



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Вашковьяк М.А.**

О полуаналитическом  
методе построения  
ограниченного движения в  
центральной силовом поле

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки***

Вашковьяк М.А. О полуаналитическом методе построения ограниченного движения в центральной силовом поле // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 6. 28 с.  
doi:[10.20948/prepr-2018-6](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-6)

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-6>

***Публикации по материалам препринта***

М.А. Вашковьяк, О полуаналитическом методе построения ограниченного движения в центральной силовом поле. Это препринт Произведения, принятого для публикации в журнале «Астрономический вестник» @ 2018 г. М.А.Вашковьяк.

(M.A. Vashkov'yak, On semi-analytical method for construction bounded motion in a central power field. This a preprint of the Work accepted for publication in "Solar System Research" © Pleiades Publishing, Inc., 2018)

URL: <http://pleiades.online/>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**М.А. Вашковьяк**

**О полуаналитическом методе  
построения ограниченного движения  
в центральном силовом поле**

**Москва — 2018**

## **Вашковьяк М.А.**

О полуаналитическом методе построения ограниченного движения в центральном силовом поле.

Рассматривается известная интегрируемая в квадратурах задача о движении в центральном поле. Силовая функция задачи зависит лишь от расстояния материальной точки до выбранного начала координат. В общем случае произвольной центральной силы строгого аналитического решения задачи получить не удастся в силу сложности интегралов. В настоящей работе для случая, когда расстояние изменяется в ограниченных пределах, предложен полуаналитический метод построения приближенного решения, позволяющий получить зависимости полярных координат от времени с использованием эллиптических функций и интегралов. В качестве примера рассмотрены модельные задачи о возмущенном движении гипотетических экваториальных спутников Юпитера и Луны, а также о движении одиночной звезды в главной плоскости галактики. Оценка методической точности получена путем сравнения с численным решением.

**Ключевые слова:** центральная сила, ограниченное движение, полуаналитическое решение.

## **Mikhail Alexandrovich Vashkov'yak**

On semi-analytical method for construction bounded motion in a central power field.

The known integrable in quadratures problem is examined about motion in the central field. The force function of the problem depends only on distance of material point to the chosen origin of the coordinates. In general case of arbitrary central force no rigorous analytical solution of the problem can be obtained due to the complexity of the integrals. In the present work for a case, when distance changes in finite limits, the semi-analytical method for construction of approximate solution, getting dependences of polar coordinates on time, is offered using elliptical functions and integrals. A model problem is as an example considered for perturbing motion of hypothetical equatorial satellites of the Jupiter and of the Moon as well as motion of single star in the main plane of galaxy. The estimation of methodical accuracy is obtained by comparing to the numerical solution.

**Key words:** central force, bounded motion, semi-analytical solution.

## 1. Введение

В настоящей работе рассматривается интегрируемая в квадратурах задача о движении материальной точки в центральном силовом поле. Силовая функция задачи  $U$ , зависящая лишь от расстояния материальной точки до выбранного начала координат, предполагается известной. Общие качественные особенности движения такой динамической системы с одной степенью свободы, разумеется, хорошо изучены и описаны практически во всех руководствах по теоретической механике, причем более детально изложен специальный случай ограниченного (либрационного) движения, когда расстояние изменяется в конечных пределах. Не претендуя на полноту, укажем известные монографии и учебники по теоретической и небесной механике. Вот они: (Ландау, Лифшиц, 1965, гл. III, § 14), (Арнольд, 1974, гл. 2, § 8), (Парс, 1971, гл. I, § 1.3, гл. V, § 5.2), (Лидов, 2010, гл. 4, § 4.7), (Дубошин, 1963, гл. 4, § 4), (Шарлье, 1966, гл. II, § 2), (Уинтнер, 1967, гл. III, § 185). В этих и многих других руководствах подробно описаны качественные особенности изменения расстояния  $r$  и полярного угла  $\theta$ , однако строгого и полного аналитического решения (т.е. их зависимостей от времени  $t$ ) для центральной силы произвольного вида не получено. Для силовой функции  $U \sim r^{-n}$ , где  $n = \pm 1, \pm 2, 3, \pm 4, \pm 6$ , квадратуры задачи могут быть получены в известных (элементарных или специальных) функциях (Парс, 1971, гл. XVII, § 17.8). В задаче Кеплера ( $n = 1$ ) и в задаче о гармоническом осцилляторе ( $n = -2$ ) обращение квадратур позволяет найти искомые зависимости в достаточно простом явном виде, а траектории ограниченного движения в плоскости  $(\theta, r)$  оказываются замкнутыми. В работе (Бабаджанянц и др., 2015) для девяти конкретных видов центральных (невозмущенных) полей приведено решение задачи в квадратурах, намечены способы их вычисления и обращения в известных специальных функциях. Подобная предварительная процедура оказывается необходимой для последующего теоретически возможного построения решения уравнений в вариациях возмущенной задачи (Бабаджанянц и др., 2014 а, б). В работе (Fonda & Gallo, 2017) рассмотрены радиальные периодические возмущения центрального кеплеровского силового поля и доказано существование периодических орбит, близких к круговым. Там же указаны ссылки на ряд статей по данной теме.

В настоящей работе рассмотрен случай ограниченного движения материальной точки в центральном некеплеровском силовом поле и предложен метод построения приближенного полуаналитического решения задачи, позволяющий получить зависимости полярных координат от времени с помощью эллиптических функций и интегралов. В качестве примеров приведены решения модельной задачи о движении гипотетических экваториальных спутников Юпитера и Луны с учетом влияния их сжатия и

притяжения системы конечного числа материальных гауссовых колец. Эти кольца моделируют «осредненное» притяжение возмущающих тел. Для спутника Юпитера такими телами служат наиболее массивные (галилеевы) спутники и Солнце, а для спутника Луны – это Земля и Солнце. Кроме того, рассмотрено движение одиночной звезды в главной плоскости модельной гипотетической галактики типа «Сомбреро», состоящей из симметричной тонкой линзы, бесконечно тонкого диска и центрального ядра.

Рассмотрим небесно-механическую задачу о движении материальной точки  $P$  относительно выбранного начала координат  $O$ . Это движение, описываемое изменением вектора  $\mathbf{r}$  со временем  $t$ , происходит под действием силы  $\mathbf{F}$ , которая по предположению зависит только от расстояния  $r = |\mathbf{r}|$  между точками  $O$  и  $P$  и имеет силовую функцию

$$U(r) = \int \mathbf{F}(r) dr. \quad (1)$$

В качестве основной координатной плоскости, в которой происходит движение, выбирается неизменная плоскость, нормальная к вектору момента

$$\mathbf{c} = \left[ \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]. \quad (2)$$

Второй координатой, определяющей положение точки  $P$ , является полярный угол  $\theta$ , отсчитываемый от некоторого фиксированного направления в этой плоскости. Как известно, уравнения движения, имеющие вид

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{dU}{dr}, \quad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0, \quad (3)$$

допускают два первых интеграла

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = 2[U(r) + h], \quad r^2\dot{\theta} = c, \quad (4)$$

где  $h$  и  $c = |\mathbf{c}|$  суть произвольные постоянные интегрирования, определяемые значениями переменных  $r_0 = r(t_0)$ ,  $\dot{r}_0 = \dot{r}(t_0)$ ,  $\theta_0 = \theta(t_0)$ ,  $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(t_0)$  в начальный момент времени  $t_0$  (см., например, (Дубошин, 1963)). Эти интегралы позволяют свести задачу к нахождению квадратуры

$$t = t_0 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}, \quad (5)$$

где

$$f(\rho) = U(\rho) - \frac{c^2}{2\rho^2} + h, \quad (6)$$

после обращения которой, в принципе, можно найти зависимость  $r(t)$  и далее

$$\theta(t) = \theta_0 + c \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{r^2(\tau)}, \quad (7)$$

причем для действительного движения должно быть выполнено условие

$$h \geq \frac{c^2}{2r^2} - U(r).$$

Строгое аналитическое нахождение зависимостей  $r(t)$  и  $\theta(t)$  возможно лишь для некоторых задач, указанных выше, а для силовой функции  $U(r)$  произвольного вида оно представляется невыполнимым.

Целью данной работы является построение приближенного полуаналитического решения в случае ограниченного (либрационного) изменения  $r$ , в котором должно выполняться условие  $0 < r_{\min} < r < r_{\max}$ . Сами экстремальные значения могут быть найдены численным решением уравнений  $f(r_{\min}) = 0$  и  $f(r_{\max}) = 0$ , в которых функция  $f$  определена строгим выражением (6) для произвольной силовой функции  $U(r)$ . В дальнейшем, не вводя существенных ограничений, будем считать, что

$$t_0 = 0, \quad r_0 = r_{\min}, \quad \dot{r}_0 = 0, \quad \theta_0 = 0, \quad \dot{\theta}_0 = \frac{c}{r_0^2}. \quad (8)$$

## 2. Аппроксимация функции $f(\rho)$

Предположим, что  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$  являются простыми нулями функции  $f(\rho)$ . Тогда, используя указания, встречающиеся в руководствах по теоретической и небесной механике при описании движения с одной степенью свободы (Парс, 1971; Шарлье, 1966), эту функцию можно представить в виде

$$f(\rho) = g(\rho)(\rho - r_{\min})(r_{\max} - \rho). \quad (9)$$

Отметим, что функция  $g(\rho)$  может быть вычислена по известному выражению (6) и численно найденным экстремальным значениям  $r_{\min}$ ,  $r_{\max}$  как

$$g(\rho) = \frac{f(\rho)}{(\rho - r_{\min})(r_{\max} - \rho)}. \quad (10)$$

Далее для приведения интеграла (5) к эллиптическому виду применим аппроксимацию функции  $g(\rho)$  квадратичным полиномом

$$P(\rho) = p_1\rho^2 + p_2\rho + p_3 = p_1(\rho - r_1)(\rho - r_2) \approx g(\rho). \quad (11)$$

Его коэффициенты  $p_1, p_2, p_3$  находятся способом наименьших квадратов на отрезке  $r_{\min} \leq \rho \leq r_{\max}$ , а корни  $r_1, r_2$  определяются известными простейшими формулами

$$r_1 = \frac{1}{2p_1}(-p_2 + \sqrt{D}), \quad r_2 = \frac{1}{2p_1}(-p_2 - \sqrt{D}), \quad D = p_2^2 - 4p_1p_3,$$

причем в реальном движении должно быть  $P(\rho) > 0$ .

