



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 92 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Гавриков М.Б., Таюрский А.А.

**Нелинейные бегущие волны
в горячей плазме**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гавриков М.Б., Таюрский А.А.
Нелинейные бегущие волны в горячей плазме // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018.
№ 92. 40 с. doi:[10.20948/prepr-2018-92](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-92)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-92>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

М.Б.Гавриков, А.А.Таюрский

**Нелинейные бегущие волны
в горячей плазме**

Москва — 2018

Гавриков М.Б., Таюрский А.А.

Нелинейные бегущие волны в горячей плазме

Найдены и классифицированы плоские бегущие волны в горячей замагниченной плазме в случае нулевого поперечного электрического поля (в системе отсчёта фонового движения плазмы). Полученные результаты используются для оценки перспектив использования КСПУ (квазистационарный плазменный ускоритель) с продольным магнитным полем для ускорения плазмы в каналах плазменных ускорителей.

Ключевые слова: классическая МГД, электромагнитная гидродинамика (ЭМГД), бегущая волна, потенциальная функция, потенциальная яма.

Mikhail Borisovich Gavrikov, Aleksei Aleksandrovich Taiurskii

Nonlinear travelling waves in hot plasma

Planar traveling waves in a hot magnetized plasma are found and classified in the case of a zero transverse electric field (in the reference frame of the background motion of the plasma). The obtained results are used to estimate the prospects of using the quasi-steady plasma accelerator with a longitudinal magnetic field for accelerating plasma in the channels of plasma accelerators.

Key words: classical MHD, electromagnetic hydrodynamics (EMHD), traveling wave, potential function, potential well.

Оглавление

1. Введение.....	3
2. Безразмерный вид уравнений бегущих волн.....	5
3. Интеграция уравнений бегущих волн в случае $p = 0$	7
4. Негладкие решения	13
5. Случай нулевого обобщённого углового момента ($I = 0$)	17
6. Случай ненулевого обобщённого углового момента ($I \neq 0$)	28
7. Обсуждение результатов и дополнения.....	36
Список литературы.....	40

1. Введение

Нелинейные бегущие волны образуют важный для приложений класс точных решений уравнений динамики сплошной среды. В их число могут входить, например, уединённые, кноидальные, ударные волны и более сложные структуры. Классификация типов нелинейных бегущих волн, существующих в рассматриваемой сплошной среде, – важная математическая задача, которая ниже решается применительно к горячей двухжидкостной электромагнитной гидродинамической плазме. Существование нетривиальных бегущих волн в сплошной среде обусловлено нелинейностью уравнений динамики и достаточной сложной структурой тензора внутренних напряжений. В плазме к этим требованиям добавляется необходимость учёта коллективных явлений, которые в используемых ниже уравнениях являются следствием нелокальной зависимости электрического поля от плотности тока и остальных параметров плазмы, что выражается нетривиальной формой обобщённого закона Ома.

Ниже мы ограничимся исследованием плоских бегущих волн, которые являются решениями уравнений динамики плазмы, зависящими от пространственной координаты \mathbf{r} от времени t в комбинации $\theta = \langle \mathbf{r}, \mathbf{k} \rangle - at$, где $a = \text{const}$ называется фазовой скоростью бегущей волны, θ – фазой, \mathbf{k} – единичный вектор, задающий направление распространения волны, а косые скобки здесь и ниже означают скалярное произведение векторов. Состояние плазменной сплошной среды характеризуется параметрами ρ , U , p_{\pm} , \mathbf{H} , \mathbf{E} , имеющими смысл суммарной плотности электронов и ионов, массовой скорости, давлений электронов и ионов, напряжённостей магнитного и электрического полей соответственно, и подчиняющимися уравнениям электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) плазмы [1]. ЭМГД-теория, свободная от противоречий классической МГД-теории, учитывает электрон-ионную структуру плазмы и наличие в ней коллективных явлений и используется для исследования тонких эффектов динамики и статики квазинейтральной нерелятивистской плазмы. Можно показать [2], что решение ЭМГД-уравнений плазмы, зависящие только от фазы θ , в отсутствие диссипаций удовлетворяют условиям:

$$1) H_{\parallel} = \text{const}, 2) \rho u = J = \text{const}, J \neq 0, u = U_{\parallel} - a,$$

$$3) p_{\pm} |u|^{\gamma} = K_{\pm} = \text{const}, K_{\pm} \geq 0, 4) \rho u^2 + p_{\Sigma} + \frac{H_{\perp}^2}{8\pi} = \mathcal{E} = \text{const}$$

и выполнено уравнение

$$\left(u - \frac{H_{\parallel}^2}{4\pi J} \right) \mathbf{H}_{\perp} - \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi J} u \frac{d}{d\theta} \left(u \frac{d\mathbf{H}_{\perp}}{d\theta} \right) + \frac{cH_{\parallel}}{4\pi J} (\lambda_+ - \lambda_-) u \left[\mathbf{k}, \frac{d\mathbf{H}_{\perp}}{d\theta} \right] + \mathbf{q} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{q} \perp \mathbf{k}$ – произвольный постоянный вектор и все векторные величины разлагаются вдоль (\parallel) и поперёк (\perp) вектора \mathbf{k} . Таким образом, для вектора \mathbf{A} имеем $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\parallel} + \mathbf{A}_{\perp}$, $\mathbf{A}_{\parallel} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{k} \rangle \mathbf{k}$, $\mathbf{A}_{\perp} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_{\parallel}$, в частности $\mathbf{A}_{\parallel} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{k} \rangle$. Если ось x декартовой системы координат направить вдоль вектора \mathbf{k} , то в координатах имеем: $\mathbf{A}_{\parallel} = (A_x, 0, 0) = A_x \mathbf{k}$, $A_{\parallel} = A_x$, $\mathbf{A}_{\perp} = (0, A_y, A_z)$. Выше считалось $\lambda_{\pm} = m_{\pm} / e_{\pm}$, где m_{\pm} – массы, e_{\pm} – абсолютные величины зарядов электронов и ионов. Кроме того, для простоты предполагалось, что электроны и ионы являются идеальными политропными газами с общим показателем адиабаты $\gamma > 1$. При этом остальные параметры плазмы вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\perp} &= \frac{\mathbf{q}_0}{J} + \frac{H_{\parallel}}{4\pi J} \mathbf{H}_{\perp}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = \frac{1}{c} \left[\mathbf{k}, \mathbf{q} + \frac{H_{\parallel}}{J} \mathbf{q}_0 - a \mathbf{H}_{\perp} \right], \quad \rho = \frac{J}{u}, \quad \mathbf{U}_{\parallel} = (a + u) \mathbf{k}, \\ \mathbf{E}_{\parallel} &= -\frac{1}{c} [\mathbf{U}_{\perp}, \mathbf{H}_{\perp}] - \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{8\pi\rho} \frac{d^2 H_{\perp}}{d\theta} \mathbf{k}, \quad \mathbf{j}_{\perp} = \frac{c}{4\pi} \left[\mathbf{k}, \frac{d\mathbf{H}_{\perp}}{d\theta} \right], \quad \mathbf{j}_{\parallel} = 0, \quad p_{\pm} = \frac{K_{\pm}}{|u|^{\gamma}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{q}_0 \perp \mathbf{k}$ – произвольный постоянный вектор. Таким образом, множество бегущих волн определяется 9 скалярными константами интегрирования: пятью скалярами $J \neq 0$, $K_{\pm} \geq 0$, $\mathcal{S} > 0$, H_{\parallel} и четырьмя компонентами векторов $\mathbf{q}_0 \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{q} \perp \mathbf{k}$. Для нахождения параметров плазмы в бегущей волне достаточно найти функции $u(\theta)$, $\mathbf{H}_{\perp}(\theta)$ из условий

$$\left(u - \frac{H_{\parallel}^2}{4\pi J} \right) \mathbf{H}_{\perp} - \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi J} u \frac{d}{d\theta} \left(u \frac{d\mathbf{H}_{\perp}}{d\theta} \right) + \frac{c H_{\parallel}}{4\pi J} (\lambda_+ - \lambda_-) u \left[\mathbf{k}, \frac{d\mathbf{H}_{\perp}}{d\theta} \right] + \mathbf{q} = 0, \quad (3)$$

$$Ju + \frac{K}{|u|^{\gamma}} + \frac{H_{\perp}^2}{8\pi} = \mathcal{S}, \quad (4)$$

где $K = K_+ + K_-$. Остальные параметры плазмы вычисляются по $u(\theta)$, $\mathbf{H}_{\perp}(\theta)$ посредством формул (2). Система (3), (4) называется *уравнениями бегущих волн в ЭМГД*. В случае холодной плазмы $K_{\pm} = 0$, вычисляя $u(\theta)$ через $H_{\perp}^2(\theta)$ из тождества (4) и подставляя полученное выражение в равенство (3), получим для нахождения $\mathbf{H}_{\perp}(\theta)$ обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка на поперечной плоскости. Для горячей плазмы $K > 0$ и, согласно (4), функция $u(\theta)$ является двузначной функцией H_{\perp}^2 . Подставляя каждую из двух ветвей $u = u(H_{\perp}^2)$ в (3), снова приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка на поперечной плоскости для нахождения $\mathbf{H}_{\perp}(\theta)$. При $K \rightarrow 0$, т.е. в пределе холодной плазмы, одна из двух ветвей (назовём её “холодной”) переходит в параболическую зависимость $u = J^{-1} \left(\mathcal{S} - H_{\perp}^2 / (8\pi) \right)$,

а вторая ветвь – “горячая” – в уравнение $u = 0$. Бегущие волны, отвечающие холодной или горячей ветвям, можно рассматривать как интегральные кривые уравнения (3) в круге $0 \leq H_{\perp} \leq H_{\max}$, где

$$H_{\max} = 8\pi \left[\mathcal{S} - |J|(\gamma + 1)(\gamma K / |J|)^{\frac{1}{\gamma+1}} / \gamma \right]^{1/2}.$$

Отсюда, кстати, следует, что для существования бегущих волн необходимо выполнение условия неотрицательности квадратной скобки в формуле для H_{\max} , что даёт для констант интегрирования K , \mathcal{S} , J неравенство $K \leq (\gamma / |J|)^{\gamma} (\mathcal{S} / (\gamma + 1))^{\gamma+1}$. Однако наибольший интерес представляют волны, получающиеся гладкой склейкой бегущих волн, найденных для холодной и горячей ветвей по отдельности. Их нахождение вызывает определённые проблемы и для случая $q = 0$ рассмотрено ниже.

Известны точные решения системы (3), (4). При $K = 0$, $H_{\parallel} = 0$, $\mathbf{q} = q\mathbf{e}_0$, где $\mathbf{e}_0 \perp \mathbf{k}$ – заданный единичный вектор, система (3), (4) имеет точное решение вида $\mathbf{H}_{\perp} = H(\theta)\mathbf{e}_0$, которое легко ищется аналитически [3] (такие решения называются *линейно поляризованными* бегущими волнами). Обобщение этого решения для $K > 0$ рассмотрено в [4]. В [5] получено решение системы (3), (4) в случае $K = 0$, $\mathbf{q} = 0$, в [6] исследованы решения системы (3), (4) в случае $K = 0$, $\lambda_{+} = \lambda_{-}$ (электрон-позитронная плазма), $\mathbf{q} = q\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_0 \perp \mathbf{k}$ – единичный вектор, имеющие вид $\mathbf{H}_{\perp} = H(\theta)\mathbf{e}_0$.

Основная цель этой работы – классифицировать все типы нелинейных бегущих волн, т.е. решений системы (3), (4), в случае $\mathbf{q} = 0$, $K > 0$. Заметим, что в общем случае даже при $K = 0$, классификация типов нелинейных бегущих волн неизвестна. Полученные результаты имеют важные физические приложения, например для анализа установившихся режимов течения горячей плазмы в каналах плазменных ускорителей.

2. Безразмерный вид уравнений бегущих волн

Для нелинейной бегущей волны с константами интегрирования \mathcal{S} , J выберем характерные масштабы напряжённости магнитного поля $H_0 = \sqrt{4\pi\mathcal{S}}$, скорости $v_0 = \mathcal{S} / (2|J|)$, давления $p_0 = \mathcal{S} / 2$, плотности $\rho_0 = 4J^2 / \mathcal{S}$. Характерный масштаб длины L_0 считаем произвольным. Тогда система (3), (4) переписется в следующем безразмерном виде:

$$\left(\frac{|u|}{2} - \beta^2 \right) \mathbf{H}_{\perp} - \xi^2 |u| \frac{d}{d\theta} \left(|u| \frac{d\mathbf{H}_{\perp}}{d\theta} \right) + \Lambda \xi \beta |u| \left[\mathbf{k}, \frac{d\mathbf{H}_{\perp}}{d\theta} \right] + \mathbf{p} = 0,$$

$$|u| + K'|u|^{-\gamma} + H_{\perp}^2 = 2,$$

где

$$K' = \frac{K}{p_0 v_0^\gamma}, \beta = \text{sgn } J \cdot \frac{H_{\parallel}}{H_0}, \xi = \frac{c \sqrt{\lambda_+ \lambda_-} \mathcal{D}^{1/2}}{4|J|\pi^{1/2} L_0}, \mathbf{p} = \mathbf{q} \frac{J}{\sqrt{4\pi} \mathcal{D}^3}, \Lambda = \sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}} - \sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}.$$

Для выбранных характерных масштабов справедливы привычные равенства $v_0 = H_0 / \sqrt{4\pi\rho_0}$, $\xi = \ell_c / L_0$, где $\ell_c = c / \omega_p = c \sqrt{\lambda_+ \lambda_-} \mathcal{D}^{1/2} / (4|J|\pi^{1/2})$ – скиновая длина, $\omega_p = \sqrt{4\pi\rho_0} / \sqrt{\lambda_+ \lambda_-}$ – плазменная частота. Полученная безразмерная система упрощается переходом к лагранжевой координате τ : $d / d\tau = |u| d / d\theta$, тогда, обозначая K' через K , получим:

$$\left(\frac{|u|}{2} - \beta^2 \right) \mathbf{H}_{\perp} - \xi^2 \frac{d^2 \mathbf{H}_{\perp}}{d\tau^2} + \Lambda \xi \beta \left[\mathbf{k}, \frac{d\mathbf{H}_{\perp}}{d\tau} \right] + \mathbf{p} = 0, \quad (5)$$

$$|u| + K|u|^{-\gamma} + H_{\perp}^2 = 2. \quad (6)$$

Итак, исследование бегущих волн сводится к изучению решений системы (5), (6). Ниже для $\mathbf{p} = 0$ будут указаны все дважды непрерывно дифференцируемые функции $|u|(\tau)$, $\mathbf{H}_{\perp}(\tau)$, тождественно удовлетворяющие системе (5), (6). Без нарушения общности, ниже считается $J > 0$, $u > 0$, и тогда знаки модуля в (5), (6) можно опустить. За счёт выбора $L_0 = c / \omega_p = c \sqrt{\lambda_+ \lambda_-} \mathcal{D}^{1/2} / (4|J|\pi^{1/2})$ можно считать $\xi = 1$ и тогда при $\mathbf{q} = 0$ любые две бегущие волны с одинаковыми комбинациями $(\text{sgn } J)H_{\parallel} / \sqrt{4\pi} \mathcal{D}$ и $K|J|^{\gamma} / \mathcal{D}^{\gamma+1}$ являются решениями одной и той же системы (5), (6) с $\mathbf{p} = 0$, $\xi = 1$, зависящей только от двух безразмерных параметров $(\text{sgn } J)H_{\parallel} / \sqrt{4\pi} \mathcal{D}$, $K \cdot 2^{\gamma+1} |J|^{\gamma} / \mathcal{D}^{\gamma+1}$, обозначаемых выше β и K соответственно. Принятое выше обезразмеривание, индивидуальное для каждой бегущей волны, может оказаться неудобным в других задачах, например, при исследовании уединённых волн, удовлетворяющих заданным граничным условиям на бесконечности. Но для классификации типов бегущих волн оно предпочтительней. С другой стороны, хотя можно считать $\xi = 1$, ниже $\xi > 0$ полагается произвольным, дабы по ходу дела иметь возможность переходить к физически важным пределам. Например, МГД-предел соответствует стремлению $\xi \rightarrow 0$, и для $\xi = 0$ система (5), (6) сводится к двум алгебраическим уравнениям, которые имеют только константное решение (за исключением случая $\mathbf{p} = 0$, $\beta \neq 0$, и тогда решением является альфвеновская волна [7]), – таким образом, в МГД-теории нетривиальных бегущих волн нет. В пределе холловской МГД имеем $\xi^2 = 0$, $\xi \neq 0$ и система (5), (6) даёт автономное уравнение на плоскости, которое легко интегрируется. Более точно,

для холодной плазмы ($K=0$) в приближении холловской МГД система (5), (6) сведётся к паре уравнений

$$\begin{aligned} -\Lambda\beta\xi\frac{dH_z}{d\tau} + p_y + f(u)H_y = 0, \quad \Lambda\beta\xi\frac{dH_y}{d\tau} + p_z + f(u)H_z = 0, \\ f(u) = u/2 - \beta^2, \quad \mathbf{H}_\perp = (H_y, H_z), \quad \mathbf{p} = (p_y, p_z), \end{aligned} \quad (7)$$

где $u = 2 - (H_y^2 + H_z^2)$. Последовательным интегрированием легко найти функцию $\mathcal{E}(H_y, H_z)$, для которой $\partial\mathcal{E}/\partial H_y = p_y + f(u)H_y$, $\partial\mathcal{E}/\partial H_z = p_z + f(u)H_z$:

$$\mathcal{E} = (1 - \beta^2)H^2/2 - H^4/8 + p_y H_y + p_z H_z, \quad H^2 = H_y^2 + H_z^2,$$

что означает гамильтоновость системы (7). Но тогда на решении системы (7), очевидно, $\mathcal{E}(H_y, H_z) = \text{const}$ и, значит, интегральные кривые системы (7) задаются линиями уровня $\mathcal{E}(H_y, H_z) = C$. Для горячей плазмы несложно проверить, что на решении системы (7), удовлетворяющем условию

$$u + Ku^{-\gamma} + H_y^2 + H_z^2 = 2, \quad (8)$$

функция

$$\mathcal{E} = \frac{\beta^2 u}{2} - \frac{u^2}{8} - \frac{\gamma K}{4(\gamma-1)u^{\gamma-1}} + \frac{\beta^2 K}{2u^\gamma} + p_y H_y + p_z H_z$$

постоянная (при $K=0$ эта функция переходит в функцию $\mathcal{E}(H_y, H_z)$, указанную выше). Поэтому интегральные кривые в пространстве (H_y, H_z, u) задаются пересечениями цилиндрических поверхностей $\mathcal{E}(H_y, H_z, u) = C$ для всевозможных C со сфероидом вращения (8). При этом без нарушения общности можно считать $p_y = 0$. Мы не будем исследовать геометрию пересечений, но заметим, что для холловской МГД задача интеграции системы (5), (6) полностью редуцируется к геометрической задаче о пересечении двух поверхностей в трёхмерном пространстве и тем самым может считаться, в принципе, решённой.

