



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 96 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Борисов В.Е., Рыков Ю.Г.

Точный римановский солвер
в алгоритмах решения задач
многокомпонентной газовой
динамики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Борисов В.Е., Рыков Ю.Г. Точный римановский солвер в алгоритмах решения задач многокомпонентной газовой динамики // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 96. 28 с. doi:[10.20948/prepr-2018-96](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-96)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-96>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук**

В. Е. Борисов, Ю. Г. Рыков,

**Точный римановский солвер
в алгоритмах решения задач
многокомпонентной
газовой динамики**

Москва – 2018

В.Е. Борисов, Ю.Г. Рыков. Точный римановский солвер в алгоритмах решения задач многокомпонентной газовой динамики

Препринт посвящен отработке алгоритма расчета многокомпонентных газовых потоков при наличии сильных ударных волн. Использование стандартных разностных методов Годуновского типа для указанных течений приводит к численной осцилляции давления на контактных границах. Для исправления ситуации описана и протестирована в одномерном случае удобная модификация – «метод двойного потока». Простота и робастность метода делают его вероятным кандидатом для реализации в многомерных алгоритмах.

Ключевые слова: многокомпонентная газовая динамика, схема Годунова, задача Римана, явление осцилляции давления, метод двойного потока

V.E. Borisov, Yu.G. Rykov. An exact Riemann solver in the algorithms for multicomponent gas dynamics

This preprint deals with the elaboration of the algorithm for multicomponent gas flows simulations in the presence of strong shock waves. Standard finite volume Godunov-type scheme gives the effect of numerical pressure oscillations on a contact discontinuity. In order to fix the situation the convenient modification – double flux method – is described and tested. The simplicity and robustness of the method render it as good candidate for the realization in multi-D algorithms.

Key words: multicomponent gas dynamics, Godunov scheme, Riemann problem, pressure oscillation, double flux method

Оглавление

Введение	3
1. Математическая модель	4
1.1. Волны разрежения	6
1.2. Сильные разрывы	6
2. Методы решения	7
2.1. Схема Годунова	8
2.2. Метод двойного потока	9
2.3. Алгоритм решения задачи Римана о распаде разрыва	11
3. Результаты расчетов	15
3.1. Задача Сода	16
3.2. Модифицированная задача Сода	20
3.3. Задача с двумя ударными волнами	23
Заключение.....	27
Список литературы.....	27

Введение

В последнее время все большую актуальность приобретают задачи, связанные с созданием гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА) для длительного атмосферного полета, оснащенных прямоточным воздушно-реактивным двигателем (ПВРД). Если такие ГЛА смогут осуществлять достаточно продолжительные планирующие полеты в стратосфере, т.е. на высотах порядка 20 – 30 км со скоростью 5 – 12 чисел Маха и более, то они могут стать естественными прототипами новых образцов военной и гражданской техники. При этом основополагающую роль будут играть процессы горения топлив разного вида, а также изменение свойств воздушной среды вследствие отклонения от идеальности, начала процессов диссоциации и химических реакций, а также последствий сильного повышения температуры за фронтом ударных волн.

Описанные явления предполагают, что рассматриваемая среда состоит из многих компонент, для каждой из которых необходимо выписать соответствующие балансовые соотношения (при отсутствии химических реакций – законы сохранения массы). Поэтому базовая система уравнений Навье–Стокса, во-первых, расширяется за счет дополнительных уравнений баланса массы компонент, и, во-вторых, серьезно изменяются соответствующие «турбулентные коэффициенты», которые отвечают за турбулентную вязкость, перемешивание и другие характерные явления. Все сказанное требует соблюдать особую аккуратность при конструировании численных алгоритмов для решения указанного класса задач, особенно учитывая тот факт, что введение дополнительных уравнений для компонент, как это хорошо известно, см., например, [1], приводит к значительному усложнению вычислительной модели.

Настоящая работа посвящена изучению свойств разработанного модельного алгоритма решения расширенной системы уравнений Эйлера для произвольного числа компонент. Этот алгоритм учитывает возможность появления сильных скачков в решениях, что выражается в использовании точных решений соответствующей задачи Римана, а также учитывает появление осцилляций давления, свойственных алгоритмам непосредственного обобщения методов численного решения на многокомпонентные системы. В работе рассматривается простейший одномерный случай. В дальнейшем предполагается использовать разработанный алгоритм вначале для получения решений многомерной расширенной системы уравнений Эйлера, а затем на основе метода расщепления – и для полной системы уравнений Навье–Стокса с учетом турбулентности и химических реакций. Идеология этого подхода основана на далеко идущем обобщении результатов работы [2], недавно полученном ее авторами.

