ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 55 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Фимин Н.Н., Чечеткин В.М.

Системы квазилинейных уравнений с одинаковой главной частью и гидродинамическая подстановка

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Фимин Н.Н., Чечеткин В.М. Системы квазилинейных уравнений с одинаковой главной частью и гидродинамическая подстановка // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 55. 12 с. doi:10.20948/prepr-2018-55
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-55

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

Н.Н. Фимин, В.М. Чечёткин

СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДИНАКОВОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ПОДСТАНОВКА

Москва — 2018

Фимин Н.Н., Чечёткин В. М.

Системы квазилинейных уравнений с одинаковой главной частью и гидродинамическая подстановка

Аннотация. Рассмотрена возможность использования потенциалов Монжа с целью построения для динамических систем уравнений Лиувилля–Якоби и применения к ним модифицированной гидродинамической подстановки.

Ключевые слова: уравнение Лиувилля, квазилинейные уравнения, гидродинамическая подстановка, потенциалы Монжа, системы с одинаковой главной частью

Fimin Nikolay Nikolaevich, Chechetkin Valery Mikhailovich

Systems of quasi-linear equations with the same principal part and hydrodynamic substitution

Abstract. The possibility of using the Monge potentials for the purpose of constructions for dynamical systems of Liouville–Jacobi equations and application to them of a modified hydrodynamic substitution is observed.
Key words: Liouville equation, quasilinear equations, hydrodynamic substitution, Monge potentials, equations with the same principal part

Оглавление

1. Введение

Применение “гидродинамической подстановки” [1]–[2] для получения замкнутой системы моментных следствий достаточно длительное время практиковалось только для классического уравнения Власова. Определенные модификации рассматривались в основном для специальных случаев типа многоскоростных моделей и континуумслойной динамики [3]–[4]. Однако некоторое время назад была установлена возможность использования гидродинамической подстановки для уравнения Лиувилля, причем данная методика оказывается применимой также для уравнений типа Власова–Пуассона–Пуассона, Власова–Максвелла, Власова–Янга–Миллза и др. [5]–[6]. Кроме того, установлена связь гидродинамических следствий (редуцированных уравнений Эйлера или РСЭ) уравнений Лиувилля с классическим методом Гамильтона–Якоби (ГЯ) интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных, приводимых к форме, выражаемой через “эйкональную производящую функцию” (или, другими словами, рассматриваемых на лагранжевом многообразии как фазовом пространстве). Можно утверждать, что существует возможность обобщения метода ГЯ на случай (включающий гамильтоновы системы как частность), когда фазовое пространство для уравнения Лиувилля не обязательно будет симметричным: это означает, что допускается произвольный выбор размерностей многообразий “конфигурационных” и (вообще говоря, не являющихся канонически сопряженными к таковым) “импульсных” переменных в динамической системе, эволюция которой описывается уравнением Лиувилля для фазовой плотности [7]–[8].

Базисом для анализа гамильтонова случая, приводимого к “классической” РСЭ, можно считать цикл работ [9]–[11], где исследовалось (эмпирически введенное) уравнение Лэмба–Козлова, по форме близкое к уравнению для импульсов РСЭ. Для негамильтонова случая аналогичную роль играет теория квазилинейных дифференциальных уравнений “с одинаковой главной частью” [12]–[13], на основании выводов из которой можно получить методику решения широкого класса уравнений в частных производных математической физики.

2. Уравнения гидродинамического типа и квазилинейные уравнения с одинаковой главной частью

Рассмотрим общую автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений 1–го порядка в n–мерном пространстве:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n, \ \ \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in R^n, \ \ t \in R^1. \tag{1}$$

Введем функцию распределения $f(\mathbf{x}, t)$ изображающих точек в n–мерном фазовом пространстве, представляющую собой вероятность пребывания точки траектории динамической системы в окрестности данной точки пространства R^n в момент времени t. Ее эволюция описывается обобщенным уравнением Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}_n(\mathbf{v}f) = 0. \tag{2}$$

Представим вектор $\mathbf{x}$ как упорядоченную пару $(\mathbf{q}, \mathbf{p})^T$, $\mathbf{q} \in R^m$, $\mathbf{p} \in R^{n-m}$ (т. е. разложим фазовое пространство системы в декартову сумму фазовых множеств, определяемых новыми переменными: $R^n_{\mathbf{x}} = R^m_{\mathbf{q}} \oplus R^{n-m}_{\mathbf{p}}$). Перепишем систему (1) в этих переменных:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \tag{3}$$

где $\mathbf{w}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ — это, соответственно, m первых и $n-m$ последних компонент векторной функции $\mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ из (1) (т. е. $\big(\mathbf{w}, \mathbf{g}\big)^T = \mathbf{v}$).