3. Интеграция уравнений бегущих волн в случае $p = 0$

Основная особенность системы (5), (6) в том, что одно из уравнений системы – обыкновенное дифференциальное, а другое – алгебраическое. Алгебраическое уравнение (6) задаёт в пространстве переменных (H_y, H_z, u)

сфероид вращения S^2 , получаемый вращением кривой Γ , изображённой на рис. 1, вокруг оси u .

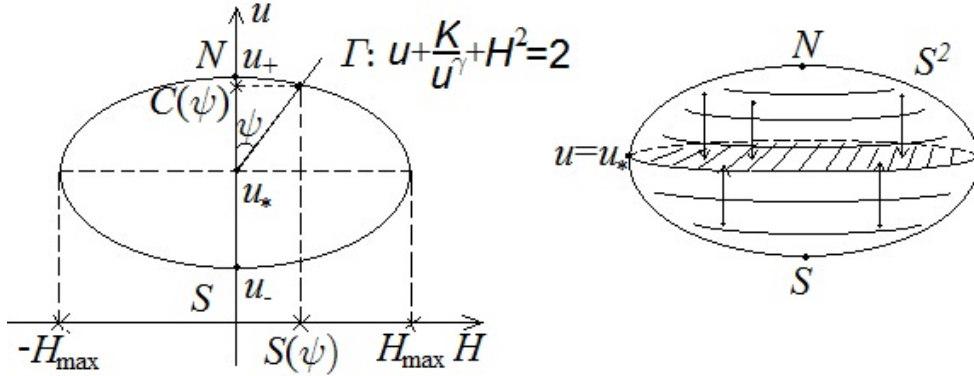


Рис. 1. Сфероид вращения S^2 кривой Γ вокруг оси u и проекции полушарий на меридиональную плоскость

Здесь $u_* = (\gamma K)^{\frac{1}{\gamma+1}}$ – точка минимума функции $u + K/u^\gamma$, $0 < u_- < u_* < u_+$ – корни уравнения $u + K/u^\gamma = 2$, $H_{\max} = (2 - u_* - K/u_*^\gamma)^{1/2} = \left(2 - (\gamma + 1)(\gamma K)^{\frac{1}{\gamma+1}} / \gamma\right)^{1/2}$.

Сфероид S^2 экваториальной плоскостью $u = u_*$ делится на два полушария: северное $u \geq u_*$ и южное $u \leq u_*$, которые пересекаются по экватору $u = u_*$. Кривые $(H_y(\tau), H_z(\tau), u(\tau))$, являющиеся решениями системы (5), (6) и определяющие бегущие волны, лежат на сфероиде S^2 и могут быть разбиты на три класса: холодные, горячие и гибридные бегущие волны. Холодные бегущие волны соответствуют кривым, лежащим в северном полушарии, горячие – в южном, гибридные бегущие волны отвечают кривым, лежащим на обоих полушариях одновременно. Интегральные кривые, лежащие только на северном или только на южном полушариях, т.е. холодные или горячие бегущие волны, могут быть описаны и классифицированы по их проекциям (параллельно оси u) на экваториальную плоскость $u = u_*$. При этом, очевидно, указанные проекции устанавливают взаимно однозначное соответствие полушарий с точками круга радиуса H_{\max} в экваториальной плоскости с центром в начале координат. Основная проблема связана с нахождением гибридных бегущих волн. Для её решения и интеграции системы (5), (6) в случае $p = 0$ введём на сфероиде S^2 “сферические” координаты. Для любого ψ рассмотрим луч с началом в точке $(0, u_*)$ на плоскости (H, u) , образующий угол ψ с положительным направлением оси u . Пересечением этого луча с овалом Γ обозначим $(S(\psi), C(\psi))$. Функции $S(\psi)$, $C(\psi)$ удовлетворяют тождеству

$$C(\psi) + KC(\psi)^{-\gamma} + S^2(\psi) = 2 \quad (9)$$

и могут быть затабулированы. Сферические координаты имеют вид

$$\psi, \varphi \mapsto H_y = S(\psi) \cos \varphi, \quad H_z = S(\psi) \sin \varphi, \quad u = C(\psi). \quad (10)$$

Таким образом, ψ задаёт “широту” точки на сфероиде, а φ – “долготу”. Северный (N) и южный (S) полюсы отвечают широтам $\psi = 0$, $\psi = \pi$ (долгота при этом значения не имеет). Матрица Якоби отображения (10) имеет вид

$$\begin{bmatrix} S'(\psi) \cos \varphi & -S(\psi) \sin \varphi \\ S'(\psi) \sin \varphi & S(\psi) \cos \varphi \\ C'(\psi) & 0 \end{bmatrix},$$

где штрих означает дифференцирование по ψ . Отсюда следует, что: 1) на полосах $(k\pi, (k+1)\pi) \times \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ отображение (10) является накрывающим отображением [8] на сфероид с выброшенными полюсами $S^2 \setminus \{N, S\}$, 2) на прямых $\psi = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ранг отображения (10) равен 1, причём кривая, трансверсальная прямой $\psi = k\pi$, отображается посредством (10) на сфероид регулярно. Очевидно, $S(\psi)$, $C(\psi)$ – гладкие 2π -периодические функции, графики которых имеют вид, изображённый на рис. 2.

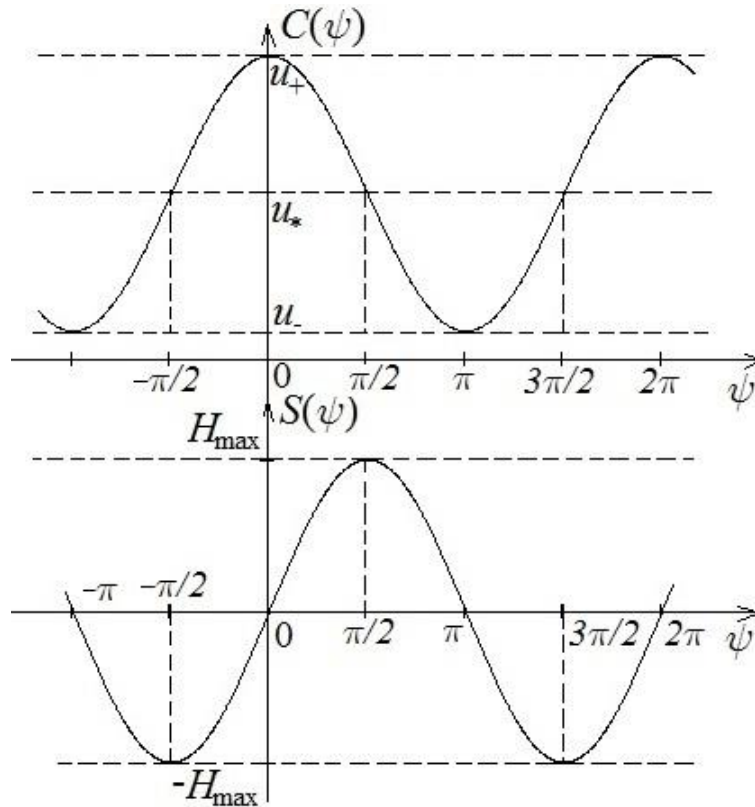


Рис. 2. Графики функций $C(\psi)$, $S(\psi)$

Функция $C(\psi)$ чётная по ψ , $S(\psi)$ – нечётная и $C(2\pi - \psi) = C(\psi)$, $S(2\pi - \psi) = -S(\psi)$, $S'((k+1/2)\pi) = 0$, $C'(k\pi) = 0$, $C((k+1/2)\pi) = u_*$, $S((k+1/2)\pi) = (-1)^k H_{\max}$, $k \in \mathbb{Z}$ (функции $C(\psi)$, $S(\psi)$ являются аналогами смещённого $\cos\psi$ и $\sin\psi$; если бы овал Γ задавался более простым уравнением, например, $(u - u_*)^2 + H^2 = 2$, $u_* > \sqrt{2}$, то $C(\psi) = u_* + \sqrt{2}\cos\psi$, $S(\psi) = \sqrt{2}\sin\psi$).

Перейдём к интеграции системы (5), (6) в случае $p = 0$ в сферических координатах. Ищем функции $\psi(\tau)$, $\varphi(\tau)$, для которых $u(\tau)$, $H_y(\tau)$, $H_z(\tau)$, вычисляемые посредством формул (10), являются решением уравнения (5):

$$\begin{aligned} \xi^2 \frac{d^2 H_y}{d\tau^2} + \Lambda \xi \beta \frac{dH_z}{d\tau} - \left(\frac{u}{2} - \beta^2 \right) H_y &= 0, \\ \xi^2 \frac{d^2 H_z}{d\tau^2} - \Lambda \xi \beta \frac{dH_y}{d\tau} - \left(\frac{u}{2} - \beta^2 \right) H_z &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Дифференцируя равенства (10), получим:

$$\begin{aligned} \dot{H}_y &= S' \dot{\psi} \cos \varphi - S \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{H}_z = S' \dot{\psi} \sin \varphi + S \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \ddot{H}_y &= (S'' \dot{\psi}^2 + S' \ddot{\psi} - S \dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (2S' \dot{\varphi} \dot{\psi} + S \ddot{\varphi}) \sin \varphi, \\ \ddot{H}_z &= (2S' \dot{\varphi} \dot{\psi} + S \ddot{\varphi}) \cos \varphi + (S'' \dot{\psi}^2 + S' \ddot{\psi} - S \dot{\varphi}^2) \sin \varphi, \end{aligned}$$

где штрих означает производную по ψ , а точка – по τ . Подставляя полученные выражения в систему (11), имеем

$$\begin{aligned} -A \sin \varphi + B \cos \varphi &= 0, \quad A = \xi^2 (2S' \dot{\varphi} \dot{\psi} + S \ddot{\varphi}) - \Lambda \xi \beta S' \dot{\psi}, \\ B \sin \varphi + A \cos \varphi &= 0, \quad B = \xi^2 (S'' \dot{\psi}^2 + S' \ddot{\psi} - S \dot{\varphi}^2) + \Lambda \xi \beta S \dot{\varphi} - (C(\psi) / 2 - \beta^2) S. \end{aligned}$$

Полученная система уравнений, очевидно, равносильна равенствам $A = 0$, $B = 0$. Если равенство $A = 0$ умножить на $S(\psi)$, то его можно переписать в виде

$$\frac{d}{d\tau} \left(\xi S^2 \dot{\varphi} - \frac{\Lambda \beta}{2} S^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \dot{\varphi} = \frac{I + (\Lambda \beta / 2) S^2(\psi)}{\xi S^2(\psi)}, \quad (12)$$

где I – произвольная константа, имеющая смысл обобщённого углового момента. Подставляя полученное выражение (12) для $\dot{\varphi}$ в равенство $B = 0$, получим:

$$\xi^2 [S'' \dot{\psi}^2 + S' \ddot{\psi}] + S(\psi) [\beta^2 (\Lambda^2 / 4 + 1) - C(\psi) / 2] - I^2 / S(\psi)^3 = 0. \quad (13)$$

Итак, для нахождения $\psi(\tau)$ получили обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с особенностью при старшей производной в точках $\psi = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, отвечающих экватору сфероида S^2 . Проинтегрируем уравнение (13). Для этого умножим его на $S'\dot{\psi}$ и воспользуемся равенствами:

$$\begin{aligned} S''S'\dot{\psi}^3 + (S')^2\ddot{\psi}\dot{\psi} &= \frac{d}{d\tau} \frac{(S'\dot{\psi})^2}{2}, \\ SS'\dot{\psi} \left[\beta^2 \left(1 + \frac{\Lambda^2}{4} \right) - \frac{C}{2} \right] - \frac{I^2 S'\dot{\psi}}{S^3} &= \frac{d}{d\tau} \left[\frac{S^2}{2} \beta^2 \left(1 + \frac{\Lambda^2}{4} \right) \right] + \\ + \frac{CC'\dot{\psi}}{4} \left(1 - \frac{\gamma K}{C^{\gamma+1}} \right) + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{I^2}{2S^2} \right) &= \frac{d}{d\tau} \Phi(\psi) = \frac{d\Phi}{d\psi} \dot{\psi}, \end{aligned}$$

где

$$\Phi(\psi) = \frac{\beta^2}{2} \left(1 + \frac{\Lambda^2}{4} \right) S^2(\psi) + \frac{C^2(\psi)}{8} + \frac{\gamma}{4(\gamma-1)} \frac{K}{C(\psi)^{\gamma-1}} + \frac{I^2}{2S^2(\psi)}$$

известная (потенциальная) функция и использовалось равенство

$$2S'S + C'(1 - \gamma K / C^{\gamma+1}) = 0,$$

полученное дифференцированием тождества (9). Итак, уравнение (13) сводится к виду

$$\xi^2 [S'(\psi)\dot{\psi}]^2 / 2 + \Phi(\psi) \equiv \mathcal{E} = \text{const},$$

где \mathcal{E} – произвольная константа. Отсюда

$$\xi S'(\psi) \frac{d\psi}{d\tau} = \sqrt{2(\mathcal{E} - \Phi(\psi))} \Leftrightarrow \xi S'(\psi) C(\psi) \frac{d\psi}{d\theta} = \sqrt{2(\mathcal{E} - \Phi(\psi))}.$$

В итоге приходим к следующим формулам, задающим решение системы (5), (6) в сферических координатах

$$\pm \int \frac{\xi S'(\psi) C(\psi) d\psi}{\sqrt{2(\mathcal{E} - \Phi(u))}} = \theta + \text{const}, \quad (14)$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{I + (\Lambda\beta/2)S^2(\psi)}{\xi S^2(\psi)C(\psi)}, \quad (15)$$

где \mathcal{E} , I – произвольные константы, выражения для $\Phi(\psi)$ указано выше, а $S(\psi)$, $C(\psi)$ затабулированы. Формулы (14), (15) вместе с соотношениями (10) задают общее решение системы (5), (6). Функция $\psi(\theta)$ лежит в потенциальной

яме $\Phi(\psi) \leq \mathcal{E}$ и склеивается из \pm дуг (14). По найденной широте $\psi(\theta)$ долгота $\varphi(\theta)$ получается однократным интегрированием уравнения (15). Если потенциальная яма не содержит точек $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ и целиком лежит в интервале $(k\pi, k\pi + \pi)$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, то общие формулы можно существенно упростить, сделав замену переменных $u = C(\psi)$, что законно, поскольку в указанных потенциальных ямах функция $C(\psi)$ монотонная. Учитывая

$$S^2(\psi) = 2 - u - \frac{K}{u^\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} g(u), \quad g'(u) = -\left(1 - \frac{\gamma K}{u^{\gamma+1}}\right),$$

$$C'(\psi)d\psi = du \Rightarrow d\psi = \frac{du}{C'(\psi)} = + \frac{g'(u)du}{2S'(\psi)\sqrt{g(u)}},$$

получим из (14), (15)

$$\pm \frac{\xi}{2} \int \frac{ug'(u)du}{\sqrt{g(u)}\sqrt{2(\mathcal{E} - \Phi(\psi))}} = \theta + \text{const},$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{I + (\Lambda\beta)g(u)/2}{\xi ug(u)},$$

$$\Phi(u) = \frac{\beta^2}{2} \left(1 + \frac{\Lambda^2}{4}\right) g(u) + \frac{I^2}{2g(u)} + \frac{u^2}{8} + \frac{\gamma}{4(\gamma-1)} \frac{K}{u^{\gamma-1}},$$

откуда $H_y = \sqrt{g(u)} \cos \varphi$, $H_z = \sqrt{g(u)} \sin \varphi$. Преимущество этих формул в том, что в них входят только известные элементарные функции $\Phi(u)$, $g(u)$. При этом знак $\sqrt{g(u)}$ зависит от интервала $(k\pi, k\pi + \pi)$, содержащего потенциальную яму. Если k – чётное, то надо выбрать перед корнем знак “+”, а если k – нечётное, то знак “–”. Однако если потенциальная яма содержит точки $k\pi$, то формулы (14), (15) – это единственный способ аналитического задания решения. Анализ формул (14), (15) сводится к исследованию потенциальной функции $\Phi(u)$ и классификации её потенциальных ям в зависимости от константы \mathcal{E} . В данном случае эта классификация осложняется возможностью попадания в потенциальную яму особых точек уравнения (13), где коэффициент при старшей производной обращается в нуль, $S'(\psi) = 0$, т.е. точек вида $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку на периоде 2π содержится только две точки указанного вида, $\pi/2$ и $3\pi/2$, то число возможных случаев невелико и основные из них рассмотрены в следующем пункте. Если потенциальная яма содержит точки $\pi/2 + k\pi$ внутри себя, то формула (14) задаёт негладкие решения уравнения (13). Если точки $\pi/2 + k\pi$ попадают на границу потенциальной ямы, то формула (14) даёт возможность построить гладкие решения, проходящие через особые точки уравнения (13).