Препринт состоит из трех разделов. Раздел 1 посвящен математическому описанию модели, раздел 2 – детальному описанию алгоритма «двойного потока». Наконец, в разделе 3 приведены примеры тестовых расчетов с оценками погрешности и скорости сходимости численного решения.

1. Математическая модель

Расширенная система уравнений Эйлера представляет собой систему уравнений газовой динамики, в которую добавлены законы сохранения для дополнительных компонент. В рамках общего подхода процесс решения общей системы уравнений типа Навье–Стокса с химическими реакциями расщепляется на два этапа: решение гиперболической и параболической частей уравнений системы. Опишем общий алгоритм решения гиперболической части на примере одномерной задачи. Важным элементом алгоритма является точное решение задачи Римана для расширенной системы уравнений гидродинамики. Хотя подобное решение было описано в [1], здесь проведем более систематическое рассмотрение, поскольку при наличии сильных ударных волн при полете ГЛА с ПВРД на гиперзвуковом режиме представляется важным опираться не на приближенное, а на точное решение задачи Римана. Расширенная одномерная система уравнений Эйлера имеет вид системы балансовых законов, состоящей из $N_{SP} + 2$ уравнений, где N_{SP} – количество компонент в смеси:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{G}(\mathbf{U}, x, t), \quad (1.1)$$

$$\mathbf{U} \equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_{m+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \\ \rho Y_m \end{pmatrix}; \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ u(\rho E + P) \\ \rho u Y_m \end{pmatrix}, \quad E = e + u^2 / 2.$$

Здесь $m = 1, \dots, N_{SP} - 1$, e – внутренняя энергия, Y_m – массовая концентрация компоненты с номером m , $\sum_{k=1}^{N_{SP}} Y_k = 1$, функция \mathbf{G} является правой частью, отвечающей за химические реакции и перетоки энергии, конкретный ее вид на данном этапе не существен. Предполагается, что совокупность несущего газа и продуктов химических реакций (горения) представляет собой смесь газов со следующим уравнением состояния

$$e = \frac{P + \rho_0 c_0^2}{\rho(\gamma - 1)} - \frac{c_0^2}{\gamma - 1}, \quad (1.2)$$

где ρ_0, c_0 – некоторые параметры. Показатель адиабаты γ вычисляется по следующей формуле:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}, \quad (1.3)$$

$$R = \sum_{m=1}^{N_{SP}-1} Y_m (R_m - R_0) + R_0; C_V = \sum_{m=1}^{N_{SP}-1} Y_m (C_V^m - C_V^0) + C_V^0.$$

Отметим, что γ представляет собой однородную функцию по консервативным переменным u_1, u_{3+m} . Это наблюдение в дальнейшем позволяет получить более простые формулы.

Система (1.1) является нестрогой гиперболической системой, то есть имеет кратные собственные числа, но полную систему собственных векторов. Собственными числами матрицы $\mathbf{F}'_U(\mathbf{U})$ являются величины

$$\lambda_1 = u - c, \lambda_2 = \dots = \lambda_{N_{SP}+1} = u, \lambda_{N_{SP}+2} = u + c,$$

где скорость звука $c = \sqrt{(\gamma P + \rho_0 c_0^2) / \rho}$. Отметим, что ее выражение для системы (1.1) аналогично известному из газовой динамики. Это происходит по причине однородности функции γ , на что указывалось выше.

Обозначим ρe через Θ и приведем выражения для правых \mathbf{r}_i собственных векторов, $i = 1, \dots, N_{SP} + 2$ (для левых собственных векторов \mathbf{l}_i можно выписать аналогичные выражения):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \left(1; u - c; \frac{c^2 - c_0^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} - uc; \{\beta_m, m = 1, \dots, N_{SP} - 1\} \right), \\ \mathbf{r}_2 &= \left(1; u; \frac{u^2}{2} - \frac{c_0^2 + \Theta \gamma'_0}{\gamma - 1}; \{0, m = 1, \dots, N_{SP} - 1\} \right), \\ \mathbf{r}_{m+2} &= \left(\Theta \gamma'_m; u \Theta \gamma'_m; 0; 0; \dots; \underbrace{(\gamma - 1)u^2 / 2 - c_0^2 - \Theta \gamma'_0}_{m+3}; 0; \dots; 0 \right), m = 1, \dots, N_{SP} - 1, \\ \mathbf{r}_{N_{SP}+2} &= \left(1; u + c; \frac{c^2 - c_0^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} + uc; \{Y_m, m = 1, \dots, N_{SP} - 1\} \right). \end{aligned}$$

