



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Борисов В.Е., Давыдов А.А.,
Константиновская Т.В.,
Луцкий А.Е., Шевченко А.М.,
Шмаков А.С.**

Моделирование
сверхзвукового течения в
следе за крылом при $M = 2-4$

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Моделирование сверхзвукового течения в следе за крылом при $M = 2-4$ / В.Е.Борисов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 50. 19 с. doi:[10.20948/prepr-2018-50](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-50)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-50>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

**В.Е. Борисов, А.А. Давыдов, Т.В. Константиновская,
А.Е. Луцкий, А.М. Шевченко, А.С. Шмаков**

**Моделирование сверхзвукового течения
в следе за крылом при $M=2-4$**

Москва — 2018

Борисов В.Е., Давыдов А.А., Константиновская Т.В., Луцкий А.Е., Шевченко А.М., Шмаков А.С.

Моделирование сверхзвукового течения в следе за крылом при $M=2-4$

Аннотация. В работе описана структура сверхзвукового вихря и его особенностей в зависимости от числа Маха M . Исследования выполнены как в ближней, так и в дальней области. Проведены сравнения численных и экспериментальных данных. Численные расчеты были реализованы в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН с использованием параллельных алгоритмов моделирования турбулентных течений. Экспериментальная часть была проведена в ИТПМ им. С.А. Христиановича СО РАН.

Ключевые слова: концевой вихрь, вихревой след, сверхзвуковой поток, численные расчеты, экспериментальные исследования, URANS, LES

Borisov V.E, Davydov A.A., Konstantinovskaya T.V., Lutsky A.E., Shevchenko A.M., Shmakov A.S.

Simulation of supersonic flow in the wake behind a wing at $M = 2-4$

The structure of a supersonic vortex and its features depending on the Mach number M are described in this paper. The investigations are performed both in the near and far regions. Numerical and experimental data are compared. Numerical simulations were carried out in Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS using parallel algorithms for turbulent flows simulating. The experimental part was carried out in Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS.

Key words: wingtip vortex, vortex wake, supersonic flow, numerical simulation, experimental investigation, URANS, LES

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 16-01-00764 и 17-08-00909.

Введение

Полет любого летательного аппарата (ЛА) в атмосфере сопровождается формированием вихревого следа.

Основным фактором, формирующим вихревой след, является подъемная сила, возникающая вследствие разницы давления на крыле. Воздух из зоны высокого давления на нижней поверхности крыла перетекает через законцовку крыла в зону низкого давления на верхней поверхности крыла, образуя концевые вихри. На рис. 1 приведены фотографии, дающие наглядное представление о концевых вихрях за самолетами. На этих фотографиях концевые вихри становятся видимыми ввиду погодных условий и смещения точки росы из-за изменения давления в вихревом следе.



Рис. 1. Концевые вихри

До конца 1960-х годов вихревой след не рассматривался в целом как серьезная опасность для полета. Интерес к данной проблеме значительно возрос с появлением в то время больших широкофюзеляжных турбореактивных самолетов. Попадание одного ЛА в вихревой след, оставленный другим ЛА, может быть крайне опасным. При попадании такого следа на крыло ЛА может развиваться интенсивное движение крена, что может привести к произвольной смене курса, высоты полета и т.п. вплоть до полной потери управления. Для

сверхзвуковых ЛА возможное попадание вихревого следа на другие его части представляет дополнительную опасность и интерес для изучения.

Следственно, появился стимул для проведения исследований о влиянии вихревого следа и получения дополнительной информации для обеспечения безопасности полетов в связи с нарастающим количеством крупных воздушных судов, а также с развитием сверхзвуковых ЛА.

Таким образом, изучение формирования и эволюции концевых вихрей является важной задачей аэрогазодинамики.

До настоящего времени основные исследования посвящены концевым вихрям, образующимся в дозвуковых и трансзвуковых режимах. Подобные режимы представляют большой интерес для гражданской авиации, в особенности с точки зрения пропускной способности аэропортов, а также с точки зрения загруженности летного пространства над некоторыми частями света, такими как Европа. Вместе с тем, с созданием новых самолетов, например таких больших, как Airbus A-380, этот вопрос требует постоянных дополнительных исследований.

Обширные обзоры работ, посвященных исследованиям структуры и поведения концевых вихрей, были даны в [1], [2] и [3].

Кроме того, дозвуковым режимам посвящены, например, экспериментальные работы [4, 5, 6]. В них рассматривается область формирования вихря и ближняя область вихревого следа на крыле с профилем НАСА0012 с двумя различными законцовками – круглой и прямоугольной – при низких скоростях и $Re_c = 7.4 \cdot 10^5$, где $Re_c = cU_\infty/\nu$, где c – длина хорды, U_∞ – скорость невозмущенного потока, ν – кинематическая вязкость.

Сверхзвуковым течениям посвящено значительно меньше работ. Особенно мало для сверхзвуковых режимов экспериментальных данных [7–10]. Это связано, в частности, с принципиальными проблемами измерения локального числа Маха и направления потока в эксперименте. Комплексное расчетно-экспериментальное исследование концевого вихря в сверхзвуковом потоке ($Ma=6$) приведено в работе [11].

Однако для дальнейшего развития гражданской и военной авиации необходимы более глубокие исследования вихревых следов, в том числе при сверхзвуковых режимах.

Численные методы для расчетов турбулентных течений, в частности для расчетов концевых вихрей, активно развиваются в связи с возросшей производительностью вычислительных систем, давая возможность проводить более детальные и обширные численные исследования.

Например, авторы работы [12] представляют разработки в численных методах для подхода LES (метод моделирования крупных вихрей) при моделировании формирования и эволюции концевого вихря. Используют пакет программ, основанный на неявной схеме LES (SVV-iLES) с применением метода исчезающей вязкости (SVV). Метод исчезающей вязкости впервые был

введен Е. Tadmor для невязкого вихря Бюргерса [13]. Численные результаты авторы показывают на расчетах для крыла с профилем NASA 0012 и числа Рейнольдса $Re_c = 1.2 \cdot 10^6$.

Авторы работы [14] проводят численные исследования с помощью LES для изучения динамики концевой вихря, образованного крылом с профилем NASA0012 с круглой боковой кромкой, при числе Рейнольдса $Re = 2.0 \cdot 10^5$.

В силу изложенного дальнейшие исследования концевых вихрей являются вполне актуальными. Актуальность исследования обусловлена следующим:

1) отсутствием надёжных методов моделирования всех закономерностей распространения и диссипации вихревого следа при сверхзвуковых скоростях, в частности моделирования концевых вихрей, включая область на большом удалении;

2) практическим приложением результатов исследования для решения ряда задач:

- воздействия на несущие поверхности ЛА, расположенные ниже по потоку,
- возможности попадания ЛА в спутный след,
- воздействия вихревого следа на наземные сооружения.

