, что $p_i \geqslant 3$, и для каждого $s \in \{2, \ldots, p_i - 1\}$ подадим на левый вход (нового) конъюнктора $E'_{i,s-1}$ переменную $x_{j_1(i)}$, а его правый вход соединим с выходом конъюнктора $E_{i,s-1}$ из цепочки Z_i (на котором, очевидно, реализуется функция $x_{j_1(i)} \& \ldots \& x_{j_s(i)} = K_i^{(s)}$). Тогда на выходе элемента $E'_{i,s-1}$ реализуется функция $x_{j_1(i)} \& (x_{j_1(i)} \& \ldots \& x_{j_s(i)}) = K_i^{(s)}$. Затем выходы всех цепочек $Z_1, \ldots, Z_r$ и выходы всех конъюнкторов $E_{i,s-1}$ и $E'_{i,s-1}$, где $i = q, \ldots, r$ таковы, что $p_i \geqslant 3$, и $s = 2, \ldots, p_i - 1$ (общее число этих выходов в силу сказанного выше нечётно) соединим со входами цепочки $Z_\oplus$, состоящей из (трёхвходовых) сумматоров и — в случае $c = 1$ — инвертора, вход которого соединён с выходом нижнего из этих сумматоров, причём в случае Б выход цепочки Z_1 соединим с одним из входов верхнего элемента цепочки $Z_\oplus$, если она непуста. Выход цепочки $Z_\oplus$ либо — если эта цепочка пуста — выход цепочки Z_1 объявим выходом схемы S.

Вид схемы S в случае Б показан на рис. 1; в случае А все входы цепочки $Z_\oplus$ смещаются «на один влево» (в частности, выходы элементов $E'_{q,1}$ и $E_{q,1}$ будут соединены с левым и вторым слева входом верхнего сумматора цепочки $Z_\oplus$ соответственно) с учётом равенства $q = 1$.

Нетрудно убедиться, что построенная схема S при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Для этого достаточно заметить, что на выходе цепочки Z_1 в случае Б реализуется функция K'_1; на выходах конъюнкторов $E_{i,1}, \ldots, E_{i,p_i-2}$, а также на выходах конъюнкторов $E'_{i,1}, \ldots, E'_{i,p_i-2}$ реализуются функции $K_i^{(2)}, \ldots, K_i^{(p_i-1)}$ соответственно (при $p_i \geqslant 3$), а на выходах цепочек $Z_q, \ldots, Z_r$ при $r \geqslant q$ — функции $K_q, \ldots, K_r$ соответственно.

Докажем, что схема S неизбыточна и множество $T = \{(\tilde{1}^n), \tilde{\sigma}\}$ является для неё ЕПТ. Множество всех конъюнкторов этой схемы, кроме конъюнкторов из цепочки Z_1 в случае Б, обозначим через M, а множество выходных конъюнкторов цепочек $Z_1, \ldots, Z_r$ и всех конъюнкторов $E_{i,s-1}$ и $E'_{i,s-1}$, где $i = q, \ldots, r$; $s = 2, \ldots, p_i - 1$ — через M'. Заметим, что выход каждого конъюнктора из множества M' соединён ровно с одним входом цепочки $Z_\oplus$.

В случае исправности всех элементов схемы S на наборе $\tilde{\sigma}$ на выходах всех конъюнкторов из множества M возникнут нули (здесь используется то свойство, что каждая переменная $x_{j_1(i)}$ входит в число переменных $x_{k+1}, \ldots, x_n$). Если какой-то из конъюнкторов $E_{i,s-1}$, где $s \geqslant p_i$, неисправен и выдаёт 1, то на наборе $\tilde{\sigma}$ на выходе выходного конъюнк-