Здесь $\gamma'_0 \equiv \frac{\partial \gamma}{\partial u_1}$, $\gamma'_m \equiv \frac{\partial \gamma}{\partial u_{m+3}}$, $m = 1, \dots, N_{SP} - 1$.

В алгоритме численного решения системы (1.1), который будет описан в следующем разделе, нам необходимо получить решение задачи Римана для (1.1) в предположении, что правые части тождественно равны нулю. Для этого изучим поведение соответствующих волн разрежения и ударных волн.

1.1. Волны разрежения

Волны разрежения порождают только вектора $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{N_{SP}+2}$, поскольку остальные вектора относятся к $\lambda = u$ и соответствующие простые волны являются контактными разрывами. Выражения для первых трех компонент векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{N_{SP}+2}$ совпадают с компонентами соответствующих векторов для обычных уравнений газовой динамики. Покажем, что вдоль решений системы уравнений в фазовой плоскости для волн разрежения, соответствующих системе (1.1), величина γ остается постоянной. В системе уравнений $\dot{\mathbf{U}} \parallel r_1$ или $\dot{\mathbf{U}} \parallel r_{N_{SP}+2}$ выполняются соотношения

$$du_{m+3} / du_1 = u_{m+3} / u_1, \quad m = 1, \dots, N_{SP} - 1,$$

решением которых являются зависимости $u_i = C_i u_1$, где C_i – некоторые постоянные. Тогда из однородности γ следует требуемое утверждение. Таким образом, форма проекции на подпространство (u_1, u_2, u_3) кривых в фазовом пространстве, соответствующих волнам разрежения, совпадает с формой кривых для обычной газовой динамики, но со своим значением γ , которое будет зависеть от начальной точки, из которой исходит эта кривая.

1.2. Сильные разрывы

Описание ударных волн для (1.1) следует из соотношений Ренкина–Гюгонио

$$s(\mathbf{U} - \mathbf{U}^-) = \mathbf{F}(\mathbf{U}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}^-), \quad (1.4)$$

где s есть скорость распространения разрыва. Более подробно, справедливы формулы, $m = 1, \dots, N_{SP} - 1$

$$s \begin{pmatrix} u_1 - u_1^- \\ u_2 - u_2^- \\ u_3 - u_3^- \\ u_{m+3} - u_{m+3}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 - u_2^- \\ \frac{u_2^2}{u_1} + (\gamma - 1) \left(u_3 - \frac{u_2^2}{2u_1} \right) + c_0^2 (u_1 - \rho_0) - \{\dots\}^- \\ \frac{u_2}{u_1} \left[u_3 + (\gamma - 1) \left(u_3 - \frac{u_2^2}{2u_1} \right) + c_0^2 (u_1 - \rho_0) \right] - \{\dots\}^- \\ u_{m+3} \frac{u_2}{u_1} - u_{m+3}^- \frac{u_2^-}{u_1^-} \end{pmatrix},$$

где через $\{\dots\}^-$ обозначено соответствующее текущей строчке выражение, но взятое при значении консервативных переменных $\mathbf{U} = \mathbf{U}^-$.

Учитывая первое уравнение из (1.4), последние $N_{SP} - 1$ уравнений могут быть записаны в следующей форме:

$$\left(\frac{u_2}{u_1} - \frac{u_2^-}{u_1^-} \right) \cdot (u_m u_1^- - u_1 u_m^-) = 0, \quad m = 1, \dots, N_{SP} - 1. \quad (1.5)$$

Поэтому сразу можно выделить два крупных класса решений системы (1.5): (а) решения, при которых $u_2 / u_1 = u_2^- / u_1^-$, и (б) решения, при которых $u_m / u_1 = u_m^- / u_1^-$, $m = 1, \dots, N_{SP} - 1$. Вспоминая выражения для консервативных переменных, заключаем, что решения первого класса – это такие сильные разрывы, на которых непрерывна функция скорости u , то есть это контактные разрывы. При этом на значения переменных, связанных с концентрацией компонент, не накладывается никаких дополнительных ограничений, и форма контактного разрыва определяется из первых трех уравнений (1.4), то есть совпадает с кривой контактного разрыва в фазовом пространстве для обыкновенной газовой динамики. Единственное отличие состоит в том, что величина γ справа и слева от контактного разрыва теперь определяется через концентрации Y_m .