4. Негладкие решения

Гладкие решения системы (5), (6) возникают из гладких решений уравнения (13) по формулам (14), (15), (10), которые имеют место, если потенциальная яма $\Phi(\psi) \leq \mathcal{E}$ не содержит точек вида $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ внутри себя. В противном случае мы сталкиваемся с негладкими решениями. Рассмотрим конкретную ситуацию. Пусть потенциальная яма $[\psi_0, \psi_1]$, $0 \leq \psi_0 < \psi_1 \leq 2\pi$ содержит точку $\psi_* = \pi/2 \in (\psi_0, \psi_1)$ внутри себя. Таким образом, считается, что $\Phi(\psi) < \mathcal{E}$ для $\psi \in (\psi_0, \psi_1)$ и $\Phi(\psi_0) = \Phi(\psi_1) = \mathcal{E}$. Учитывая равенства $S'(\psi_*) = 0$, $C(\psi_*) = u_*$, имеем $d\theta/d\psi(\psi_*) = 0$ и значит \pm -дуги (14), из которых склеивается решение, имеют вид:

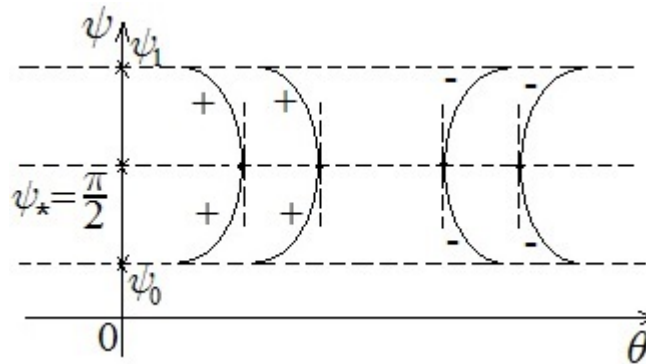


Рис. 3. Пазлы для сборки решения $\psi(\theta)$, если $\pi/2 \in (\psi_0, \psi_1) = \{\Phi(\psi) < \mathcal{E}\}$

Прямая $\psi = \psi_*$ разбивает \pm -дуги (14) на две части, которые назовём пазлами и из которых собирается график непрерывной функции $\psi(\theta)$, как показано на рис. 4.

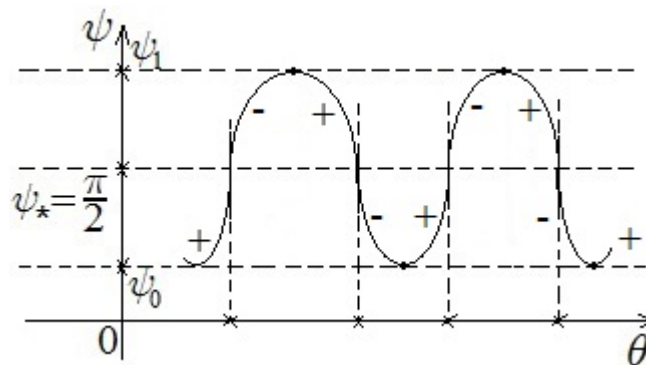


Рис. 4. Пример сборки непрерывной функции $\psi(\theta)$ из пазлов, изображённых на рис. 3

В итоге получается функция $\psi(\theta)$, у которой производные в точках полного прообраза $\psi^{-1}(\pi/2)$ (эти точки на рис. 4 отмечены крестиками) равны $\pm\infty$. Это

означает, что в этих точках $u(\theta)$ и, значит, $U_{\parallel}(\theta)$ имеет бесконечную производные, а производные $H_y(\theta)$ и $H_z(\theta)$ претерпевают конечные скачки $2\sqrt{2(\mathcal{E} - \Phi(\pi/2))}(\xi u_*)^{-1} \cos \varphi$ и $2\sqrt{2(\mathcal{E} - \Phi(\pi/2))}(\xi u_*)^{-1} \sin \varphi$, где $\varphi = \varphi(\theta)$, $\theta \in \psi^{-1}(\pi/2)$ соответственно. В частности, в точках $\theta \in \psi^{-1}(\pi/2)$ частицы плазмы имеют бесконечные продольные ускорения, а плотность тока в этих точках испытывает тангенциальный разрыв. Физический смысл подобных бегущих волн с особенностями требует дополнительного обсуждения. Количество пазлов, из которых собирается график функции $\psi(\theta)$, увеличивается, если потенциальная яма $\Phi(\psi) \leq \mathcal{E}$ содержит внутри себя несколько точек вида $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Например, если $\pi/2, 3\pi/2 \in (\psi_0, \psi_1)$, то график непрерывной функции $\psi(\theta)$ собирается из пазлов, на которые нарезаются \pm -дуги (14) прямыми $\psi = \pi/2$, $\psi = 3\pi/2$:

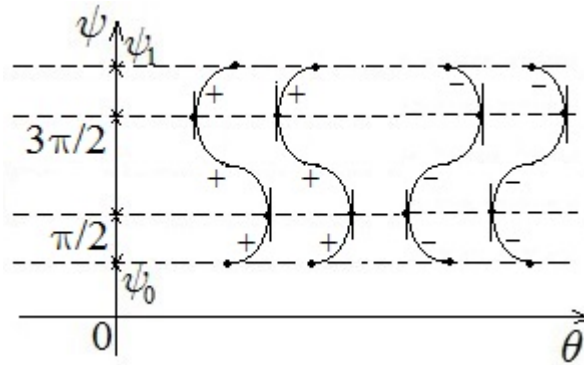


Рис. 5. Пазлы для сборки решения $\psi(\theta)$, если $\pi/2, 3\pi/2 \in (\psi_0, \psi_1) = \{\Phi(\psi) < \mathcal{E}\}$

Каждая \pm -дуга (14) делится на три пазла, из которых собирается график функции $\psi(\theta)$ (рис. 6).

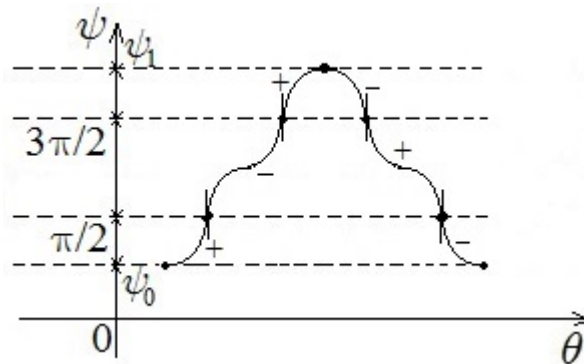


Рис. 6

Гладкие решения могут возникнуть, только если точки $\pi/2 + k\pi$ попадают на границу потенциальной ямы. Пусть, например, для потенциальной ямы

$[\psi_0, \psi_1] = \{\Phi(\psi) \leq \mathcal{E}\}$ справедливо равенство $\psi_0 = \pi/2$ (и других точек вида $\pi/2 + k\pi$ она не содержит). Тогда, учитывая соотношение $\Phi'(\pi/2) = 0$, заключаем, что либо ψ_0 – точка перегиба и тогда $\Phi''(\pi/2) = 0$, либо – точка лоса и тогда $\Phi''(\pi/2) < 0$. В первом случае $\mathcal{E} - \Phi(\psi) = \Phi(\pi/2) - \Phi(\psi) = -\frac{1}{6}\Phi'''(\pi/2)(\psi - \pi/2)^3 + \dots$, $S'(\psi) = S''(\pi/2)(\psi - \pi/2) + \dots$. Поэтому подынтегральное выражение в (14) при $\psi \rightarrow \pi/2$ эквивалентно (в смысле матанализа) функции

$$\frac{\xi S''(\pi/2)C(\pi/2)}{(-\Phi'''(\pi/2)/3)^{1/2}(\psi - \pi/2)^{1/2}} = \frac{\xi S''(\pi/2)u_*}{(\psi - \pi/2)^{1/2}(-\Phi'''(\pi/2)/3)^{1/2}} = \frac{\text{const}}{(\psi - \pi/2)^{1/2}}.$$

Поэтому интеграл (14) на левом конце в точке $\pi/2$ сходится, $d\theta/d\psi(\pi/2) = \pm\infty$ и \pm -дуги (14) имеют вид:

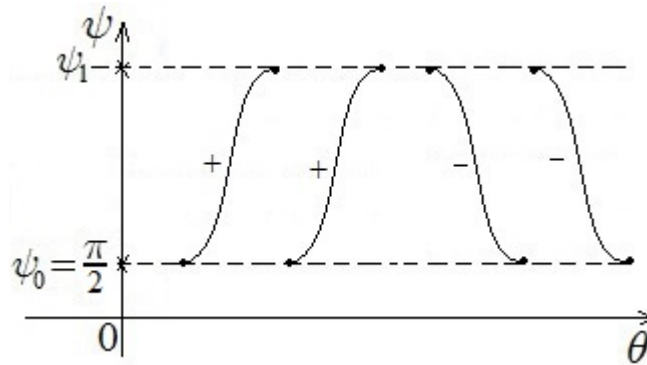


Рис. 7. Пазлы для сборки функции $\psi(\theta)$ для потенциальной ямы $[\pi/2, \psi_1]$

Из них, как обычно, собирается гладкое периодическое решение $\psi(\theta)$ с

периодом $T = 2 \int_{\pi/2}^{\psi_1} \frac{\xi |S'(\psi)| C(\psi) d\psi}{\sqrt{2(\mathcal{E} - \Phi(\psi))}}$. Во втором случае

$\mathcal{E} - \Phi(\psi) = -\Phi''(\pi/2)(\psi - \pi/2)^2/2 + \dots$ и подынтегральное выражение (14) при $\psi \rightarrow \pi/2$ имеет конечный предел $\pm \xi S''(\pi/2)u_* / \sqrt{-\Phi''(\pi/2)}$. Значит, $d\theta/d\psi(\pi/2) = \pm \xi S''(\pi/2)u_* (-\Phi''(\pi/2))^{-1/2}$ и \pm -дуги (14) имеют вид, изображённый на рис. 8. Собрать из них график гладкой функции $\psi(\theta)$ в потенциальной яме $[\pi/2, \psi_1]$ невозможно, но поскольку $\psi_0 = \pi/2$ точка лоса функции $\Phi(\psi)$, то к яме $[\pi/2, \psi_1]$ слева должна примыкать ещё одна яма $[\psi_2, \psi_0]$, для которой $\pi/2$ является правым концом. Поэтому дуги на рис. 8 могут быть продолжены гладким (\equiv дважды непрерывно дифференцируемым) образом в указанную примыкающую потенциальную яму (рис. 9). Если в яме

$[\psi_2, \pi/2]$ нет точек вида $\pi/2 + k\pi$, отличных от $\pi/2$, то продолженные дуги дают пазлы для сборки графика гладкой функции $\psi(\theta)$ по двум потенциальным ямам.

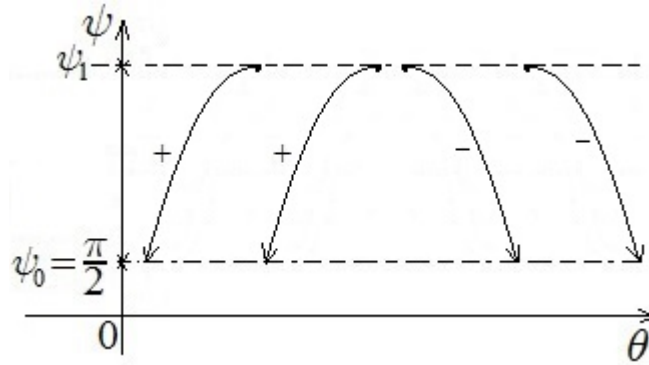


Рис. 8. Пазлы для сборки функции $\psi(\theta)$ для потенциальной ямы $[\pi/2, \psi_1]$ ($\Phi''(\pi/2) < 0$)

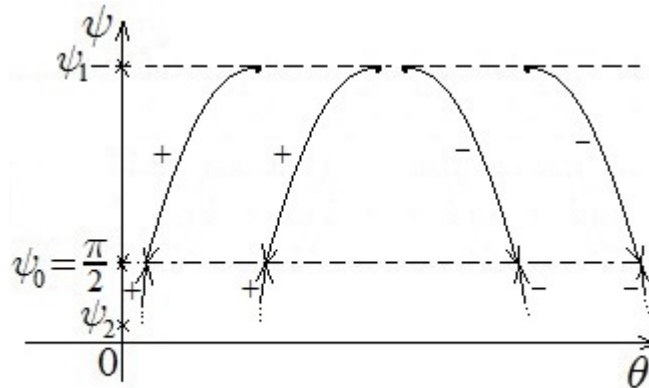


Рис. 9. Продолжение пазлов для сборки функции $\psi(\theta)$ через границу $\psi_0 = \pi/2$ потенциальной ямы

Если ψ_2 совпадает с точкой вида $\pi/2 + k\pi$, то приходим к разобранной выше ситуации и гладкие решения могут быть продолжены через яму $[\psi_2, \psi_0]$. Выше по умолчанию считалось, что $\Phi'(\psi_1) \neq 0$, $\Phi'(\psi_0) \neq 0$. Если это не так, то \pm -дуги на рис. 3 асимптотически приближаются к прямым $\psi = \psi_0$ и/или $\psi = \psi_1$ и в предыдущие построения вносятся очевидные изменения. Итак, мы рассмотрели процедуру построения гладких решений, если особые точки уравнения (13) попадают на края потенциальных ям, и убедились, что гладких решений нет, если особые точки оказываются внутри потенциальных ям.