Полином четвертой степени

$$Q(\rho) = p_1(\rho - r_1)(\rho - r_2)(\rho - r_3)(r_4 - \rho) \approx f(\rho), \quad (12)$$

где

$$r_3 = r_{\min}, \quad r_4 = r_{\max}, \quad (13)$$

будет аппроксимирующим для функции  $f(\rho)$ .

При  $D > 0$  необходимым условием корректности использования предлагаемого метода является отсутствие корней  $g$ -аппроксимирующего полинома  $P(\rho)$  внутри отрезка

$$r_3 \leq \rho \leq r_4,$$

т.е., четыре действительных корня полинома  $Q(\rho)$  должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$[r_2 < r_1 < r_3, \text{ если } p_2 > 0 \quad \text{или} \quad r_4 < r_2 < r_1, \text{ если } p_2 < 0] \quad \text{при } p_1 > 0 \quad (14)$$

или

$$r_1 < r_3 < r_4 < r_2 \quad \text{при } p_1 < 0. \quad (15)$$

В случае  $D < 0$  должно выполняться лишь условие  $p_1 > 0$ , поскольку при этом

$$(\rho - r_1)(\rho - r_2) = \left( \rho - \frac{p_2}{2p_1} \right)^2 - \frac{D}{4p_1^2} > 0.$$

Таким образом, при фиксированных постоянных значениях  $h$  и  $c$  аналитическое решение для его построения (конструирования) требует проведения ряда предварительных вычислений как экстремальных значений  $r$ , так и коэффициентов аппроксимирующего полинома. После этого обращением квадратуры (5), находится зависимость  $r(t)$ , а затем вычислением интеграла (7) определяется и зависимость  $\theta(t)$ . Эти процедуры выполняются по-разному для  $D < 0$  и  $D > 0$ . В следующем разделе для единства изложения и восприятия будут вынужденно повторены некоторые формулы, в других обозначениях содержащиеся в статьях (Вашковьяк, 2016, 2017), где предлагаемый метод, названный конструктивно-аналитическим, был уже использован при построении решения одной из эволюционных задач небесной механики – двукратно осредненной задачи Хилла с учетом сжатия центральной планеты. Кроме формул для нахождения  $r(t)$ ,  $\theta(t)$ , будут приведены и необходимые вспомогательные промежуточные величины, полученные с использованием справочника (Абрамовиц, Стиган, 1979) и таблиц (Градштейн, Рыжик, 1962).

### 3. Зависимости параметров движения от времени

**3.1.** В случае  $D < 0$  полином  $Q(\rho)$ , кроме двух действительных корней  $r_3, r_4$ , имеет два комплексно-сопряженных

$$r_1 = \frac{1}{2p_1}(-p_2 + i\sqrt{-D}), \quad r_2 = \frac{1}{2p_1}(-p_2 - i\sqrt{-D}), \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (16)$$

Зависимость расстояния от времени определяется формулами

$$r(t) = \frac{\alpha + \beta \operatorname{cnu}(t)}{\gamma + \delta \operatorname{cnu}(t)}, \quad k^2 = \frac{(r_4 - r_3)^2 - \delta^2}{4pq},$$

$$\alpha = pr_3 + qr_4, \quad \beta = pr_3 - qr_4, \quad \gamma = p + q, \quad \delta = p - q,$$

$$p = \sqrt{(m_1 - r_4)^2 + m_2^2}, \quad q = \sqrt{(m_1 - r_3)^2 + m_2^2}, \quad (17)$$

$$m_1 = -\frac{p_2}{2p_1}, \quad m_2 = \frac{\sqrt{-D}}{2p_1}, \quad u(t) = vt, \quad v = \sqrt{2p_1pq}.$$

Здесь  $\operatorname{cnu}$  – эллиптический косинус Якоби с модулем  $k$ . В принятом диапазоне изменения расстояния он остается меньше единицы и обращается в нуль при  $r_3 = r_4$  (при этом  $p = q$ ). Зависимость  $r(t)$  является периодической функцией  $u$  с периодом  $4\mathbf{K}(k^2)$ , а соответствующий период по времени равен

$$T_r = \frac{4}{v} \mathbf{K}(k^2) \quad (18)$$

где  $\mathbf{K}(k^2)$  – полный эллиптический интеграл 1-го рода с модулем  $k$ .

Зависимость от времени полярного угла  $\theta$  определяется путем нахождения интеграла в формуле (7). Подставляя в его подынтегральное выражение зависимость  $r(\tau)$ , согласно формулам (17), получим

$$\theta(t) = \frac{c}{v} \left( \frac{\delta}{\beta} \right)^2 \left\{ u(t) + 2sI_1[u(t)] + s^2I_2[u(t)] \right\}, \quad (19)$$

где

$$I_l[u(t)] = \int_0^{u(t)} \frac{dw}{(b + \operatorname{cn}w)^l}, \quad (l=1,2), \quad b = \frac{\alpha}{\beta}, \quad s = \frac{\gamma}{\delta} - b. \quad (20)$$

Выполняя замену переменных  $\sigma = \arcsin(\operatorname{sn}w)$ ,  $\psi = \arcsin(\operatorname{sn}u)$ , получим соответствующие интегралы

$$I_l\{\psi[u(t)]\} = \int_0^{\psi} \frac{d\sigma}{\Delta(\sigma, k^2)(b + \cos\sigma)^l} \quad (l=1,2), \quad \Delta(\sigma, k^2) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\sigma}, \quad (21)$$

которые выражаются через тригонометрические функции, неполные эллиптические интегралы 1-го, 2-го, 3-го рода и параметр  $B = b^2 - 1$

$$I_1(\psi) = \frac{b}{B} \Pi\left(\psi, \frac{1}{B}, k^2\right) + \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\Delta(\psi, k^2)}{\sin \psi} \sqrt{\frac{B}{1+k^2B}}\right) - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{B(1+k^2B)}},$$

$$I_2(\psi) = \frac{(-1)}{B(1+k^2B)} \left[ \begin{array}{l} \frac{\Delta(\psi, k^2) \sin \psi}{b + \cos \psi} - b(1+2k^2B)I_1(\psi) - \\ -E(\psi, k^2) + (1+k^2B)F(\psi, k^2) \end{array} \right]. \quad (22)$$

С использованием зависимостей (19) - (22) нетрудно получить аналитическое выражение для изменения  $\theta$  (или для величины прецессии линии апсид  $\Delta\theta$ ) за один оборот спутника.

Полагая  $u = 4\mathbf{K}(k^2)$ ,  $\psi = 2\pi$ , получим

$$\Delta\theta = \theta(T_r) - 2\pi,$$

$$\theta(T_r) = \frac{4c}{\nu B} \left(\frac{\delta}{\beta}\right)^2 \left\{ \begin{array}{l} (B-s^2)\mathbf{K}(k^2) + \frac{s^2}{1+k^2B}\mathbf{E}(k^2) + \\ + \frac{sb}{B(1+k^2B)} [2B+sb+2k^2B(B+sb)]\mathbf{\Pi}\left(\frac{1}{B}, k^2\right) \end{array} \right\}, \quad (23)$$

а символы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{\Pi}$  означают полные эллиптические интегралы 2-го и 3-го рода, соответственно.

В общем случае период  $T_\theta$  изменения этого угла на величину  $2\pi$  определяется трансцендентным уравнением  $\theta(T_\theta) = 2\pi$ . Если отличие движения от кеплеровского достаточно мало, то  $T_\theta \approx T_r - \frac{\Delta\theta}{c} r_3^2$ .

**3.2.** В случае  $D > 0$  все четыре корня полинома  $Q(\rho)$  действительны, а зависимость расстояния от времени определяется формулами

$$r(t) = \frac{\alpha' + \beta' \operatorname{sn}^2 u}{\gamma' + \delta' \operatorname{sn}^2 u}, \quad \alpha' = r_3 \gamma', \quad \beta' = r_1 \delta', \quad \gamma' = r_1 - r_4, \quad \delta' = r_4 - r_3,$$

$$k^2 = \frac{\delta'(r_1 - r_2)}{\gamma'(r_2 - r_3)}, \quad u(t) = \nu' t, \quad \nu' = \sqrt{\frac{p_1}{2} \gamma' (r_2 - r_3)}. \quad (24)$$

где  $\operatorname{sn} u$  – эллиптический синус Якоби и  $s$  модулем  $\kappa$ , который в ограниченном диапазоне изменения расстояния остается меньше единицы и обращается в нуль при  $r_1 = r_2$  ( $D = 0$ ) или при  $r_3 = r_4$ .

Зависимость  $r(t)$  является периодической функцией  $u$  с периодом  $2\mathbf{K}(k^2)$ , а соответствующий период по времени равен

$$T_r' = \frac{2}{v'} \mathbf{K}(\kappa^2) \quad (25)$$

где  $\mathbf{K}(\kappa^2)$  – полный эллиптический интеграл 1-го рода с модулем  $\kappa$ .

Отметим, что в формулах (17) и (24) различные выражения для модулей эллиптических функций обозначены похожими буквами  $k$  и  $\kappa$ , чтобы не вводить подобный символ со штрихом, стандартно используемый для дополнительного модуля.