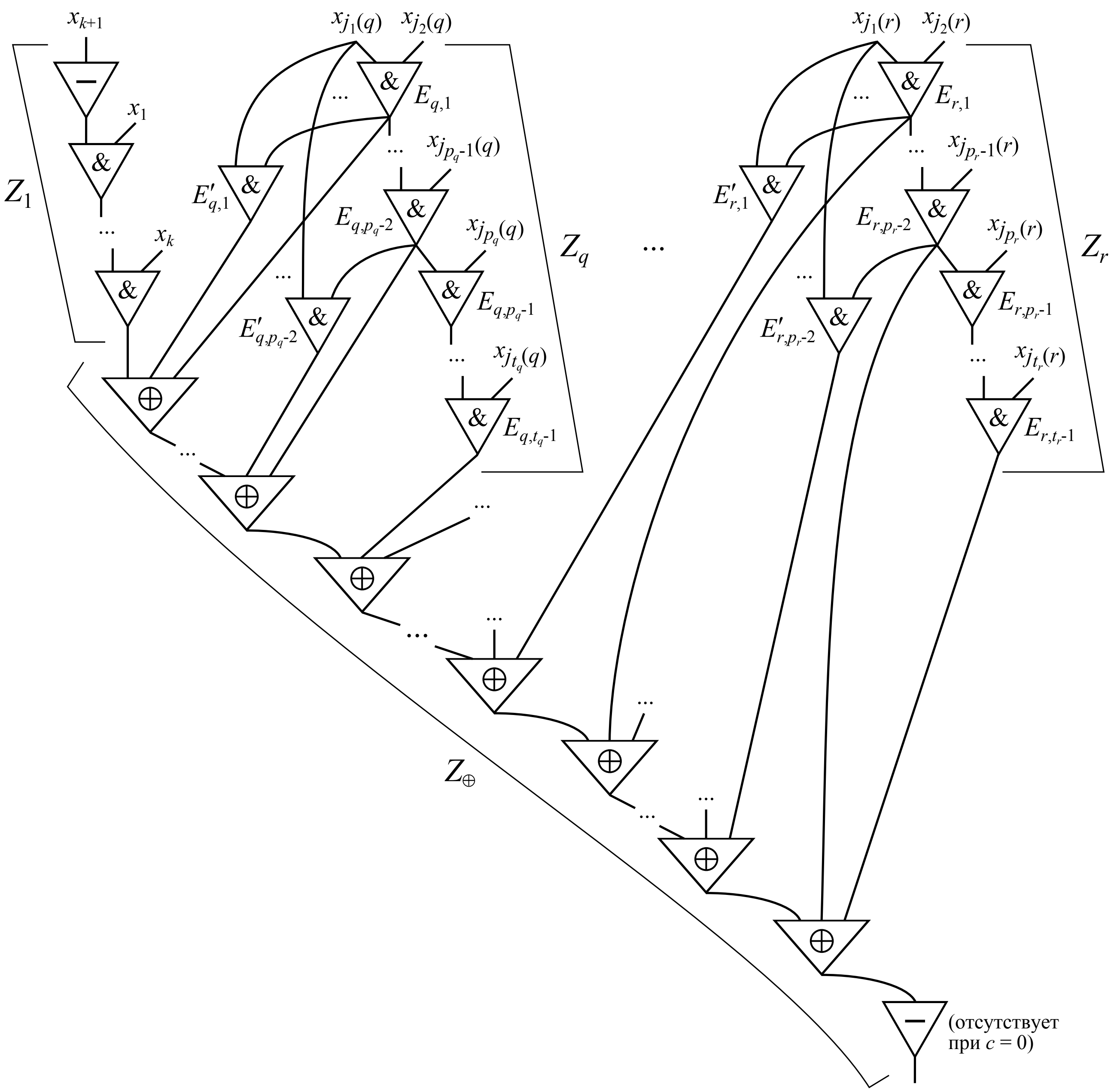

Рис. 1. Схема S в случае Б

тора цепочки Z_i возникнет единица (поскольку на этом наборе $x_{j_{p_i+1}(i)} = = \ldots = x_{j_{t_i}} = 1$ при $p_i < t_i$), а значения на выходах всех остальных конъюнкторов из множества M' не изменятся. Если же какой-то из конъюнкторов $E_{i,s-1}$ или $E'_{i,s-1}$, где $s \in \{2, \ldots, p_i - 1\}$ (при $p_i \geqslant 3$), неисправен и выдаёт 1, то на наборе $\tilde{\sigma}$ на выходе этого конъюнктора возникнет единица, а значения на выходах всех остальных конъюнкторов из множества M' не изменятся, поскольку на указанном наборе $x_{j_1(i)} = \ldots = x_{j_{p_i}(i)} = 0$. Учитывая, что выход единственного конъюнктора из множества M', на выходе которого вместо значения 0 возникает значение 1, соединяется ровно с одним входом цепочки $Z_\oplus$, реализующей линейную функцию от своих входов, значение на выходе данной цепочки, т. е. на выходе всей схемы S, изменится, поэтому рассматриваемая неисправность будет обнаружена на наборе $\tilde{\sigma}$.

Далее, в случае исправности всех элементов схемы S на наборе $(\tilde{1}^n)$ на выходах всех конъюнкторов из множества M возникнут единицы. Если какой-то из конъюнкторов $E'_{i,s-1}$ неисправен и выдаёт 0, то на наборе $(\tilde{1}^n)$ на выходе этого конъюнктора возникнет нуль, а значения на выходах всех остальных конъюнкторов из множества M' не изменятся. Если какой-то из конъюнкторов $E_{i,s-1}$, где $s \geqslant p_i$, неисправен и выдаёт 0, то на наборе $(\tilde{1}^n)$ на выходе выходного конъюнктора цепочки Z_i возникнет нуль, а значения на выходах всех остальных конъюнкторов из множества M' не изменятся. Если же какой-то из конъюнкторов $E_{i,s-1}$, где $s \in \{1, \ldots, p_i - 2\}$ (при $p_i \geqslant 3$), неисправен и выдаёт 0, то на наборе $(\tilde{1}^n)$ на выходе выходного конъюнктора цепочки Z_i, а также на выходах конъюнкторов $E_{i,s-1}, E_{i,s}, \ldots, E_{i,p_i-2}$ и $E'_{i,s-1}, E'_{i,s}, \ldots, E'_{i,p_i-2}$ (т. е. на выходе неисправного конъюнктора и на выходах всех конъюнкторов из множества M', расположенных в схеме S ниже неисправного), возникнут нули, а значения на выходах всех остальных конъюнкторов из множества M' не изменятся. Учитывая, что число возникших нулей равно $1 + (p_i - s) + (p_i - s)$ и, как следствие, нечётно, а выход каждого конъюнктора из множества M' соединяется ровно с одним входом цепочки $Z_\oplus$, реализующей линейную функцию от своих входов, значение на выходе данной цепочки, т. е. на выходе всей схемы S, изменится, поэтому рассматриваемая неисправность будет обнаружена на наборе $(\tilde{1}^n)$.