5. Случай нулевого обобщённого углового момента

($I = 0$)

Гладкие решения системы (5), (6) порождаются гладкими решениями уравнения (13), для нахождения которых надо перечислить потенциальные ямы функции $\Phi(\psi)$. Последние определяются точками locextr функции $\Phi(\psi)$, являющимися корнями уравнения

$$\Phi'(\psi) = \frac{S'(\psi)}{S^3(\psi)} \left[\left(\beta^2 \left(1 + \frac{\Lambda^2}{4} \right) - \frac{C(\psi)}{2} \right) S^4(\psi) - I^2 \right] = 0. \quad (16)$$

В случае $I = 0$, которым мы в этом пункте ограничимся, уравнение (16) даёт

$$\Phi'(\psi) = S(\psi)S'(\psi)(u_0 - C(\psi)) / 2 = 0, \quad u_0 = 2\beta^2 \left(1 + \Lambda^2 / 4 \right).$$

На периоде $[0, 2\pi]$ нули производной состоят из точек $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ и решений $0 \leq \psi_0 < \psi_1 \leq 2\pi$ уравнения $C(\psi) = u_0$. Последние определяются расположением значения u_0 по отношению к точкам u_*, u_{\pm} , не зависящим от β . При $u_0 < u_-$ или $u_0 > u_+$ уравнение $C(\psi) = u_0$ не имеет решений (см. рис. 2) и точки ψ_0, ψ_1 отсутствуют. При $u_0 = u_-$ имеем $\psi_0 = \psi_1 = \pi$, при $u_0 = u_+$ очевидно $\psi_0 = 0 < \psi_1 = 2\pi$. При $u_- < u_0 < u_+$ точки $\psi_0 < \psi_1$ расположены симметрично относительно значения π , $\psi_0 = 2\pi - \psi_1$. Рассмотрим эволюцию графиков $\Phi(\psi)$ при увеличении β^2 . Легко проверить, что на периоде $[0, 2\pi]$: 1) график $\Phi(\psi)$ симметричен относительно прямой $\psi = \pi$, $\Phi(2\pi - \psi) = \Phi(\psi)$, 2) $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$, $\Phi(\pi)$ не зависят от β^2 в точках $\psi \neq k\pi$ и $\Phi(0) = \Phi(2\pi) > \Phi(\pi)$ (см. Теорему 1 ниже), 3) график $\Phi(\psi)$ для большего значения β^2 лежит выше графика $\Phi(\psi)$ для меньшего значения β^2 . Принципиальные технические моменты собраны в следующей теореме.

Теорема 1. 1) *Имеет место неравенство $\Phi(0) > \Phi(\pi)$, при этом*

$$\Phi(0) > \Phi(\pi) \Leftrightarrow \frac{u_+^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{K}{u_+^{\gamma-1}} > \frac{u_-^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{K}{u_-^{\gamma-1}}.$$

2) *Имеет место эквивалентность:*

$$\begin{aligned} & \Phi(0) \leq (\geq) \Phi(\pi/2) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{u_+^2}{8} + \frac{\gamma}{4(\gamma-1)} \frac{K}{u_+^{\gamma-1}} - \frac{u_*^2}{8} - \frac{\gamma}{4(\gamma-1)} \frac{K}{u_*^{\gamma-1}} \right) \frac{2}{(1 + \Lambda^2 / 4) H_{\max}^2} \leq (\geq) \beta^2. \end{aligned}$$

3) *Справедливы неравенства:*

$$u_* H_{\max}^2 < \frac{u_+^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{K}{u_+^{\gamma-1}} - \frac{u_*^2}{2} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{K}{u_*^{\gamma-1}} < u_+ H_{\max}^2,$$

$$\text{где } H_{\max}^2 = 2 - u_* - \frac{K}{u_*^2} = 2 - \frac{\gamma+1}{\gamma} u_*. \quad \#$$

Из **Теоремы 1** следует, что график $\Phi(\psi)$ претерпевает качественные изменения при нахождении параметра β^2 через 4 критических значения

$$\frac{u_-}{2(1+A^2/4)}, \quad \frac{u_*}{2(1+A^2/4)}, \quad \frac{u^*}{2(1+A^2/4)}, \quad \frac{u_+}{2(1+A^2/4)},$$

расположенных в порядке строгого возрастания, где

$$u^* = \frac{1}{H_{\max}^2} \left(\frac{u_+^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{K}{u_+^{\gamma-1}} - \frac{u_*^2}{2} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{K}{u_*^{\gamma-1}} \right).$$

Из **Теоремы 1** следует $u_* < u^* < u_+$, а неравенство $\beta^2 \leq (\geq) \frac{u^*}{2(1+A^2/4)}$

равносильно неравенству $\Phi(0) \geq (\leq) \Phi(\pi/2)$. Эти соображения позволяют нарисовать графики потенциальной функции $\Phi(\psi)$ в зависимости от β^2 (рис. 10). Выше бегущие волны были поделены на холодные (расположенные в северном полушарии $u \geq u_*$), горячие (расположенные в южном полушарии $u \leq u_*$) и гибридные (расположенные одновременно в обоих полушариях). В случае 10.1 потенциальных ям, не содержащих внутри себя особых точек уравнения (13) нет и значит гладкие решения в этом случае отсутствуют.

Горячие бегущие волны. Такие волны возникают только в потенциальных ямах с центром в точке π , лежащих в $[\pi/2, 3\pi/2]$. Эти ямы заштрихованы косыми линиями на рис. 10 и отвечают случаям 10.2–20.3 при $\xi_1 \leq \xi_0$ и случаям 10.4–10.7 при $\xi_1, \xi_2 < \xi_0$. В этих случаях потенциальные ямы имеют вид $\{\Phi(\psi) \leq \xi_i\} = [\psi_0^*, \psi_1^*]$, $\psi_0^* + \psi_1^* = 2\pi$, ψ_0^* , ψ_1^* – корни уравнения $\Phi(\psi) = \xi_i$, $i=1,2$, а функция $\psi(\theta)$ удовлетворяет условию $\psi(\theta + T/2) = 2\pi - \psi(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ и имеет период

$$T = 2 \int_{\psi_0^*}^{\psi_1^*} \frac{\xi_i |S'(\psi)| C(\psi) d\psi}{\sqrt{2(\xi_i - \Phi(\psi))}}, \quad i=1,2.$$

Полярный угол $\varphi(\theta)$ меняется монотонно

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{A\beta}{2\xi C(\psi(\theta))}$$

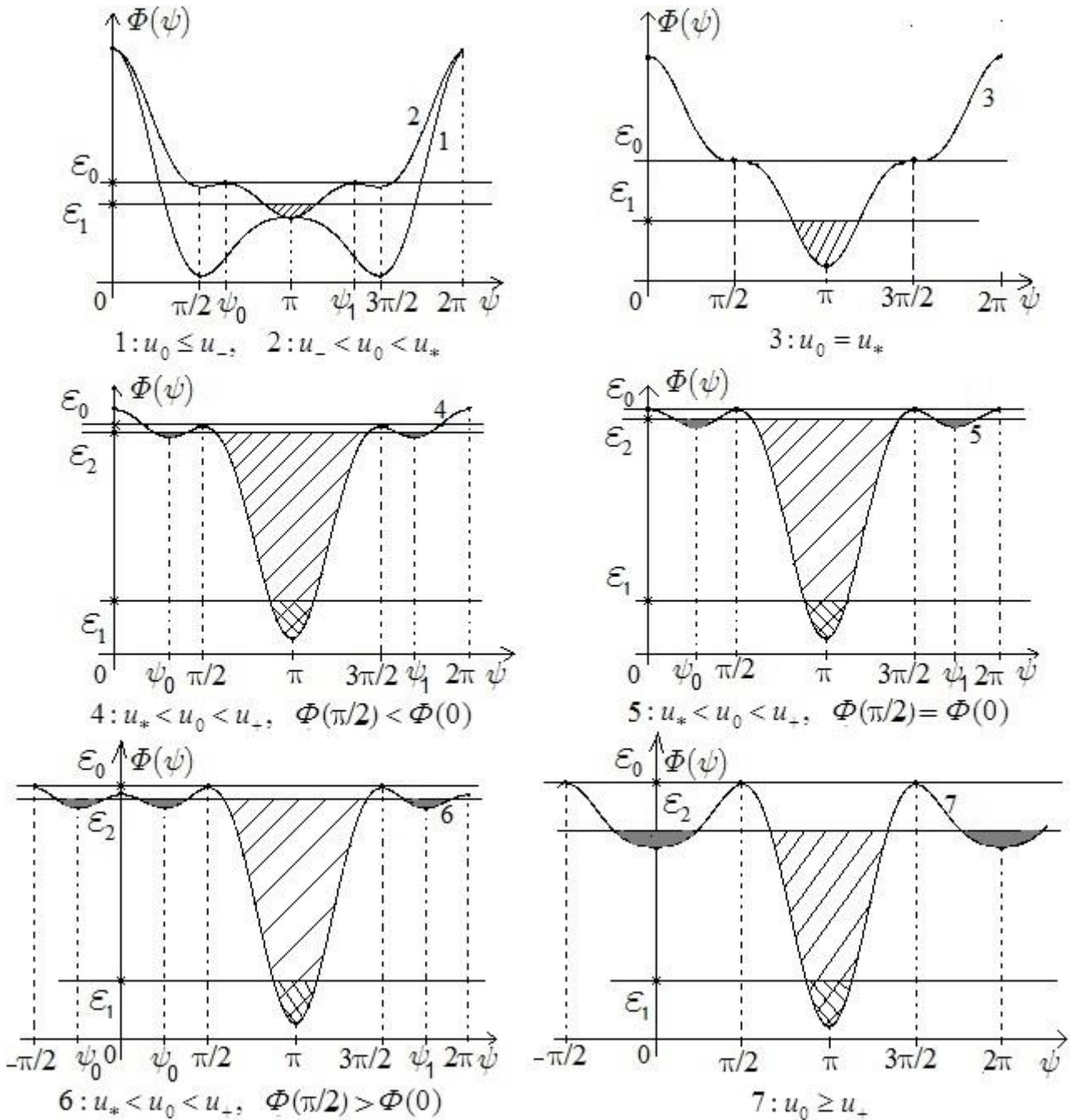


Рис. 10. Потенциальные ямы функции $\Phi(\psi)$ для $I=0$ и различных β^2

и $\varphi(\theta + T/2) - \varphi(\theta) \equiv L = \text{const}$. При пересечении интегральной кривой южного полюса полярный угол $\varphi(\theta)$ скачкообразно изменяется на $\pm\pi$, где $\pm = \text{sgn} L$. Таким образом, в меридиональной плоскости горячие бегущие волны задаются многолепестковой розой, изображённой на рис. 11. Угол поворота L , равный раствору одного лепестка, вычисляется по формуле

$$L = \int_0^{T/2} \dot{\varphi}(\theta) d\theta = \frac{\Lambda\beta}{2\xi} \int_0^{T/2} \frac{d\theta}{C(\psi(\theta))} = \frac{\Lambda\beta}{2} \int_{\psi_0^*}^{\psi_1^*} \frac{|S'(\psi)| d\psi}{\sqrt{2(\xi_i - \Phi(\psi))}}, \quad i=1,2.$$

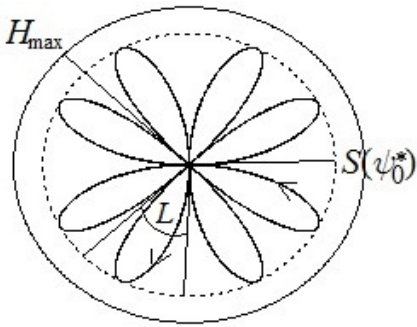


Рис. 11

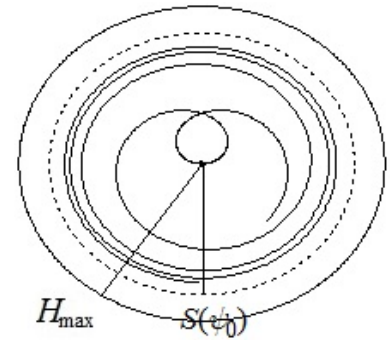


Рис. 12

Если L соизмеримо с π , то многолепестковая роза является замкнутой гладкой кривой, состоящей из конечного числа лепестков, если L несоизмеримо с π , то роза состоит из счётного числа лепестков, всюду плотно расположенных в круге $(H_y^2 + H_z^2)^{1/2} \leq S(\psi_0^*)$. В случае 10.2 при $\xi = \xi_0$ нарисованная картина меняется. При $\xi \rightarrow \xi_0$ имеем $\psi_0^* \rightarrow \psi_0$, $\psi_1^* \rightarrow \psi_1$, раствор лепестка $L \rightarrow +\infty$, лепесток размыкается, а его стороны наматываются изнутри на окружность радиуса $S(\psi_0)$ (рис. 12). При этом функции $u(\theta)$, $H_y(\theta)$, $H_z(\theta)$ имеют характерный вид (рис. 13), амплитуды колебаний задаются формулой

$$\theta = \pm \int_{\pi}^{\psi} \frac{\xi S'(\psi) C(\psi) d\psi}{\sqrt{2(\xi_1 - \Phi(\psi))}},$$

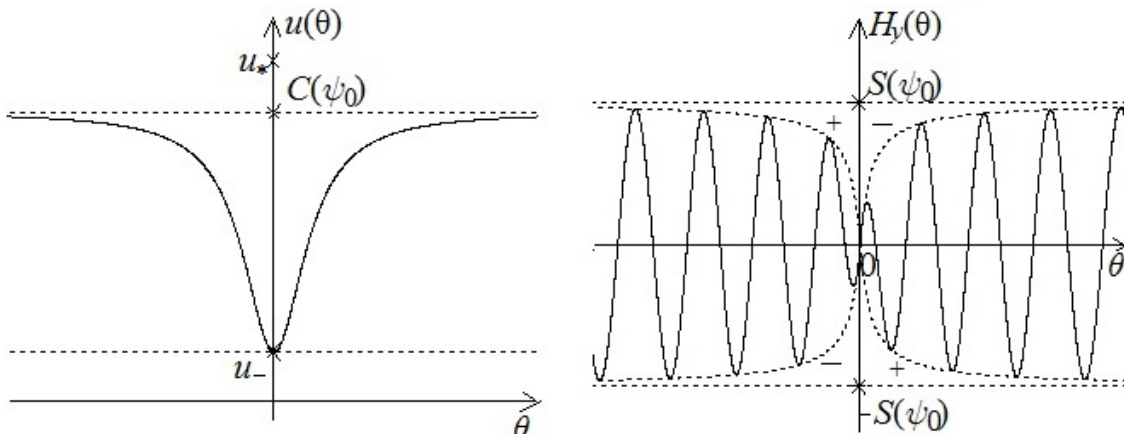


Рис. 13

а частота колебаний при $\theta \rightarrow \pm\infty$ стремится к $L\beta / (2\xi C(\psi_0))$, а при $\theta \rightarrow 0$ – к значению $L\beta / (2\xi u_-)$. Таким образом, в нуле частота колебаний больше, чем на бесконечности. При $\xi \rightarrow \xi_0$ на рис. 10.3 края потенциальной ямы ψ_0^* , ψ_1^* стремятся соответственно к точкам $\pi/2$, $3\pi/2$, но поскольку последние являются точками перегиба функции $\Phi(\psi)$, то, согласно результатам п.4,

качественных изменений по сравнению с рис. 11 не происходит. Тогда

$$S(\psi_0^*) \rightarrow H_{\max}, \quad \text{а} \quad L \rightarrow \frac{\Lambda\beta}{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{|S'(\psi)|d\psi}{\sqrt{2(\xi_0 - \Phi(\psi))}}, \quad \xi_0 = \Phi(\pi/2).$$

решения на сфероиде S^2 получаются из кривых на рис. 11,12 отступлением вдоль отображения проектирования южного полушария на меридиональную плоскость.

Холодные бегущие волны. Такие волны возникают, если потенциальные ямы не пересекаются с отрезками $[\pi/2, 3\pi/2] + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. На рис. 10 эти ямы окрашены серым фоном, и для их существования необходимо и достаточно, чтобы $\xi_2 < \xi_0$. Если на периоде возникают две – левая и правая – симметрично расположенные относительно точки π ямы (рис. 10.4, 10.5, 10.6) и $\psi_\Lambda(\theta)$, $\psi_\Pi(\theta)$ – решения уравнения (13), отвечающие этим ямам для одной и той же константы ξ_2 , то нетрудно проверить равенство $\psi_\Lambda(\theta) = 2\pi - \psi_\Pi(\theta)$. Значит, соответствующие бегущие волны отличаются поворотом на угол π по азимутальной координате (долготе) φ . Анализ и классификация полученных бегущих волн такие же, как и для случая холодной плазмы. Детальное рассмотрение проведено в [5]. Кратко сформулируем полученные результаты. Бегущие волны делятся на 4 типа: многовитковые спирали (10.4, 10.5 при $\Phi(\psi_0) < \xi_2 < \xi_0$ и 10.6 при $\Phi(\psi_0) < \xi_2 < \Phi(0)$), многовитковые розы (10.6, 10.7 при $\Phi(0) < \xi_2 < \xi_0$) волновые пакеты колебаний или, что то же самое, уединённые волны (10.6 при $\xi_2 = \Phi(0)$) и окружности (10.4–10.6 при $\xi_2 = \Phi(\psi_0)$). Проекция первых трёх типов бегущих волн на меридиональную плоскость приведены на рис. 14. Для многовитковой спирали $0 < \psi_0^* < \psi_1^* < \pi/2$ это корни уравнения $\Phi(\psi) = \xi_2$, для многолепестковой розы уравнение $\Phi(\psi) = \xi_2$ имеет решение $\pm\psi_1^*$, где $0 < \psi_1^* < \pi/2$, для уединённой волны решения уравнения $\Phi(\psi) = \xi_2$ имеют вид $0 = \psi_0^* < \psi_1^* < \pi/2$. В случае спирали функция $\psi(\theta)$ имеет период T , а константа $\varphi(\theta+T) - \varphi(\theta) \equiv L$ имеет смысл шага витка спирали (см. рис. 14(a))

$$T = 2 \int_{\psi_0^*}^{\psi_1^*} \frac{\xi S'(\psi) C(\psi) d\psi}{\sqrt{2(\xi_2 - \Phi(\psi))}}, \quad L = \int_0^T \dot{\varphi}(\theta) d\theta = \frac{\Lambda\beta}{2\xi} \int_0^T \frac{d\theta}{C(\psi(\theta))} = \Lambda\beta \int_{\psi_0^*}^{\psi_1^*} \frac{S'(\psi) d\psi}{\sqrt{2(\xi_2 - \Phi(\psi))}}.$$

В случае розы функция $\psi(\theta)$ имеет период T , равный

$$T = 4 \int_0^{\psi_1^*} \frac{\xi S'(\psi) C(\psi) d\psi}{\sqrt{2(\xi_2 - \Phi(\psi))}},$$

и удовлетворяет условию $\psi(\theta + T/2) = 2\pi - \psi(\theta)$ для любого θ .