Для решений второго класса величина γ сохраняется при переходе через разрыв. Поэтому первые три уравнения (1.4) определяют решения в виде ударных волн, соответствующих семействам с минимальным и максимальным собственным числом. Эти траектории в фазовом пространстве будут идентичны траекториям, полученным для обычной газовой динамики для конкретного γ , которое определяется значениями \mathbf{U}^- .

Таким образом, решение задачи Римана для (1.1) в предположении, что правые части тождественно равны нулю, может быть получено путем соответствующей модификации решения задачи Римана для системы уравнений обычной газовой динамики.

2. Методы решения

Для удобства еще раз приведем одномерную расширенную систему уравнений Эйлера (1.1) с нулевыми правыми частями

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{0}. \quad (2.1)$$

Ее численное решение осуществляется с помощью явной разностной схемы годуновского типа с первым порядком аппроксимации по времени и пространству. При этом обобщение схемы на случай более высокого порядка точности может быть произведено стандартным способом [3]. Для определения потоков газодинамических величин используется точное решение соответствующей задачи Римана.

ющей задачи Римана. В целях устранения нефизических осцилляций на контактных границах газов применяется т.н. метод двойного потока [4], адаптированный для задач многокомпонентной газовой динамики. Все основные элементы расчетной схемы решения системы (2.1) подробно рассмотрены ниже в данном разделе.

2.1. Схема Годунова

Для численного решения системы (2.1) с УРС (1.2) на отрезке $[x_L, x_R]$ введем равномерную разностную сетку с узлами (x_n, t_k) , где $x_n = x_L + (n-1)h$, $n=1, \dots, N+1$, N – число ячеек сетки, $h = (x_R - x_L)/N$, и $t_{k+1} = t_k + \tau_k$, τ_k – значение временного шага для слоя k . Интегрирование уравнений (2.1) по разностной ячейке дает следующую схему:

$$\frac{\mathbf{U}_i^{k+1} - \mathbf{U}_i^k}{\tau_k} + \frac{\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^k) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i-1/2}^k)}{h} = \mathbf{0}, \quad i=1, \dots, N. \quad (2.2)$$

Целые индексы обозначают средние на интервале значения, которые определяют приближенное решение в виде кусочно-постоянной функции, известной на момент времени t_k , а полуцелые индексы обозначают значения в узлах сетки, т.е. на границах между ячейками. За время порядка $\tau_k \leq \tau_{max}$ поведение такой системы известно – каждый разрыв распадается с образованием соответствующей конфигурации решения задачи Римана, из которой находятся величины $(\rho, u, p, Y_m, \gamma, \rho_0, c_0)_{i+1/2}$. Таким образом, полностью определяется вектор $\mathbf{U}_{i+1/2}^k$ и далее $\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^k)$. После этого вычисление одного временного слоя завершается определением решения в момент времени t_{k+1} согласно (2.2) (примитивные переменные пересчитываются из консервативных с использованием формул (1.2) и (1.3)).

Шаг по времени задается соотношением

$$\tau_k = r \tau_{max}, \quad \tau_{max} = \frac{h}{\max_i \left\{ |u_i^k| + c_i^k \right\}},$$

где r – параметр Куранта ($0 < r < 1$), призванный обеспечить устойчивость численного счета, поскольку оценка для τ_{max} получается из анализа устойчивости линеаризованной системы.

Граничные условия в узлах 1 и $N+1$ ставятся стандартным образом [3]. Для того чтобы не нарушать единообразия вычислений, вводятся слои фиктивных ячеек, в которые в зависимости от типа граничного условия записываются

необходимые параметры. В частности, в случае условия «твердая стенка» («ось симметрии»), в фиктивную ячейку копируются значения из прилегающей внутренней ячейки с изменением знака скорости на противоположный. В случае условия «открытая граница» газ может втекать или вытекать из области, и здесь должны быть обеспечены условия непрерывности движения: в фиктивную ячейку записываются либо параметры набегающего потока, либо величины из прилегающей внутренней ячейки.

