



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 80 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Рыков Ю.Г.

Многомерный вариационный  
принцип и газовая динамика  
без давления

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Рыков Ю.Г. Многомерный вариационный принцип и газовая динамика без давления // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 80. 12 с. doi:[10.20948/prepr-2018-80](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-80)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-80>

**О р д е н а   Л е н и н а**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**имени М.В.Келдыша**  
**Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к**

**Ю.Г. РЫКОВ**

**Многомерный вариационный принцип  
и газовая динамика без давления**

**Москва — 2018**

**Рыков Ю.Г.**

## **Многомерный вариационный принцип и газовая динамика без давления**

Предложено обобщение вариационного принципа на многомерные системы квазилинейных законов сохранения, показана связь с понятием обобщенного решения. Для модельной многомерной системы уравнений – газовая динамика без давления – найдена соответствующая модификация вариационного принципа, которая далее конкретизирована для двумерного и трехмерного случаев. Полученное представление позволяет описывать механизмы формирования особенностей обобщенных решений системы уравнений газовой динамики без давления.

**Ключевые слова:** многомерные системы законов сохранения, вариационный принцип, газовая динамика без давления, обобщенные решения, дельта-функция плотности на многообразиях, эволюция особенностей

**Yuri Germanovich Rykov**

### **Multi-D variational principle and pressureless gas dynamics**

The generalization of variational principle to multi-D systems of conservation laws and its connection with the notion of generalized solution are proposed. For the model multi-D system of pressureless gas the specific modification of the principle is found. Such modification is rendered in more details for 2D and 3D cases. Obtained representation allows describing the singularities formation mechanisms for the generalized solutions of pressureless gas system.

**Key words:** multi-D systems of conservation laws, variational principle, pressureless gas dynamics, generalized solutions, density delta-function on the manifolds, evolution of singularities

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 14-21-00025.

## **Оглавление**

Введение .....	3
1. Основная система уравнений. Эвристическая формулировка вариационного принципа .....	4
2. Вариационный принцип для многомерной системы уравнений газовой динамики без давления .....	8
3. Конкретизация для двумерного и трехмерного случаев .....	9

## Введение

Настоящая публикация является продолжением работ [1, 2] и предшествующих им работ автора. А именно, в предлагаемом препринте будет намечено обобщение идеи вариационного подхода на многомерные системы квазилинейных законов сохранения. Также будет показано, к каким следствиям такой подход приводит в случае системы уравнений газовой динамики без давления (ГДбД). Система ГДбД имеет, вообще говоря, многомерный характер, является модельной вырожденной системой уравнений, структура которой наиболее близка (среди систем) к уравнению Хопфа [3], которое представляет собой классический случай использования вариационного представления.

С точки зрения автора, использование вариационного подхода может быть полезным по двум основным причинам. Первая состоит в том, что появляется взгляд на обобщенные решения многомерных систем квазилинейных уравнений как на функции, которые можно построить, исходя из решения набора вариационных задач. Это позволяет использовать богатый арсенал методов вариационного нелинейного анализа, см., например, [4]. Вторая заключается в том, что возможно исследовать структуру обобщенных решений. Так, в [1] построено обобщение конструкции Хопфа [3] на системы одномерных квазилинейных уравнений. При этом, например, оказывается, что для системы одномерных квазилинейных гиперболических уравнений можно построить столько вариационных принципов, сколько имеется классических (не в смысле Лакса) инвариантов Римана. То есть, например, для системы уравнений газовой динамики экстремальными свойствами будет обладать только энтропия. Также оказывается возможным интерпретировать возникновение и эволюцию разрыва данного семейства как совпадение значений соответствующего рассматриваемой системе уравнений вектор функционала на двух (или более) траекториях, которые оказываются характеристиками указанного семейства, приходящими на разрыв справа и слева.

При помощи вариационного подхода можно пытаться строить приближенные обобщенные решения, хотя детальная разработка подобных алгоритмов еще не проведена. Это может оказаться полезным при интерпретации численных методов и, возможно, построении новых, которые будут отличаться от традиционных исходной точкой: не интегральное тождество, а «минимизируемый» функционал.