Целью данной работы является моделирование и исследование вихревого следа, распространяющегося в сверхзвуковом потоке на больших удалениях от генератора завихренности. Для получения результатов использовались высокоэффективные алгоритмы моделирования турбулентных течений с реализацией на многопроцессорных вычислительных системах.

Ранее в работе [11] были представлены результаты численных исследований концевой вихря в сравнении с экспериментальными данными в сверхзвуковом потоке для режима при числе Маха $M = 6$ при различных углах атаки крыла (4, 12 и 18 градусов) на малых удалениях от крыла – чуть более 6 хорд от оси крыла. Кроме того, в работе [15] выполнены численные исследования случая числа Маха, равного 3, включая дальнюю область.

Данная работа является продолжением упомянутых выше двух работ. Рассмотрены случаи чисел Маха $M = 2, 3$ и 4 при угле атаки крыла $\alpha = 10^\circ$. Численные расчеты проведены достаточно далеко вниз по потоку, т.к. расчетная область составляет более 30 хорд крыла от оси крыла.

Параллельные алгоритмы численного решения реализованы на многопроцессорной системе К-60 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (вычислительные системы www.kiam.ru). Проведен анализ изменения газодинамических величин в вихревом следе по мере удаления от крыла вниз по потоку.

Математическая модель и численный алгоритм

В данной работе при проведении численных расчетов использовался параллельно реализованный численный алгоритм, основанный на современных

методах сквозного счета с использованием TVD и WENO схем высоких порядков точности.

Рассматривалось течение совершенного вязкого сжимаемого газа. Для описания таких течений использовалась система нестационарных уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу (URANS), с однопараметрической моделью турбулентности Спаларта–Аллмараса (SA) для сжимаемых течений [16] с модификацией Эдвардса [17]. Для дискретизации уравнений использовался метод конечных объемов, область применения которого шире, по сравнению с методом конечных разностей, т.к. он применим к разнообразной геометрии, оперирует различными сетками и позволяет избежать проблем с метрическими сингулярностями обобщенных координат.

В [18] приводится более полное описание используемых в данной работе численных алгоритмов и математической модели.

Параллельные алгоритмы численного решения были реализованы на многопроцессорной вычислительной системе К-60 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Численные расчеты

Численное исследование вихревого следа в сверхзвуковом потоке было проведено как на ближних, так и на дальних дистанциях от крыла (генератора вихря) при числах Маха $M = 2, 3$ и 4 . Расчеты для всех рассмотренных чисел Маха были проведены для одного и того же прямоугольного крыла с острыми передней и задней кромками. Крыло имело ромбовидное основание, а также хорду 30 мм, полуразмах 95 мм и угол атаки $\alpha = 10^\circ$. Эта же модель использовалась в работе [15] при расчетах для $M = 3$.

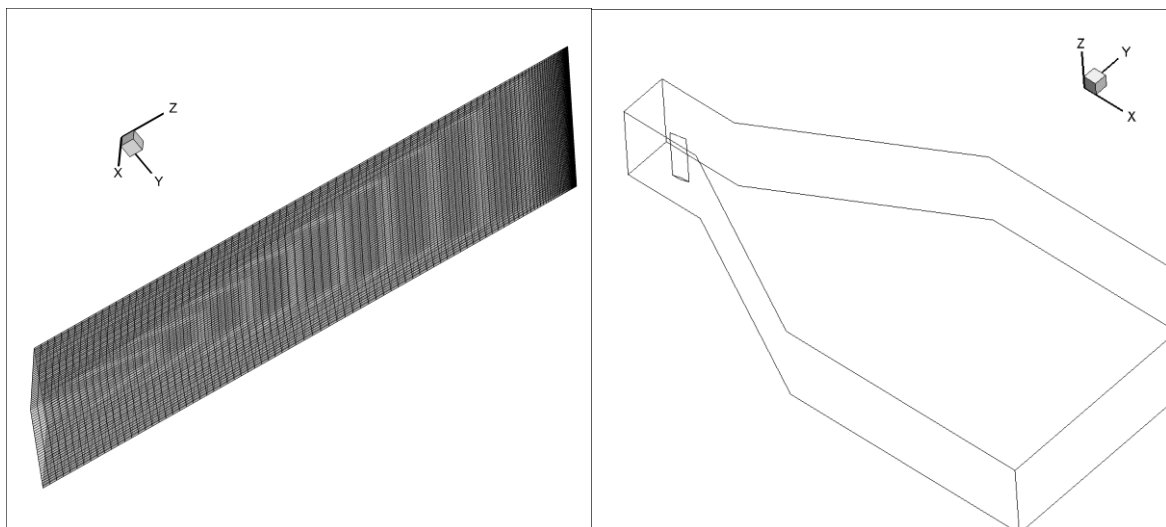


Рис. 2. Схема модели крыла-генератора вихря с граничными ячейками на нем (слева) и расчетной области (справа)

В зоне формирования вихря (особенно около боковой кромки крыла) и в зоне вихревого следа по всей расчетной области было произведено сгущение сетки, что позволило выполнить более аккуратные исчисления.

На рис. 2 представлены схемы расчетной сетки и модели крыла-генератора вихря, использованные для проведения численных расчетов.

Внешние границы расчетной области расположены таким образом, чтобы минимизировать их влияние на параметры потока. В частности, для расчетов при числе Маха 2 границы расчетной области были расширены по координате Y относительно расчетов при числах Маха 3 и 4 (см. рис. 3). Используемая расчетная сетка состояла из 15 296 688 шестигранных ячеек для расчетов при числах Маха $M = 3$ и 4 и из 15 572 304 при $M = 2$.

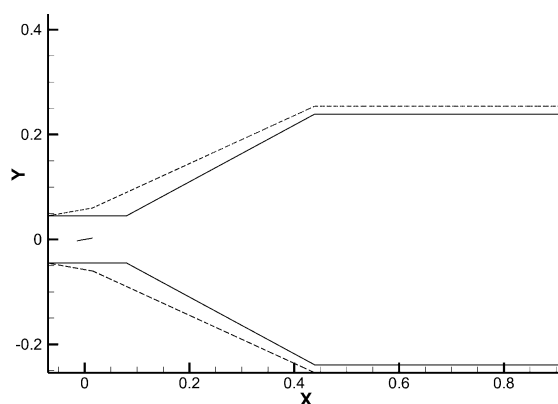


Рис. 3. Изменение границ расчетной области по координате Y для числа Маха $M = 2$ (пунктир) относительно случая чисел Маха $M = 3$ и 4 (сплошная линия)

Результаты численных расчетов

Сравнительный анализ результатов численного моделирования показал, что для всех рассмотренных случаев значений числа Маха концевой вихрь характеризуется минимумом на своей оси таких величин, как плотность, давление, продольное число Маха M_x , максимумом продольной завихренности $XVorticity$ и гидродинамической спиральности H . Гидродинамическая спиральность является дополнительной характеристикой эволюции концевого вихря вдоль его оси, описывается формулой $H = U \cdot \omega$ (где $U = (u; v; w)$ — вектор скорости потока, ω — ротор вектора скорости потока) и выражает меру винтового движения.