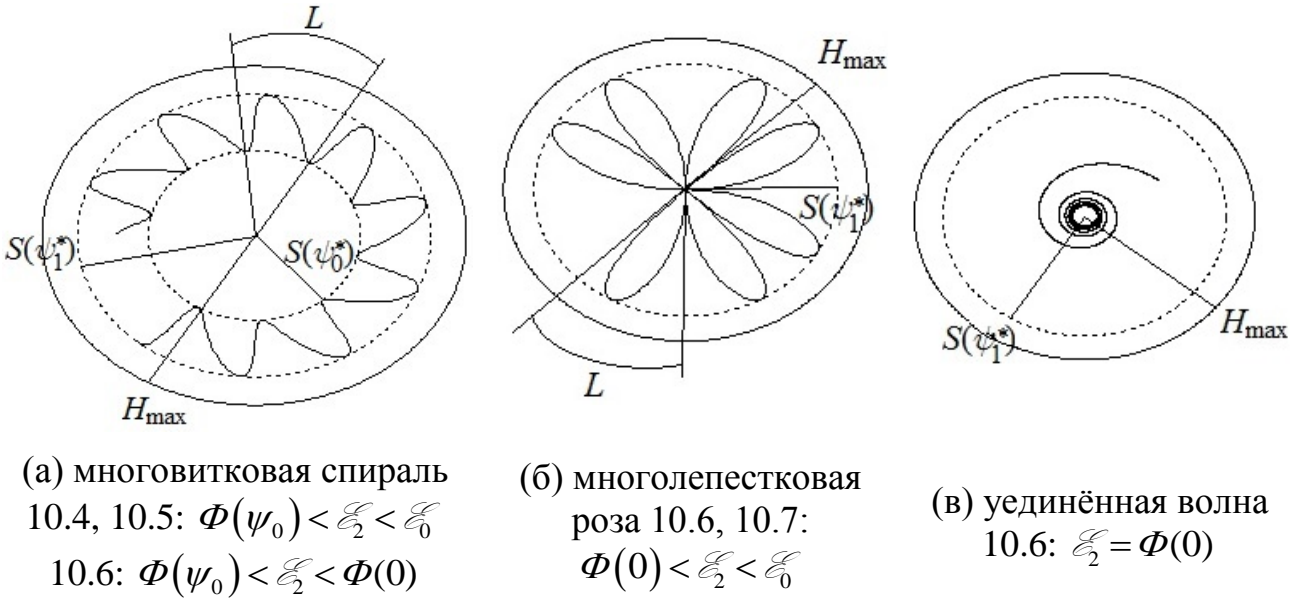


Рис. 14. Основные типы холодных бегущих волн

Константа $\varphi(\theta + T/2) - \varphi(\theta) \equiv L$ равна раствору одного лепестка и вычисляется по формуле

$$L = \int_0^{T/2} \dot{\varphi}(\theta) d\theta = \frac{\Lambda\beta}{2\xi} \int_0^{T/2} \frac{d\theta}{C(\psi(\theta))} = \Lambda\beta \int_0^{\psi_1^*} \frac{S'(\psi) d\psi}{\sqrt{2(\xi_2 - \Phi(\psi))}}.$$

В случае розы при пересечении интегральной кривой северного полюса полярный угол скачкообразно изменяется на $\pm\pi$, где $\pm = \text{sgn} L$. Если L соизмеримо с π , то спираль является гладкой замкнутой кривой, состоящей из конечного числа витков, а роза – гладкой замкнутой кривой, состоящей из конечного числа лепестков. Если L несоизмеримо с π , то спираль является незамкнутой гладкой кривой из бесконечного числа витков, всюду плотно расположенной в кольце $S(\psi_0^*) \leq (H_y^2 + H_z^2)^{1/2} \leq S(\psi_1^*)$, а роза – незамкнутой гладкой кривой из бесконечного числа лепестков, всюду плотно заполняющей круг $(H_y^2 + H_z^2)^{1/2} \leq S(\psi_1^*)$. В случае уединённой волны бегущая волна является кривой, наматывающейся на северный полюс при $\theta \rightarrow \pm\infty$ с предельной угловой скоростью $\Lambda\beta / (2\xi u_+)$. Половина проекции этой спирали на меридиональную плоскость изображена на рис. 14(в). В этом случае $H_y(\theta)$, $H_z(\theta)$ представляют собой пакеты колебаний, промодулированные по амплитуде и частоте уединёнными волнами. Наконец, функции $\psi(\theta) \equiv \psi_0$ являются точными решениями уравнения (13), соответствующий полярный угол $\varphi(\theta)$ линейно зависит от θ :

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\Lambda\beta}{2\xi C(\psi_0)} = \frac{\Lambda}{4\beta\xi(1+\Lambda^2/4)} = \frac{\Lambda}{\beta\xi(4+\Lambda^2)}.$$

Таким образом, бегущая волна описывается точкой, равномерно вращающейся на сфероиде в горизонтальной плоскости с угловой частотой $\Lambda/(\beta\xi(4+\Lambda^2))$ на широте $\psi = \psi_0$, для которой $C(\psi_0) = 2\beta^2(1+\Lambda^2/4)$.

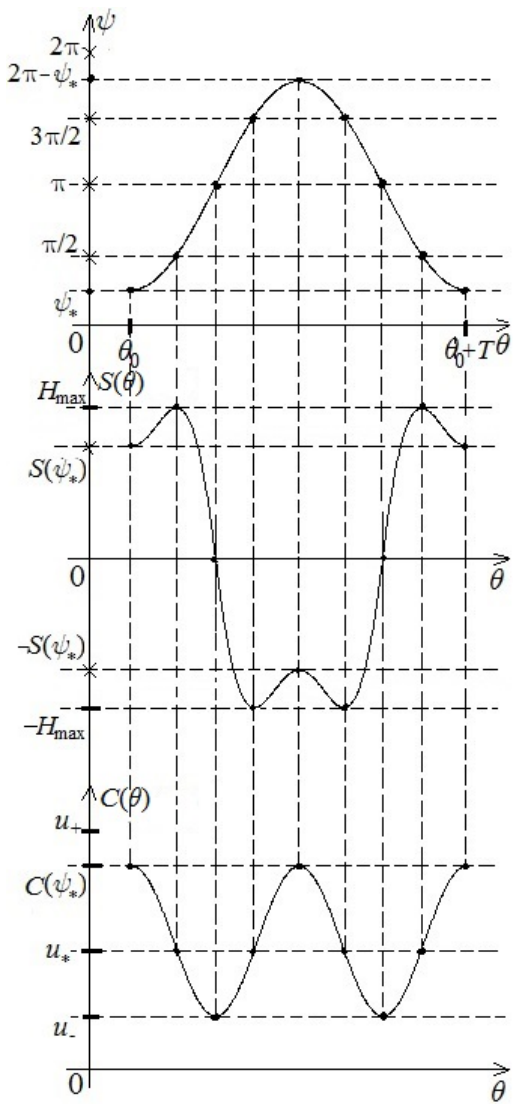
Гибридные бегущие волны. Как следует из рис. 10, есть три типа гибридных бегущих волн, возникающих при $\mathcal{E} = \xi_0 = \Phi(\pi/2)$. Первые два типа соответствуют случаям 10.4, 10.5, а третий тип – случаям 10.6 и 10.7.

В случае 10.4, учитывая построения п.4, графики $\psi(\theta)$, $S(\psi(\theta))$, $C(\psi(\theta))$ имеют вид, приведённый на рис. 15(а), где $0 < \psi_* < \pi/2$ – корень уравнения $\Phi(\psi_*) = \xi_0$. Бегущая волна – многолепестковая роза, каждый лепесток которой начинается в южном полюсе, достигает экватора, пересекает его и проходит в северное полушарие до параллели $\psi = \psi_*$, после чего возвращается назад симметричным образом в южный полюс. Проекция одного лепестка на меридиональную плоскость изображена на Рис.15(б). Функция $\psi(\theta)$ имеет период T , а раствор одного лепестка равен $L = \psi(\theta + T/2) - \psi(\theta)$. Величины T и L вычисляются по формулам

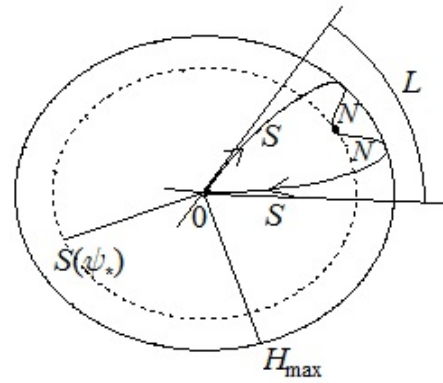
$$T = 2\xi \int_{\psi_*}^{2\pi-\psi_*} \frac{|S'(\psi)|C(\psi)d\psi}{\sqrt{2(\xi_0 - \Phi(\psi))}},$$

$$L = \int_0^{T/2} \dot{\varphi}d\theta = \frac{\Lambda\beta}{2} \int_{\psi_*}^{2\pi-\psi_*} \frac{d\theta}{C(\psi(\theta))} = \Lambda\beta \int_{\psi_*}^{2\pi-\psi_*} \frac{|S'(\psi)|d\psi}{\sqrt{2(\xi_0 - \Phi(\psi))}}.$$

На сфероиде S^2 бегущая волна реализуется пространственной полураспустившейся многолепестковой розой, состоящей либо из конечного числа (если L соизмеримо с π), либо из счётного числа лепестков (если L несоизмеримо с π), в последнем случае всюду плотно расположенной на части сфероида $\psi_* \leq \psi \leq \pi$ (рис. 16). В случае 10.5 при $\mathcal{E} = \xi_0$ потенциальная яма совпадает с $[0, 2\pi]$. Графики функций $\psi(\theta)$, $S(\psi(\theta))$, $C(\psi(\theta))$, учитывая результаты п. 4, приведены на рис. 17. Отсюда следует, что профили $H_y(\theta)$, $H_z(\theta)$ имеют вид дублетов – двугорбых волновых пакетов, изображенных на рис. 18. При этом частота колебаний в пакете на $\pm\infty$ равна $\Lambda\beta/(2\xi u_+)$, а в нуле – $\Lambda\beta/(2\xi u_-)$.



(а) графики функций $\psi(\theta)$,
 $S(\theta) = S(\psi(\theta))$, $C(\theta) = C(\psi(\theta))$



(б) проекция лепестка на
 меридиональную плоскость

Рис. 15. Геометрия многолепестковой розы в случае 10.4, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$

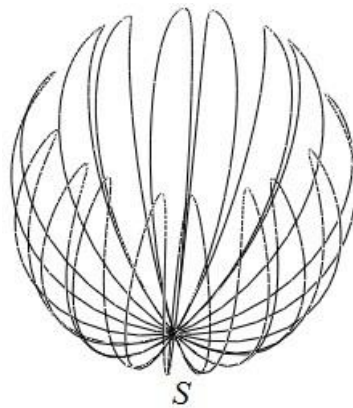


Рис. 16

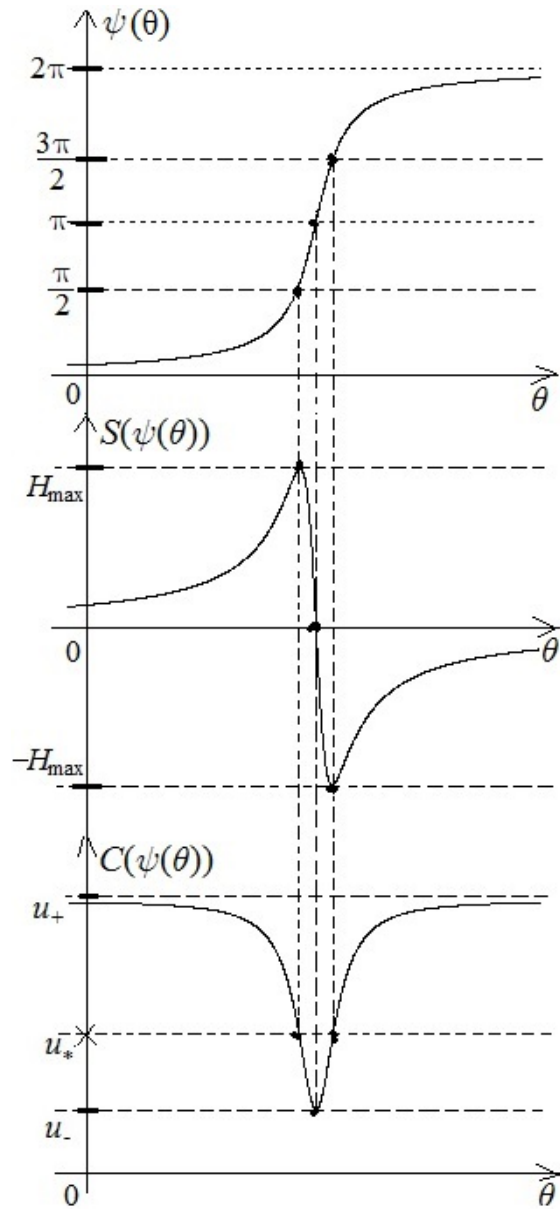


Рис. 17. Графики функций $\psi(\theta)$, $S(\psi(\theta))$, $C(\psi(\theta))$ в случае 10.5, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$

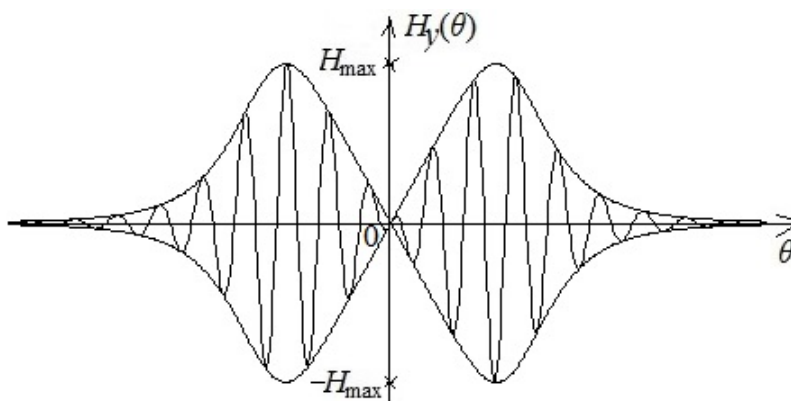


Рис. 18. Дублет – двугорбый волновой пакет

На сфероиде S^2 интегральная кривая при изменении θ от 0 до $+\infty$ выходит из южного полюса S ($\theta=0$), разматываясь с угловой скоростью $\Lambda\beta/(2\xi u_-)$, достигает экватора, пересекает его и наматывается на северный полюс N , не достигая его, за бесконечное количество оборотов с угловой скоростью $\Lambda\beta/(2\xi u_+)$. Симметричным образом, когда θ меняется от $-\infty$ до 0, интегральная кривая разматывается из северного полюса, пересекает экватор и наматывается на южный полюс, достигая его за конечное число оборотов. Соответствующая пространственная кривая приведена на рис. 19.