Будем искать решение обобщенного уравнения Лиувилля, переписанного в следующей явной форме:

$$\Omega(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial q_i}\big(w_i f\big) + \sum_{j=1}^{n-m} \frac{\partial}{\partial p_j}\big(g_j f\big) = 0, \tag{4}$$

используя гидродинамическую (“односкоростную”) подстановку: $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \rho(\mathbf{q}, t)\delta\big(\mathbf{p} - \mathbf{P}(\mathbf{q}, t)\big)$. Здесь $\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, t)$ — уравнение $(n-m)$–мерной гиперповерхности в момент времени t, $\rho(\mathbf{q}, t)$ — плотность изображающих точек на ней. Подстановка данного представления $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ в уравнение (4) дает, в соответствии с [7]–[8], редуцированную систему Эйлера уравнений гидродинамического типа, состоящую из уравнения неразрывности и уравнения движения (изображающих точек):

$$\Omega_0(\rho) \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial q_k}\big(\rho W_k\big) = 0, \tag{5}$$

$$\Omega_j(P_j) \equiv \frac{\partial P_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} W_k \frac{\partial P_j}{\partial q_k} = G_j, \quad j = 1, ..., n-m, \tag{6}$$

где $W_k(\mathbf{q}, t) \equiv w_k\big(\mathbf{q}, \mathbf{P}(\mathbf{q}, t)\big)$, $G_j(\mathbf{q}, t) \equiv g_j\big(\mathbf{q}, \mathbf{P}(\mathbf{q}, t)\big)$.

Очевидно, система уравнений $\Omega_j(P_j) = G_j$, имеющая одинаковые коэффициенты W_k при производных $\partial P_j / \partial q_k$ ($\forall j \leq n-m$), принадлежит классу якобиевых систем, впервые рассмотренных в [14] (и детально исследованных в [15]), или иначе — систем с одинаковой главной частью. Примем, что набор решений уравнений (6), зависящих от постоянных $\{C_j\}_1^{n-m}$, задан в виде совокупности соотношений $\Phi_j(q_0 \equiv t, \mathbf{q}, \mathbf{P}) = C_j$ (причем якобиан $D(\Phi_1, ..., \Phi_{n-m})/D(P_1, ..., P_{n-m}) \neq 0$). Следуя методике [12], продифференцируем данную совокупность по $q_{i'}\big|_{i'=0,...,m}$, умножим результат на $W_{k'}\big|_{k'=0,...,m}$ и просуммируем по k', окончательно получаем:

$$\Xi_j(\Phi_j) \equiv \sum_{k'=0}^{m} W_{k'} \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_{k'}} + \sum_{\ell=1}^{n-m} G_\ell \frac{\partial \Phi_j}{\partial P_\ell} = 0, \quad W_0 \equiv 1, \quad q_0 \equiv t. \tag{7}$$

Все эти уравнения идентичны по виду (кроме нумерующего их индекса j), поэтому вместо функций $\Phi_j\big|_{j=1,...,n-m}$ можно ввести одну функцию $\Phi(q_0, \mathbf{q}, \mathbf{P})$. Так как все уравнения совокупности $\Phi_j(q_0, \mathbf{q}, \mathbf{P}) = C_j$ удовлетворяют уравнению (7) тождественно по $q_{i'}$, C_j, то есть все они тождественно по $q_{i'}$, Φ_j удовлетворяют однородному линейному дифференциальному уравнению (которое можно назвать уравнением Лиувилля–Якоби, или ЛЯ) для "производящей функции" $(n+1)$-го переменного $\Phi(t, \mathbf{q}, \mathbf{P})$:

$$\Xi(\Phi) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} W_i \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n-m} G_j \frac{\partial \Phi}{\partial P_j} = 0. \tag{8}$$