В случае Б, если все элементы схемы S исправны, то на наборе $(\tilde{1}^n)$ (наборе $\tilde{\sigma}$) на выходах всех элементов, содержащихся в цепочке Z_1, возникнут нули (единицы), причём на правые входы всех конъюнкторов в этой цепочке будут подаваться единицы. Если некоторый элемент в указанной цепочке неисправен и выдаёт 1 (0), то на наборе $(\tilde{1}^n)$ (соответственно $\tilde{\sigma}$) на выходе этого и всех следующих за ним элементов цепочки Z_1, а значит, и на выходе данной цепочки, очевидно, возникнут единицы (нули). Учитывая, что выход цепочки Z_1 соединяется ровно с одним входом цепочки $Z_\oplus$, реализующей линейную функцию от своих входов, значение на выходе этой цепочки, т. е. на выходе всей схемы S, изменится, поэтому рассматриваемая неисправность будет обнаружена на наборе $(\tilde{1}^n)$ (соответственно $\tilde{\sigma}$).

Осталось рассмотреть случай неисправности типа 0 (типа 1) некоторого элемента в цепочке $Z_\oplus$. Нетрудно заметить, что при исправности всех элементов схемы S на наборе $(\tilde{1}^n)$ (наборе $\tilde{\sigma}$) на выходах всех сумматоров из этой цепочки возникнут единицы (нули) в случае А и нули (единицы) в случае Б (напомним, сумматоры трёхвходовые). Если какой-то из них неисправен, то на одном из наборов $(\tilde{1}^n), \tilde{\sigma}$ значение на выходе данного сумматора изменится. Учитывая, что этот выход либо совпадает с выходом схемы S, либо соединяется ровно с одним входом некоторой нижней части цепочки $Z_\oplus$, реализующей линейную функцию от своих входов, значение на выходе схемы S изменится, поэтому рассматриваемая неисправность будет обнаружена на одном из наборов $(\tilde{1}^n), \tilde{\sigma}$.

Наконец, если неисправен выходной инвертор цепочки $Z_\oplus$ (в случае $c = 1$), то функция неисправности схемы S равна тождественному нулю или тождественной единице, а каждую из этих функций можно отличить от функции f на одном из наборов $(\tilde{1}^n), \tilde{\sigma}$ в силу (3).

В итоге получаем, что любую функцию неисправности схемы S можно отличить от функции $f(\tilde{x}^n)$ хотя бы на одном наборе из множества T. Это означает, что схема S неизбыточна и данное множество является для неё ЕПТ. Его длина равна 2, откуда следует неравенство $D(f) \leqslant 2$. Теорема 1 доказана. $\square$

Единичные диагностические тесты

Рассмотрим базис $B_{10} = \{\varphi(x_1, \dots, x_6), \overline{x}\}$, где $\varphi(x_1, \dots, x_6)$ — булева функция, принимающая значение 1 на наборах $(0, 0, 1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$, а также на всех наборах, соседних с набором $(0, 1, 1, 0, 1, 1)$ или содержащих не менее пяти единиц, значение 0 на наборах $(0, 1, 1, 0, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 1, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 1, 1, 0)$, а также на всех наборах, соседних с наборами $(1, 0, 0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$ или содержащих не менее пяти нулей, и произвольные значения на остальных 22 двоичных наборах длины 6.

Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $\varphi(x_1, \dots, x_6)$, будем называть *φ-элементом*.

Через $I_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}^n)$ будем обозначать булеву функцию, принимающую значение 1 на наборе $\tilde{\sigma}$ и значение 0 на всех остальных двоичных наборах длины n.

Выделим ещё одно возможное представление функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = \varphi^\alpha(x_{i_1}, \dots, x_{i_6}), \tag{7}$$

где $i_1, \dots, i_6 \in \{1, \dots, n\}$ (индексы $i_1, \dots, i_6$ не обязательно попарно различны), $\alpha \in \{0, 1\}$ и

$$\varphi^\alpha = \begin{cases} \varphi, & \text{\textit{если} } \alpha = 1, \\ \overline{\varphi}, & \text{\textit{если} } \alpha = 0. \end{cases}$$

Отметим, что представление (1) является частным случаем представления (7) при $i_1 = \ldots = i_6 = i$, $\alpha = 1$.

В [9] доказано (теорема 3), что существует такой базис B_2, состоящий из булевых функций от не более чем девяти переменных, что $D^B_{\text{ЕД}}(n) \leqslant 6$ при $B = B_2$. Нижеследующие теорема 2 и следствие 2 показывают, что при рассмотрении в качестве базиса B базиса B_{10}, состоящего из булевых функций от не более чем шести переменных, указанную оценку можно улучшить.

Теорема 2. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, отличной от констант, справедливо равенство*

$$D^{B_{10}}_{\text{ЕД}}(f) = \begin{cases} 0, & \textit{если функция } f \textit{ представима в виде } (1), \\ 2, & \textit{если функция } f \textit{ представима в виде } (7), \textit{ но не в виде } (1), \\ 3, & \textit{если функция } f \textit{ не представима в виде } (7). \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, то значение $D^{B_{10}}_{\text{ЕД}}(f)$ не определено.