На границе концевого вихря отмечены максимумы тангенциального числа Маха M_{yz} .

На рис. 4 показаны трехмерные графики продольной завихренности для чисел Маха $M = 2, 3$ и 4, которая вычислена по формуле:

$$XVorticity = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} .$$

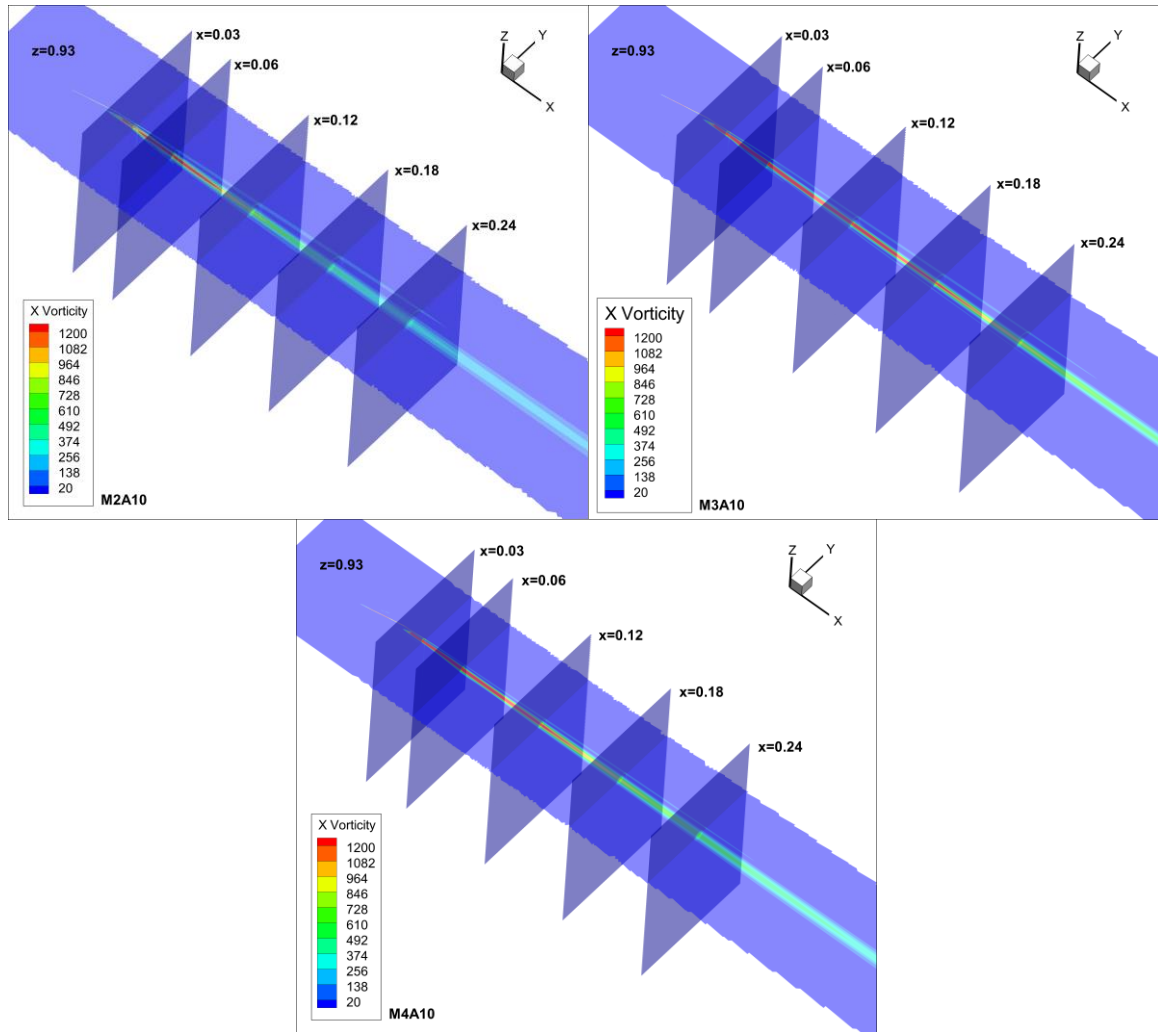


Рис. 4. Продольная завихренность $XVorticity$

Как уже упоминалось выше, концевой вихрь образуется главным образом благодаря перетеканию воздуха из зоны повышенного давления в зону пониженного давления через боковую кромку крыла, что наглядно демонстрирует рис. 5 для всех рассмотренных чисел Маха. На нем изображены сечения расчетной области поперек направления основного потока при $X = 0$ (ось крыла) и тангенциальное число Маха M_{yz} .

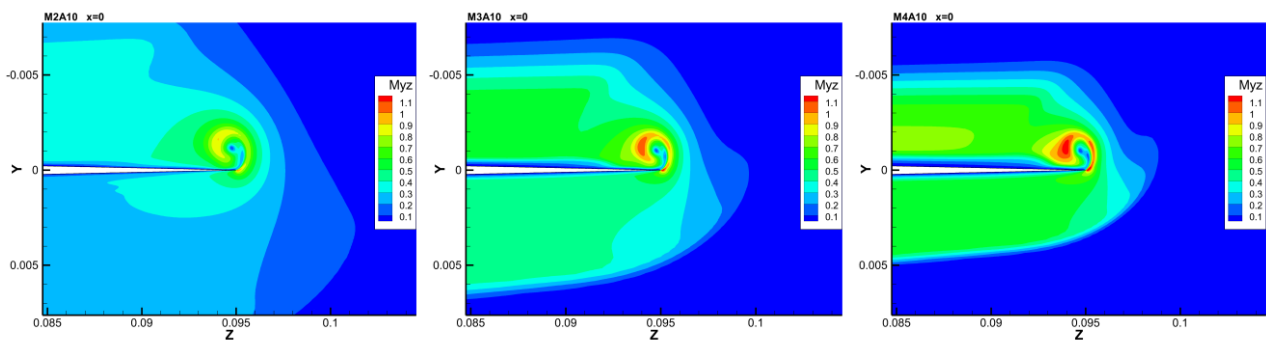


Рис. 5. Сечение $X = 0$ – ось крыла, величина M_{yz}

Одной из основных характеристик концевой вихря является его положение в пространстве.