Зависимость от времени полярного угла  $\theta$  определяется путем нахождения интеграла в формуле (7). Подставляя в его подынтегральное выражение зависимость  $r(\tau)$ , согласно формулам (24), получим

$$\theta(t) = \frac{c}{v' r_1^2} \left\{ u(t) + 2s' I_1' [u(t)] + s'^2 I_2' [u(t)] \right\}, \quad (26)$$

где

$$I_l' [u(t)] = \int_0^{u(t)} \frac{dw}{(b' + \operatorname{sn}^2 w)^l}, \quad (l=1,2), \quad b' = \frac{\alpha'}{\beta'}, \quad s' = \frac{\gamma'}{\delta'} - b'. \quad (27)$$

Выполняя замену переменных  $\sigma = \arcsin(\operatorname{sn} w)$ ,  $\psi = \arcsin(\operatorname{sn} u)$ , получим соответствующие интегралы

$$I_l' \left\{ \psi [u(t)] \right\} = \int_0^\psi \frac{d\sigma}{\Delta(\sigma, \kappa^2) (b' + \sin^2 \sigma)^l} \quad (l=1,2), \quad (28)$$

которые так же, как и в предыдущем случае, выражаются через тригонометрические функции и эллиптические интегралы 1-го, 2-го и 3-го рода и параметр  $B' = b'(1+b')(1+k^2b')$ ,

$$I_1'(\psi) = \frac{1}{b'} \Pi\left(\psi, \frac{1}{b'}, \kappa^2\right),$$

$$I_2'(\psi) = \frac{1}{2b'(1+b')(1+\kappa^2b')} \left[ \frac{\Delta(\psi, \kappa^2) \sin \psi \cos \psi}{b' + \sin^2 \psi} + [1 + 2b'(1 + \kappa^2) + 3\kappa^2 b'^2] I_1'(\psi) - \right. \\ \left. -(1 + \kappa^2 b') F(\psi, \kappa^2) + E(\psi, \kappa^2) \right]. \quad (29)$$

С использованием зависимостей (24) - (29) нетрудно получить аналитическое выражение для изменения угла  $\theta$  (или для величины прецессии линии апсид  $\Delta\theta$ ) за один оборот спутника.

Полагая  $u = 2\mathbf{K}(\kappa^2)$ ,  $\psi = \pi$ , получим

$$\Delta\theta = \theta(T_r') - 2\pi,$$

$$\theta(T_r') = \frac{c}{v'r_1^2 B'} \left\{ \frac{[2b'(1+b') - s'^2](1 + \kappa^2 b') \mathbf{K}(\kappa^2) + s'^2 \mathbf{E}(\kappa^2) +}{+ \frac{s'}{b'} [4B' + s'(1 + 2b' + \kappa^2 b'(2 + 3b'))] \Pi\left(\frac{1}{b'}, \kappa^2\right)} \right\}. \quad (30)$$

В общем случае период  $T_\theta'$  изменения этого угла на величину  $2\pi$  определяется трансцендентным уравнением  $\theta(T_\theta') = 2\pi$ .

**Замечание:** Необходимо отметить, что определение эллиптического интеграла 3-го рода, принятое в руководстве (Градштейн, Рыжик, 1962)

$$\Pi(\psi, n, k^2) = \int_0^\psi \frac{dx}{(1 + n \sin^2 x) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}, \quad (31)$$

знаком параметра отличается от определения в справочнике, где приведен и алгоритм его вычисления (Абрамовиц, Стиган, 1979, гл. 17.7.)

$$\Pi(\psi, m, k^2) = \int_0^\psi \frac{dx}{(1 - m \sin^2 x) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}, \quad (32)$$

т.е., положительный параметр  $n$  в формуле (31) соответствует отрицательному параметру  $m$  в формуле (32) и наоборот. Поэтому при  $m < 0$

следует дополнительно использовать формулы 17.7.15 – 17.7.17 этого справочника для приведения параметра эллиптического интеграла 3-го рода  $\Pi(\psi, N, k^2)$  к диапазону  $k^2 < N < 1$ .

#### 4. Методические примеры решения модельных задач

В данном разделе проводится сопоставление результатов, полученных предлагаемым методом и методом численного интегрирования уравнений (3). В качестве примеров рассмотрены различные варианты модельной механической системы, отличающиеся лишь линейными и массовыми параметрами. Отметим, что задача о движении точки бесконечно малой массы в потенциальном силовом поле притяжения произвольного тела (или системы тел) терминологически известна как задача Фату (Fatou P., 1931; Дубошин, 1964, гл. VII). Рассматриваемое здесь центральное движение теоретически существует как плоское частное решение этой задачи для силовой функции, обладающей осевой симметрией и симметрией относительно какой-либо плоскости. В нижеследующих примерах изменение  $r$  на конечном интервале времени ограничено. По аналогии с кеплеровским движением точки минимального и максимального удаления спутника от начала координат называют апсидами (Парс, 1971), причем полярные углы (или долготы) этих точек медленно изменяются в отличие от невозмущенного движения, в котором они постоянны и равны 0 или  $\pi$ . Поскольку движение спутника ограничено по расстоянию ( $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ ), можно задать в качестве исходных параметров именно апсидальные (перигелическое и апогелическое) значения  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$ . При этом для заданных постоянных  $c$  и  $h$  не требуется численного решения уравнений

$$f(r_{\min}) = U(r_{\min}) - \frac{c^2}{2r_{\min}^2} + h = 0, \quad f(r_{\max}) = U(r_{\max}) - \frac{c^2}{2r_{\max}^2} + h = 0 \quad (33)$$

относительно  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$ . Наоборот, при  $r_{\max} \neq r_{\min}$  (в противном случае  $r = \text{const}$ ) можно определить постоянные интегралов как решение уравнений (33) относительно  $c$  и  $h$  для принятых экстремальных значений  $r$

$$c = r_{\min} r_{\max} \sqrt{\frac{2[U(r_{\min}) - U(r_{\max})]}{r_{\max}^2 - r_{\min}^2}}, \quad h = \frac{r_{\min}^2 U(r_{\min}) - r_{\max}^2 U(r_{\max})}{r_{\max}^2 - r_{\min}^2}. \quad (34)$$

Начальные параметры движения определяются формулами (8) и этот полный набор начальных данных служит для расчета ограниченного движения в экваториальной плоскости как полуаналитическим методом, так и с помощью численного интегрирования уравнений (3) с контролем постоянства  $h$  и  $c$  вдоль решения.

#### 4.1. О движении гипотетических экваториальных спутников Юпитера и Луны

Рассмотрим движение спутника  $P$  пренебрежимо малой массы, происходящее в поле притяжения осесимметричного и экваториально-симметричного тела, расположенного в центре  $O$  системы  $J$  компланарных концентрических материальных гауссовых колец. Предполагается, что плоскости спутниковой орбиты и этой системы совпадают с экваториальной плоскостью тела, причем расстояние  $OP$  изменяется в ограниченных пределах.

В небесно-механическом плане наиболее близкими к рассматриваемой модельной системе по взаимной ориентации экваториальной плоскости и плоскости орбит возмущающих тел являются Юпитер и Луна, для которых указанное отличие не превышает нескольких градусов. Поэтому далее будут рассмотрены три конкретных модельных примера. В первом и втором основным притягивающим телом является тело юпитерианской массы. С его центром масс совпадает центр системы пяти колец с радиусами йовицентрических орбит галилеевых спутников и Солнца. В третьем - главное тело обладает лунной массой, а два кольца имеют радиусы, равные расстояниям Земля – Луна и Земля – Солнце, соответственно. Укажем, что модель движения материальной точки пренебрежимо малой массы «под влиянием притяжения кругового однородного кольца и материальной точки, расположенной в его центре» использована в работе (Орлов, 1945) для нахождения периодических решений соответствующей задачи Фату.

В рассматриваемой модельной задаче предполагается, что силовая функция включает в себя только четные зональные гармоники ее разложения в ряд по полиномам Лежандра и имеет следующий вид

$$U(r) = \frac{\mu}{r} \left[ 1 + \frac{1}{2} J_2 \left( \frac{a_0}{r} \right)^2 - \frac{3}{8} J_4 \left( \frac{a_0}{r} \right)^4 + \dots \right] + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^J \frac{\mu_j}{(r+a_j)} \mathbf{K}(\lambda_j^2), \quad (35)$$

а ее производная по  $r$  дается формулой

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{\mu}{r^2} \left[ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{a_0}{r} \right)^2 - \frac{15}{8} J_4 \left( \frac{a_0}{r} \right)^4 + \dots \right] - \frac{1}{\pi r} \sum_{j=1}^J \mu_j \left[ \frac{\mathbf{K}(\lambda_j^2)}{r+a_j} + \frac{\mathbf{E}(\lambda_j^2)}{r-a_j} \right]. \quad (36)$$

Здесь  $\mu$  и  $\mu_j$  – произведения гравитационной постоянной на массы основного и  $j$ -го возмущающего тела, соответственно,  $a_0$  – средний экваториальный радиус основного тела,  $J_2$  и  $J_4$ , соответственно, коэффициенты двух четных зональных гармоник его потенциала, которыми мы здесь и ограничимся,  $a_j$  – радиус  $j$ -го кольца,  $\mathbf{K}(\lambda_j^2), \mathbf{E}(\lambda_j^2)$  – полные эллиптические интегралы, соответственно, 1-го и 2-го рода с модулями  $\lambda_j = 2\sqrt{ra_j}(r+a_j)^{-1}$ . В формулах

(35) и (36) каждое слагаемое, пропорциональное  $\mu_j$ , описывают силовую функцию отдельного кругового гауссова кольца и ее производную по  $r$  в двумерной задаче (Дубошин, 1961, с. 111).

Задача о движении экваториального спутника сжатой планеты (с учетом лишь гармоник  $J_2$ ) исследована В.В. Белецким и описана в исходной статье (Белецкий, 1962), а также в его монографии (Белецкий, 1965). Наряду с качественными особенностями движения в этих работах также получена зависимость расстояния от времени. Задача, сформулированная в данном разделе, в некотором смысле развивает эти исследования. Предлагаемый полуаналитический метод позволяет получить явные зависимости от времени как расстояния  $r$ , так и полярного угла  $\theta$ . При этом в силовой функции притяжения  $U(r)$  в добавление к  $J_2$  учитывается еще и гармоника  $J_4$  (алгоритмически возможен учет и произвольного числа четных зональных гармоник), а также «осредненного» влияния притяжения возмущающих тел. Выбор модельной механической системы, в которой массы точек равномерно распределены вдоль их компланарных экваториальных орбит, обусловлен, в первую очередь, методическими целями.

Предварительно для каждого из рассмотренных примеров (вариантов) по методу наименьших квадратов произведена аппроксимация функции  $g(\rho)$ , определяемой формулой (9), квадратичным полиномом  $P(\rho)$  на отрезке  $r_{\min} = r_3 \leq \rho \leq r_4 = r_{\max}$ , вычисление его дискриминанта  $D$  и корней  $r_1, r_2$  (см. табл. 1).

Табл. 1.

Экстремальные значения  $r$  и типы корней полинома  $Q(r)$ .