Следствие 2. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D^{B_{10}}_{\text{ЕД}}(n) = 3$.*

Для доказательства следствия 2 достаточно заметить, что любая функция вида (7) принимает разные значения на наборах $(\tilde{0}^n)$ и $(\tilde{1}^n)$, а, например, функция $x_1 \ldots x_n \vee \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n$ при $n \geqslant 2$ не обладает этим свойством и отлична от констант.

Доказательство теоремы 2. Вместо $D^{B_{10}}_{\text{ЕД}}(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. Случаи, когда $f \equiv 0$, $f \equiv 1$ или функция f имеет вид (1), рассматриваются точно так же, как в начале доказательства теоремы 1. Далее будем считать, что данная функция отлична от констант. Пусть она представима в виде (7), но не в виде (1). Неравенство $D(f) \geqslant 2$ доказывается абсолютно аналогично такому же неравенству в третьем абзаце доказательства теоремы 1.

Докажем неравенство $D(f) \leqslant 2$. Реализуем функцию $f(\tilde{x}^n)$ схемой S в базисе B_{10} в соответствии с представлением (7). Переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_6}$ подадим на 1-й, …, 6-й входы φ-элемента соответственно. В случае $\alpha = 1$ выход этого элемента будем считать выходом схемы S, а в случае $\alpha = 0$ соединим его со входом инвертора, выход которого будем считать выходом схемы S. Очевидно, что построенная схема реализует функцию f, имеет только две функции неисправности — константы 0 и 1 и, следовательно, неизбыточна, а множество, состоящее из любых двух двоичных наборов длины n, на одном из которых функция f принимает значение 1, а на другом — значение 0, является для этой схемы единичным диагностическим тестом (ЕДТ) длины 2. Поэтому $D(f) \leqslant 2$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь функция f не представима в виде (7). Рассмотрим произвольную неизбыточную схему S в базисе B_{10}, реализующую функцию f. Заметим, что на выходе ни одного элемента этой схемы не может реализовываться булева константа, так как в противном случае неисправность типа β того элемента, на выходе которого реализуется константа β, никак не отразилась бы на функции, реализуемой схемой S, т. е. данная схема была бы избыточна. С учётом этого соображения, рассуждая по аналогии с доказательством теоремы 5 из [10], получаем, что $D(f) \geqslant 3$ (функция $\psi(\tilde{x}^n)$ из доказательства теоремы 5 из [10] будет равна либо $\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_6})$, либо $\overline{x}_{i_1} = \overline{\varphi}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_1})$, где $i_1, \ldots, i_6 \in \{1, \ldots, n\}$, а соотношение (6) из [10] будет верно в силу того, что функция f не представима в виде (7)). Отметим, что сослаться на теорему 5 из [10] в чистом виде было нельзя, поскольку функция f может быть не представима в виде (7), но представима в виде (4) из [10], где $k = 6$, если хотя бы одно из $y_1, \ldots, y_6$ принадлежит множеству $\{0, 1\}$.

Докажем неравенство $D(f) \leqslant 3$. Из определения функции $\varphi(x_1, \ldots, x_6)$ нетрудно получить, что $\varphi(x, x, x, x, y, y) = x \& y$ и $\varphi(x, y, z, x, y, z) = x \oplus \oplus\, y \oplus z$. Поэтому можно считать, что в базисе B_{10} содержатся функции $x \& y$ и $x \oplus y \oplus z$: достаточно отождествить соответствующие входы у произвольного φ-элемента и получить конъюнктор (сумматор), допускающий те же самые неисправности (а именно, неисправности типов 0 и 1 на его выходе), что и исходный элемент. Тогда в базисе B_{10} содержатся все функции из базиса B_9.

Введём для удобства обозначение $a = \overline{f}(\tilde{1}^n)$. Построим схему S в базисе B_{10}, реализующую функцию $f(\tilde{x}^n)$ (см. рис. 2). Схема S состоит из шести подсхем S_1–S_6, φ-элемента E, входы которого соединяются с выходами этих подсхем (1-й вход — с выходом подсхемы S_1, …, 6-й вход — с выходом подсхемы S_6), а также — при $a = 1$ — из инвертора E'. Выходом схемы S является выход элемента E при $a = 0$ и выход элемента E' при $a = 1$. Строение подсхем S_1–S_6 зависит от того, какой из перечисленных ниже случаев А, Б, В имеет место. Представим функцию f полиномом Жегалкина (2), в котором $m \geqslant 1$, $c \in \{0, 1\}$, а K_1 — самая короткая конъюнкция. Без ограничения общности $K_1 = x_1 \& \ldots \& x_k$.

Все функции вида $f \oplus \ldots$, которые будут встречаться далее, зависят от переменных $x_1, \ldots, x_n$ (возможно, от некоторых из них несущественно).