Для многомерных систем описанный круг приложений, с одной стороны, расширяется, но, с другой, и существенно усложняется. Поэтому на начальном этапе имеет смысл изучить простейший, на наш взгляд, пример многомерной системы – ГДбД. В этой системе уравнений построение гладких частей решения не представляет трудностей, а основные проблемы возникают при описании особенностей. Дело в том, что особенности такой системы уравнений имеют вид дельта-функций на многообразиях разной размерности, то есть с

ростом размерности картина значительно усложняется. Даже в двумерном случае строгое описание процесса зарождения и эволюции особенностей в общем положении – затруднительно. С практической точки зрения система ГДбД может отражать закономерности эволюции крупномасштабной структуры Вселенной, в частности макро свойства пока гипотетической темной материи, качественные характеристики процессов кластеризации, гранулированные среды и т.п. Поэтому особый интерес представляет трехмерный случай. Здесь, как будет показано ниже, вариационный подход предоставляет некоторый инструмент, с помощью которого можно исследовать обобщенные решения с особенностями.

Сложность изучения системы уравнений ГДбД, скажем, в двумерном и трехмерном случае (не говоря уж о многомерном) заключаются в том, что процесс концентрации происходит последовательно на многообразиях все более низкой размерности, то есть происходит «слияние» разных типов дельта-функций. Кроме того, по-видимому, процесс слияния не всегда бывает устойчивым, поэтому в многомерном случае возможно возникновение струи разреженного вещества при столкновении особенностей. Задача описания такого многообразия возможностей эволюции представляется достаточно сложной, поэтому использование вариационного аппарата должно значительно облегчить эту задачу.

Далее изложение ведется следующим образом. В разделе 1 приводится формулировка вариационного принципа в многомерном случае и доказывается его эквивалентность обычному понятию обобщенного решения для функций из структурно достаточно простого класса. В разделе 2 на основе общей конструкции формулируется вариационный принцип для многомерной системы уравнений ГДбД. Наконец, раздел 3 посвящен более детальному анализу вариационного принципа в двумерном и трехмерном случаях.

Заканчивая вводный раздел, автор приносит благодарность А.И. Аптекареву за плодотворные дискуссии и стимулирование данной работы.

## 1. Основная система уравнений. Эвристическая формулировка вариационного принципа

Рассмотрим пространство  $(t, x_1, \dots, x_m) \equiv (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ . В этом пространстве рассмотрим специальный класс  $K$  вектор функций  $U(t, \mathbf{x}): \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U = (u_1, \dots, u_n)$ , такой, что  $U(t, \mathbf{x})$  является непрерывно-дифференцируемой вектор-функцией всюду, кроме конечного числа непрерывно-дифференцируемых гиперповерхностей  $\Omega_l, l = 1, \dots, L$  коразмерности 1. В дальнейшем нам достаточно будет рассматривать какую-либо одну поверхность разрыва, которую мы будем обозначать через  $\Omega$  без индекса. Пусть  $\Omega$  локально задается при помощи параметризации  $t = \tau, \mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\tau, \mathbf{s}), \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_{m-1}), \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$  с соответствующей ориентацией,

так что определены положительная и отрицательная стороны поверхности. Соответствующие значения функции  $U(\tau, \varphi(\tau, s))$  с двух сторон поверхности будут обозначаться как  $U^\pm$ . В соответствии с методологией [1, 2] рассмотрим пространство  $\Sigma$  тестовых непрерывно дифференцируемых гиперповерхностей  $S$  коразмерности 1, которые снабдим параметризацией  $t = \tau, \mathbf{x} = \chi(\tau, s)$ ,  $s = (s_1, \dots, s_{m-1}), \chi = (\chi_1, \dots, \chi_m)$ .

Введем обозначения:  $dx = dx_1 \dots dx_m$  (обычный элемент объема),  $dx \equiv dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$  (ориентированный элемент объема),  $\widehat{dx}_j \equiv dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_m$ ,  $j = 1, \dots, m$  (то есть ориентированный элемент (проекция) “площади” гиперповерхности, в котором пропущен член  $dx_j$ ). Теперь рассмотрим функционал  $J : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такой, что

$$J \equiv \int \dots \int U dx + \sum_{j=1}^m (-1)^j F_j(U) dt \wedge \widehat{dx}_j, \quad (1)$$

где интегрирование происходит по гиперповерхности  $S$ .