Номер варианта	1 Спутник Юпитера	2 Спутник Юпитера ( $\mu_5 \cdot 10^3$ )	3 Спутник Луны ( $\mu_1 \cdot 5 \cdot 10^4$ )
$r_{\min}$ , ТЫС. КМ	3000	3000	1.788
$r_{\max}$ , ТЫС. КМ	5000	5000	1.970
Тип корней	$r_1, r_2$ комплексно- спряженные, $r_3, r_4$ действительные, $D < 0$	$r_1, r_2$ комплексно- спряженные, $r_3, r_4$ действительные, $D < 0$	$r_1, r_2, r_3, r_4$ действительные, $D > 0$

Поскольку в варианте 1 на рассматриваемом интервале времени движение оказывается достаточно близким к кеплеровскому, в варианте 2 потребовалось (гипотетически) в тысячу раз увеличить массу «солнечного» кольца. Это сделано для того, чтобы наглядно проявить возможности предлагаемого методического подхода при «сильных возмущениях». Кроме

того, чтобы убедиться в корректности формул как для  $D < 0$ , так и для  $D > 0$ , в варианте 3 методически потребовалось увеличить массу «земного» кольца в 50000 раз.

Для варианта 1 сравнительные результаты расчетов зависимостей от времени расстояния и полярного угла показаны, соответственно, на рис. 1, 2.

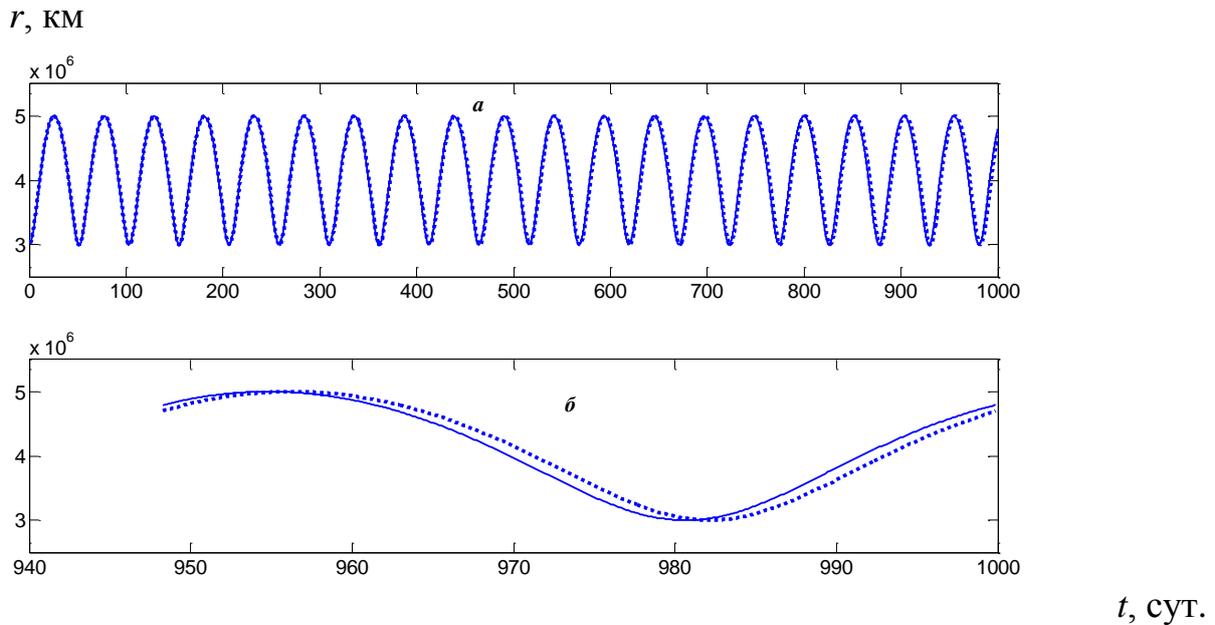


Рис. 1. Зависимости от времени расстояния для варианта 1 (сплошные кривые – аналитическое решение, пунктирные кривые – численное решение).

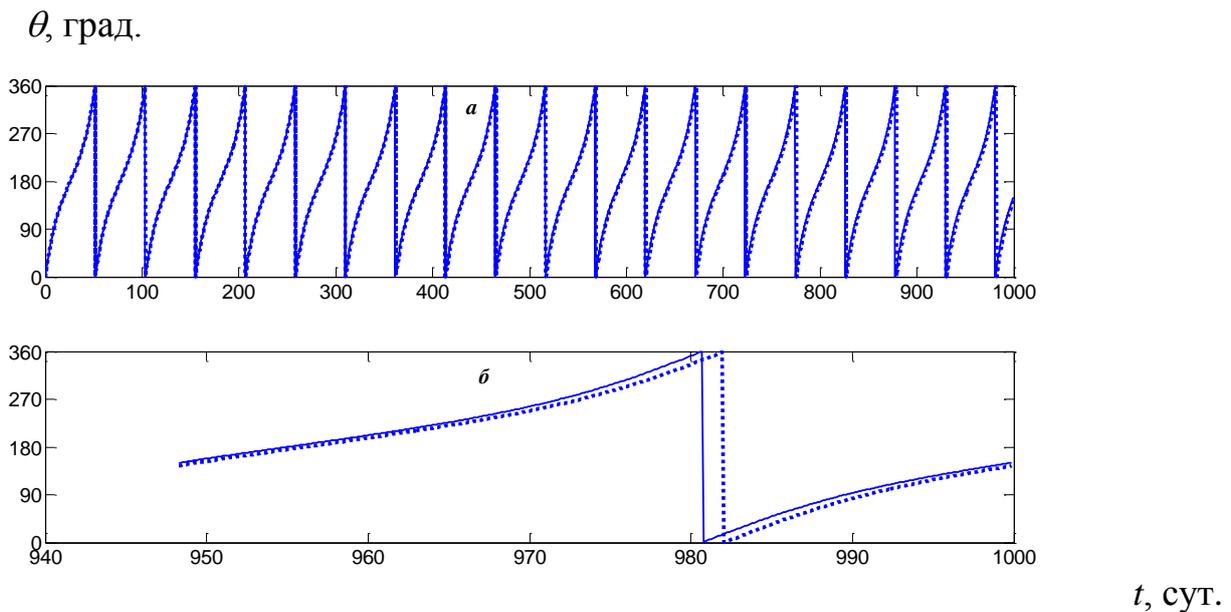


Рис. 2. То же самое, что и на рис. 1, но для полярного угла.

На фрагментах «а» рисунков 1 и 2 представлен интервал времени 1000 суток, а на фрагментах «б» - существенно меньший интервал, соответствующий последнему обороту спутника. Именно фрагменты «б» этих рисунков позволяют получить наглядную количественную оценку методической погрешности предлагаемого приближенного решения, обусловленной аппроксимацией функции  $g(\rho)$  (формула (10)) квадратичным полиномом  $P(\rho)$  (формула (11)).

Для варианта 2 сравнительные результаты расчетов зависимостей от времени расстояния и полярного угла показаны, соответственно, на рис. 3, 4.

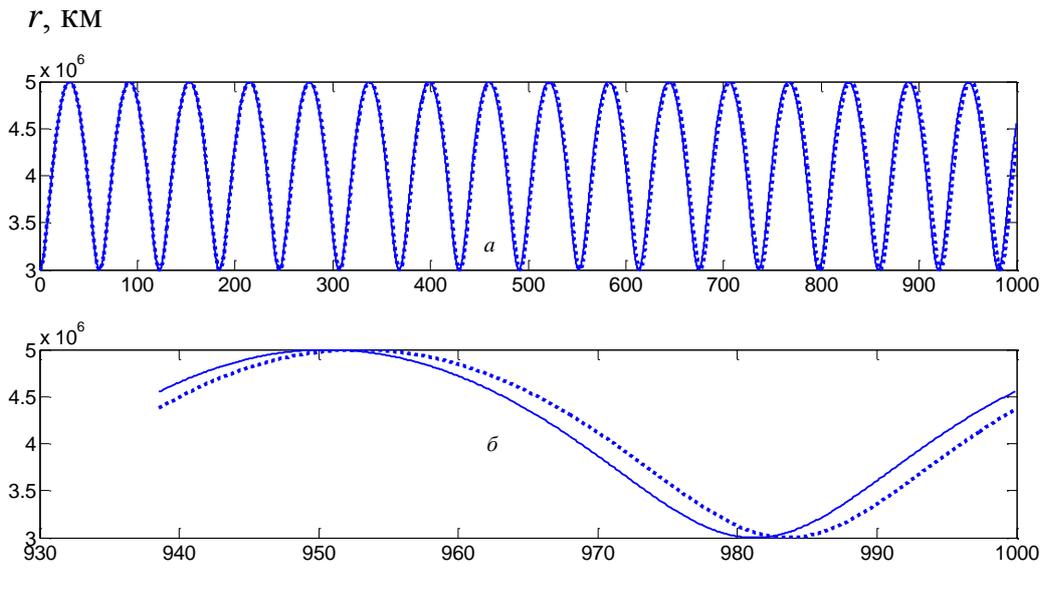


Рис. 3. То же самое, что и на рис. 1, но для варианта 2

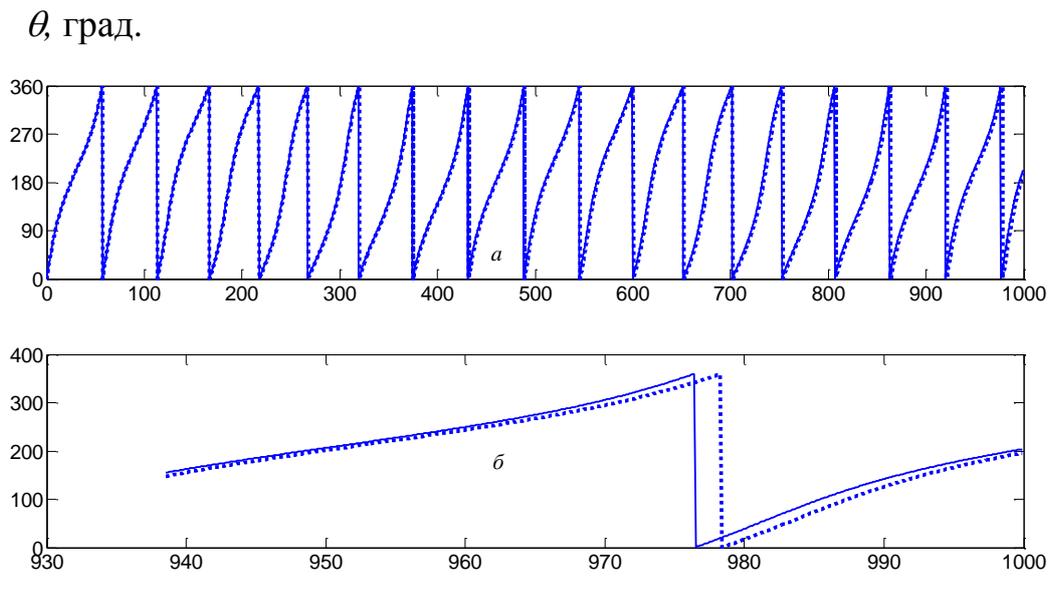


Рис. 4. То же самое, что и на рис. 3, но для полярного угла.