Интегрирование последнего уравнения равносильно интегрированию характеристической системы дифференциальных уравнений (вида (3)): $dq_i/dt = W_k$, $dP_j/dt = G_j$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n-m$). В качестве *замечания* укажем, что, полагая $W_i(\mathbf{q}, t)$ известными функциями, можно, вводя обозначения $\mathbf{P}' = \{P_0, \mathbf{P}\}$, $P_0 \equiv \rho$, $\mathbf{G}' \equiv \{-P_0 \sum_i \partial W_i / \partial q_i, \mathbf{G}\}$, записать систему (5)–(6) единообразно как $\sum_{i=0}^{m} W_i \partial \mathbf{P}' / \partial q_i = \mathbf{G}'$; далее можно перейти к новой производящей функции $\Phi'(t, \mathbf{q}, \mathbf{P}')$, и получить для нее уравнение, аналогичное (8).

Возвращаясь к анализу свойств системы уравнений (6), можно констатировать, что данная система (равно как и полная РСЭ при условиях, упомянутых выше в замечании) эквивалентна уравнению для производящей функции, формально совпадающему по виду с уравнением Лиувилля (8) (классического вида, т. е. не "обобщенным"). Отличие от исходного уравнения (4) заключается в том, что дифференцированию по $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$ в членах левой части в последнем случае подвергаются не моментные ядра $\mathbf{w}f$, $\mathbf{g}f$, а собственно новая неизвестная функция Φ.

С точки зрения возможности реализации симметрии решения в моментном представлении представляется правомерным поставить вопрос о применении сопряженной гидродинамической подстановки [5] теперь уже к уравнению (8) ("подстановка 2–го уровня"): $\Phi(t,\mathbf{q},\mathbf{P}) = \rho^{[2]}(\mathbf{P},t)\delta\big(\mathbf{q}-\mathbf{Q}(\mathbf{P},t)\big)$. Рассмотрим получающиеся выражения:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial\rho^{[2]}}{\partial t}\delta\big(\mathbf{q}-\mathbf{Q}(\mathbf{P},t)\big) - \rho^{[2]}(\nabla\delta, \frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial t}), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial q_j} = \rho^{[2]}\frac{\partial\delta}{\partial q_j},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial P_i} = \frac{\partial\rho^{[2]}}{\partial P_i}\delta\big(\mathbf{q}-\mathbf{Q}(\mathbf{P},t)\big) - \rho^{[2]}\big(\nabla\delta, \frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial P_i}\big).$$

Собирая множители при δ–функции и при ее производных, получаем:

$$\frac{\partial\rho^{[2]}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-m} G_i^{[2]}\frac{\partial\rho^{[2]}}{\partial P_i} = 0, \quad \mathbf{G}^{[2]} = \mathbf{G}(\mathbf{Q},\mathbf{P}), \quad \mathbf{W}^{[2]} = \mathbf{W}(\mathbf{Q},\mathbf{P}),$$

$$-\rho^{[2]}\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial t} - \rho^{[2]}\sum_{i=1}^{n-m} G_i^{[2]}\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial P_i} + \rho^{[2]}\sum_{j=1}^{m} W_j^{[2]}\frac{\partial\delta(\mathbf{q}-\mathbf{Q}(\mathbf{P},t))}{\partial q_j} = 0.$$

Окончательно получаются гидродинамические уравнения для "бездивергентной (в импульсном пространстве) среды":

$$\Omega_0^{[2]} \equiv \sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial G_i^{[2]}}{\partial P_i} = 0, \qquad \Omega_{k=1,2,3}^{[2]}(\mathbf{Q}) \equiv \frac{\partial Q_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-m} G_i^{[2]}\frac{\partial Q_k}{\partial P_i} = W_k^{[2]} \tag{9}$$

(вторичная плотность $\rho^{[2]}$ вычисляется после получения решения уравнения движения). Таким образом, исследование произвольной автономной системы ОДУ, равно как гидродинамических следствий уравнений Лиувилля и Власова, приводятся к анализу уравнений движения несжимаемой "фазовой жидкости".