Пусть  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ . Рассмотрим квазилинейную систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (F_j(U(t, \mathbf{x}))) = 0, \quad (2)$$

где  $F_j = (f_{1j}, \dots, f_{nj})$  – достаточно гладкие (по крайней мере, непрерывно дифференцируемые) функции переменных  $(u_1, \dots, u_n)$ . Вообще говоря, для (2) мы будем рассматривать задачу Коши  $U(0, \mathbf{x}) = U_0(\mathbf{x})$ . Однако здесь будем фокусироваться на вопросе о том, какой новый смысл можно было бы придать утверждению, что некоторая, вообще говоря, разрывная функция  $U(t, \mathbf{x})$  удовлетворяет системе (2).

В настоящее время общим подходом к определению понятия обобщенного решения для (2) является введение подходящего интегрального тождества и пространства пробных функций. В особых случаях возникновения сильных особенностей (что может случиться и для строго гиперболических, сильно нелинейных систем) можно определить обобщенное решение как предел решений для соответствующей параболической регуляризации (2).

Однако при помощи функционала  $J$  можно ввести понятие обобщенного решения альтернативным способом. Это не обязательно должно привести к расширению понятия обобщенного решения, хотя с увеличением размерности вероятность этого растет, о чем будет сказано далее, но позволяет посмотреть на такие решения с нетрадиционной точки зрения. А именно, место

интегрального тождества займет функционал  $J$ , а место пространства пробных функций – пространство тестовых гиперповерхностей коразмерности 1  $S$ . Чтобы избежать на данном этапе технических сложностей и сконцентрироваться на введении новых понятий, будем считать, что функции  $U(t, \mathbf{x})$  принадлежат классу  $K$ . Дадим следующее определение.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Назовем функцию  $U(t, \mathbf{x}) \in K$  обобщенным решением системы уравнений (2), если для любой достаточно гладкой гиперповерхности  $S$  коразмерности 1  $\delta J = 0$ .

Как будет показано ниже, Определение 1 для функций из класса  $K$  эквивалентно обычному понятию обобщенного решения. Однако это определение трактует обобщенное решение как функцию, которая доставляет большое число критических точек для функционала  $J$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $U(t, \mathbf{x}) \in K$ , тогда понятие обобщенного решения в обычном смысле и в смысле Определения 1 эквивалентны.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В указанных условиях достаточно доказать, что  $U(t, \mathbf{x})$  удовлетворяет (2) в классическом смысле в областях гладкости  $U(t, \mathbf{x})$  и соотношениям Гюгонио в точках разрыва. Используем указанную выше параметризацию поверхности  $S$  и запишем выражение (1) в виде интеграла по параметрическим переменным  $(\tau, \mathbf{s}) \in [0, T] \times [0, 1]_1 \times \dots \times [0, 1]_{m-1}$  поверхности  $S$

$$J \equiv \int \dots \int L(\nabla \chi, U) ds d\tau; L(\nabla \chi, U) \equiv L \equiv U \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s \partial \tau} + \sum_{j=1}^m (-1)^j F_j(U) \cdot \frac{\partial (t, \hat{\mathbf{x}}_j)}{\partial s \partial \tau}, \quad (3)$$

здесь под  $\nabla \chi$  понимается совокупность векторов градиента  $\nabla \chi_j, j = 1, \dots, m$ , а

под  $\frac{\partial (t, \hat{\mathbf{x}}_j)}{\partial s \partial \tau}$  понимается Якобиан, где координата  $x_j$  отсутствует.