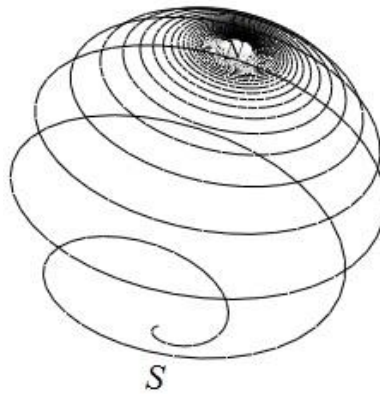


Рис. 19

В случаях 10.6 или 10.7 при $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ потенциальная яма имеет длину 2π , а функции $\psi(\theta)$, $\theta(\psi)$ либо монотонно возрастают, либо монотонно убывают. В случае монотонного возрастания, если

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{\xi |S'(\psi)| C(\psi) d\psi}{\sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \Phi(\psi))}},$$

то $\psi(\theta+T) = \psi(\theta) + 2\pi$ для любого θ . В случае монотонного убывания для любого $\theta: \psi(\theta+T) = \psi(\theta) - 2\pi$. В случае монотонного возрастания зависимости $\psi(\theta)$, $S(\psi(\theta))$, $C(\psi(\theta))$ имеют вид, приведённый на рис. 20. Отсюда следует характер поведения кривой на сфероиде. Кривая выходит из северного полюса, разматываясь с угловой скоростью $\Lambda\beta/(2\xi u_+)$, достигает экватора, пересекает его и затем входит в южный полюс, наматываясь на него с угловой скоростью $\Lambda\beta/(2\xi u_-)$. Далее симметричным образом в обратном порядке кривая выходит из южного полюса, проходит экватор и входит в северный полюс, поворачиваясь суммарно на угол L , равный

$$L = \int_0^T \dot{\phi} d\theta = \frac{\Lambda\beta}{2\xi} \int_0^T \frac{d\theta}{C(\psi(\theta))} = \frac{\Lambda\beta}{2} \int_0^{2\pi} \frac{|S'(\psi)| d\psi}{\sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \Phi(\psi))}}.$$

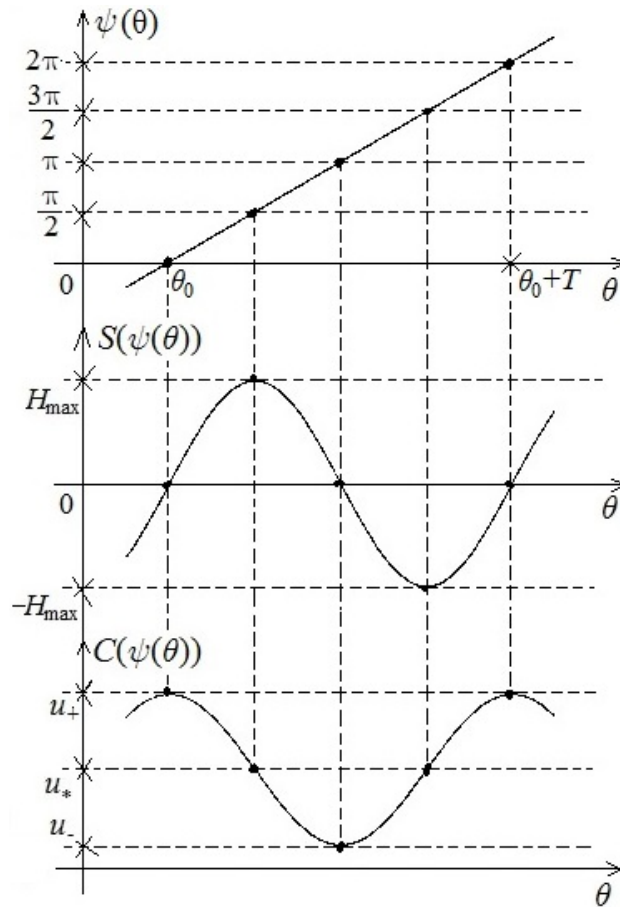


Рис. 20. Зависимости $\psi(\theta)$, $S(\psi(\theta))$, $C(\psi(\theta))$ в случаях 10.6, 10.7 при $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$

Таким образом, бегущая волна состоит из пространственных лепестков с центром в северном полюсе, число которых конечно, если L соизмеримо с π (и тогда бегущая волна является гладкой замкнутой кривой), либо счётно, если L несоизмеримо с π (и тогда бегущая волна является незамкнутой кривой, всюду плотно расположенной на сфероиде S^2). В этом описании северный и южный полюса можно поменять ролями и считать, что лепестки начинаются и кончаются в южном полюсе. Итак, в результате математической селекции получен фантастический для обычной ботаники мутант – роза с двумя центрами S и N и пространственными лепестками, изображённая на рис. 21.

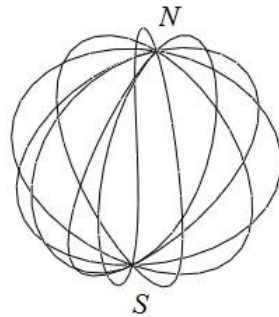


Рис. 21

В случае монотонного убывания функции $\psi(\theta)$ и $S(\psi(\theta))$ меняют знак, а $C(\psi(\theta))$ остаётся прежней, и в нарисованной выше картине меняется только направление обхода лепестков пространственной розы.

6. Случай ненулевого обобщённого углового момента

($I \neq 0$)

В этом случае точки $\psi = k\pi$ являются особыми для потенциальной функции $\Phi(\psi)$ – в точках $k\pi$ функция $\Phi(\psi)$ обращается в $+\infty$. Это означает, что при $I \neq 0$ бегущая волна не проходит через северный и южный полюса. Это как раз тот случай, когда, согласно п. 3, можно исключить из рассмотрения функции $S(\psi)$ и $C(\psi)$. Фактически ниже это и делается. Согласно формуле (16), locextr функции $\Phi(\psi)$ находится в точках $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ и точках, где

$$2\left(\frac{\Lambda^2}{4} + 1\right)\beta^2 - C(\psi) = \frac{2I^2}{S^4(\psi)} = 2I^2\left(2 - C(\psi) - \frac{K}{C(\psi)^\gamma}\right)^{-2}. \quad (17)$$

Решение уравнения (17) легко проанализировать, переходя к переменной $u = C(\psi)$, $u_- < u < u_+$:

$$u_0 - u = h(u) \stackrel{\text{def}}{=} 2I^2\left(2 - u - Ku^{-\gamma}\right)^{-2}, \quad u_0 = 2\beta^2\left(1 + \Lambda^2/4\right). \quad (18)$$

Правая часть уравнения (18) есть выпуклая вниз на (u_-, u_+) функция, в чём легко убедиться прямым дифференцированием ($h''(u) > 0$). Поэтому, по известным свойствам выпуклых функций, график любой линейной функции либо не пересекает график $h(u)$ на (u_-, u_+) , либо касается его в единственной точке, либо пересекает ровно в двух точках. Это доказывает существование двух критических значений $0 < \beta_* < \beta^*$. При $\beta < \beta_*$ графики $u_0 - u$ и $h(u)$ не пересекаются, при $\beta = \beta_*$ они касаются в единственной точке, при $\beta > \beta_*$ указанные графики пересекаются ровно в двух точках, абсциссы которых обозначим $u_2 < u_1$. Наконец, при $\beta = \beta^*$ одна из этих точек есть u_* (рис. 22).

Проще всего найти β^* :

$$(\beta^*)^2 = \frac{1}{2(1 + \Lambda^2/4)} \left[u_* + 2I^2 \left(2 - \frac{\gamma+1}{\gamma} u_* \right)^{-2} \right] = \frac{1}{2(1 + \Lambda^2/4)} (u_* + h(u_*)).$$

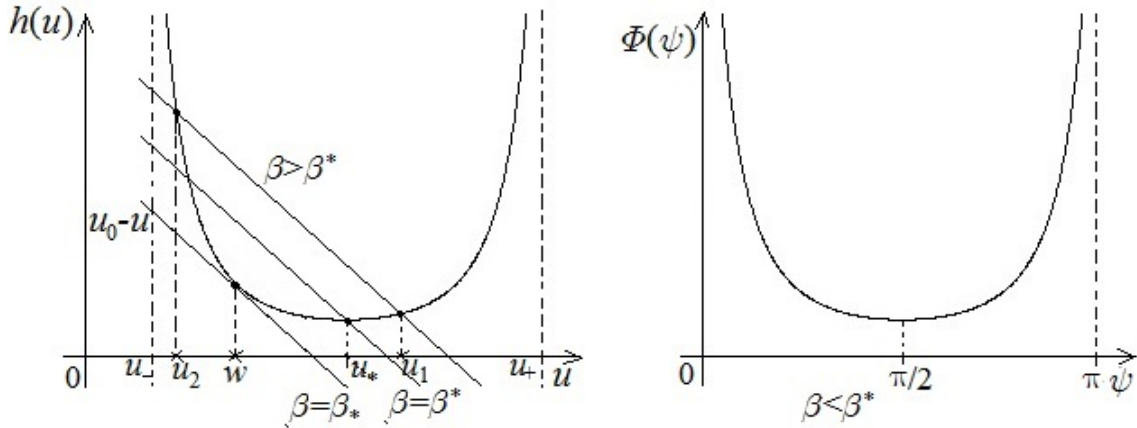


Рис. 22. Построение критических значений β_* , β^* и точек u_1 , u_2

Аналогично ищется β_* :

$$\beta_*^2 = \frac{1}{2(1 + A^2/4)}(w + h(w)),$$

где w – решение на (u_-, u_*) уравнения $h'(u) = -1$

$$4I^2(\gamma K / u^{\gamma+1} - 1) = (2 - u - K / u^\gamma)^3.$$

Несложно показать, что это уравнение имеет в указанном интервале и притом единственное решение. Действительно, функция

$$\varphi(u) \stackrel{\text{def}}{=} (2 - u - K / u^\gamma)^3 - 4I^2(\gamma K / u^{\gamma+1} - 1)$$

на (u_-, u_*) имеет положительную производную и $\varphi(u_*) > 0 > \varphi(u_-)$. Значит, существует и притом единственное $w \in (u_-, u_*)$, для которого $\varphi(w) = 0$, что и утверждалось.

Пусть для $\beta > \beta_*$ точки $u_- < u_2 < u_1 < u_+$ определены условием $u_0 - u_i = h(u_i)$, $i = 1, 2$ и $C(\psi_i) = u_i$, $i = 1, 2$, $0 < \psi_1 < \psi_2 < \pi$. При $\beta = \beta_*$ имеем $u_1 = u_2 = w$, при $\beta = \beta^*$ верно равенство $u_1 = u_*$. Учитывая симметричность функции $\Phi(\psi)$ относительно прямой $\psi = \pi$, достаточно рассмотреть бегущие волны на интервале $(0, \pi)$. Из предыдущего анализа следует, что в зависимости от β график потенциальной функции имеет вид (рис 23).

Анализ возникающих бегущих волн снова удобно провести, рассматривая по отдельности горячие, холодные и гибридные волны. При этом основные проблемы возникают с полярным углом, который при $I \neq 0$ может меняться немонотонным образом

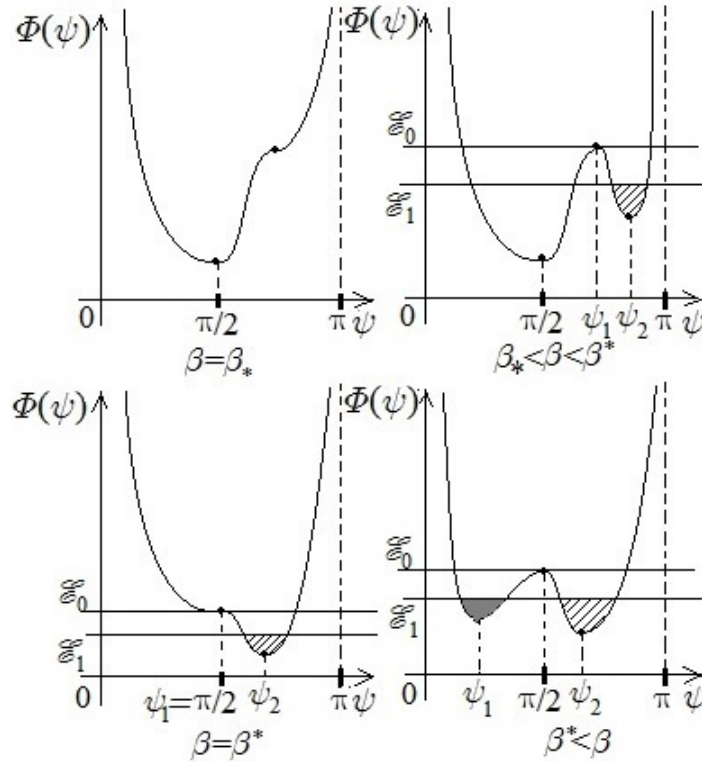


Рис. 23. Зависимость потенциальной функции $\Phi(\psi)$ от продольного магнитного поля β

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{I + (\Lambda\beta/2)S^2(\psi)}{\xi S^2(\psi)C(\psi)} = \omega(\theta), \quad \psi = \psi(\theta), \quad (19)$$

если знаки I и β не совпадают. Горячие бегущие волны отвечают случаям $\beta_* < \beta \leq \beta^*$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \leq \mathcal{E}_0$ и $\beta^* < \beta$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_0$, соответствующие потенциальные ямы заштрихованы косыми линиями. Холодные бегущие волны возникают только в случае $\beta^* < \beta$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_0$, а соответствующая потенциальная яма окрашена серым фоном. Наконец, гибридные бегущие волны имеют место только для $\beta^* < \beta$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$.

Горячие бегущие волны. За исключением случая $\beta_* < \beta < \beta^*$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ для горячей бегущей волны $\psi(\theta)$ – периодическая функция с периодом

$$T = 2 \int_{\psi_0^*}^{\psi_1^*} \frac{\xi |S'(\psi)| C(\psi)}{\sqrt{2(\mathcal{E}_1 - \Phi(\psi))}} d\psi, \quad (20)$$

а соответствующая кривая – это многовитковая спираль на южной полусфере, проекция которой на меридиональную плоскость в зависимости от I и β имеет вид, показанный на рис. 24.

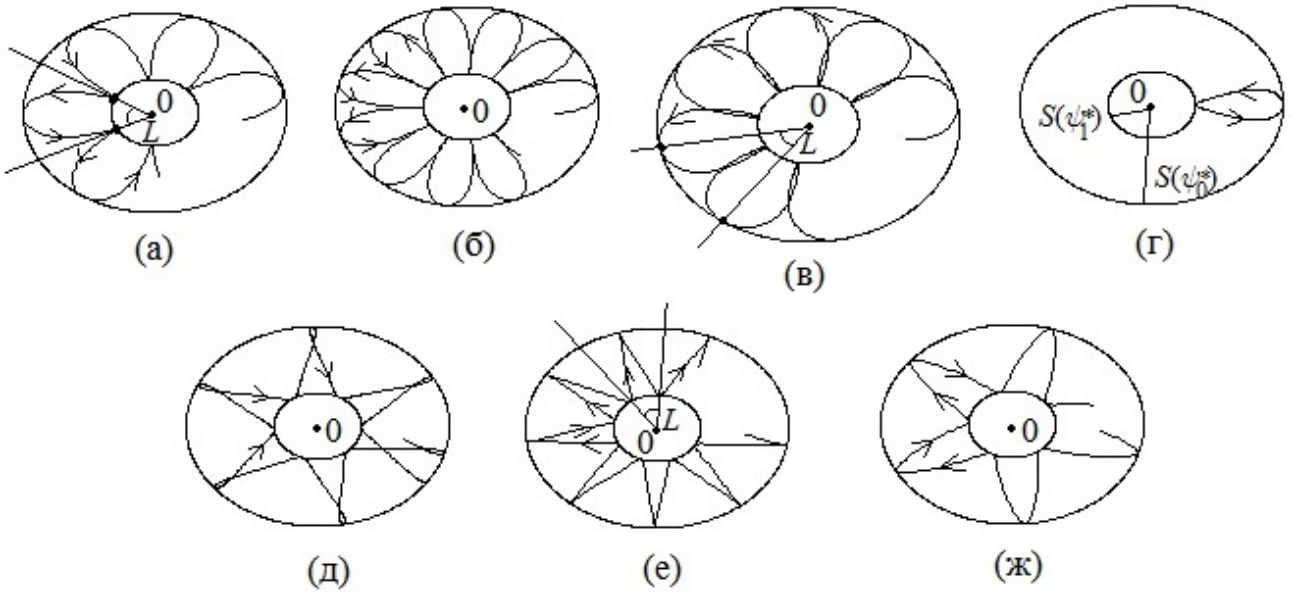


Рис. 24. Бегущие волны для $\beta_* < \beta \leq \beta^*$, $\xi_1 \leq \xi_0$ и $\beta^* < \beta$, $\xi_1 < \xi_0$,
стрелкой указано направление роста θ

Здесь $\pi/2 < \psi_0^* < \psi_1^* < \pi$ – корни уравнения $\Phi(\psi) = \xi_1$. Шаг витка L вычисляется по формуле

$$L = \int_0^T \phi d\theta = 2 \int_{\psi_0^*}^{\psi_1^*} \frac{\xi |S'(\psi)| (I + (\Lambda\beta/2)S^2(\psi))}{S^2(\psi) \sqrt{2(\xi_1 - \Phi(\psi))}} d\psi. \quad (21)$$

На рис. 24 предполагалось, $\beta > 0$. Случаи (а)–(в) соответствуют $L > 0$, случаи (д)–(ж) – $L < 0$, а случай (г) – $L = 0$ (при этом положительным считается направление угла против часовой стрелки). В случае (а) $I > 0$, а в случае (б)–(ж) имеем $I < 0$, в случае (б) $I = -(\Lambda\beta/2)S^2(\psi_1^*)$, в случае (е) $I = -(\Lambda\beta/2)S^2(\psi_0^*)$.