Случай А. Пусть $f(\tilde{1}^n) = f(\tilde{0}^n)$. Тогда функцию $f \oplus I_{(\tilde{1}^n)} \oplus a$ (функцию $f \oplus I_{(\tilde{0}^n)} \oplus a$) в силу теоремы 1 можно реализовать неизбыточной схемой S' (соответственно S'') в базисе B_9, а значит, и в базисе B_{10}, для которой множество $T = \{(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n)\}$ является ЕПТ (для каждой из этих функций в доказательстве теоремы 1 выполнен случай А). Пусть подсхемы S_1, S_2, S_3 — это три копии схемы S', а подсхемы S_4, S_5, S_6 — три

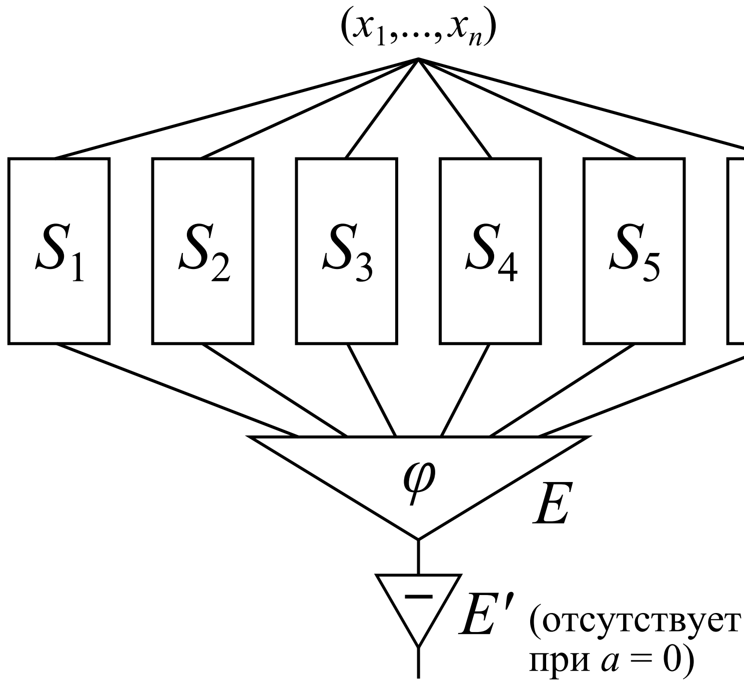

Рис. 2. Схема S

копии схемы S''.

Случай Б. Пусть $f(\tilde{1}^n) \neq f(\tilde{0}^n)$ и $k < n$. Тогда в полиноме Жегалкина функции $f \oplus I_{(\tilde{1}^n)} \oplus a = f \oplus x_1 \ldots x_n \oplus a$ самой короткой конъюнкцией по-прежнему будет K_1, и в силу теоремы 1 указанную функцию можно реализовать неизбыточной схемой S' в базисе B_9 (а значит, и B_{10}), для которой множество $T = \{(\tilde{1}^n), (\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})\}$ является ЕПТ (для этой функции в доказательстве теоремы 1 выполнен случай Б). Пусть подсхемы S_1, S_2, S_3 — это три копии схемы S'. Далее, преобразуем функцию $f \oplus I_{(\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})} \oplus a$ с учётом соотношения (2) и равенств $K_1 = x_1 \ldots x_k$, $I_{(\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})} = x_1 \ldots x_k (1 \oplus x_{k+1}) \ldots (1 \oplus x_n)$:

$$f \oplus I_{(\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})} \oplus a = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m \oplus c \oplus x_1 \ldots x_k (1 \oplus x_{k+1}) \ldots (1 \oplus x_n) \oplus a =$$
$$= K_1 \oplus \ldots \oplus K_m \oplus c \oplus x_1 \ldots x_k \oplus x_1 \ldots x_k x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_1 \ldots x_k x_n \oplus \ldots \oplus$$
$$\oplus x_1 \ldots x_k x_{k+1} \ldots x_n \oplus a = K_2 \oplus \ldots \oplus K_m \oplus x_1 \ldots x_k x_{k+1} \oplus \ldots \oplus$$
$$\oplus x_1 \ldots x_k x_n \oplus \ldots \oplus x_1 \ldots x_k x_{k+1} \ldots x_n \oplus (c \oplus a)$$

(в случае $m = 1$ полагаем $K_2 \oplus \ldots \oplus K_m = 0$). Таким образом, все конъюнкции в полиноме Жегалкина функции $f \oplus I_{(\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})} \oplus a$ имеют ранг не меньше k, причём среди них отсутствует конъюнкция K_1. Это означает, что на наборе $(\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$ все конъюнкции в этом полиноме принимают значение 0. Тогда в силу теоремы 1 указанную функцию можно реализовать неизбыточной схемой S'' в базисе B_9 (а значит, и B_{10}), для которой множество T является ЕПТ (для этой функции в доказательстве теоремы 1 выполнен случай А). Пусть подсхемы S_4, S_5, S_6 — это три копии схемы S''.

Случай В. Пусть $f(\tilde{1}^n) \neq f(\tilde{0}^n)$ и $k = n$. Тогда функцию $f \oplus a$ (функцию $f \oplus I_{(\tilde{1}^n)} \oplus I_{(\tilde{0}^n)} \oplus a$) в силу теоремы 1 можно реализовать неизбыточной схемой S' (соответственно S'') в базисе B_9, а значит, и в базисе B_{10}, для которой множество $T = \{(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n)\}$ является ЕПТ (для каждой из этих функций в доказательстве теоремы 1 выполнен случай А). Пусть подсхемы S_1, S_4 — это две копии схемы S', а подсхемы S_2, S_3, S_5, S_6 — четыре копии схемы S''.