Отметим, что величина $\mathbf{P}$ в (3) (а также в (8)) не предполагается представимой только через градиент некоторой (“эйкональной”) функции $S(\mathbf{q}, t)$, а представляет собой вектор общего вида. В частности, при $n = 2m$ (гамильтонов случай) его разложение Гельмгольца–Ходжа может содержать неаннулирующуюся соленоидальную компоненту. Тогда второе уравнение системы (9) приводится к виду $\partial \mathbf{P}^{[2]}/\partial t - \mathbf{W} \times \operatorname{rot} \mathbf{P}^{[2]} = -dH/d\mathbf{q}$, близкому к виду уравнений класса Лэмба–Козлова [11] (и в то же время точно представляющему собой частную гамильтонову форму основного уравнения механики Биркгофа [16]).

3. Методика применения гидродинамической подстановки с учетом физических аспектов решаемых задач

Сведение решения уравнений эволюции динамической системы к уравнениям гидродинамического типа (9), по сути, представляет собой тривиальный алгоритм действий, хотя и зависящий от формы исходного описания динамики: если “отправной точкой” для исследования поведения динамической системы служит уравнение Лиувилля (или Власова), то 2–уровневая подстановка реализуема непосредственно, если же заданы лишь уравнения движения, то необходимо предварительное исследование их возможности приведения к форме якобиевой системы или переход к (обобщенному) уравнению Лиувилля.

Рассмотрим как *Пример 1* динамическую эволюцию системы N точечных гравитирующих частиц в постньютоновском приближении [17]. Гамильтониан системы в этом случае имеет форму:

$$H_{1pN} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} + mc^2\left(\frac{h_{00}}{2} + \sum_{j=1}^{3}\frac{h_{0j}p_j}{mc} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{h_{ji}p_jp_i}{2m^2c^2} - \frac{h_{00}^2}{8} + \frac{\mathbf{p}^2h_{00}}{4m^2c^2}\right),$$

$$h_{00} = \frac{2\Phi}{c^2} + \frac{2\Phi^2}{c^4} - \frac{2Gm}{c^4}\sum_{n=1}^{N}\frac{\Phi_n'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n|} - \frac{3Gm}{c^4}\sum_{n=1}^{N}\frac{\mathbf{v}^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n|},$$

$$h_{0j} = \frac{Gm}{2c^3}\sum_{n=1}^{N}|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n|^{-1}\big(7v_{nj} + (\mathbf{v}_n\mathbf{e}_n)e_{nj}\big), \quad \mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_n}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n|},$$

$$h_j^i = -\frac{2}{c^2}\Phi\delta_j^i, \quad \Phi(\mathbf{x}) = -Gm\sum_{n=1}^{N}|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n|^{-1}, \quad \Phi_n' = -Gm\sum_{k\neq n}|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_n|^{-1}.$$

Для описания эволюции системы на микроскопическом уровне следует ввести (одночастичную) функцию распределения $\mathcal{F}(x^j, p_j, t)$ с нормировкой на полную массу покоя системы частиц: $\int \mathcal{F}\, d\mathbf{x} d\mathbf{p} = Nm$ $(= \mathrm{inv})$ (при этом для пространственного распределения плотности в связи с наличием кривизны пространства–времени, создаваемого ансамблем частиц, необходимо рассматривать нормировку $\int \mathcal{F} d\mathbf{p} = \rho(\mathbf{x})\sqrt{|\det g_{ij}|}\big|_{i,j=\overline{1,3}}$, где $\rho(\mathbf{x}, t)$ — плотность массы покоя, g_{ij} — метрический тензор пространственной части 4–метрики). Кинетическое уравнение имеет вид: $\partial\mathcal{F}/\partial t + [H_{1pN}, \mathcal{F}] = 0$, где $[.,.]$ — стандартные скобки Пуассона в фазовом μ–пространстве.