В случае $\beta_* < \beta < \beta^*$, $\xi = \xi_0$ имеем $\psi_0^* = \psi_1$, $\psi_1^* = \psi_*$ и графики $\psi(\theta)$, $S(\psi(\theta))$, $C(\psi(\theta))$ имеют вид (рис. 25). На меридиональной плоскости кривая расположена в кольце $S(\psi_*) \leq H_{\perp} \leq S(\psi_1)$, причём она разматывается из окружности $H_{\perp} = S(\psi_*)$, касаясь её при $\theta = \theta_0$, с угловой частотой $\omega_0 = [I + (\Lambda\beta/2)S^2(\psi_*)] / (\xi S^2(\psi_*)C(\psi_1))$ и асимптотически при $\theta \rightarrow +\infty$ наматывается изнутри на окружность $H_{\perp} = S(\psi_1)$, совершая бесконечное число оборотов с частотой $\omega_{\infty} = [I + (\Lambda\beta/2)S^2(\psi_1)] / (\xi S^2(\psi_1)C(\psi_*))$. Когда θ меняется от $-\infty$ до θ_0 , кривая симметричным образом асимптотически разматывается из окружности $H_{\perp} = S(\psi_1)$ с угловой частотой ω_{∞} и наматывается на окружность $H_{\perp} = S(\psi_*)$ за конечное число оборотов с частотой ω_0 , касаясь её при $\theta = \theta_0$. Совершая обороты вокруг начала

координат, вектор \mathbf{H}_\perp может менять направление вращения, если $= S^2(\psi_*) > 2I / (A\beta) > -S^2(\psi_1)$. Описанный сценарий можно рассматривать как предельное поведение спиралей на рис. 24 при $\xi_1 \rightarrow \xi_0$. Тогда период T и шаг витка L , вычисляемые по (20), (21) стремятся к $+\infty$, $S(\psi_0^*) \rightarrow S(\psi_1)$, многовитковая спираль переходит в одновитковую с шагом витка $L = +\infty$, виток разрывается, а его стороны закручиваются в спирали, асимптотически за бесконечное число оборотов приближающиеся изнутри к окружности $H_\perp = S(\psi_1)$.

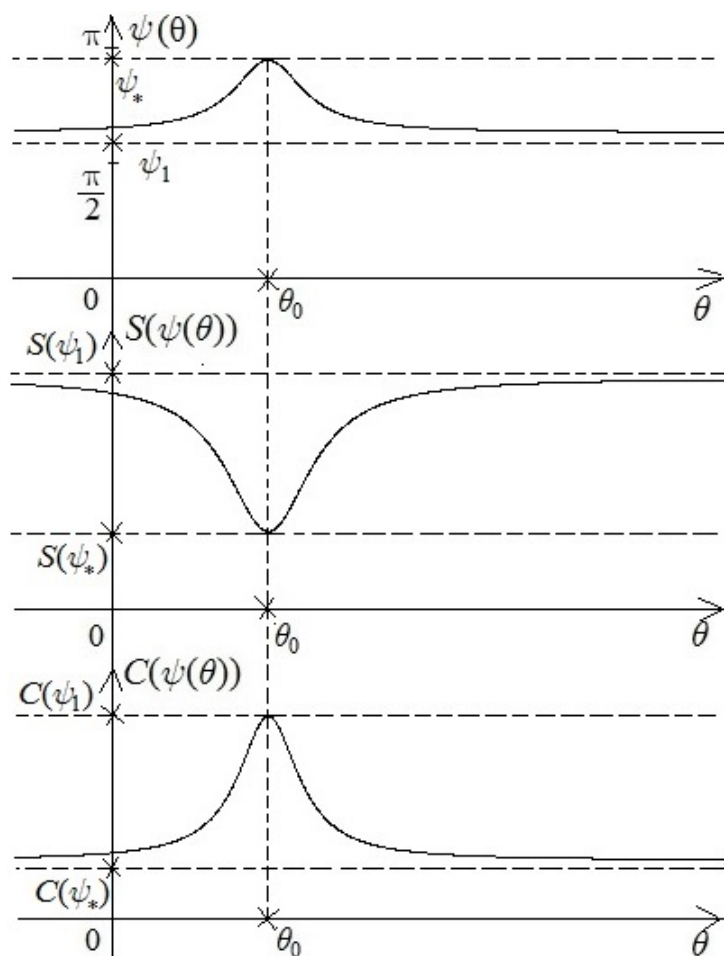


Рис. 25. Графики $\psi(\theta)$, $S(\psi(\theta))$, $C(\psi(\theta))$ при $\beta_* < \beta < \beta^*$, $\xi = \xi_0$

Графики $H_y(\theta)$, $H_z(\theta)$ имеют вид самофокусирующихся колебаний с переменной частотой $\omega(\theta)$, вычисляемой по формуле (20). В перетяжке на рис. 26 частота колебаний равна ω_0 , а при $\theta \rightarrow +\infty$ равна ω_∞ . Нарисованная картина существенно меняется при $2I / (A\beta) = -S^2(\psi_1)$. Тогда $\omega_\infty = 0$, а $\varphi(\theta)$ стремится при $\theta \rightarrow \pm\infty$ к предельным значениям $\varphi_0 \mp \varphi_\infty$, где φ_0 — значение полярного угла при $\theta = \theta_0$. С учётом формулы (21) имеем:

$$\varphi_\infty = \frac{\Lambda\beta}{2} \int_{\psi_1}^{\psi_*} \frac{S'(\psi)(S^2(\psi) - S^2(\psi_1))}{S^2(\psi)\sqrt{2(\xi_0 - \Phi(\psi))}} d\psi = \frac{L}{2} > 0.$$

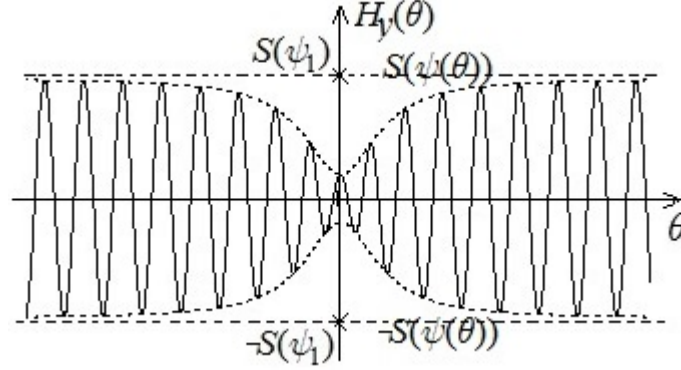


Рис. 26. График $H_y(\theta)$ для $\beta_* < \beta < \beta^*$, $\xi = \xi_0$

При этом интеграл в правой части последнего равенства сходится. Это следует из соотношений

$$S(\psi) - S(\psi_1) = S'(\psi_1)(\psi - \psi_1) + \dots,$$

$$\xi_0 - \Phi(\psi) = \Phi(\psi_1) - \Phi(\psi) = -\frac{1}{2}\Phi''(\psi_1)(\psi - \psi_1)^2 + \dots$$

и неравенства $\Phi''(\psi_1) < 0$, справедливого, поскольку $\psi = \psi_1$ это точка локального максимума $\Phi(\psi)$. Формула для φ_∞ следует из очевидных выкладок (считаем $\theta > \theta_0$ и тогда $d\theta = \xi S'(\psi)C(\psi) / \sqrt{2(\xi_1 - \Phi(\psi))} d\psi$):

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= \varphi_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \dot{\varphi} d\theta = \varphi_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{I + (\Lambda\beta/2)S^2(\psi)}{\xi S^2(\psi)C(\psi)} d\theta = \varphi_0 + \frac{\Lambda\beta}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{S^2(\psi) - S^2(\psi_1)}{\xi S^2(\psi)C(\psi)} d\theta = \\ &= \varphi_0 + \frac{\Lambda\beta}{2} \int_{\psi_*}^{\psi(\theta)} \frac{S'(\psi)(S^2(\psi) - S^2(\psi_1))}{S^2(\psi)\sqrt{2(\xi_0 - \Phi(\psi))}} d\psi. \end{aligned}$$

При $\theta \rightarrow +\infty$ имеем $\psi(\theta) \rightarrow \psi_1$ и $\varphi(\theta) \rightarrow \varphi_0 - \varphi_\infty$. Если $\theta < \theta_0$ и $\theta \rightarrow -\infty$, то $d\theta = -\xi S'(\psi)C(\psi) / \sqrt{2(\xi_1 - \Phi(\psi))} d\psi$ и, повторяя предыдущую выкладку, получим $\varphi(\theta) \rightarrow \varphi_0 + \varphi_\infty$. В частности, функции $H_y(\theta)$ и $H_z(\theta)$ имеют при $\theta \rightarrow \pm\infty$ конечные пределы $S(\psi_1)\cos(\varphi_0 \mp \varphi_\infty)$, $S(\psi_1)\sin(\varphi_0 \mp \varphi_\infty)$ соответственно, а в меридиональной плоскости вектор \mathbf{H}_\perp совершает петлю, касающуюся окружностей $H_\perp = S(\psi_1)$ и $H_\perp = S(\psi_*)$, когда θ меняется от $-\infty$ до $+\infty$.

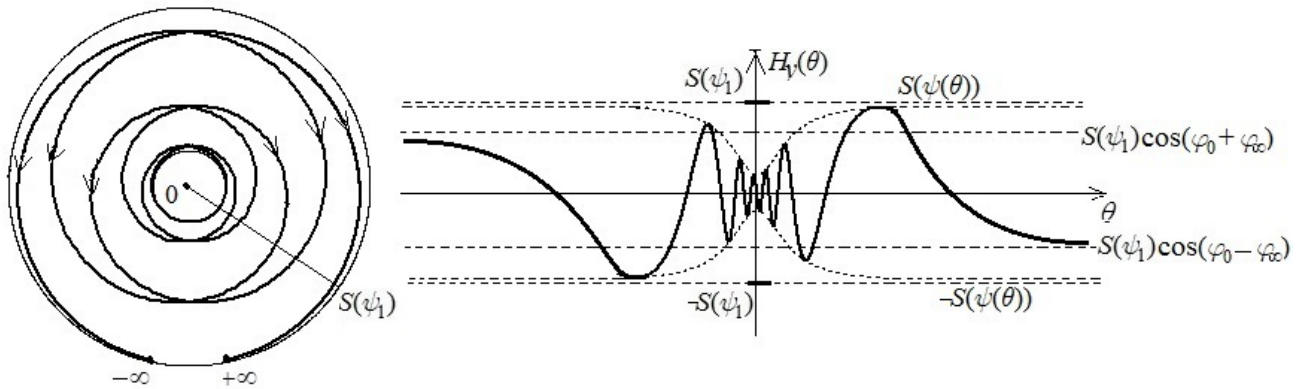


Рис. 27. График $H_y(\theta)$ для $\beta_* < \beta < \beta^*$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, $2I / (\Lambda\beta) = -S^2(\psi_1)$

Холодные бегущие волны. Такие волны существуют только при $\beta^* < \beta$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_0$. Для них дословно повторяется сказанное в этом пункте о горячих бегущих волнах. Если $0 < \psi_0^* < \psi_1^* < \pi/2$ – корни уравнения $\Phi(\psi) = \mathcal{E}$, то $\psi(\theta)$ имеет период T , вычисляемый по формуле (20). Решение задаётся многовитковой спиралью на северном полушарии, проекция которой на меридиональную плоскость имеет вид, приведённый на рис. 24 (единственное отличие – теперь $S(\psi_0^*) < S(\psi_1^*)$). Шаг витка вычисляется по формуле (21) и т.д.

Гибридные бегущие волны. В этом случае $\beta^* < \beta$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ и решение $\psi(\theta)$ лежит в потенциальной яме $[\psi_1^*, \psi_2^*]$, где $0 < \psi_1^* < \pi/2 < \psi_2^* < \pi$ и является гладкой периодической кривой с периодом

$$T = 2 \int_{\psi_1^*}^{\psi_2^*} \frac{\xi |S'(\psi)| C(\psi)}{\sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \Phi(\psi))}} d\psi.$$

Графики $\psi(\theta)$, $S(\psi(\theta))$, $C(\psi(\theta))$ (считаем $S(\psi_2^*) > S(\psi_1^*)$) имеют вид (рис. 28). На сфероиде S^2 бегущая волна изображается многовитковой гибридной спиралью, расположенной между двумя параллелями $\psi = \psi_1^* < \pi/2 < \psi = \psi_2^*$ – выше и ниже экватора $\psi = \pi/2$, каждый виток которой лежит частично в северном полушарии, а частично – в южном, как указано символами S и N на рис. 28. Поэтому спираль не задаётся однозначно своей проекцией на меридиональную плоскость без указания, какие части проекции на какое полушарие отображаются. Если угол $\varphi(\theta)$ меняется монотонно, то этих указаний достаточно, чтобы восстановить спираль на сфероиде (рис. 29). Но если $\varphi(\theta)$ изменяется немонотонно, то проекция даёт довольно сложную картину, которая, скорее, затрудняет понимание. Проще рассмотреть пространственную кривую (рис. 30).

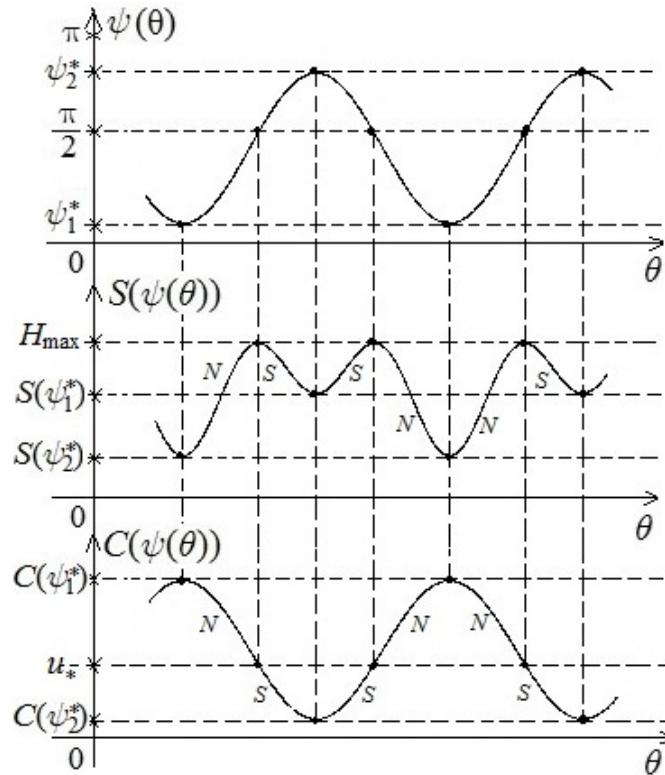


Рис. 28

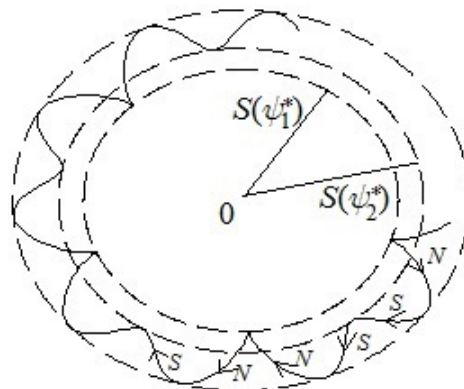


Рис. 29

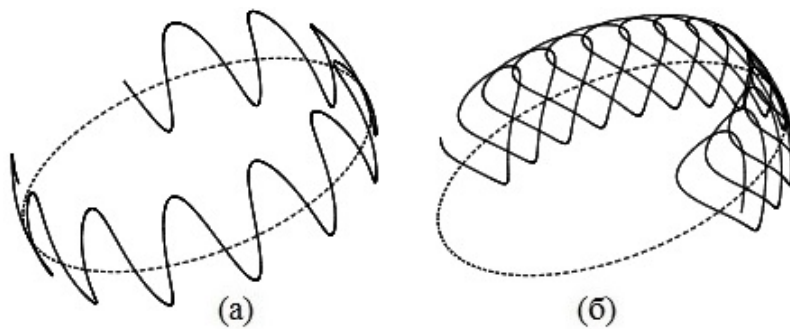


Рис. 30. Поведение бегущей волны в случае монотонного (а) и немонотонного изменения (б) угла $\varphi(\theta)$

Если $2I / (A\beta)$ проходит критические значения $-H_{\max}$, $-S^2(\psi_2^*)$, $-S^2(\psi_1^*)$, то у спирали возникают петли, изображённые на рис. 30. При некотором значении I шаг витка L обращается в 0 и тогда вместо спирали возникает окружность или “восьмёрка”, расположенные одновременно на обоих полушариях, где

$$L = 2 \int_{\psi_1^*}^{\psi_2^*} \frac{|S'(\psi)|(I + (A\beta/2)S^2(\psi))}{S^2(\psi)\sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \Phi(\psi))}} d\psi.$$

Детальный анализ типов петель требует исследования аналитических свойств функции $L(I, \beta)$, что выходит за рамки настоящей работы. Как и выше, если L соизмеримо с π , то гибридная спираль состоит из конечного числа витков и является замкнутой гладкой кривой. Если L несоизмеримо с π , то спираль – это незамкнутая гладкая кривая из бесконечного числа витков, всюду плотно расположенная на части сфероида S^2 между двумя параллелями $\psi = \psi_1^*$ и $\psi = \psi_2^*$.