Для варианта 3 (случай  $D > 0$ ) выполненные сравнительные расчеты приводят к аналогичным графическим зависимостям (рис. 5 и 6).

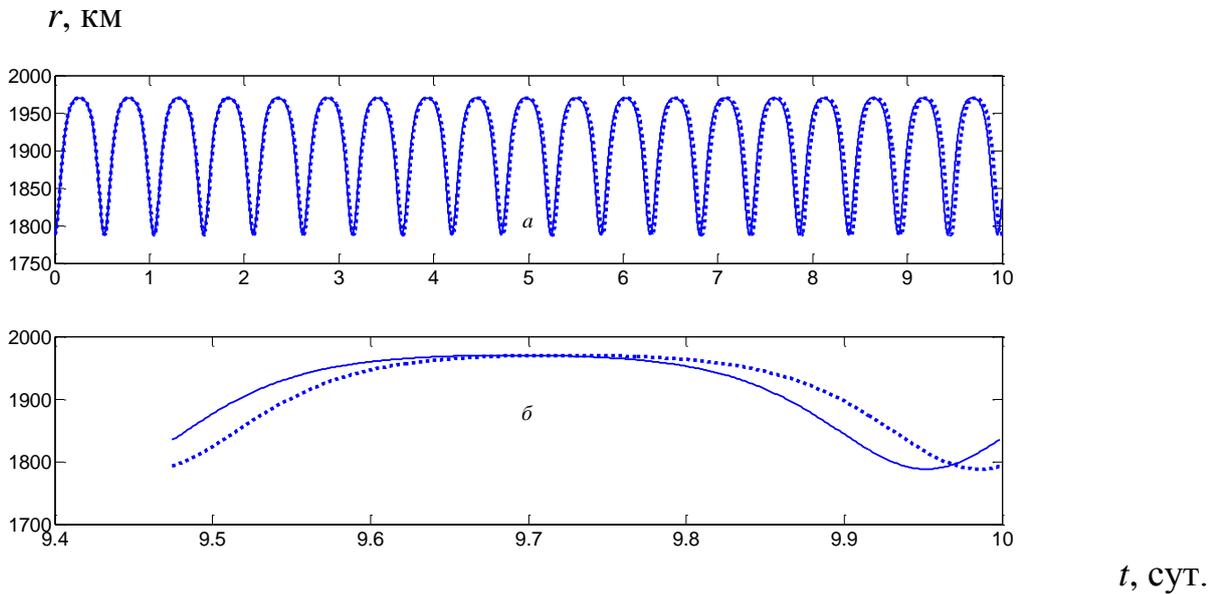


Рис. 5. То же самое, что и на рис. 3, но для варианта 3.

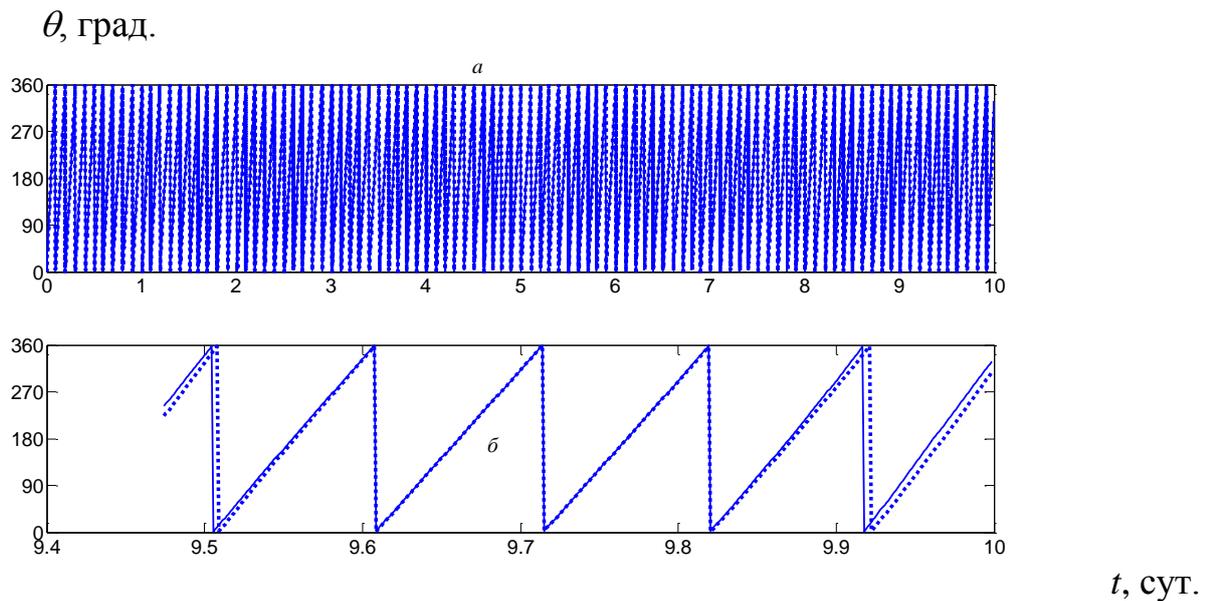


Рис. 6. То же самое, что и на рис. 5, но для полярного угла.

Дополнительную информацию о точностных характеристиках решения дает сравнение основных периодов изменения координат  $r$  и  $\theta$ . В табл. 2 для трех вариантов представлены периоды  $T_r$  и  $T_\theta$ , найденные, соответственно, по аналитическим формулам и по результатам численного интегрирования. Для  $T_\theta$  дана дополнительная строка со значениями, полученными интерполяцией аналитически рассчитанных таблиц (зависимостей  $\theta$  от времени). Для варианта 1 периоды  $T_r$  и  $T_\theta$  оказываются близкими поэтому, естественно, значения в третьей и четвертой строках совпадают.

Периоды изменения полярных координат

Периоды \ Варианты	1 $D < 0$	2 $D < 0$	3 $D > 0$
$T_r$ (аналитический)	51.613 сут	61.326 сут	12.571 час
$T_r$ (численный)	51.691	61.475	12.613
$T_\theta$ (аналитический)	51.615	-	-
$T_\theta$ (таблично-аналитический)	51.615	57.156	2.223
$T_\theta$ (численный)	51.687	57.107	2.223

Особенностью вариантов 2 и 3 является заметное различие периодов изменения  $r$  и  $\theta$ , поэтому для  $T_\theta$ , меньшего  $T_r$ , приведены лишь четвертые строки с таблично-аналитическим значением периода, а в третьих строках - прочерк. Как следует из данных табл. 2, методическая относительная погрешность определения периодов не превышает 0.1%.

#### 4.2. О движении одиночной звезды в модельном гравитационном поле гипотетической галактики типа «Сомбреро»

Рассматриваемый ниже пример движения в более сложном центральном силовом поле относится к гипотетической звездно-галактической системе. Плоское движение одиночной звезды (или «блуждающей» - планеты) теоретически возможно в гравитационном поле галактики, обладающей осевой симметрией и симметрией относительно своей главной (экваториальной) плоскости.

Примем в качестве модельной галактику типа «Сомбреро», фигуру которой в самом грубом приближении, отвлекаясь от спиральной структуры, можно визуально представить как аксиально-симметричную линзу, симметричную также относительно главной плоскости. Распределение полной галактической массы  $M$  внутри этой фигуры зададим специальным образом, а саму галактику будем условно считать как бы состоящей из трех материальных тел:

- однородной симметричной круглой линзы массы  $\alpha_1 M$ , с радиусом  $a$  и толщиной  $2H$ ;
- бесконечно тонкого круглого диска массы  $\alpha_2 M$ , того же радиуса и с центром, совпадающим с центром линзы  $O$ ;
- шара массы  $\alpha_3 M$  с центром в той же точке  $O$ .

При этом очевидно, что положительные «весовые» коэффициенты  $\alpha_k$  ( $k=1,2,3$ ) удовлетворяют равенству

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad (37)$$

и задают конкретное распределение массы, причем в дальнейшем принято  $\alpha_1 = 0.2$ ,  $\alpha_2 = 0.799$ ,  $\alpha_3 = 0.001$ ,  $M = 8 \cdot 10^{11}$  солнечных масс. Значения  $\alpha_3$  и  $M$  по порядку величин соответствуют массе ядра (или «балджа») и общей массе галактики «Сомбреро», а значения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответствуют гипотетическому соотношению масс первых двух компонент.

Для рассматриваемого далее центрального движения пробной точки  $P$  (звезды) в главной плоскости галактики полная силовая функция  $U(r)$  во внешнем пространстве ( $\overline{OP} = r > a$ ), состоит из суммы силовых функций отдельных тел

$$U(r) = U_1(r) + U_2(r) + U_3(r), \quad (38)$$

где  $U_1(r)$  – силовая функция однородной круглой симметричной линзы,  $U_2(r)$  – силовая функция бесконечно тонкого круглого диска,  $U_3(r)$  – силовая функция шара.

В фундаментальной монографии Б.П. Кондратьева (Кондратьев, 2007) описаны разработанные им новые методы получения аналитических выражений потенциалов (или силовых функций) для множества материальных тел различной динамической структуры. В ней приводятся явные выражения, из которых непосредственно получаются функции  $U_1(r)$ ,  $U_2(r)$ , а третья функция, как известно из теории притяжения, для любого сферически симметричного распределения массы внутри шара и независимо от его радиуса определяется простейшей формулой

$$U_3(r) = \alpha_3 f M / r, \quad (39)$$

где  $f$  – гравитационная постоянная.