Рассмотрим вариацию  $\delta S$  поверхности  $S$  в форме  $\delta \chi(\tau, \mathbf{s})$  и обозначим  $\bar{\chi}(\tau, \mathbf{s}) = \chi(\tau, \mathbf{s}) + \alpha \delta \chi(\tau, \mathbf{s})$ , где  $\alpha$  является достаточно малым параметром. Нам понадобятся также соотношения взаимного расположения между поверхностями  $S + \alpha \delta S$  и  $\Omega$ . Эти гиперповерхности в случае общего положения пересекаются по многообразию  $\Lambda_\alpha$  коразмерности 2. Последнее многообразие может быть параметризовано следующим образом. Из  $m$  соотношений  $\bar{\chi}(\theta, s_1(\theta, \alpha, \boldsymbol{\sigma})) = \varphi(\theta, s_2(\theta, \alpha, \boldsymbol{\sigma}))$ , где  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{m-2})$ , определяются функции  $s_1(\theta, \alpha, \boldsymbol{\sigma}), s_2(\theta, \alpha, \boldsymbol{\sigma})$ , где  $\theta \in [\tau_1(\alpha, \boldsymbol{\sigma}), \tau_2(\alpha, \boldsymbol{\sigma})] \subset [0, T]$ , а далее  $\Lambda_\alpha = (\theta, \varphi(\theta, s_2(\theta, \alpha, \boldsymbol{\sigma})))$ . Отметим, что за часть параметров или за все параметры  $\boldsymbol{\sigma}$  могут быть взяты часть компонент  $s_1$  и  $s_2$ . Исходя из этого можно определить функцию  $\tau^*(\mathbf{s}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha)$

(подразумевается, что из наборов  $s$  и  $\sigma$  взяты взаимодополняющие компоненты), получающуюся из обратной функции к функции  $s = s_1(\tau^*, \alpha, \sigma)$  и имеющую смысл времени пересечения многообразия  $\Lambda_\alpha$  и подмногообразия  $S + \delta S$ , которое, в свою очередь, определяется уравнениями  $s = const$ .

Далее для вычисления вариации будет использоваться понятие производной по Гато. Обозначим  $U \equiv U(\tau, \chi(\tau, s))$ ,  $\bar{U} \equiv U(\tau, \bar{\chi}(\tau, s))$ . Аналогичный смысл будет иметь ниже в интегралах запись вида  $U^\pm$  или  $\bar{U}^\pm$ .

Введем также обозначения  $L^\pm \equiv L(\nabla\chi, U^\pm)$ ,  $\bar{L}^\pm \equiv L(\nabla\bar{\chi}, \bar{U}^\pm)$  и вычислим

$$\begin{aligned} \bar{L}_\alpha \equiv \frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \bar{L} &= \left[ E \cdot \frac{\partial\chi}{\partial s \partial \tau} + \sum_{j=1}^m (-1)^j F'_j(U) \cdot \frac{\partial(t, \hat{\chi}_j)}{\partial s \partial \tau} \right] U_x \delta\chi + \\ &U \cdot \delta \frac{\partial\chi}{\partial s \partial \tau} + \sum_{j=1}^m (-1)^j F_j(U) \cdot \delta \frac{\partial(t, \hat{\chi}_j)}{\partial s \partial \tau}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $E$  – единичная матрица.

Вычислим вариацию  $\delta J$ , интегрируя, где это необходимо, по частям и условившись для сокращения записи о следующем. Если под интегралом присутствуют выражения только с индексом «+» или «-», то интегрирование происходит по той части гиперповерхности  $S$  или  $S + \delta S$ , которая лежит соответственно с положительной или отрицательной стороны поверхности  $\Omega$ . Если под интегралом присутствуют выражения и с индексом «+», и с индексом «-», то интегрирование происходит по многообразию  $\Lambda_\alpha$ .

$$\begin{aligned} \delta J &= \frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \left[ \int \dots \int \bar{L}^- ds d\tau + \int \dots \int \bar{L}^+ ds d\tau \right] = \int_{\Lambda_\alpha} (\tau^*)_\alpha \cdot (\bar{L}^- - \bar{L}^+) \Big|_{\alpha=0} ds + \int \dots \int \bar{L}_\alpha \Big|_{\alpha=0} ds d\tau + \\ &\int \dots \int \bar{L}_\alpha^+ \Big|_{\alpha=0} ds d\tau = \int_{\Lambda_\alpha} (\tau^*)_\alpha \cdot \left[ (U^- - U^+) n_0 + \sum_{j=1}^m (F_j(U^-) - F_j(U^+)) n_j \right] ds - \\ &\sum_{p=\pm} \int \dots \int \left[ \frac{\partial}{\partial t} U^p(t, \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (F_j(U^p(t, \mathbf{x}))) \right] ds d\tau, \end{aligned}$$

где  $(n_0, n_1, \dots, n_m)$  представляет собой вектор нормали к гиперповерхности  $\Omega$  в пространстве  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ .

Отсюда, учитывая произвольность вариации  $\delta S$ , получим, что если  $\delta J = 0$ , то вдоль гиперповерхности  $S$  выполняются уравнения (2) в классическом смысле вне точек пересечения  $S$  и  $\Omega$ , а в точках их пересечения выполняются соотношения Гюгонио для системы (2). Это завершает доказательство теоремы.

Теорема 1 предоставляет некий очень общий инструмент изучения обобщенных решений квазилинейных гиперболических систем уравнений. Но его общность подразумевает, что для получения конкретных результатов

необходимо учитывать специфический вид системы уравнений и свойства ее структуры. Поэтому здесь начнем исследование систем уравнений типа (2) с наиболее простой, но также и не тривиальной, системы уравнений газовой динамики без давления.

Прежде чем завершить этот раздел, поставим один вопрос, который естественно порождается Определением 1. Существует ли такой функционал типа  $J$ , но по многообразию  $S_r$  произвольной коразмерности  $r > 1$ , что обращение в нуль понимаемой в некотором смысле вариации  $J$  влечет за собой тот факт, что  $U(t, \mathbf{x})$  удовлетворяет вдоль  $S_r$  системе (2) в классическом смысле в областях гладкости  $U(t, \mathbf{x})$  и соотношениям Гюгонио в точках разрыва? То есть можно ли использовать в качестве тестовых гиперповерхности с коразмерностью, большей, чем 1?

## 2. Вариационный принцип для многомерной системы уравнений газовой динамики без давления

Система уравнений двумерной газовой динамики без давления выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}_x(\rho U) = 0, \\ (\rho U)_t + \operatorname{div}_x(\rho U \otimes U) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

здесь  $\rho(t, \mathbf{x})$  – плотность среды,  $U(t, \mathbf{x})$  – вектор скорости,  $U \otimes U$  обозначает тензорное произведение. Система (5), вообще говоря, дополняется начальными условиями  $\rho(0, \mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{x})$ ,  $U(0, \mathbf{x}) = U_0(\mathbf{x})$ .

Аналогично [2] система (5) для гладких решений эквивалентна системе уравнений, состоящей из уравнения неразрывности и многомерного уравнения невязкого Бюргера или уравнения Хопфа. Поэтому бихарактеристики системы (5) представляют собой прямые линии в многомерном пространстве, вдоль которых происходит рост плотности  $\rho$ . Набор бихарактеристик, исходящий их точек  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ , определяет трансформацию от лагранжевых  $\mathbf{a}$  к эйлеровым координатам  $\mathbf{x}$ . Таким же образом, как и для рассмотренного ранее двумерного случая [2], функционал  $J$  может быть сведен к интегралу по некоторому объему в лагранжевом пространстве  $\mathbf{a}$ . А именно, с учетом специфики системы (5) функционал  $J$  принимает следующий вид

$$J = J(A) \equiv \int \dots \int \left[ U_0(\mathbf{a}) - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{t} \right] \rho_0(\mathbf{a}) d\mathbf{a}, \quad (6)$$

где интегрирование проводится по некоторой области  $A \in \mathbb{R}^m$ . Таким образом, переменной в функционале является область в  $\mathbb{R}^m$ , и условие  $\delta J = 0$  должно нам дать форму некоторой области, которая соответствует зафиксированной точке  $(t, \mathbf{x})$ .

Из этого наблюдения можно сделать два интересных и нетривиальных вывода. Первый заключается в том, что наличие вариационного принципа предполагает эффект концентрации массы. Второй вывод основан на том, что область, дающая экстремальное значение функционалу (6), может быть «инфинитезимальной», то есть бесконечно малой. Это следует из того, что при фиксированной точке  $(t, \mathbf{x})$  для достижения экстремума важна лишь форма границы области. С возрастанием размерности пространства количество типов возможной «инфинитезимальности» растет. Так, в одномерном случае выражение (6) является лишь функцией точки, поэтому «инфинитезимальность» не возникает. В двумерном случае экстремальной может оказаться некоторая бесконечно малая область вдоль некоторой кривой, в трехмерном же случае – как вдоль некоторой кривой, так и около некоторой поверхности и т.д.