Далее будем параллельно рассматривать случаи А, Б и В. Докажем, что построенная схема S в случае отсутствия в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. На любом двоичном наборе $\tilde{\pi}$ длины n, не принадлежащем множеству T (которое было определено в каждом из случаев А, Б, В), на выходе каждой из подсхем S_1–S_6, как нетрудно видеть, возникает значение $f(\tilde{\pi}) \oplus a$. Тогда на выходе элемента E возникнет значение $\varphi(f(\tilde{\pi}) \oplus a, \ldots, f(\tilde{\pi}) \oplus a) = f(\tilde{\pi}) \oplus a$, а на выходе схемы S с учётом возможного наличия в ней инвертора E' — значение $f(\tilde{\pi})$. Далее, в случаях А и Б на наборе $(\tilde{1}^n)$ на выходах подсхем S_1–S_6 возникают значения $f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus a$ соответственно, т. е. значения $0, 0, 0, 1, 1, 1$ соответственно, поскольку $a = \overline{f}(\tilde{1}^n)$. Тогда на выходе элемента E возникнет значение $\varphi(0, 0, 0, 1, 1, 1) = 1 = f(\tilde{1}^n) \oplus a$, а на выходе схемы S с учётом возможного наличия в ней инвертора E' — значение $f(\tilde{1}^n)$.

Заметим, что в случае Б $f(\tilde{1}^n) \neq f(\tilde{0}^n)$ и, кроме того, $f(\tilde{0}^n) = c \neq 1 \oplus c = f(\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$ в силу (2), поэтому $f(\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k}) = f(\tilde{1}^n)$. В случае А на наборе $(\tilde{0}^n)$, а в случае Б на наборе $(\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$ на выходе подсхем S_1–S_6 возникают значения $f(\tilde{1}^n) \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus a$ соответственно, т. е. значения $1, 1, 1, 0, 0, 0$ соответственно. Тогда на выходе элемента E возникнет значение $\varphi(1, 1, 1, 0, 0, 0) = 1 = f(\tilde{1}^n) \oplus a$, а на выходе схемы S — значение $f(\tilde{1}^n)$, которое равно $f(\tilde{0}^n)$ в случае А и равно $f(\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$ в случае Б. Таким образом, в случаях А и Б доказано, что на выходе схемы S реализуется в точности функция $f(\tilde{x}^n)$.

В случае В на наборе $(\tilde{1}^n)$ на выходах подсхем S_1–S_6 возникают значения $f(\tilde{1}^n) \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus a$ соответственно, т. е. значения $1, 0, 0, 1, 0, 0$ соответственно. Тогда на выходе элемента E возникнет значение $\varphi(1, 0, 0, 1, 0, 0) = 1 = f(\tilde{1}^n) \oplus a$, а на выходе схемы S — значение $f(\tilde{1}^n)$. Далее, на наборе $(\tilde{0}^n)$ на выходе подсхем S_1–S_6 возникают значения $f(\tilde{0}^n) \oplus a, f(\tilde{0}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{0}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{0}^n) \oplus a, f(\tilde{0}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{0}^n) \oplus 1 \oplus a$ соответственно, т. е. значения $0, 1, 1,$

$0, 1, 1$ соответственно, поскольку в указанном случае $f(\tilde{0}^n) = \overline{f}(\tilde{1}^n) = a$. Тогда на выходе элемента E возникнет значение $\varphi(0, 1, 1, 0, 1, 1) = 0 = f(\tilde{0}^n) \oplus a$, а на выходе схемы S — значение $f(\tilde{0}^n)$. В случае В также доказано, что на выходе схемы S реализуется функция $f(\tilde{x}^n)$.

Докажем теперь, что схема S неизбыточна и допускает ЕДТ длины 3. При неисправности элемента E или элемента E' схема S, очевидно, станет реализовывать одну из булевых констант 0 или 1. При неисправности произвольного элемента в одной из подсхем S_1–S_6 на любом двоичном наборе $\tilde{\pi}$ длины n, не принадлежащем множеству T, на выходе не более одной из этих подсхем возникнет «неправильное» значение $f(\tilde{\pi}) \oplus 1 \oplus a$. Тогда как минимум на пять входов элемента E будет подано значение $f(\tilde{\pi}) \oplus a$, поэтому на его выходе в силу определения функции φ возникнет значение $f(\tilde{\pi}) \oplus a$, а на выходе схемы S — значение $f(\tilde{\pi})$. Таким образом, любая функция неисправности схемы S, возникающая при неисправности какого-то элемента в одной из подсхем S_1–S_6, может отличаться от функции f только на наборах из множества T.

По построению данное множество содержит два набора и является ЕПТ для каждой из указанных подсхем в каждом из случаев А, Б, В. Если при отсутствии неисправностей в схеме S на выходе некоторого элемента в одной из подсхем S_1–S_6 на двух наборах из множества T возникает одно и то же значение β, то неисправность типа β этого элемента нельзя обнаружить на наборах из множества T, однако это противоречит тому, что T — ЕПТ для каждой из подсхем S_1–S_6. Поэтому на выходе любого элемента E'' в любой из этих подсхем на двух наборах из множества T возникают различные значения. Тогда неисправность типа γ, $\gamma \in \{0, 1\}$, элемента E'' обнаруживается только на том наборе $\tilde{\sigma}_1$ из этого множества, на котором значение на выходе элемента E'' в отсутствие неисправностей равно $\overline{\gamma}$, и не обнаруживается на другом наборе $\tilde{\sigma}_2$ из T. Значит, на выходах всех шести подсхем S_1–S_6 при неисправности типа γ элемента E'' на наборе $\tilde{\sigma}_2$ возникнут те же значения, что и в отсутствие неисправностей. Следовательно, схема S выдаст «правильное» значение $f(\tilde{\sigma}_2)$.