Для перехода к гидродинамическому описанию эволюции системы представим функцию распределения в форме, присущей гидродинамической подстановке: $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)\delta\big(\mathbf{p} - \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)\big)$, где $\rho(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ имеют смысл плотности массы покоя частиц и импульса частиц в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t соответственно. Проводя дифференцирование функции распределения и собирая множители при δ–функции и ее производных, получаем систему уравнений обобщенной гидродинамики среды, состоящей из гравитирующих частиц:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^k}\big(\rho\mathcal{V}^k\big) = 0, \quad \frac{\partial P_\ell}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\mathcal{V}^k\frac{\partial P_\ell}{\partial x^k} = F_\ell, \quad \ell = \overline{1,3},$$

где: $\mathcal{V}^k = \big(\partial H_{1pN}\big(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x}, t)\big)/\partial\mathbf{p}\big)|_{\mathbf{p}=\mathbf{P}(\mathbf{x},t)}$ — компоненты "обобщенной скорости" среды, $F_\ell(\mathbf{x}, t) = -\partial H_{1pN}(\mathbf{x}, \mathbf{P}(\mathbf{x}, t))/\partial x_\ell$ — компоненты "обобщенной массовой силы":

$$\mathcal{V}^k = \frac{P_k}{m}\left(1 - \frac{\mathbf{P}^2}{2m^2c^2} + \frac{h_{00}}{2}\right) + ch_{0k} + \sum_{\ell=1}^{3} h_{k\ell}\frac{P_\ell}{m},$$

$$F_\ell = -\frac{mc^2}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\ell}\left(1 - \frac{\mathbf{P}^2}{2m^2c^2} - \frac{h_{00}}{2}\right) - \sum_k cP_k\frac{\partial h_{0k}}{\partial x^\ell} - \frac{1}{2m}\sum_{j,k}\frac{\partial h_{jk}}{\partial x^\ell}P_jP_k.$$

Перейдем к уравнению ЛЯ для производящей функции $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{P}, t)$ и далее запишем уравнения РСЭ с учетом сопряженной гидродинамической подстановки $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{P}, t) = \phi(\mathbf{P}, t)\delta\big(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{P}, t)\big)$.

Существует весьма широкий класс динамических систем, эволюция которых описывается системами дифференциальных уравнений в частных производных, внешне существенно отличающихся от гамильтоновых, но приводимых к таковым путем выбора специальных переменных и модификацией канонических уравнений. Методика гидродинамической подстановки в этом случае не претерпевает существенных изменений, хотя, в принципе, сама подстановка может приобрести несколько другой вид: аргументом функции Дирака будет являться не вектор выделенного импульса/скорости, а набор некоторых макроструктурных/полевых величин, принимаемых за новые зависимые переменные.

В качестве *Примера 2* можно рассмотреть модификацию формализма потенциалов Монжа [18] (или, что с исторической точки зрения менее правомерно, Клебша [19]) применительно к уравнениям идеальной гидродинамики. Расширенное монжевское представление может быть реализовано для системы уравнений Эйлера (для простоты для несжимаемой жидкости), описывающих эволюцию тройки зависимых переменных $(\varrho, \mathbf{v}, s)$, следующим образом: будем полагать, что гидродинамическая скорость может быть записана в виде $\mathbf{v} = -\sum_{k=1}^{3}(N_k/\rho)\nabla M_k$ ($N_1 \equiv \varrho$ — плотность среды, $N_3/\varrho \equiv s$ — удельная энтропия, $\mathbf{M} \equiv \{M_k\}_{k=1,2,3}(\mathbf{x}, t)$ — потенциалы Монжа). При наличии дополнительных условий, компенсирующих произвол, возникающий в процессе введения вспомогательных скалярных (N_k) и векторных (∇M_k) полей в монжевском представлении скорости:

$$\sum_k \frac{N_k}{\varrho}\dot{M}_k - \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 = h, \quad \widehat{D}\frac{N_2}{\varrho} = \widehat{D}M_2 = 0, \quad \widehat{D}M_3 = T, \quad \widehat{D} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla,$$

вышеприведенное представление приводит к возможности применения для получения уравнений эволюции гидродинамической системы вариационного принципа [20], [21] для кинетического потенциала $\mathcal{L} = p$, в качестве которого рассматривается динамическое давление:

$$\delta \int\int \mathcal{L} d\mathbf{x}dt = 0, \quad \mathcal{L} = \sum_{k=1}^{3} N_k\dot{M}_k - \frac{1}{2\varrho}\left(\sum_{k=1}^{3} N_k\nabla M_k\right)^2 - \varrho\varepsilon(\rho, s),$$