Таким образом, основываясь на сказанном выше, можно прийти к следующей постановке проблемы. Фиксируем точку  $(t, \mathbf{x})$  и некоторую параметризацию лагранжевых переменных  $\mathbf{a}$ , то есть определим функцию  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\tau, \mathbf{s})$ , напомним, что  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_{m-1})$ . После этого (6) превращается в функцию от  $(\tau, \mathbf{s})$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\tau, \mathbf{s}) \equiv \int \dots \int \left[ \mathbf{U}_0(\mathbf{a}(\tau, \mathbf{s})) - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}(\tau, \mathbf{s})}{t} \right] \rho_0(\mathbf{a}(\tau, \mathbf{s})) \frac{\partial \mathbf{a}(\tau, \mathbf{s})}{\partial (\tau, \mathbf{s})} d\tau d\mathbf{s}. \quad (7)$$

Здесь зависимость от  $(\tau, \mathbf{s})$  выражается в зависимости от этих переменных как пределов интегрирования. Подробнее об этом будет сказано в следующем разделе при изучении конкретно двумерного и трехмерного случаев. Теперь рассмотрим  $\hat{\mathbf{J}}_{(t, \mathbf{x})}$  как оператор, переводящий параметризованные лагранжевы переменные в вектор-функцию (7), то есть  $\hat{\mathbf{J}}_{(t, \mathbf{x})} : \mathbf{a}(\tau, \mathbf{s}) \mapsto \mathbf{J}(\tau, \mathbf{s})$ . Нижний индекс  $(t, \mathbf{x})$  подчеркивает тот факт, что рассматриваемый оператор зависит от точки  $(t, \mathbf{x})$ . В следующем разделе эта общая парадигма будет конкретизирована, как уже упоминалось, для двумерного и наиболее интересного для практики трехмерного случаев.

### 3. Конкретизация для двумерного и трехмерного случаев

В этом разделе для упрощения записи будем обозначать эйлеровы координаты как  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , лагранжевы координаты – как  $\mathbf{a} = (a, b, c)$  и вектор скорости – как  $\mathbf{U} = (u, v, w)$ . Также для параметризации  $\mathbf{s} = (s, p)$ .

Сначала рассмотрим более простой двумерный случай.

Тогда введенный выше оператор  $\hat{\mathbf{J}}_{(t, \mathbf{x})}$  примет следующую форму

$$J_1 = \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{s_0}^s \left[ \frac{x-a}{t} - u_0(a,b) \right] \rho_0(a,b) (a_{\tau} b_s - b_{\tau} a_s) ds d\tau \equiv \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{s_0}^s X(a,b) (a_{\tau} b_s - b_{\tau} a_s) ds d\tau,$$

$$J_2 = \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{s_0}^s \left[ \frac{y-b}{t} - v_0(a,b) \right] \rho_0(a,b) (a_{\tau} b_s - b_{\tau} a_s) ds d\tau \equiv \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{s_0}^s Y(a,b) (a_{\tau} b_s - b_{\tau} a_s) ds d\tau,$$

где подразумевается, что  $a = a(\tau, s), b = b(\tau, s)$ .

Пусть функции  $X, Y, a, b$  удовлетворяют следующим ограничениям

$$\begin{aligned} |X(a,b), Y(a,b)| &\leq \alpha a + \beta b + \gamma, \\ |a, b| &\leq \mu(s)\tau + \nu(s); \left| \frac{\partial(a,b)}{\partial(\tau,s)} \right| \leq \lambda(s), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, \lambda$  являются либо константами, либо ограниченными функциями.