2.2. Метод двойного потока

Известная проблема схем Годуновского типа для уравнений многокомпонентной газовой динамики заключается в возникновении осцилляций поля давления на контактных границах между газами с существенно разными показателями адиабаты [4,5] (аналогичные проблемы возникают в различных методах, требующих четкого определения границы между веществами [6,7]).

Для простоты рассмотрим следующую постановку задачи с контактной границей между двумя совершенными газами с УРС (1.2) при $\rho_0 = 0$, $c_0 = 0$. Пусть для всех ячеек сетки давление и скорость на момент времени t_k постоянны: $p_i^k = p$, $u_i^k = u \geq 0$, $i = 1, \dots, N$. Как было показано в [8], после одного шага схемы (2.2) величина скорости сохраняется, однако $p_i^{k+1} \neq p$. Это происходит из-за того, что согласно схеме пересчет концентраций веществ, скорости и энергии системы проводится независимо, в результате чего для рассматриваемого случая условие сохранения постоянства давления (следующее из уравнения сохранения энергии) записывается как

$$\frac{1}{\gamma_i^{k+1} - 1} = \frac{1}{\gamma_i^k - 1} - \frac{u \tau_k}{h} \left(\frac{1}{\gamma_i^k - 1} - \frac{1}{\gamma_{i-1}^k - 1} \right). \quad (2.4)$$

При этом, согласно схеме,

$$\rho_i^{k+1} = \rho_i^k - \frac{u \tau_k}{h} (\rho_i^k - \rho_{i-1}^k),$$

$$\rho_i^{k+1} (Y_m)_i^{k+1} = \rho_i^k (Y_m)_i^k - \frac{u \tau_k}{h} (\rho_i^k (Y_m)_i^k - \rho_{i-1}^k (Y_m)_{i-1}^k), \quad (2.5)$$

$$\gamma = 1 + \frac{\sum_m Y_m R_m}{\sum_m Y_m C_V^m}.$$

Очевидно, что в общем случае условия (2.4) и (2.5) не согласованы друг с другом. Таким образом, $p_i^{k+1} \neq p_i^k$, что приводит на следующем шаге к осцилляциям в поле скорости, нарастающим со временем, что в ряде ситуаций приводит к

полностью некорректному решению. В случае расчета задач горения и детонации наличие источника в правой части уравнений только усиливает этот недостаток схемы.

Существует несколько подходов к решению данной проблемы, связанных либо с корректировкой математической модели и отказом от ее дивергентной формы, например, [5], либо с корректировкой расчетной схемы. В настоящей работе используется т.н. «double flux method» (метод двойного потока) [4], в его модификации для задач многокомпонентной газовой динамики с ударными волнами.

Суть данного метода состоит в расщеплении процедуры расчета годуновского потока для уравнения энергии, в результате чего расчет энергии происходит по схеме «предиктор-корректор» с вычислением давления на этапе предиктора. На первом шаге схемы значение полной энергии в ячейке вычисляется с помощью потоков, рассчитанных при фиксированном для данной ячейки γ , т.е. в каждом сеточном узле с номером $n = i + 1/2$ вычисляется два разных потока, левый «L» с γ_i , и правый «R» с γ_{i+1} , что позволяет в рамках каждой ячейки локально удовлетворить условию (2.4). Соответствующий шаблон представлен на рис. 1.

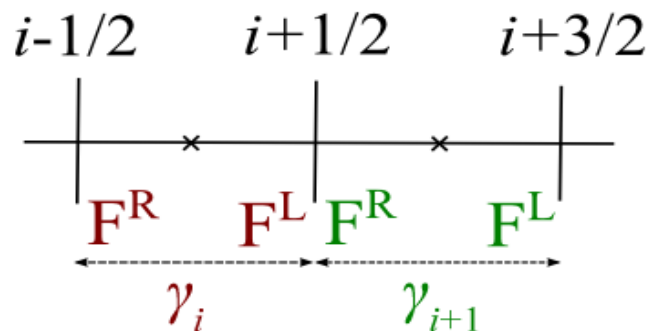


Рис. 1. Метод двойного потока для узла с номером $n = i + 1/2$.