Оценено положение оси концевой вихря. Ось вихря не проходит по прямой линии, параллельной направлению основного течения (вдоль оси X) (рис. 6). Получено, что ось вихря при $M=2$ смещается сначала вниз (т.е. координата Y растет) и к корневой хорде крыла (т.е. координата Z уменьшается), а затем смещается немного вверх и к концевой хорде (т.е. координата Y уменьшается, а Z увеличивается). При $M=3$ ось вихря смещается вниз и сначала к корневой хорде крыла, а затем к концевой хорде крыла. При $M=4$ ось вихря смещается вниз и к корневой хорде крыла.

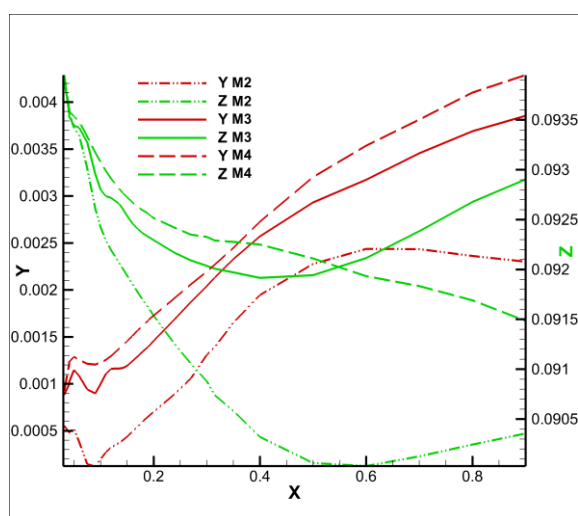


Рис. 6. Координаты Y и Z оси вихря вдоль координаты X (направление основного потока)

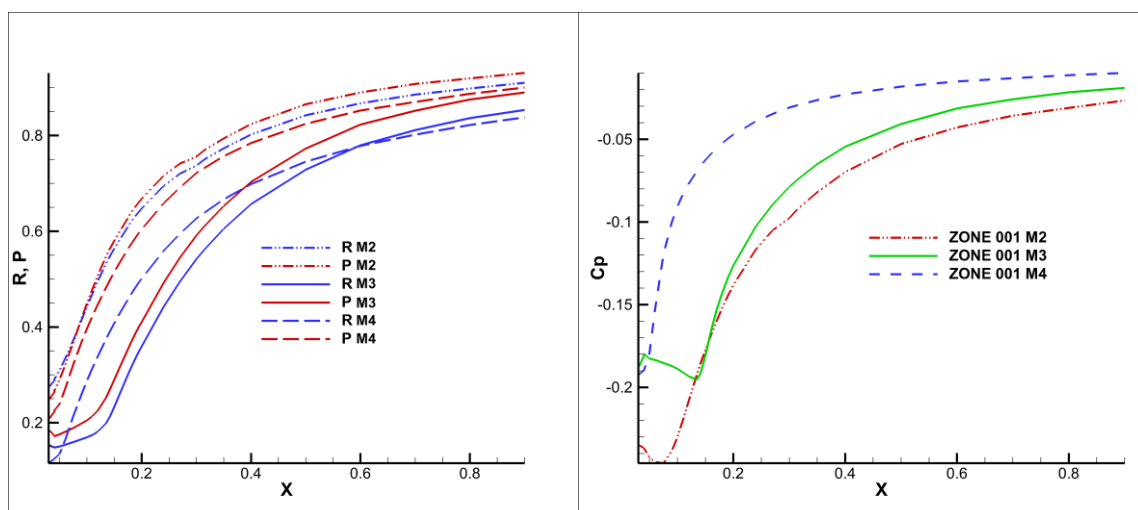


Рис. 7. Графики газодинамических величин на оси вихря вдоль координаты X (направление основного потока): плотности (R) и давления (P) (слева); коэффициента давления C_p (справа)

На графиках (рис. 7) показаны значения плотности, давления и коэффициента давления вдоль оси концевых вихря.

Наименьшие значения плотности, давления, продольной скорости на оси вихря наблюдаются в ближней расчетной области. Так, например, для $X = 0.075$ (что соответствует 2 хордам от задней кромки крыла) наблюдаются следующие значения:

при $M = 2$: $\rho = 0.37$, $P = 0.368$, $M_x = 1.916$, $XVorticity = 1652$, $H = 3724$;

при $M = 3$: $\rho = 0.16$, $P = 0.189$, $M_x = 2.5$, $XVorticity = 3050$, $H = 9824$;

при $M = 4$: $\rho = 0.214$, $P = 0.322$, $M_x = 2.85$, $XVorticity = 2096$, $H = 8665$,

в то время как в невозмущенном потоке плотность и давление равны 1, а $Xvorticity$ и H равны 0.