Далее рассмотрим функции  $\Phi_1(\tau, s), \Phi_2(\tau, s)$

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau, s) &\equiv \int_{\tau_0}^{\tau} X(a,b) (a_{\tau} b_s - b_{\tau} a_s) d\tau, \\ \Phi_2(\tau, s) &\equiv \int_{\tau_0}^{\tau} Y(a,b) (a_{\tau} b_s - b_{\tau} a_s) d\tau, \end{aligned} \quad (9)$$

и соответствующий оператор  $\hat{\Phi}$ . Тогда в соответствии с [2] возникновение концентрации на одномерном многообразии характеризуется следующими условиями. Для некоторого значения  $s$  существуют по крайней мере два значения  $\tau_1, \tau_2$ , такие, что

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial \tau}(\tau_1, s) = \frac{\partial \Phi_k}{\partial \tau}(\tau_2, s) = 0; \Phi_k(\tau_1, s) = \Phi_k(\tau_2, s); k = 1, 2. \quad (10)$$

Заметим, что условия (10) соответствуют условиям возникновения разрыва в одномерном случае, так как тогда есть лишь одна лагранжева координата  $a$ , которая и играет роль  $\tau$ . Условия (8) также являются аналогами соответствующих условий в одномерном случае, обеспечивающих наличие глобального минимума. Первые два условия (10) обеспечивают тот факт, что в точку  $(t, x, y)$  приходят по крайней мере две характеристические прямые (величины  $(X, Y)$  обращаются в нуль для фиксированного значения  $s$  и при  $\tau = \tau_1, \tau = \tau_2$ ). Второе условие (10) обеспечивает выполнение закона сохранения импульса из [2] при движении одномерного многообразия, несущего соответствующую дельта-функцию.

Для описания особенности в точке, опять же в соответствии с [2], необходимо найти такую параметризацию  $a = a(\tau, s), b = b(\tau, s)$ , что существуют по крайней мере два значения  $s_1, s_2$ , такие что

$$\frac{\partial J_k}{\partial \tau}(\tau, s_1) = \frac{\partial J_k}{\partial s}(\tau, s_1) = \frac{\partial J_k}{\partial \tau}(\tau, s_2) = \frac{\partial J_k}{\partial s}(\tau, s_2) = 0; \quad (11)$$

$$J_k(\tau, s_1) = J_k(\tau, s_2); k = 1, 2.$$

Таким образом, лагранжево пространство  $(a, b)$  приобретает структуру многообразия и разбивается на множество карт, которые должны быть согласованы между собой. Найти согласованное множество карт и представляет собой основную трудность для доказательства теоремы существования обобщенных решений системы уравнений ГДБД при использовании вариационного подхода. Вместе с тем вариационный подход указывает конкретную стратегию поиска такого доказательства, какую какой-либо другой подход пока не может предоставить.

Для трехмерного случая оператор  $\hat{J}_{(t,x)}$  записывается так:

$$J_1 = \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{s_0}^s \int_{p_0}^p \left[ \frac{x-a}{t} - u_0(\mathbf{a}) \right] \rho_0(\mathbf{a}) \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(\tau, s, p)} dp ds d\tau \equiv \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{s_0}^s \int_{p_0}^p X(\mathbf{a}) \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(\tau, s, p)} dp ds d\tau,$$

$$J_2 = \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{s_0}^s \int_{p_0}^p \left[ \frac{y-b}{t} - v_0(\mathbf{a}) \right] \rho_0(\mathbf{a}) \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(\tau, s, p)} dp ds d\tau \equiv \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{s_0}^s \int_{p_0}^p Y(\mathbf{a}) \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(\tau, s, p)} dp ds d\tau,$$

$$J_3 = \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{s_0}^s \int_{p_0}^p \left[ \frac{z-c}{t} - w_0(\mathbf{a}) \right] \rho_0(\mathbf{a}) \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(\tau, s, p)} dp ds d\tau \equiv \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{s_0}^s \int_{p_0}^p Z(\mathbf{a}) \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(\tau, s, p)} dp ds d\tau,$$