В случае использования УРС вида (1.2) помимо γ при вычислении потоков также фиксируются значения ρ_0 и c_0 . Все остальные величины берутся из решения задачи о распаде разрыва в данном узле. После этого на втором шаге алгоритма по полученному значению энергии для ячейки производится вычисление давления согласно используемому УРС с тем же фиксированным γ . Далее осуществляется корректировка поля полной энергии с использованием значения внутренней энергии, пересчитанной по полученному полю давления и значениям γ , полученным по рассчитанным величинам $(Y_m)_i^{k+1}$.

Для системы (2.1) скорректированная схема Годунова с применением метода «двойного потока» для ячейки i записывается в следующем виде:

- Шаг 1.

$$\begin{bmatrix} \rho^{k+1} \\ (\rho u)^{k+1} \\ (\rho E)^* \\ (\rho Y_m)^{k+1} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \rho^k \\ (\rho u)^k \\ (\rho E)^k \\ (\rho Y_m)^k \end{bmatrix}_i - \frac{\tau_k}{h} \left[\mathbf{F}^L(\mathbf{U}_{i+1/2}^k, \gamma_i) - \mathbf{F}^R(\mathbf{U}_{i-1/2}^k, \gamma_i) \right].$$

- Шаг 2.

$$p_i^{k+1} = (\gamma_i^k - 1) \left((\rho E)_i^* - \frac{1}{2} (\rho u^2)_i^{k+1} \right) + (c_{0,i}^k)^2 (\rho_i^{k+1} - \rho_{0,i}^k),$$

$$\gamma_i^{k+1} = \gamma(Y_m^{k+1}), \quad c_{0,i}^{k+1} = c_0(Y_m^{k+1}), \quad \rho_{0,i}^{k+1} = \rho_0(Y_m^{k+1}),$$

$$(\rho E)_i^{k+1} = \frac{p_i^{k+1} + (c_{0,i}^{k+1})^2 (\rho_i^{k+1} - \rho_{0,i}^{k+1})}{(\gamma_i^{k+1} - 1)} + \frac{1}{2} (\rho u^2)_i^{k+1}.$$

Следует отметить, что важен именно такой порядок действий, в противном случае соотношение (2.4) выполнено не будет.

Ошибка в балансе полной энергии, неизбежно возникающая при использовании метода двойного потока, как показывает практика, не оказывает в большинстве случаев существенного влияния на полное решение задачи. Анализ данного вопроса посвящены работы [4, 7].

2.3 Алгоритм решения задачи Римана о распаде разрыва

Как уже упоминалось ранее, точное решение задачи Римана о распаде разрыва для уравнений многокомпонентной газовой динамики может быть получено путем соответствующей модификации точного решения задачи Римана для обычных однокомпонентных газодинамических уравнений [9]. Возникающие при распаде разрыва конфигурации и алгоритм определения решения полностью аналогичны, с той лишь разницей, что необходимо учитывать разрыв в γ и дополнительных коэффициентах в УРС. Обоснование этого факта было приведено в разделе 1, здесь же опишем полный алгоритм решения на примере многокомпонентной смеси газов, общее УРС которой задается соотношением (1.2) с некоторыми «эффективными» параметрами для смеси.

Пусть в начальный момент времени параметры среды задаются в виде

$$q(x,0) = \begin{cases} q_L & \text{при } x \leq 0, \\ q_R & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

где $q = (\rho, u, p, \gamma, \rho_0, c_0)$. При $t > 0$ происходит распад этого состояния. Задача допускает пять конфигураций решения. Первые четыре из них содержат контактный разрыв (КР), на котором испытывают скачок плотность, показатель адиабаты и дополнительные коэффициенты УРС, а давление и скорость непрерывны. Обозначим их постоянные значения в областях слева и справа от контактного разрыва как P и U , а различные значения плотности как R^L и R^R для левой и правой области соответственно¹. В свою очередь, эти области отделены от «невозмущённых» областей с параметрами ρ^L, u^L, p^L слева и ρ^R, u^R, p^R справа либо ударной волной (УВ), либо волной разрежения (ВР), которые для краткости условно назовем «левой» или «правой». В случае, если волна является ударной, её скорость обозначим как D^k , $k = L, R$. Если же волна представляет собой волну разрежения, то под D^k и $D^{k,*}$ понимаются скорости ограничивающих её характеристик. Пятая конфигурация решения представляет собой предельный случай, когда в результате «разлёта» образуется область вакуума, в которой плотность падает до нуля в двух волнах разрежения, примыкающих к области вакуума слева и справа.