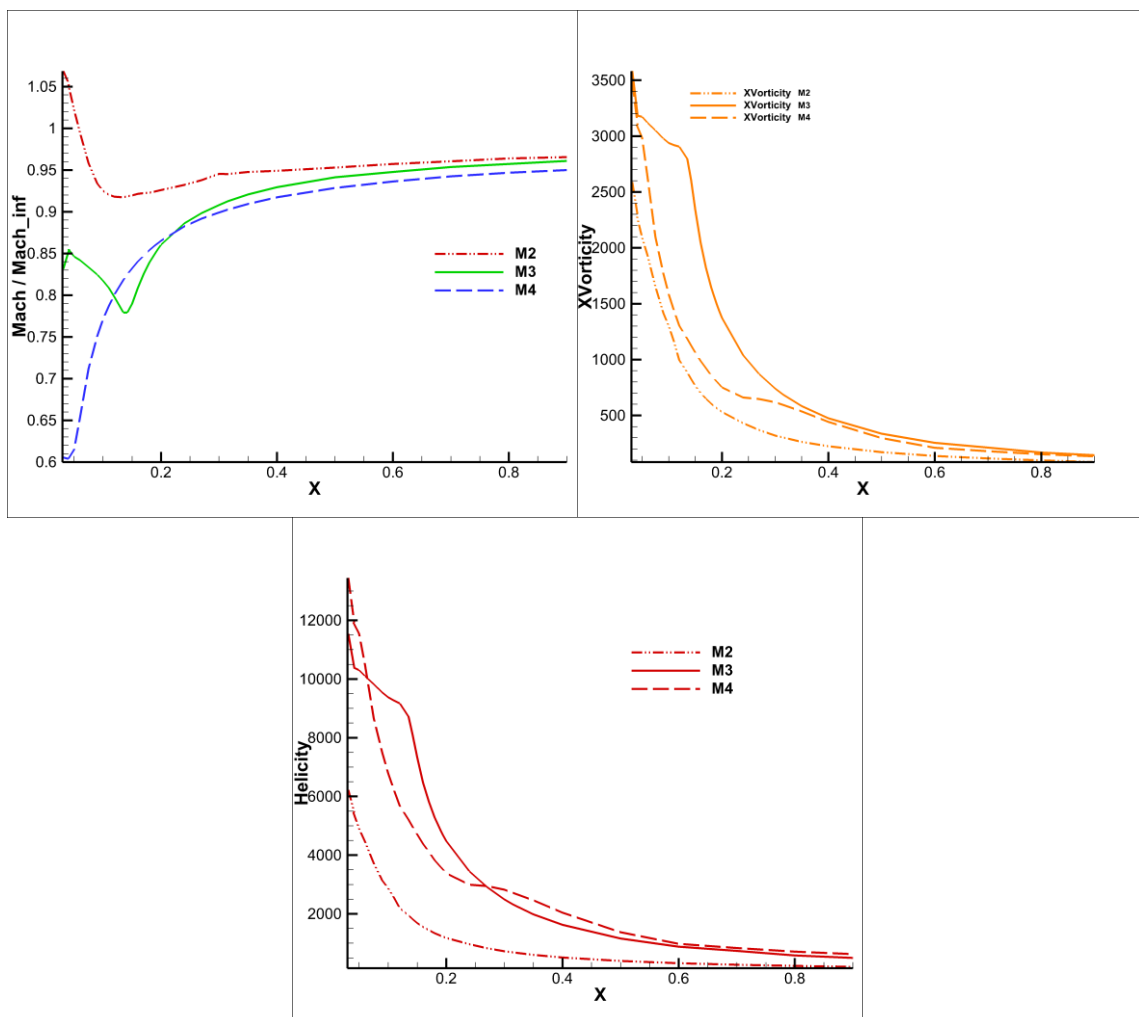


Рис. 8. Величины на оси вихря вдоль координаты X (направление основного потока): число Маха, нормированное на значение в невозмущенном потоке, продольная завихренность $XVorticity$, гидродинамическая спиральность H (*Helicity*)

На рис. 8 показано изменение значений вдоль оси концевых вихря при удалении от крыла вниз по потоку: числа Маха, нормированного на значение в

невозмущенном потоке, продольной завихренности $XVorticity$, гидродинамической спиральности (или меры винтового движения) H .

Отметим, что распределение величины H качественно такое же, как и распределение величины $XVorticity$. Эти два параметра повторяют закономерности развития концевой вихря по мере удаления от крыла-генератора.

На графиках коэффициента давления C_p , нормализованного числа Маха и гидродинамической спиральности H на оси концевой вихря (см., соответственно, рис. 7 и рис. 8) после зоны формирования прослеживается закономерность свойств вихря в зависимости от числа Маха набегающего потока. Так, например, начиная со значений около $X = 0.2$ (что соответствует 6.5 хорд от оси крыла) чем больше число Маха, тем большее значение принимает C_p (рис. 7). Аналогичная закономерность при $X \geq 0.3$ наблюдается для нормированного числа Маха и для H (рис. 8).

С ростом координаты X (т.е. при удалении от крыла вниз по потоку) интенсивность концевой вихря падает для всех рассмотренных чисел Маха, что сопровождается ростом плотности и давления, которые к концу расчетной области достигают максимально 0.93 от значений в набегающем потоке (рис. 7). При этом графики газодинамических величин в конце расчетной области близки к горизонтальным прямым, т.е. значения величин начинают изменяться незначительно. Это выравнивание свойств концевой вихря наблюдается для всех рассмотренных чисел Маха начиная, приблизительно, с $X = 0.6$, что соответствует 20 хордам крыла от оси крыла. Таким образом, рассмотрение дальней расчетной области (чуть более 30 хорд крыла) позволяет наблюдать начало и развитие так называемой зоны устойчивого вихревого жгута.

Для более полного представления о концевом вихре проведен также анализ его свойств по ширине. Для этого были рассмотрены графики параметров потока вдоль линии, проходящей вдоль оси y в сечении, перпендикулярном направлению основного потока (фиксированного X) для различных значений X .

Эти графики демонстрируют упомянутый минимум плотности и давления на оси концевой вихря, а также размер концевой вихря (см. рис. 9). Представлены два различных сечения, что позволяет также наблюдать эволюцию вихрей по мере удаления от крыла – генератора вихря.

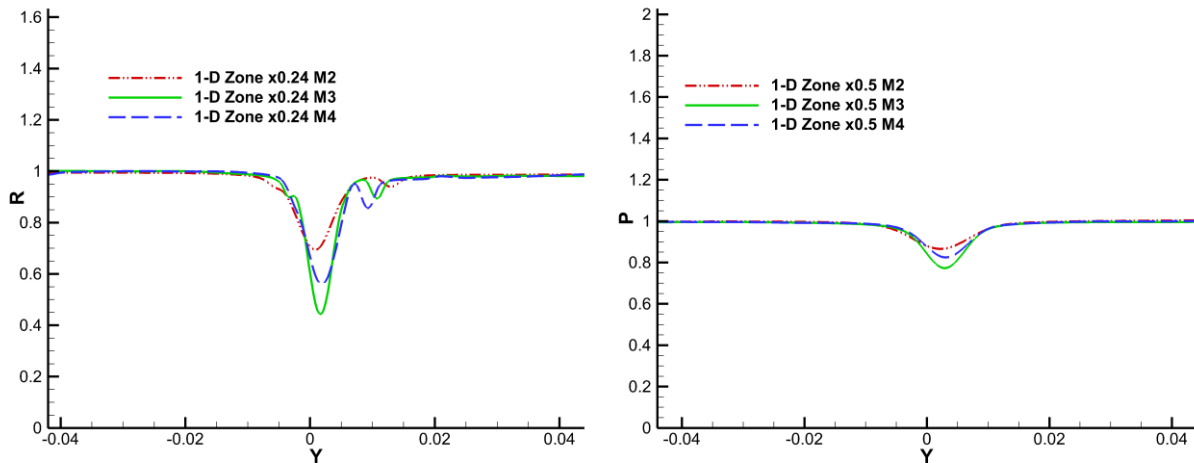


Рис. 9. Графики плотности $R(\rho)$ (слева) и давления P (справа) поперек оси вихря в различных сечениях фиксированного X для всех рассмотренных чисел Маха

На рис. 10 проиллюстрированы наблюдаемые максимум меры винтового движения H на оси концевго вихря (слева) и максимум окружной скорости (и, соответственно, тангенциального числа Маха M_{yz} , вычисленного по этой компоненте скорости) на границе концевго вихря (справа).