где ε и $h(= \varepsilon + p/\varrho)$ — соответственно удельная внутренняя энергия и удельное теплосодержание (среды, участвующей в гидродинамическом движении). Поскольку величины $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{M}_k = N_k$ имеют смысл канонически сопряженных к потенциалам Монжа псевдоимпульсов, можно перейти к гамильтонову представлению, используя преобразование Лежандра: $\mathcal{H} = \sum_k \dot{M}_k N_k - \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$. Из вариационных (функционально–дифференциальных) уравнений движения $\dot{M}_k = \delta H/\delta N_k$, $\dot{N}_k = -\delta H/\delta M_k$, соответствующих гамильтониану $H = \int \mathcal{H} d\mathbf{x}$, можно получить с использованием выше в п. 2 алгоритма (для якобиевых систем) уравнение ЛЯ для производящей функции $\Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{K})$, аналогичное по структуре уравнению (8):

$$\frac{\partial \Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{K})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{6} g_i \frac{\partial \Phi}{\partial K_i} = 0, \quad \mathbf{K} = \big(\mathbf{M}, \mathbf{N}\big)^T, \tag{10}$$

$$g_{1,2,3} = 0, \quad g_4 = \mu - \frac{\mathbf{v}^2}{2}, \quad g_5 = 0, \quad g_6 = T,$$

где $\mu(N_1, N_3) = \partial\big(N_1 \varepsilon(N_1, N_3)\big)/\partial N_1$ — удельный химпотенциал (полагаемый известной функцией). Используем для получения решения уравнения (10) подстановку

$$\Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{K}) = \phi(\mathbf{x}, t)\delta\big(\mathbf{K} - \mathbf{K}^{[0]}(\mathbf{x}, t)\big), \quad \mathbf{K}^{[0]}(\mathbf{x}, t) = \big(M_1^{[0]}(\mathbf{x}, t), ..., N_3^{[0]}(\mathbf{x}, t)\big)^T,$$

в результате имеем следующую эквивалентную этому уравнению (в том же смысле, что и для стандартной гидродинамической подстановки в уравнения Власова и Лиувилля) замкнутую систему, содержащую "уравнение непрерывности" и "уравнение движения" (с учетом априорно заданного уравнения состояния среды):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k(\mathbf{K}) \frac{\partial \phi}{\partial x_k}\bigg|_{\mathbf{K}=\mathbf{K}^{[0]}} = 0, \quad \frac{\partial K_i^{[0]}}{\partial t} + \sum_{\ell=1}^{3} v_\ell \frac{\partial K_i}{\partial x_\ell}\bigg|_{\mathbf{K}=\mathbf{K}^{[0]}} = G_i(\mathbf{K}^{[0]}), \tag{11}$$

$$G_4 = \varepsilon\big(N_1^{[0]}, N_3^{[0]}\big) + \left(N_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial N_1} - \frac{1}{2}\mathbf{v}^2(\mathbf{K})\right)_{\mathbf{K}=\mathbf{K}^{[0]}}, \quad G_6 = T, \quad G_{1,2,3,5} = 0.$$

Очевидно, ко второму уравнению системы (11) можно применить преобразование к форме ЛЯ с дальнейшим использованием подстановки 2–го порядка $\Phi^{[2]}(\mathbf{x}, \mathbf{K}^{[0]}, t) = \phi^{[2]}(\mathbf{K}^{[0]}, t)\delta\big(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{K}^{[0]}, t)\big)$. Аналог уравнения движения для (зависимой) переменной $\mathbf{X}(\mathbf{K}^{[0]}, t)$ примет следующий вид (оператор, определяемый левой частью, фактически можно назвать полной производной в новой монжевской системе координат):

$$\frac{\partial X_\ell}{\partial t} + \sum_{i=1}^{6} G_i(\mathbf{K}^{[0]}) \frac{\partial X_\ell}{\partial K_i^{[0]}} = v_\ell(\mathbf{K}^{[0]}), \quad \ell = 1, 2, 3. \ \blacktriangledown$$

Таким образом, переход к представлению Монжа с использованием прямой реализации вариационного принципа Зелигера–Уизема [20] для системы уравнений Эйлера позволяет произвести гамильтонизацию уравнений и в дальнейшем перейти к РСЭ для несжимаемой среды путем модифицированной гидродинамической подстановки непосредственно либо путем ее повторного применения к соответствующему предварительно сформированному уравнению ЛЯ. Использование потенциалов Монжа представляет собой достаточно универсальную методику получения канонических уравнений динамики и поэтому может рассматриваться как первичный этап для применения гидродинамической подстановки надлежащего вида (в терминах новых переменных) с целью получения уравнений гидродинамического типа. При этом процесс получения решений этих уравнений может быть существенно проще, чем для исходной системы уравнений, поскольку по сути получаемые РСЭ представляют собой обобщения уравнений классического метода Гамильтона–Якоби.