Потенциал однородной симметричной линзы выражается формулой, приведенной в книге (Кондратьев, 2007, стр. 342). Из этой формулы, вводя вместо плотности линзы ее массу, нетрудно получить выражение для силовой функции

$$U_1(r) = \frac{4f\alpha_1 M (R-H)}{\pi H^2 (3R-H)} \left\{ r [\mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k)] - \frac{1}{r} (a^2 - R^2) \mathbf{K}(k) + \frac{R^4}{r(R-H)^2} \mathbf{\Pi}(n, k) \right\}. \quad (40)$$

Здесь  $\mathbf{K}(k)$ ,  $\mathbf{E}(k)$ ,  $\mathbf{\Pi}(n, k)$  – полные эллиптические интегралы 1-го, 2-го и 3-го рода, соответственно, а параметр  $n$ , модуль  $k$  и величина  $R$  определяются формулами

$$n = -\frac{a^2}{(R-H)^2} < 0, \quad k = \frac{a}{r} < 1, \quad R = \frac{1}{2} \left( H - \frac{a^2}{H} \right). \quad (41)$$

Потенциал бесконечно тонкого круглого диска для общего закона распределения поверхностной плотности  $\sigma$  в зависимости от текущего расстояния  $r' < a$  внутренней точки диска до его центра  $O$  выражается формулой (Кондратьев, 2007, стр. 79), из которой нетрудно получить явное выражение функции  $U_2(r)$ . Для принимаемого в дальнейшем закона распределения

$$\sigma(r') = \sigma_0 \left(1 - \frac{r'^2}{a^2}\right), \quad (42)$$

где  $\sigma_0$  – поверхностная плотность соответствующего однородного диска, получается следующая формула

$$U_2(r) = \frac{16f\alpha_2 M}{9\pi a k^3} \left[ 2(2k^2 - 1)\mathbf{E}(k) + (k^2 - 1)(3k^2 - 2)\mathbf{K}(k) \right], \quad (43)$$

где модуль  $k = a/r$ , а вместо  $\sigma_0$  введена масса неоднородного диска для распределения (42), выражаемая формулой  $M = \pi a^2 \sigma_0 / 2$  (Кондратьев, 2007, с. 494).

Наряду с формулами (39) – (43), необходимыми для использования предлагаемого полуаналитического метода, требуется выражение для производной по  $r$  от функции  $U(r)$  (или силы  $F(r)$ ), входящей в правые части численно интегрируемых уравнений (3). Это выражение дается формулами

$$F(r) = F_1(r) + F_2(r) + F_3(r), \quad (44)$$

где

$$F_1(r) = \frac{4f\alpha_1 M (1-l)}{\pi H^2 (3-l)} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k) + \frac{R^2}{(1-l)^2 (1-k^2)(k^2-n)r^2} \\ \times \left[ (k^2 l(l-2) - n(1-l)^2)\mathbf{E}(k) + n(1-k^2)\mathbf{\Pi}(n, k) \right] \end{array} \right\}, \quad (45)$$

$$l = H/R,$$

$$F_2(r) = -\frac{16f\alpha_2 M}{3\pi a^2 k^2} \left[ 2(k^2 - 1)\mathbf{K}(k) + (2 - k^2)\mathbf{E}(k) \right], \quad (46)$$

$$F_3(r) = -f\alpha_3 M / r^2. \quad (47)$$

**Замечание:** При получении выражения (45), наряду с формулами производных от полных эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода по модулю, приводимыми во многих справочных руководствах, например

(Градштейн и Рыжик, 1962), использована и соответствующая малоизвестная формула для интеграла 3-го рода (Byrd P.F., Friedman M.D., 1954)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial k} = \frac{k}{(1-k^2)(k^2-n)} \left[ \mathbf{E}(k) - (1-k^2)\Pi(n, k) \right]. \quad (48)$$

Сравнительные расчеты ограниченного движения в гипотетической звездно-галактической системе, выполненные двумя независимыми методами на интервале времени 2 млрд. лет, иллюстрируются рис. 7 и 8, по своей структуре аналогичными предыдущим. В качестве апсидальных расстояний приняты величины

$$r_{\min} = 10 \text{ кпс}, r_{\max} = 25 \text{ кпс}.$$

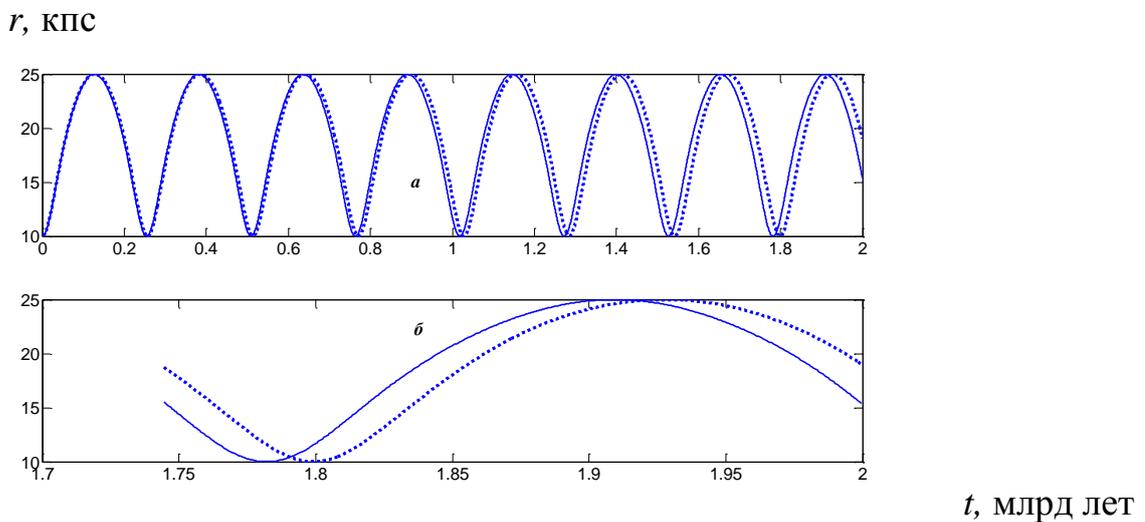


Рис. 7. Зависимости от времени расстояния звезды от центра галактики (сплошные кривые – аналитическое решение, пунктирные кривые – численное решение).

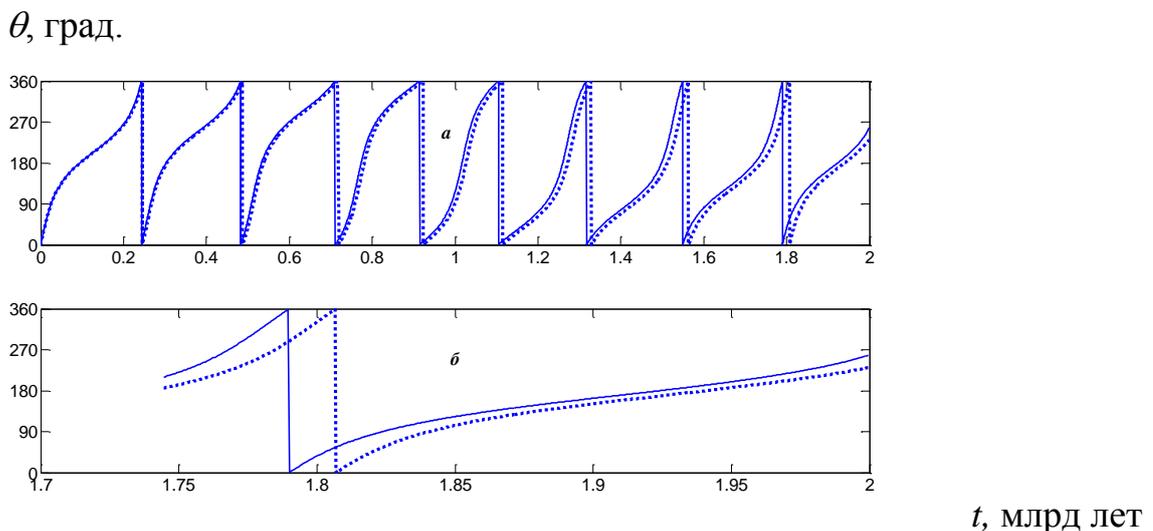


Рис. 8. То же самое, что и на рис. 7, но для полярного угла.

Периоды изменения расстояния  $T_r$ , найденные, по аналитическим формулам и по результатам численного интегрирования равны соответственно 254.6 и 257.0 млн. лет. Для периодов изменения полярного угла  $T_\theta$  эти значения составляют 243.8 и 245.6 млн. лет, соответственно. Расхождение в обоих периодах составляет примерно  $\cdot 10^{-2}$  от их величины.

В соответствии с теорией движения в центральном поле, ограниченные траектории в общем случае должны представлять собой незамкнутые кривые, заполняющие кольцевую область  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ , с апсидами, обращающимися по граничным окружностям. Для рассматриваемого модельного примера движения звезды в главной плоскости гипотетической галактики на интервале 5 млрд. лет траектории в координатах  $r$  и  $\theta$  показаны на рис. 9, где нанесены значения расстояния в килопарсеках и полярного угла в градусах.