где подразумевается, что  $a = a(\tau, s, p), b = b(\tau, s, p), c = c(\tau, s, p)$ . Для описания процесса формирования особенностей обозначим  $X_1(\mathbf{a}) \equiv X(\mathbf{a}), X_2(\mathbf{a}) \equiv Y(\mathbf{a}), X_3(\mathbf{a}) \equiv Z(\mathbf{a})$  и сформируем иерархию функций  $k = 1, 2, 3$

$$\Phi_k(\tau, s, p) \equiv \int_{\tau_0}^{\tau} X_k(\mathbf{a}) \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(\tau, s, p)} d\tau,$$

$$\Psi_k(\tau, s, p) \equiv \int_{s_0}^s \int_{\tau_0}^{\tau} X_k(\mathbf{a}) \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(\tau, s, p)} d\tau ds, \quad (12)$$

$$J_k(\tau, s, p) \equiv \int_{p_0}^p \int_{s_0}^s \int_{\tau_0}^{\tau} X_k(\mathbf{a}) \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(\tau, s, p)} d\tau ds dp,$$

где подразумевается, что  $a = a(\tau, s, p), b = b(\tau, s, p), c = c(\tau, s, p)$ . Система соотношений, которой нужно удовлетворить при формировании особенностей на многообразиях разной размерности для функций (12), теперь выглядит так,  $k = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_k}{\partial \tau}(\tau_1, s, p) &= \frac{\partial \Phi_k}{\partial \tau}(\tau_2, s, p) = 0, \quad \Phi_k(\tau_1, s, p) = \Phi_k(\tau_2, s, p); \\
\frac{\partial \Psi_k}{\partial \tau}(\tau, s_1, p) &= \frac{\partial \Psi_k}{\partial s}(\tau, s_1, p) = \frac{\partial \Psi_k}{\partial \tau}(\tau, s_2, p) = \frac{\partial \Psi_k}{\partial s}(\tau, s_2, p) = 0, \\
\Psi_k(\tau, s_1, p) &= \Psi_k(\tau, s_2, p); \\
\frac{\partial J_k}{\partial \tau}(\tau, s, p_1) &= \frac{\partial J_k}{\partial s}(\tau, s, p_1) = \frac{\partial J_k}{\partial p}(\tau, s, p_1) = \frac{\partial J_k}{\partial \tau}(\tau, s, p_2) = \frac{\partial J_k}{\partial s}(\tau, s, p_2) = \\
\frac{\partial J_k}{\partial p}(\tau, s, p_2) &= 0, \quad J_k(\tau, s, p_1) = J_k(\tau, s, p_2).
\end{aligned} \tag{13}$$

Опять же основным вопросом будет являться согласование карт для соответствующих операторов  $\hat{\Phi}, \hat{\Psi}, \hat{J}$ .

В заключение отметим, что получающаяся динамика будет отличаться от той, которую используют астрофизики в модели «слипания», см., например, [5]. Для многомерного случая отличие, вообще говоря, будет очень существенным ([6]), что связано с точным выполнением или невыполнением закона сохранения импульса. Тем не менее, недостатками описанного выше подхода являются его большая сложность и существенно меньшая прозрачность конструкций.

## Библиографический список

- [1] Рыков Ю.Г. О вариационном подходе к системам квазилинейных законов сохранения // Труды МИАН. — 2018. — Т.301. — №2. (в печати) URL: <http://mi.mathnet.ru/tm3911>
- [2] Рыков Ю.Г. Двумерная газовая динамика без давления и вариационный принцип // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2016. — № 94. — 14 с. URL: [http://keldysh.ru/papers/2016/prep2016\\_94.pdf](http://keldysh.ru/papers/2016/prep2016_94.pdf)
- [3] Hopf E. The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$  // Comm. Pure Appl. Math. — 1950. — V. 3. — p. 201 – 230.
- [4] Struwe M. Variational methods // Applications to nonlinear PDEs and Hamiltonian systems. Springer, Berlin, Heidelberg. — 1990. — 272 p.
- [5] Гурбатов С.Н., Саичев А.И., Шандарин С.Ф. Крупномасштабная структура Вселенной. Приближение Зельдовича и модель слипания // УФН. — 2012. — Т. 182. — № 3. — с. 233 – 261.
- [6] Rykov Yu.G. On the nonhamiltonian character of shocks in 2-D pressureless gas // Bolletino dell' U.M.I. Sezione B (8). — 2002. — V. 5-B. — pp. 55 – 78.