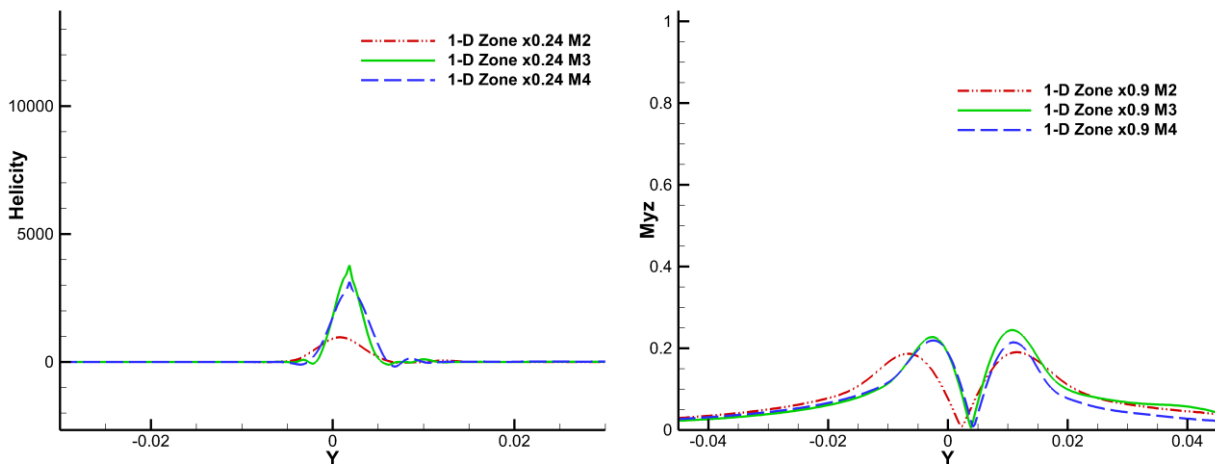


Рис. 10. Графики меры винтового движения H (Helicity) (слева) и тангенциального числа Маха M_{yz} (справа) поперек оси вихря в различных сечениях фиксированного X для всех рассмотренных чисел Маха

Полученные результаты иллюстрируют закономерности формирования концевго вихря на боковой кромке крыла-генератора. Затем на ближней дистанции начинается интенсивная зона развития концевго вихря. Наиболее интенсивным вихрь в этой зоне наблюдается при $M = 3$. Эта зона характеризуется низкими значениями плотности, давления и высокими

значениями меры винтового движения в центре вихря, а также высокими значениями тангенциального числа Маха в вихревом следе. Далее идет зона, где вихрь теряет интенсивность, но становится достаточно стабильным относительно удаления по потоку от крыла. Уменьшение интенсивности концевой вихря закономерно, и основной причиной затухания вихря является вязкая диссипация при взаимодействии с внешним потоком.

В дальней области на удалении 20 хорд от оси крыла вниз по потоку (что соответствует $x = 0.6$) вихри остаются достаточно интенсивными: плотность и давление на его оси ($M = 2: R = 0.867, P = 0.89; M = 3: R = 0.78, P = 0.823; M = 4: R = 0.78, P = 0.852$) заметно меньше соответствующих значений в невозмущенном потоке ($R = 1; P = 1$). Отметим, что в этой дальней области различия между концевыми вихрями в зависимости от числа Маха набегающего потока становятся малыми. Особенно незначительными они становятся между рассмотренными случаями $M = 3$ и $M = 4$. В то время как в ближней области различия между рассмотренными случаями значительны. На удалении 30 хорд от оси крыла вниз по потоку концевой вихрь продолжает быть заметным для всех рассмотренных значений чисел Маха.

Эффективность параллельной реализации

При проведении численных расчетов исследовалась эффективность применяемой параллельной реализации алгоритма в зависимости от используемого количества процессоров. Для этого были вычислены параметры ускорения (speedup, S_p) и эффективности (E_p). Параметр ускорения в параллельных вычислениях отражает то, насколько параллельный алгоритм быстрее, чем соответствующий последовательный алгоритм. S_p выражается формулой:

$$S_p = \frac{T_1}{T_p}$$

Ускорение S_p называется абсолютным, если за время T_1 берется время работы наилучшего последовательного алгоритма. S_p называется относительным, если в качестве T_1 берется время работы параллельного алгоритма на одном процессоре. T_p – время работы параллельного алгоритма на p процессорах.

Эффективность E_p – мера производительности системы, выражается как

$$E_p = \frac{S_p}{p},$$

где p – число процессоров.

Расчет относительного ускорения и эффективности применяемого алгоритма был выполнен на 1, 28, 56, 112, 224, 448, 896 ядрах. Рассчитывалось 1000 шагов с одного расчетного времени при числе Маха 4. Результаты приведены в табл. 1. Они демонстрируют высокую эффективность используемого параллельного алгоритма.

Ускорение и эффективность алгоритма

| p | время выполнения (сек) | S_p | $E_p(\%)$ |
|-----|------------------------|-------|-----------|
| 1 | 41490.660 | | |
| 28 | 2045.038 | 20.3 | 72.5 |
| 56 | 1006.938 | 41.2 | 73.5 |
| 112 | 571.426 | 72.6 | 64.8 |
| 224 | 283.676 | 146.3 | 65.3 |
| 448 | 179.135 | 231.6 | 51.7 |
| 896 | 96.829 | 428.5 | 47.8 |

С увеличением числа используемых процессоров эффективность параллельной реализации численного алгоритма падает (см. табл. 1), что закономерно, т.к. при росте числа процессоров количество обменов возрастает, а объем арифметических вычислений на каждом процессоре падает. Это приводит к неблагоприятному соотношению между объемом передаваемых данных и объемом производимых вычислений.

Сравнение результатов расчёта и эксперимента

Результаты численного моделирования сравнивались с экспериментальными данными, полученными в сверхзвуковой аэродинамической трубе Т-325 ИТПМ СО РАН. Исследовалось течение в следе за крылом, геометрия которого была такая же, как и при проведении расчётов. Схема эксперимента представлена на рис. 11.

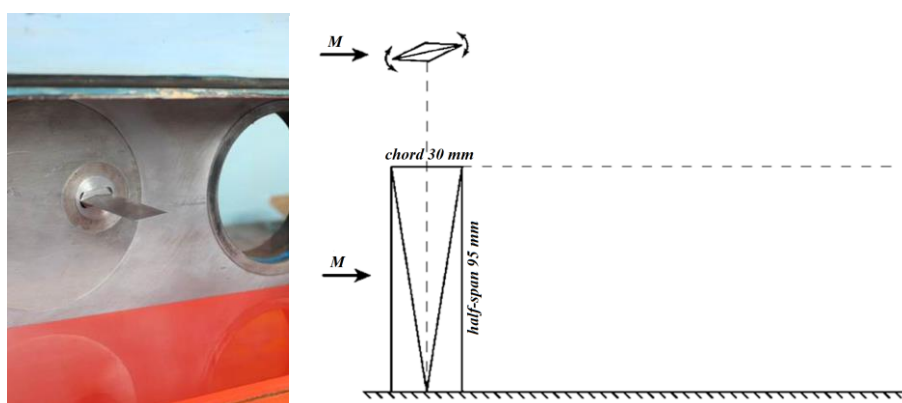


Рис. 11. Фотография и схема крыла-генератора

В ходе эксперимента проводились оптическая визуализация течения и измерение распределения массового расхода с помощью термоанемометра. Более подробно методика эксперимента представлена в [19, 20]. Во всех экспериментах угол атаки крыла составлял 10° , хорда крыла $b=30$ мм. При $M=2$ зондирование выполнено при единичных числах Рейнольдса 4 и 11 млн $1/м$, при $M=3$ единичное число Рейнольдса составляло 9 млн $1/м$, при $M=4$ —

17.5 млн 1/м. Количественные экспериментальные данные получены в двух сечениях, перпендикулярных вектору скорости набегающего потока, на расстоянии 2 и 6 хорд вниз по потоку от продольной оси крыла.