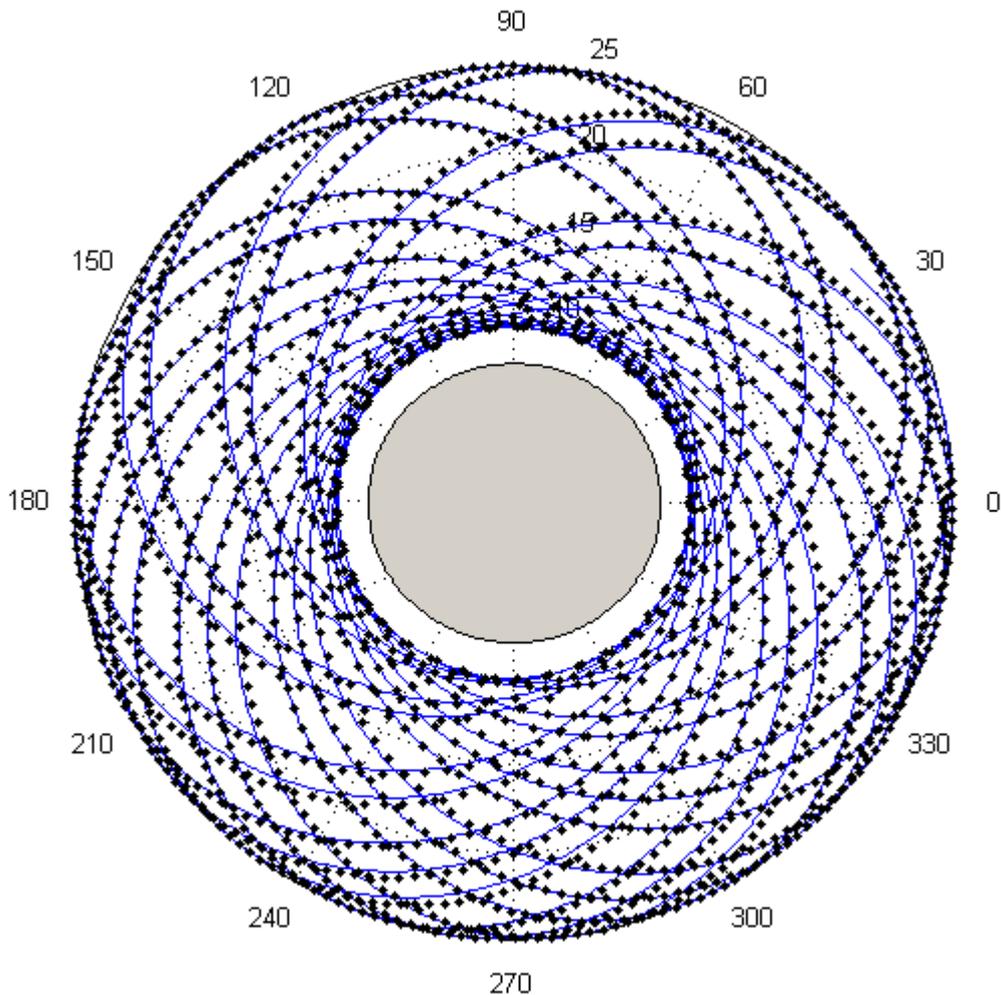


Рис. 9. Траектория, заполняющая кольцевую область в полярных координатах  $r$  и  $\theta$

Так же как и на предыдущих рисунках, сплошная линия соответствует аналитическому решению, а равноотстоящие по времени точки отвечают численному решению. Начальное положение звезды соответствует значениям  $r = 10\text{кпс.}$  и  $\theta = 0$ , а центральный круг с серой тонировкой дает проекцию галактики на ее главную плоскость. На этой полярной диаграмме можно заметить, что расхождение результатов происходит главным образом вдоль орбиты. Кроме того, ее вид свидетельствует и о возможном существовании в данной системе периодических решений, которым соответствуют замкнутые траектории. Заметим, что на длительном интервале времени орбиты с произвольными значениями апсидальных расстояний, естественно, будут незамкнутыми и заполняющими кольцевую область (теоретически - всюду плотно на бесконечном интервале времени).

Имея ввиду задачу отыскания замкнутых траекторий, укажем, что различные теоретические аспекты построения периодических решений задачи Фату, близких к плоским и круговым, подробно изложены в монографии (Дубошин, 1964, гл. VII).

В данной работе для предварительного поиска замкнутых плоских, но существенно отличных от круговых траекторий, использован численный метод. Если в исходных уравнениях (3) перейти к прямоугольным координатам  $x = r\cos\theta$ ,  $y = r\sin\theta$ , нетрудно видеть, что уравнения

$$\ddot{x} = \frac{x}{r} \frac{dU}{dr}, \quad \ddot{y} = \frac{y}{r} \frac{dU}{dr} \quad (49)$$

оказываются инвариантными относительно двух замен переменных:

$$\tau = -t, \quad \xi = x, \quad \eta = -y \quad \text{и} \quad \tau = -t, \quad \xi = -x, \quad \eta = y. \quad (50)$$

Поэтому можно предполагать, что среди всего множества существуют орбиты, двояко-симметричные относительно направлений  $\theta = 0, \pi$  и  $\theta = \pm \pi/2$ . Замкнутую  $T$ -периодическую траекторию при заданных начальных условиях (8) можно надеяться построить путем варьирования постоянного параметра  $r_{\max}$  с целью обеспечения краевых условий

$$\theta(T/4) = k\pi/2, \quad \dot{r}(T/4) = 0 \quad (51)$$

для целых значений  $k$ , характеризующих число оборотов вокруг начала координат. Нечетным значениям  $k$  будут соответствовать двояко-симметричные траектории, а четным - траектории, симметричные лишь относительно направления  $\theta = 0, \pi$ . В силу свойств (50), численное интегрирование уравнений (3) для решения краевой задачи при нахождении искомого значения  $r_{\max}$  достаточно выполнять лишь на интервале примерно в четверть периода  $T$ .

В качестве примера в данной работе построена траектория для  $k = 9$ . При фиксированном значении  $r_{\min} = 10$  кпс итерационным методом Ньютона получено значение, отвечающее замкнутой двояко-симметричной траектории  $r_{\max} = 26.2766$  кпс с относительной точностью примерно  $10^{-6}$ . Период движения по ней составляет  $T = 2.1616$  млрд. лет, а полярный угол  $\theta$  изменяется на величину  $18\pi$ . На рис.10 показан фрагмент замкнутой орбиты (стрелками отмечены точки, отвечающие начальному и конечному значениям полярного угла).

Соответствующая траектория, двояко-симметрично отображающая во времени в силу уравнений (3) фрагмент предыдущего рисунка, показана на рис.11. Она построена для контроля полученного приближенного периодического решения численным интегрированием на интервале времени 5 млрд. лет, более чем вдвое превышающем основной период  $T$  и более чем в восемь раз - интервал времени численного интегрирования  $T/4$  при нахождении четверти замкнутой траектории.

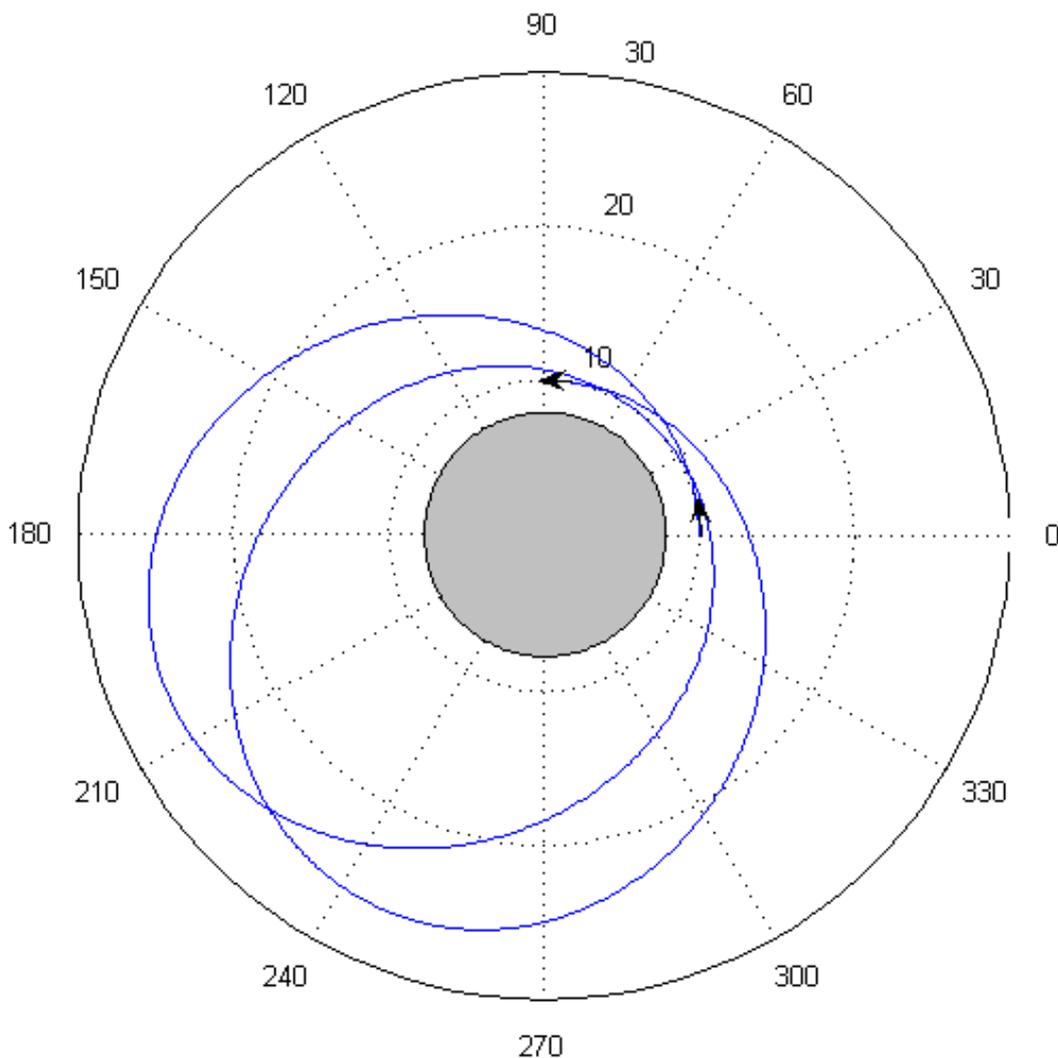


Рис. 10. Фрагмент замкнутой двояко-симметричной орбиты для интервала времени  $T/4$  и  $k = 9$ .