С другой стороны, на наборе $\tilde{\sigma}_1$ при неисправности типа γ элемента E'' на выходе ровно одной из подсхем S_1–S_6 возникнет «неправильное» значение. Поэтому на входы φ-элемента E будет подан набор, соседний с одним из наборов $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 1, 0, 0)$ или $(0, 1, 1, 0, 1, 1)$ (только такие наборы могут возникать на входах элемента E при подаче на входы схемы S наборов из множества T и отсутствии в ней неисправностей — см. выше). В силу определения функции φ значение на выходе элемента E, а значит, и на выходе всей схемы S, изменится, т. е. неисправность будет обнаружена на наборе $\tilde{\sigma}_1 \in T$.

Приведённые выше рассуждения показывают, что схема S неизбыточна, а любая её функция неисправности, кроме, быть может, констант 0 и 1, отличается от функции $f(\tilde{x}^n)$ ровно на одном наборе из множества T и совпадает с ней на всех остальных наборах. Таким образом, все функции неисправности схемы S принадлежат множеству $\{0, 1, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_2}\}$, где $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ — два различных набора из множества T. Выше было показано, что в случаях А и Б на обоих наборах из множества T функция f принимает значение $f(\tilde{1}^n)$. Составим таблицу значений функции f и всех возможных функций неисправности схемы S на наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$:

	f	0	1	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_2}$
$\tilde{\sigma}_1$	$f(\tilde{1}^n)$	0	1	$\overline{f}(\tilde{1}^n)$	$f(\tilde{1}^n)$
$\tilde{\sigma}_2$	$f(\tilde{1}^n)$	0	1	$f(\tilde{1}^n)$	$\overline{f}(\tilde{1}^n)$

Видно, что указанные два набора не позволяют отличить только функцию f от одной из констант 0, 1. Добавим к этим наборам ещё один набор $\tilde{\sigma}_3$, на котором функция f принимает значение, отличное от соответствующей константы (такой набор всегда найдётся, так как функция f отлична от констант). Полученное множество $\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3\}$ будет являться ЕДТ длины 3 для схемы S.

В случае В на наборах из множества T функция f по определению этого случая принимает разные значения. Заметим, что $f(\tilde{x}^n) = x_1\& \&\ldots\&x_n \oplus c$, так как $k = n$. Поэтому одна из функций $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$, $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_2}$, а именно, функция $f \oplus I_{(\tilde{1}^n)} = x_1 \ldots x_n \oplus c \oplus x_1 \ldots x_n = c$, совпадает с одной из функций 0 или 1. Кроме того, $f(\tilde{0}^n) = 0\&\ldots\&0 \oplus c = c$, следовательно, $f(\tilde{1}^n) = \overline{c}$. На наборе $\tilde{\sigma} = (1, \tilde{0}^{n-1})$ функция f принимает значение $1\&\underbrace{0\&\ldots\&0}_{n-1} \oplus c = c$ (отметим, что $n \geqslant 2$, так как данная функция отлична от констант и не представима в виде (7)). Составим таблицу значений функции f и всех возможных функций неисправности схемы S на наборах $(\tilde{1}^n)$, $(\tilde{0}^n)$ и $\tilde{\sigma}$:

	f	0	1	$f \oplus I_{(\tilde{0}^n)}$
$(\tilde{1}^n)$	$\overline{c}$	0	1	$\overline{c}$
$(\tilde{0}^n)$	c	0	1	$\overline{c}$
$\tilde{\sigma}$	c	0	1	c

Видно, что указанные три набора позволяют отличить функцию f и все функции неисправности схемы S друг от друга. Поэтому множество $\{(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n), \tilde{\sigma}\}$ является ЕДТ длины 3 для этой схемы.

В каждом из случаев А, Б и В установлено, что схема S неизбыточна и допускает ЕДТ длины 3, откуда следует неравенство $D(f) \leqslant 3$. Теорема 2 доказана. $\square$

Рассмотрим теперь базис $B_{11} = \{\overline{\varphi}(x_1, \ldots, x_6)\}$, где $\varphi(x_1, \ldots, x_6)$ — функция из базиса B_{10}. Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $\overline{\varphi}(x_1, \ldots, x_6)$, будем называть *$\overline{\varphi}$-элементом*.

Теорема 3. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, отличной от констант, справедливо равенство*

$$D_{\text{ЕД}}^{B_{11}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{\textit{если функция} } f \text{ \textit{представима в виде} } (1), \\ 2, & \text{\textit{если функция} } f \text{ \textit{представима в виде} } (7), \text{ \textit{но не в виде} } (1), \\ 3, & \text{\textit{если функция} } f \text{ \textit{не представима в виде} } (7). \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, то значение $D_{\text{ЕД}}^{B_{11}}(f)$ не определено.

Следствие 3. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D_{\text{ЕД}}^{B_{11}}(n) = 3$.*

Доказательства следствий 2 и 3 совпадают.