7. Обсуждение результатов и дополнения

(I) Проведённое исследование обнаружило новые нетривиальные нелинейные структуры, являющиеся точными аналитическими решениями фундаментальных ЭМГД-уравнений плазмы. (Напомним [9], ЭМГД-система является нерелятивистским пределом уравнений Эйнштейна для непрерывно распределённой материи применительно к среде, состоящей из электронного и ионного газов и электромагнитного поля [10].) В силу этого они отражают фундаментальные свойства плазменной сплошной среды, смысл которых ещё не до конца понятен. Это относится к самофокусировке дозвуковых плазменных колебаний (рис. 26, 27) и образованию дублетов – двугорбых волновых пакетов (рис. 18), а также к существованию колебаний, в которых продольная скорость многократно преодолевает звуковой барьер, становясь то больше, то меньше скорости звука. Максимальное значение кинетической энергии продольного движения при этом достигается на решениях, задаваемых рациональными и иррациональными обмотками двумерного сфероида (рис. 21), которые до сих пор никем не рассматривались.

(II) Полученные результаты позволяют оценить перспективы использования КСПУ (КвазиСтационарные Плазменные Ускорители) с продольным магнитным полем, интерес к которым в последнее время вырос [11] для ускорения плазмы. КСПУ представляет собой пространство между двумя коаксиальными профилированными электродами, заполненное плазмой. При большом внутреннем радиусе коаксиала КСПУ можно приближённо считать плоским каналом с продольным магнитным полем, установившиеся режимы течения в котором описываются плоскими бегущими волнами с нулевой фазовой скоростью, $a = 0$. Для таких течений поперечное

электрическое и продольное магнитные поля постоянные. При этом модель плоского канала качественно правильно отражает закономерности ускорения плазмы, обусловленного электродинамическими силами. Для определённости ниже считаем плоские стенки канала ортогональными оси z , а вдоль оси x происходит ускорение плазмы. Если принять параметры плазмы на входе ρ_0 , p_0 , H_0 (поперечное магнитное поле), U_0 (продольная скорость), $H_{0y} = H_0 \cos \varphi_0$, $H_{0z} = H_0 \sin \varphi_0$ за характерные масштабы соответствующих величин, то система (3), (4) в безразмерном виде запишется так:

$$\tilde{u} + \frac{1}{\gamma M^2 \tilde{u}^\gamma} + \frac{\tilde{H}_\perp^2}{2M_A^2} = 1 + \frac{1}{\gamma M^2} + \frac{1}{2M_A^2}, \quad (22)$$

$$\left(\tilde{u} - \frac{\tilde{\beta}^2}{M_A^2} \right) \tilde{H}_\perp - \tilde{\xi}^2 \tilde{u} \frac{d}{dx} \left(\tilde{u} \frac{d\tilde{H}_\perp}{dx} \right) + \frac{\tilde{\beta} \tilde{\xi} \Lambda}{M_A} \tilde{u} \left[\mathbf{k}, \frac{d\tilde{H}_\perp}{dx} \right] + \tilde{p} = 0,$$

где $M = U_0 \left(\frac{\rho_0}{\gamma p_0} \right)^{1/2}$, $M_A = \frac{U_0}{H_0} \sqrt{4\pi\rho_0}$, $\tilde{\beta} = \frac{H_{\parallel}}{H_0}$, $\tilde{\xi} = \frac{c\sqrt{\lambda_+\lambda_-}}{\sqrt{4\pi\rho_0}L_0}$, $\tilde{p} = \frac{\tilde{q}}{H_0 U_0}$.

Здесь M – число Маха, M_A – альфвеновское число Маха, L_0 – характерный масштаб длины, тильда означает безразмерное значение величины и считается $\tilde{u} > 0$.

Введём новые переменные и константы

$$u = \tilde{u} / C, \quad H = \tilde{H} / (M_A \sqrt{2C}), \quad \xi = \tilde{\xi} \sqrt{C/2}, \quad \beta = \tilde{\beta} / (M_A \sqrt{2C}), \quad K = (\gamma M^2 C^{\gamma+1})^{-1}, \quad (23)$$

где $C = \left(1 + (\gamma M^2)^{-1} + (2M_A^2)^{-1} \right) / 2$. Тогда система (22) переписется в каноническом виде (5), (6) с $p = \tilde{p} / (M_A (2C)^{3/2})$. Нетрудно проверить, что константа K всегда удовлетворяет условию $(\gamma K)^{1/(\gamma+1)} < 2\gamma / (\gamma+1)$. Обычно предполагается, что входной поток плазмы дозвуковой, т.е. $M < 1$, поэтому на входе согласно (23), имеем $u(0) = C^{-1} < u_* = (\gamma K)^{1/(\gamma+1)} = M^{-2/(\gamma+1)} C^{-1}$ и значит точка $(H_y(0), H_z(0), u(0))$ лежит на южном полушарии сфероида S^2 . Перспективы использования КСПУ для ускорения плазмы в значительной степени определяются ответом на следующий вопрос. Можно ли так задать параметры плазмы на входе, чтобы на выходе ускорителя получить сверхзвуковой поток, иными словами, может ли КСПУ за счёт только электродинамического ускорения работать в режиме сопла Лавалья?

Математическая задача сводится к нахождению входным параметров, для которых интегральная кривая системы (5), (6) на сфероиде S^2 , начинающаяся в точке $(H_y(0), H_z(0), u(0))$, гладким образом пересекает экватор $u = u_*$ и попадает в северное полушарие с возможным максимальным ускорением $u_+ / u(0) = C u_+$. При этом на входе считается известной поперечная плотность

тока, и, значит, в безразмерных единицах заданы значения $\dot{H}_y(0)$, $\dot{H}_z(0)$. Проанализируем решение поставленной задачи для $p=0$. Тогда из соотношений, полученных в п. 3,

$$\begin{aligned}\dot{H}_y(0) &= S'(\psi_0)\dot{\psi}_0 \cos \varphi_0 - S(\psi_0)\dot{\varphi}(0) \sin \varphi_0, \\ \dot{H}_z(0) &= S'(\psi_0)\dot{\psi}_0 \sin \varphi_0 + S(\psi_0)\dot{\varphi}(0) \cos \varphi_0,\end{aligned}$$

где широта ψ_0 однозначно определяется значениями $u(0)$, $H_y(0) = (M_A \sqrt{2C})^{-1} \cos \varphi_0$, $H_z(0) = (M_A \sqrt{2C})^{-1} \sin \varphi_0$, находим

$$S'(\psi_0)\dot{\psi}_0 = \dot{H}_y(0) \cos \varphi_0 + \dot{H}_z(0) \sin \varphi_0, \quad S'(\psi_0)\dot{\varphi}_0 = \dot{H}_z(0) \cos \varphi_0 - \dot{H}_y(0) \sin \varphi_0$$

и согласно формулам (12) и ниже значения констант I и \mathcal{E} :

$$\begin{aligned}I &= \xi (M_A \sqrt{2C})^{-1} (\dot{H}_z(0) \cos \varphi_0 - \dot{H}_y(0) \sin \varphi_0) - \Lambda \beta / (4CM_A^2), \\ \mathcal{E} &= \xi^2 (\dot{H}_y(0) \cos \varphi_0 + \dot{H}_z(0) \sin \varphi_0)^2 / 2 + \Phi(\psi_0),\end{aligned}$$

где $\Phi(\psi_0) = \beta^2 (1 + \Lambda^2 / 4) / (4CM_A^2) + 1 / (8C^2) + \gamma KC^{\gamma-1} / (4(\gamma-1)) + I^2 CM_A^2$.

Проведённое выше исследование показало, что необходимое и достаточное условие достижения гладким образом сверхзвуковой скорости на выходе их плоского канала при стационарном течении состоит в выполнении соотношений:

$$2\beta^2 (1 + \Lambda^2 / 4) > u_* + 2I^2 / H_{\max}^4, \quad \mathcal{E} = \Phi(\pi / 2), \quad (24)$$

где $H_{\max}^2 = 2 - \frac{(\gamma+1)}{\gamma} u_*$, $\Phi(\pi / 2) = \frac{\beta^2}{2} \left(1 + \frac{\Lambda^2}{4} \right) H_{\max}^2 + \frac{u_*^2}{8} + \frac{\gamma K}{4(\gamma-1)u_*^{\gamma-1}} + \frac{I^2}{2H_{\max}^2}$.

Для простоты обозначим $\dot{H}_y = \dot{H}_y(0)$, $\dot{H}_z = \dot{H}_z(0)$. Без нарушения общности можно считать $\varphi_0 = 0$. Тогда уравнение $\mathcal{E} = \Phi(\pi / 2)$ переписется в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\xi^2}{2} \dot{H}_y^2 + \frac{1}{4CM_A^2} \left(\frac{1}{S(\psi_0)^2} - \frac{1}{H_{\max}^2} \right) \left(\xi \dot{H}_z - \frac{\Lambda \beta}{2M_A \sqrt{2C}} \right)^2 = \\ = \frac{\beta^2}{2} \left(1 + \frac{\Lambda^2}{4} \right) \left(H_{\max}^2 - S(\psi_0)^2 \right) - \left(\frac{1}{8C^2} + \frac{\gamma KC^{\gamma-1}}{4(\gamma-1)} - \frac{u_*^2}{8} - \frac{\gamma K}{4(\gamma-1)u_*^{\gamma-1}} \right).\end{aligned} \quad (25)$$

Учитывая неравенство $S(\psi_0)^2 < H_{\max}^2$ и положительность правой части (25), уравнение (25) на плоскости (\dot{H}_y, \dot{H}_z) задаёт эллипс. Положительность правой

части (25) следует из неравенства $\beta^2(1 + \Lambda^2/4) > u_*/2$, справедливого в силу (24), и неравенства

$$\frac{u_*}{4} \left(H_{\max}^2 - S(\psi_0)^2 \right) - \left(\frac{1}{8C^2} + \frac{\gamma KC^{\gamma-1}}{4(\gamma-1)} - \frac{u_*^2}{8} - \frac{\gamma K}{4(\gamma-1)u_*^{\gamma-1}} \right) > 0.$$

При $I \neq 0$ неравенство (24) равносильно двум условиям:

$$\beta^2 \left(1 + \frac{\Lambda^2}{4} \right) > \frac{u_*}{2}, \quad \frac{1}{M_A \sqrt{2C}} \left| \xi \dot{H}_z - \frac{\Lambda \beta}{2M_A \sqrt{2C}} \right| < \sqrt{2} H_{\max}^2 \left[\beta^2 \left(1 + \frac{\Lambda^2}{4} \right) - \frac{u_*}{4} \right]^{1/2}. \quad (26)$$

Условие (26) вытекает из эллипса (25) две открытые дуги. Если $I = 0$, то условие (24) задаёт на плоскости (\dot{H}_y, \dot{H}_z) две различные точки.

Итак, для решения поставленной выше задачи параметры $\dot{H}_y, \dot{H}_z, \varphi_0, p_0, \rho_0, U_0, H_0$ на входе в канал, к которым нужно добавить ещё длину канала $\ell = L_0$, должны удовлетворять условиям (24), определяющим в пространстве входных параметров кусок гиперповерхности, пересечение которого плоскостями (\dot{H}_y, \dot{H}_z) задаётся или открытыми дугами эллипса (25), или парой точек. Если входные параметры не лежат на указанной поверхности, то решение системы (5), (6) с начальным условием $(H_y(0), H_z(0), u(0))$ либо не достигает звуковой скорости ($u(x) < u_*$), либо достигает его в точке, в которой решение испытывает градиентную катастрофу – производная скорости $du(x)/dx$ делается бесконечной, а производные магнитных полей $H_y(x), H_z(x)$ имеют скачок первого рода. В итоге существует лишь узкий (поскольку кусок гиперповерхности имеет лебегову меру 0 и нигде не плотен в пространстве входных параметров) диапазон, “коридор” входных параметров, для которых на выходе ускорителя получается сверхзвуковая скорость. При этом фактическая длина канала тоже будет определяться входными параметрами и требуемой скоростью на выходе из канала. Если длина канала фиксируется, то задача усложняется и требует специального рассмотрения, но при этом коридор входных параметров, в который надо попасть для достижения сверхзвуковой скорости на выходе, ещё более сузится.

Представляет интерес ещё более амбициозная задача: при каких входных параметрах на выходе канала будет максимально возможная сверхзвуковая скорость, равная u_+ ? Математически это означает, что кривая на сфероиде S^2 , являющаяся решением системы (5), (6) и выходящая из точки $(H_y(0), H_z(0), u(0))$, должна достичь северного полюса N . Наш анализ показывает, что для этого необходимо и достаточно выполнение условий:

$$2\beta^2(1 + \Lambda^2/4) > u_*, \quad \mathcal{E} = \Phi(\pi/2), \quad I = 0, \quad (27)$$

где

$$u^* = \frac{1}{H_{\max}^2} \left(\frac{u_+^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{K}{u_+^{\gamma-1}} - \frac{u_*^2}{2} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{K}{u_*^{\gamma-1}} \right).$$

Условие (27) определяет ещё более узкий коридор для входных параметров, поскольку размерность поверхности, на которой должны быть расположены искомые входные параметры, уменьшается на 1. При этом длина канала не фиксируется.

Итак, наш анализ привёл к неутешительному, с точки зрения достижения значительного ускорения потока плазмы в КСПУ, выводу. *Для канала с продольным полем существует весьма узкий коридор входных параметров плазмы с дозвуковой входной скоростью, для которых на выходе канала можно получить сверхзвуковую скорость потока, и ещё более узкий коридор, для которого выходная сверхзвуковая скорость будет максимально возможной. А если при этом ещё фиксировать длину канала, то коридор входных параметров, доставляющих решение поставленной задачи, ещё более сузится.* В предыдущем анализе считалось, что в системе (5), (6) $p = 0$. Случай $p \neq 0$ требует специального рассмотрения, однако полученный вывод кардинально не меняется.

Список литературы

1. Гавриков М.Б. Линейные волны в нерелятивистской магнитной гидродинамике // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1988. №199. 28 с.
2. Гавриков М.Б., Савельев В.В., Таюрский А.А. Солитоны в двухжидкостной магнитной гидродинамике с учетом инерции электронов // Изв. вузов. ПНД. 2010. Т. 18, №4. С. 132—147.
3. Adlam J.H., Allen J.E. // Phil. Mag. 1958. Vol. 3 P. 448.
4. Lüst R. Fortschritter der Physik. // 7. 503–558. (1959).
5. Гавриков М.Б. Аперiodические колебания холодной плазмы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1991. №33. 28 с.
6. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Уединённые волны в электрон-позитронной плазме // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша (в печати). 2018. 28 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
8. Ху Сы-цзян. Теория гомотопий. М.: Мир. 1964.
9. Гавриков М.Б. Основные уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики. Ч. I. // Препринты ИПМ им.М.В Келдыша. 2006. № 59. 28 с.
10. Соловьёв Л.С. К релятивистской гидродинамике / Собрание трудов в двух томах. Т. II. – М.: Наука. 2001. 414 с.
11. Брушлинский К.В., Козлов А.Н., Коновалов В.С. Численные модели стационарных и пульсирующих течений ионизирующегося газа в каналах плазменных ускорителей // ЖВМ и МФ. 2015. Т. 55. № 8. С. 1405–1416.