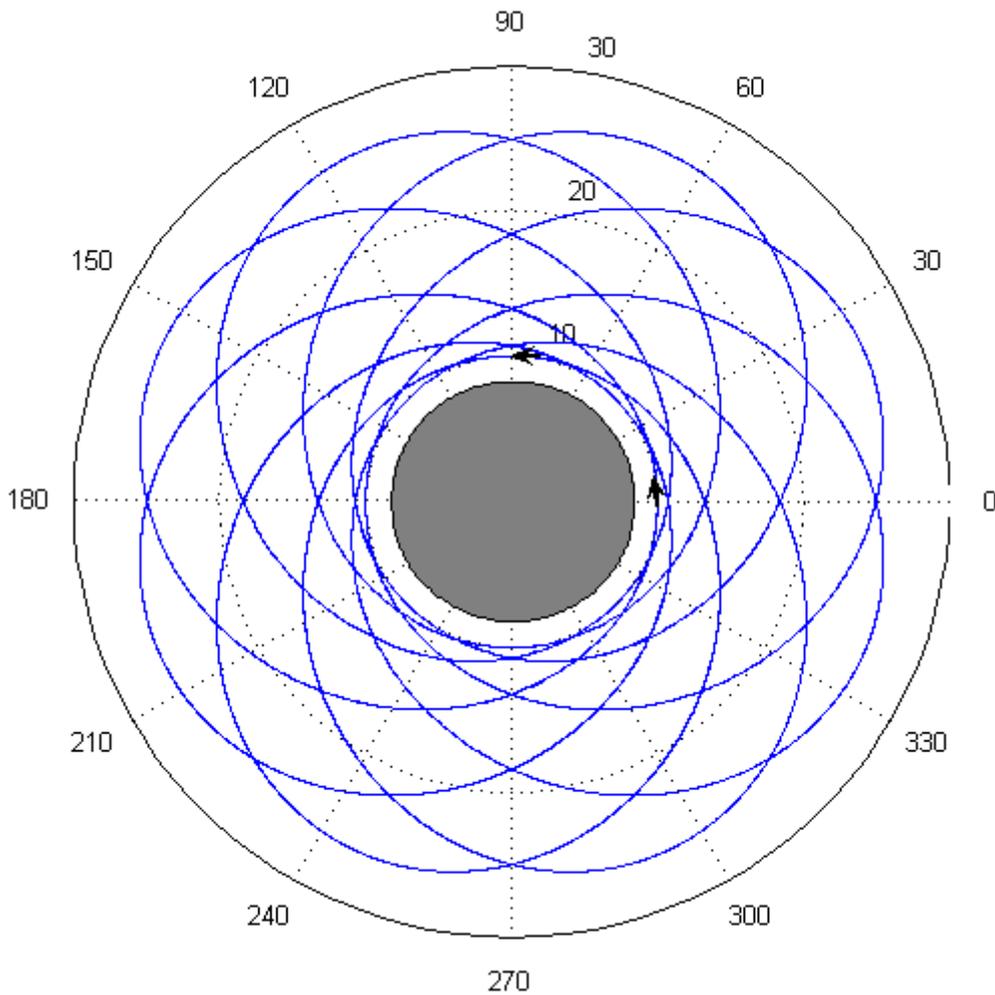


Рис. 11. Замкнутая орбита, построенная на длительном интервале времени.

Орбита, приведенная на рис. 11, конечно, принадлежит однопараметрическому семейству замкнутых траекторий (см. табл. 3).

Табл. 3

Характеристики замкнутых траекторий

$r_{\min}$ , КПС	$r_{\max}$ , КПС	$T$ , млрд. лет
9.0	47.0419	4.0656
9.5	32.7895	2.6977
<b>10.0</b>	<b>26.2766</b>	<b>2.1616</b>
10.5	22.5135	1.8879
11.0	20.0512	1.7295
12.0	17.0124	1.5700
13.0	15.2036	1.5081
14.0	14.0021	1.4929

Параметром этого семейства служит перицентрическое расстояние  $r_{\min}$ . Величины  $r_{\max}$  и  $T$ , отвечающие различным траекториям семейства и приведенные в табл. 3, были получены методом «движения по параметру». В последней строке этой таблицы приведены параметры, практически соответствующие круговой орбите радиуса  $\rho$  – частному решению задачи. Для этого решения постоянная интеграла  $c$  находится из равенства  $c^2 = -\rho^3 \left. \frac{dU}{dr} \right|_{r=\rho}$ , а период – по формуле  $T = \frac{2\pi}{c} \rho^2$ . Величина этого периода для  $\rho = 14$  кпс равна  $T_0 = 0.16589$  млрд. лет. Девятикратно повторяющаяся круговая траектория с периодом  $9T_0 = 1.4930$  млрд. лет является порождающей для семейства, приведенного в табл. 3.

## 5. Заключительные замечания

В данной работе предложен полуаналитический метод и описаны его возможности для построения приближенного решения интегрируемой в квадратурах задачи о движении в центральном силовом поле. Предполагается, что изменение расстояния происходит в ограниченных пределах. Использование метода, вообще говоря, предусматривает либо предварительное нахождение экстремальных (апсидальных) значений расстояния с помощью численного решения строгих уравнений, либо априорное задание этих параметров. На основе этих значений производится аппроксимация подынтегральной функции в квадратуре, дающей известное решение задачи. Получение аналитических зависимостей от времени сводится к приближенному обращению этой квадратуры, использованию первых интегралов задачи, а также вычислению интегралов от эллиптических функций. Предлагаемый полуаналитический метод эффективен лишь в случае «сильных возмущений», а для потенциала, близкого к кеплеровскому, предпочтительным является использование известных аналитических методов теории возмущений.

На частных примерах орбит «юпитерианского» и «лунного» спутников, а также «звездной внегалактической» орбиты продемонстрировано хорошее согласие результатов расчетов, выполненных предложенным методом и методом численного интегрирования уравнений движения в модельных гипотетических системах. В последнем примере численным способом построено семейство замкнутых траекторий, отвечающих периодическим решениям системы. Поиск замкнутых траекторий движения в центральном поле представляет собой самостоятельную задачу, а предложенное аналитическое решение может быть использовано в качестве исходного приближения к их построению.

Автор приносит свою благодарность Б.П. Кондратьеву за полезное обсуждение некоторых частных аспектов теории потенциала.

## Библиографический список

*Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М. Наука. ФМ. 1979. 832 с. (Abamowitz M. & Stegun I.A. Handbook of mathematical functions. U.S.A. National bureau of standards applied mathematics. 1964).

*Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М. Наука. Физматлит. 1974. 432 с.

*Бабаджанянц Л.К., Брэгман А.М., Брэгман К.М., Касикова П.В.* К задаче о движении точки в возмущенном центральном поле: О построении рядов по малому параметру // *Астрономический циркуляр*. Гос. Астрон. ин-т им. П.К. Штернберга. 2014 а. № 1608. С. 1-3.

*Бабаджанянц Л.К., Брэгман А.М., Брэгман К.М., Касикова П.В.* Об уравнениях в вариациях в задаче о движения точки в возмущенном центральном поле // *Технические науки – от теории к практике*. 2014 б. №31. С. 82-90.

*Бабаджанянц Л.К., Брэгман А.М., Брэгман К.М., Петросян Л.А.* Интегрирование уравнений движения материальной точки в центральных полях и уравнения в вариациях // *Технические науки – от теории к практике*. 2015. №48-49. С. 78-93.

*Белецкий В.В.* Орбита экваториального спутника Земли // *Искусственные спутники Земли*. 1962. Вып. 13. С. 3-60.

*Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М. Наука. Физматлит. 1965. 416 с.

*Вашковьяк М.А.* Конструктивно-аналитическое решение задачи о вековой эволюции полярных спутниковых орбит // *Астрон. Вест.* 2017. Т. 51. № 4. С. 344-356. (*Vashkov'yak M. A. Constructive-analytical solution of the problem on secular evolution of polar satellite orbits // Solar System Research*. 2017. V. 51. No 4. PP. 315-326).

*Вашковьяк М.А.* О компланарном интегрируемом случае двукратно-осредненной задачи Хилла с учетом сжатия центрального тела // *Астрон. Вест.* 2018. Т. 52. № 1 (в печати) (*Vashkov'yak M. A. // Solar System Research*. 2018. V. 52. No 1. (in press)).

*Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е, переработанное, при участии Ю.В. Геронимуса и М.Ю. Цейтлина. М.: ФМ. 1962. 1100 с.

*Дубошин Г.Н.* Теория притяжения. М. Физматлит. 1961. 288 с.

*Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М. Физматлит. 1963. 586 с.

*Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные. М. Физматлит. 1964. 560 с.

*Кондратьев Б.П.* Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М. Мир. 2007. 511 с.

*Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. Изд. второе, исправленное. М. Наука. Физматлит. 1965. 204 с.

*Лидов М.Л.* Курс лекций по теоретической механике. Изд. второе исправленное и дополненное. М. Физматлит. 2010. 494 с.

*Орлов А.А.* О периодических орбитах большого наклона в ограниченной проблеме трех точек. 1. О почти круговых периодических орбитах наклона в  $90^\circ$  в полуосредненной ограниченной круговой проблеме трех точек Фату // Труды Гос. астрон. ин-та им. П.К. Штернберга. 1945. Т. XV. Вып. 1. С. 319-341.

*Парс Л.А.* Аналитическая динамика. М. Наука. ФМ. 1971. 636 с. (*Pars L.A.* A Treatise on Analytical Dynamics. London. Heidemann. 1964).

*Уинтнер А.* Аналитические основы небесной механики. М. Наука. ФМ. 1967. 524 с. (*Wintner A.* The Analytical Foundations of Celestial Mechanics. Princeton. New Jersey. Univ. Press. London: Humphis Millord. Oxford Univ. Press. 1941).

*Шарлье К.* Небесная механика. М. Наука. ФМ. 1966. 627 с. (*Charlier C. L.* Die Mechanik des Himmels. Berlin und Leipzig. Walter de Gruyter & Co. 1927).

*Byrd P.F., Friedman M.D.* Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg GMBN. 1954. 358 p.

*Fatou P.* Sur le mouvement d'un point materiel dans un champ de gravitation fixe (Memoire posthume) // Acta Astronomica. 1931. Ser. a. 2. С. 101.

*Fonda A, Gallo, A.C.* Radial periodic perturbations of the Kepler problem // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2017. 129: P. 257–268.

## Оглавление

1. Введение .....	3
2. Аппроксимация функции $f(\rho)$ .....	5
3. Зависимости параметров движения от времени.....	7
4. Методические примеры решения модельных задач.....	12
4.1. О движении гипотетических экваториальных спутников Юпитера и Луны. ....	13
4.2. О движении одиночной звезды в модельном гравитационном поле гипотетической галактики типа «Сомбреро».....	18
5. Заключительные замечания.....	26
Библиографический список .....	27