4. Заключение

Мы рассмотрели математический аппарат для получения уравнений гидродинамического типа для описания эволюции динамических систем общего вида (не обязательно сводящихся к гамильтоновым). Установлено, что получаемая в результате гидродинамической подстановки в уравнения типа Лиувилля или Власова редуцированная система Эйлера может быть преобразована к уравнению Лиувилля–Якоби, из которого сопряженной подстановкой можно получить другой вариант РСЭ. Приведенные примеры демонстрируют, что уравнения с одинаковой главной частью образуют базис метода прямой и сопряженной гидродинамической подстановки, имея, тем самым, тесную связь с уравнениями типа Гамильтона–Якоби.

Список литературы

[1] Власов А.А. Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966. 356 с.

[2] Брагинский С.И., Явления переноса в плазме, в сб. Вопросы теории плазмы. Ред. Леонтович М.А. Вып. 1, С. 183–272. М.: Госатомиздат, 1963.

[3] Веденяпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.

[4] Одесский А.В., Павлов М.В., Соколов В.В. Классификация интегрируемых уравнений типа Власова // ТМФ, 2008, т. 154, с. 249–260.

[5] Веденяпин В.В., Фимин Н.Н. Уравнение Лиувилля, гидродинамическая подстановка и уравнение Гамильтона–Якоби //Доклады РАН, 2012, т. 446, № 2, с. 142–144.

[6] Веденяпин В.В., Фимин Н.Н., Негматов М.А. Уравнения типа Власова и Лиувилля, их макроскопические, энергетические и гидродинамические следствия. М.: Изд–во ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2016.

[7] Веденяпин В.В., Фимин Н.Н. Метод Гамильтона–Якоби в негамильтоновой ситуации и гидродинамическая подстановка // Доклады РАН, 2015, т. 461, № 2, с. 136–139.

[8] Веденяпин В.В., Фимин Н.Н. Метод Гамильтона–Якоби для негамильтоновых систем // Нелин. динамика, 2015, т. 11, № 2, с. 279–286.

[9] Козлов В.В. Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестн. МГУ, сер. Математика, механика, 1983, № 6. с. 10–22.

[10] Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд–во Удмурт. гос. ун–та, 1995. 429 с.

[11] Козлов В.В. Общая теория вихрей. Ижевск: Изд–во Удмурт. гос. ун–та, 1998. 238 с.

[12] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, Т. 2. М.–Л.: ГИТТЛ. 1945.

[13] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука. 1978.

[14] Jacobi C.G.J. Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung // Gesammelte Werke, 1827, Band IV, S. 7.

[15] Saltykow N.N. Elude sur les integrates d'un systeme des equations differentielles aux derivees partielles de pliisieurs fonctions inconnues // Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1897, T. III, 5-e série, P. 423.

[16] Santilli R.M. Foundations of theoretical mechanics. Vol. 2. New York – Heidelberg – Berlin: Springer–Verlag. 1983.

[17] Фимин Н.Н., Чечёткин В.М. Динамика частиц в оригинальной метрике Шварцшильда // Астроном. журнал, 2016, т. 93, № 4 , с. 379–388.

[18] Monge G. Supplément, ou l'on fait voit que les équations aux difféfences ordinaires, pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites, sont susceptibles d'une véritable intégration, et que c'est de cette intération que depend celle des équations aux différences partielles élevés, Mém. Acad. Sci. Paris, 1784, pp. 502–576.

[19] Clebsch A. Über die Integration der hydrodynamischen Gleichungen // J. Reine Angew. Math., 1859, T. 57, SS. 1–10.

[20] Seliger R.L., Whitham G.B. Variational principles in continuum mechanics // Proc. Roy. Soc. A, 1968, vol. 305, pp. 1–25.

[21] van Saarloos W. A canonical transformation relating the Lagrangian and Eulerian description of ideal hydrodynamics // Physica A, 1981, vol. 108. pp. 557–566.