Доказательство теоремы 3. Вместо $D_{\text{ЕД}}^{B_{11}}(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. Случаи, когда $f \equiv 0$, $f \equiv 1$ или функция f имеет вид (1), рассматриваются точно так же, как в начале доказательства теоремы 1. Далее будем считать, что данная функция отлична от констант. Неравенство $D(f) \geqslant 2$ в случае, когда функция f представима в виде (7), но не в виде (1), доказывается абсолютно аналогично такому же неравенству в третьем абзаце доказательства теоремы 1, а неравенство $D(f) \geqslant 3$ в случае, когда функция f не представима в виде (7) — аналогично неравенству $D(f) \geqslant 3$ в теореме 2 (с той лишь разницей, что функция $\psi(\tilde{x}^n)$ из доказательства теоремы 5 из [10] будет равна $\overline{\varphi}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_6})$, где $i_1, \ldots, i_6 \in \{1, \ldots, n\}$).

Можно считать, что в базисе B_{11} содержится функция $\overline{x}$: достаточно отождествить все входы у произвольного $\overline{\varphi}$-элемента и получить одновходовой элемент-инвертор, реализующий функцию вида $\overline{x}$ и допускающий те же самые неисправности (а именно, неисправности типов 0 и 1 на его выходе), что и исходный элемент. Далее, возьмём произвольный $\overline{\varphi}$-элемент и соединим его выход со входом инвертора. Полученный блок из двух элементов, очевидно, реализует функцию вида $\varphi(x_1, \ldots, x_6)$ и имеет только две функции неисправности — константы 0 и 1, поэтому его можно рассматривать как отдельный φ-элемент и считать, что в базисе B_{11} содержится также функция $\varphi(x_1, \ldots, x_6)$. В таком случае в базис B_{11} входят все функции из базиса B_{10} и любая схема в базисе B_{10} является также схемой в базисе B_{11}. Отсюда и из теоремы 2 следует, что

$D(f) \leqslant 2$, если функция f представима в виде (7), но не в виде (1), и $D(f) \leqslant 3$, если функция f не представима в виде (7). Теорема 3 доказана. $\square$

Используя теоремы 1–3, следствия 1–3 и принцип двойственности (см., например, [25, с. 24]), а именно, рассматривая схемы, получающиеся заменой всех элементов в схемах из доказательства теорем 1–3 на двойственные, нетрудно получить двойственные им результаты для базисов $B_9^* = \{x \vee y, \overline{x}, x \oplus y \oplus z\}$, $B_{10}^* = \{\varphi^*(x_1, \ldots, x_6), \overline{x}\}$ и $B_{11}^* = \{\overline{\varphi}^*(x_1, \ldots, x_6)\}$, где φ^* $(\overline{\varphi}^*)$ — двойственная к φ $(\overline{\varphi})$ булева функция. В частности, при $n \geqslant 1$ справедливо равенство $D_{\text{ЕП}}^{B_9^*}(n) = 2$, а при $n \geqslant 2$ имеют место равенства $D_{\text{ЕД}}^{B_{10}^*}(n) = D_{\text{ЕД}}^{B_{11}^*}(n) = 3$.

Список литературы

1. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.

2. Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и её приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.). — М.: Изд-во МГУ. — 1986. — С. 7–12.

3. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

4. Редькин Н. П. Надёжность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992. — 192 с.

5. Reddy S. M. Easily testable realizations for logic functions // IEEE Trans. Comput. — 1972. — Vol. C-21, No. 11. — P. 1183–1188.

6. Коляда С. С. Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2013. — № 4. — С. 32–34.

7. Коляда С. С. Верхние оценки длины проверяющих тестов для схем из функциональных элементов. — Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н. — М., 2013. — 77 с.

8. Романов Д. С. Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискретная математика. — 2014. — Т. 26, вып. 2. — С. 100–130.

9. Романов Д. С., Романова Е. Ю. Метод синтеза неизбыточных схем, допускающих короткие единичные диагностические тесты при константных неисправностях на выходах элементов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2016. — № 2. — С. 87–102.

10. Попков К. А. Нижние оценки длин единичных тестов для схем из функциональных элементов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2016. — № 139. — 20 с.

11. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1986. — № 1. — С. 72–74.

12. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. — М.: Наука, 1989. — С. 198–222.

13. Романов Д. С. О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов // Дискретная математика. — 2013. — Т. 25, вып. 2. — С. 104–120.

14. Попков К. А. Полные проверяющие тесты длины два для схем при произвольных константных неисправностях элементов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2017. — № 104. — 16 с.

15. Попков К. А. Нижние оценки длин полных диагностических тестов для схем и входов схем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2016. — № 60. — 12 с.

16. Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие тесты // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1988. — № 2. — С. 17–21.

17. Редькин Н. П. О единичных диагностических тестах для однотипных константных неисправностей на выходах функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1992. — № 5. — С. 43–46.

18. Бородина Ю. В. О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2008. — № 1. — С. 40–44.

19. Попков К. А. О точном значении длины минимального единичного диагностического теста для одного класса схем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2015. — № 74. — 21 с.

20. Попков К. А. Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисе «конъюнкция-отрицание» // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2017. — № 30. — 31 с.

21. Бородина Ю. В. Нижняя оценка длины полного проверяющего теста в базисе $\{x \mid y\}$ // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2015. — № 4. — С. 49–51.

22. Бородина Ю. В. О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2008. — № 5. — С. 49–52.

23. Бородина Ю. В., Бородин П. А. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа 0 на выходах элементов // Дискретная математика. — 2010. — Т. 22, вып. 3. — С. 127–133.

24. Попков К. А. О единичных диагностических тестах для схем из функциональных элементов в базисе Жегалкина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2016. — № 50. — 16 с.

25. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. — 384 с.