На рис. 12 показано распределение массового расхода в сечении, проходящем через центр вихревого ядра при $M = 2$ и $X/b = 2$ (ближнее сечение). Видно, что в расчёте и эксперименте зафиксировано ожидаемое падение массового расхода в центре вихревого ядра. При этом пространственное положение в расчёте моделируется корректно (координаты, соответствующие минимальным значениям, близки). В то же время минимальные значения в расчёте в 1.5-2 раза больше, чем измеренные в эксперименте.

На рис. 13 показаны аналогичные зависимости для $M = 3$. Здесь наблюдается хорошее совпадение результатов расчёта и эксперимента.

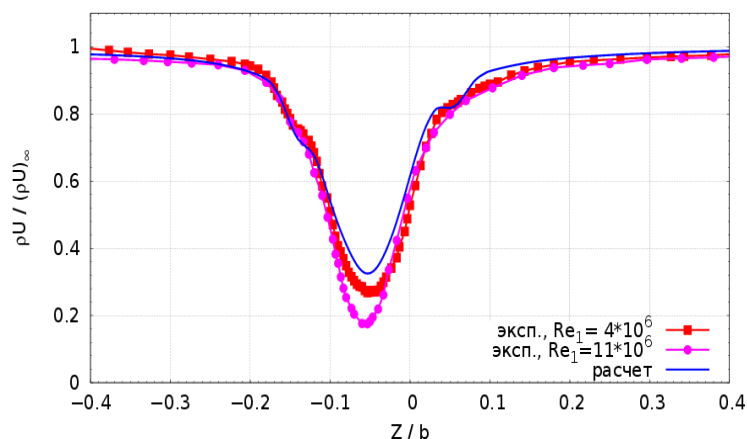


Рис. 12. Распределение массового расхода в концевом вихре и его окрестности по горизонтальной координате при $M = 2$ в сечении $X/b = 2$

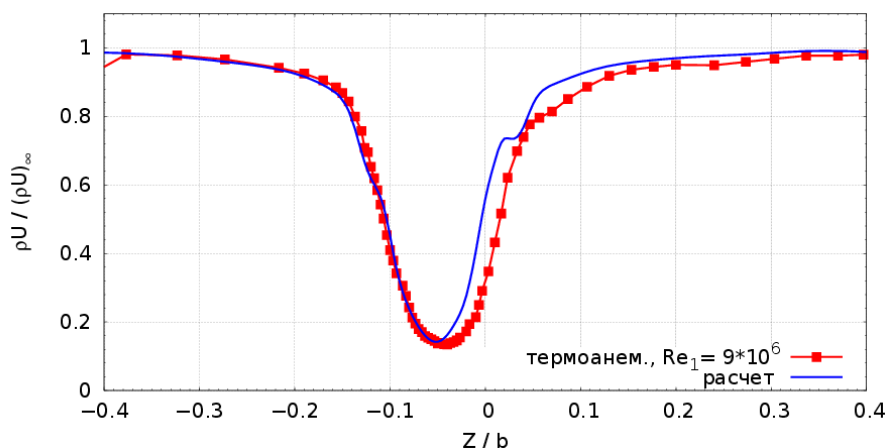


Рис. 13. Распределение массового расхода в концевом вихре и его окрестности по горизонтальной координате при $M = 3$ в сечении $X/b = 2$

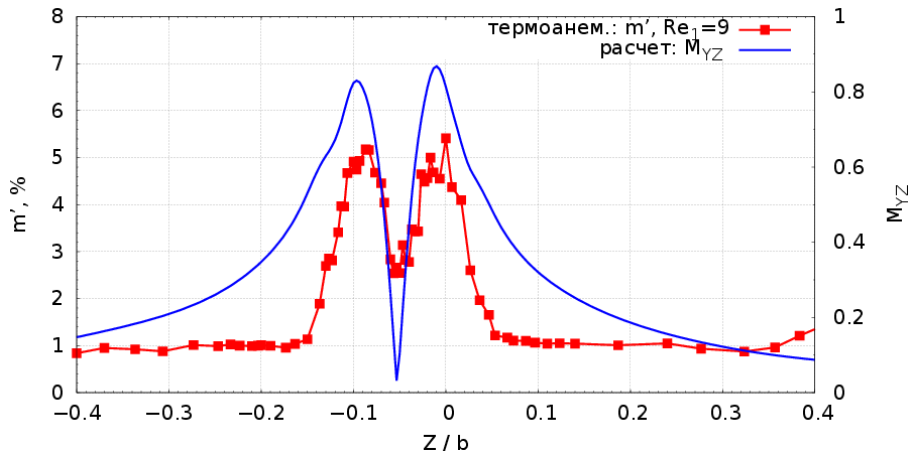


Рис. 14. Сравнение распределения среднеквадратичных пульсаций и окружного числа Маха в ядре концевом вихре и его окрестности при $M = 3$ в сечении $X/b = 2$

На рис. 14 представлены сравнение распределения среднеквадратичных пульсаций массового расхода (m') и окружного числа Маха (M_{yz}) в ядре продольного вихря и его окрестности при $M = 3$ и $X/b = 2$. Как известно, на границе вихревого ядра пульсации массового расхода и окружная скорость (и число Маха) максимальны. В центре, наоборот, эти значения минимальны (в идеальном случае $M_{yz} = 0$) [21-23]. Как видно, координаты максимумов и минимумов величин M_{yz} (расчёт) и m' (эксперимент) совпадают. Это свидетельствует о хорошем согласии результатов расчёта и эксперимента.

Заключение

В данной работе представлены результаты численно-экспериментального исследования концевых вихрей, сформированных в сверхзвуковом потоке на больших удалениях от крыла. Рассмотрены различные числа Маха: $M = 2, 3$ и 4 . Для расчетов использовались алгоритмы моделирования турбулентных течений и их параллельная реализация для запуска на многопроцессорных вычислительных системах. Экспериментальная часть была выполнена в сверхзвуковой аэродинамической трубе.

Во всех рассмотренных случаях расчетная область составляет чуть более 30 хорд, что включает в себя и ближнюю и дальнюю область. По мере удаленности от крыла вниз по потоку наблюдается уменьшение интенсивности вихревых следов для всех рассмотренных чисел Маха. Это выражается в уменьшении тангенциального числа Маха в вихревом следе, уменьшении меры винтового движения и росте плотности и давления на оси вихря. Что закономерно, т.к. в связи с взаимодействием с окружающей средой и ввиду, в основном, вязкой диссипации в конечном счете вихрь затухает и значения всех величин в нем выходят на соответствующие величины в набегающем потоке.

Для всех рассмотренных случаев ось концевой вихря представляет собой кривую, которая изгибается по-разному для различных чисел Маха.

В ближней области развитие концевых вихрей заметно различается в зависимости от значения числа Маха набегающего потока. Самый интенсивный вихрь в ближней области наблюдается при $M = 3$.

В дальней области (после 20 хорд от оси крыла) различия между концевыми вихрями в зависимости от значения числа Маха набегающего потока становятся менее значительными, особенно между случаями $M = 3$ и $M = 4$. Наименее интенсивный концевой вихрь наблюдается при $M = 2$.

Кроме того, в дальней области эволюция вихря для каждого значения числа Маха становится незначительной. Таким образом, есть основания предполагать, что вихрь остается с близкими значениями еще долгое время. Т.е. рассмотренная дальняя область является началом так называемой зоны устойчивого вихревого жгута.

Сравнение численных и экспериментальных данных показывает хорошее соответствие интенсивности, положения и размеров вихря.

Исследование эффективности используемого параллельного алгоритма проведено с использованием вплоть до 896 ядер. Показано, что эффективность параллельной реализации не становится ниже 0,478.

В этой работе получены усредненные стационарные величины потока. Численное моделирование влияния начальных возмущений в набегающем потоке на параметры течения в следе за крылом, изучение пульсаций давления и других газодинамических величин должны стать предметом дальнейших работ.

Список литературы

[1] Green S.I. and Acosta A.J. Unsteady flow in trailing vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, 227:107-134, 6, 1991.

[2] Spalart Philippe R. Airplane trailing vortices. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 30(1):107-138, 1998.

[3] Rossow Vernon J. Lift-generated vortex wakes of subsonic transport aircraft. *Progress in Aerospace Sciences*, 35(6):507-660, 1999.

[4] Giuni M., and Green R.B. Vortex formation on squared and rounded tip. *Aerospace Science and Technology*, 29 (1). pp. 191-19, 2013.

[5] Giuni M. Formation and early development of wingtip vortices. PhD thesis, University of Glasgow, 2013.

[6] Giuni Michea and Benard Emmanuel. Analytical/Experimental Comparison of the Axial Velocity in Trailing Vortices. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2011.

[7] Smart M.K., Kalkhoran I.M., Bentson J. Measurements of supersonic wing tip vortices. *AIAA Journal*, 1995, v.33, №10, p.1761-1768.

[8] Kalkhoran I.M., Smart M.K. Aspects of shock wave-induced vortex breakdown. *Progress in Aerospace Sciences*, 2000, v.30, p.63-95.

[9] Боровой В.Я. Течение и теплообмен в областях взаимодействия пограничного слоя со скачками уплотнения. – М.: Машиностроение, 1986.

[10] Боровой В.Я., Кубишина В.Я., Скуратов А.С., Яковлева Л.С. Вихрь в сверхзвуковом потоке и его влияние на течение и теплообмен на затупленном теле. *Механика жидкости и газа*, 2000, №5, с.66-76.

[11] Давыдов А.А., Константиновская Т.В., Луцкий А.Е., Харитонов А.М., Шевченко А.М., Шмаков А.С. Моделирование сверхзвукового течения в ядре концевой вихря при числе Маха 6. *Матем. моделирование*, **24**:6 (2012), 67–82; *Math. Models Comput. Simul.*, **5**:1 (2013), 25–36.

[12] Lombard Jean-Eloi W., Moxey David, Sherwin Spencer J., Hoessler Julien F.A., Dhandapani Sridar, and Taylor Mark J. Implicit Large-Eddy Simulation of a Wingtip Vortex, *AIAA Journal*, Vol. 54, No. 2 (2016), pp. 506-518.

[13] Tadmor E. Convergence of spectral methods for nonlinear conservation laws, *SIAM J. Numer. Anal.* 26 (1) (1989) pp. 30-44.

[14] Garmann Daniel J. and Visbal Miguel R. Investigation of the Unsteady Tip Vortex Structure on a NACA0012 Wing at Fixed Incidence. 55th AIAA Aerospace Sciences Meeting, AIAA SciTech Forum, (AIAA 2017-1002).

[15] Давыдов А.А., Константиновская Т.В., Луцкий А.Е. Численное моделирование вихревого следа за крылом на больших удалениях от крыла в сверхзвуковом потоке // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 95. 15 с.

[16] Allmaras S.R., Johnson F.T. and Spalart P.R. Modifications and Clarifications for the Implementation of the Spalart-Allmaras Turbulence Model. Seventh International Conference on CFD (ICCFD7), Big Island, Hawaii, 9-13 July 2012.

[17] Edwards J.R., Chandra S. Comparison of Eddy Viscosity-Transport Turbulence Models for Three-Dimensional, Shock-Separated Flowfields. *AIAA Journal*. 1996. Vol. 34, no. 4. P. 756–763.

[18] Борисов В.Е., Луцкий А.Е. Моделирование перехода между регулярным и маховским отражением ударных волн с помощью неявной схемы на основе методов LU-SGS и BiCGStab // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 68. 36 с. doi:10.20948/prepr-2016-68.

[19] Shmakov A.S., Shevchenko A.M., Yatskikh A.A., Yermolaev Yu.G. Mass flow and its pulsation measurements in supersonic wing wake // AIP Conference Proceedings 1770, 030019 (2016). <https://doi.org/10.1063/1.4963961>.

[20] Shmakov A.S., Shevchenko A.M. An experimental study of the vortex wake at Mach number of 3 // AIP Conference Proceedings 1893, 030089 (2017). <https://doi.org/10.1063/1.5007547>

[21] Delery J., Horowitz E., Leuchter O., Solignac J. Fundamental studies on vortex flows // *La Recherche Aérospatiale* (English ed.) 1984. Vol. 2. Pp. 1–24.

[22] Smart M.K., Kalkhoran I.M., Bentson J. Measurements of supersonic wing tip vortices // *AIAA Journal*. 1995. Vol. 33, no. 10. Pp. 1761–1768.

[23] Shevchenko A., Kavun I., Pavlov A., and Zapryagaev V. Review of itam experiments on shock/vortex interactions // In proceedings: European conference for aerospace sciences, Moscow, Russia, July, 4-7 (2005).