Решение задачи сводится к нахождению давления P на контактном разрыве, после чего легко находятся остальные величины для всех конфигураций. Уравнение для P имеет следующий вид

$$F(P) \equiv f(P, p^L, \rho^L, \gamma^L, \rho_0^L, c_0^L) + f(P, p^R, \rho^R, \gamma^R, \rho_0^R, c_0^R) = u^L - u^R, \quad (2.6)$$

где для $k = L, R$

$$f(P, p^k, \rho^k, \gamma^k, \rho_0^k, c_0^k) = \begin{cases} \frac{P - p^k}{\rho^k c^k \sqrt{\frac{\gamma^k + 1}{2\gamma^k} \pi^k + \frac{\gamma^k - 1}{2\gamma^k}}} & \text{при } P \geq p^k, \\ \frac{2}{\gamma^k - 1} c^k \left(\left(\pi^k \right)^{\frac{\gamma^k - 1}{2\gamma^k}} - 1 \right) & \text{при } P < p^k, \end{cases}$$

¹ При этом, как следует из теории, значения Y_m и, как следствие, γ и дополнительных коэффициентов УРС, слева и справа от контактного разрыва соответствуют параметрам невозмущённых областей.

$$\pi^k = \frac{p + p_0^k}{p^k + p_0^k}, \quad c^k = \sqrt{\gamma^k \frac{p^k + p_0^k}{\rho^k}}, \quad p_0^k = \frac{1}{\gamma^k} \rho_0^k (c_0^k)^2.$$

Нелинейное уравнение (2.6) решается с помощью метода Ньютона. При этом критерий существования решения (т.е. реализация одной из первых четырех конфигураций) записывается в следующем виде

$$u^L - u^R \geq -2 \left(\frac{c^L}{\gamma^L - 1} + \frac{c^R}{\gamma^R - 1} \right).$$

Хорошим начальным приближением является решение линеаризованного уравнения (так называемый «звуковой распад разрыва»):

$$P^{(0)} = \frac{p^L \rho^R c^R + p^R \rho^L c^L + (u^L - u^R) \rho^L c^L \rho^R c^R}{\rho^L c^L + \rho^R c^R}.$$

Выражение для производной f'_P может быть вычислено явно:

$$f'_P(P, p^k, \rho^k, \gamma^k, \rho_0^k, c_0^k) = \begin{cases} \frac{(\gamma^k + 1)\pi^k + (3\gamma^k - 1)}{4\gamma^k \rho^k c^k \left(\frac{\gamma^k + 1}{2\gamma^k} \pi^k + \frac{\gamma^k - 1}{2\gamma^k} \right)^{3/2}} & \text{при } P \geq p^k, \\ \frac{1}{\gamma^k (P + p_0^k)} c^k (\pi^k)^{\frac{\gamma^k - 1}{2\gamma^k}} & \text{при } P < p^k. \end{cases}$$

Таким образом, если $P^{(n-1)}$ – полученное приближенное значение корня на $n-1$ итерации метода Ньютона, то новое приближение строится по формуле

$$P^{(n)} = P^{(n-1)} - \frac{f(P^{(n-1)}, p^L, \rho^L, \gamma^L, \rho_0^L, c_0^L) + f(P^{(n-1)}, p^R, \rho^R, \gamma^R, \rho_0^R, c_0^R) - (u^L - u^R)}{f'_P(P^{(n-1)}, p^L, \rho^L, \gamma^L, \rho_0^L, c_0^L) + f'_P(P^{(n-1)}, p^R, \rho^R, \gamma^R, \rho_0^R, c_0^R)}.$$

Итерационный процесс останавливается при достижении заданной точности ε (обычно порядка $10^{-6} \div 10^{-12}$) согласно следующему критерию

$$|P^{(n)} - P^{(n-1)}| < \varepsilon \cdot \min \{ |p^L|, |p^R| \}.$$

После вычисления значения P скорость контактного разрыва определяется по формуле

$$U = \frac{1}{2} (u^L - f(P, p^L, \rho^L, \gamma^L, \rho_0^L, c_0^L) + u^R + f(P, p^R, \rho^R, \gamma^R, \rho_0^R, c_0^R)).$$

Далее вычисляются величины R^L, R^R, D^L, D^R и, при необходимости, $D^{L,*}, D^{R,*}$ в зависимости от возникающей конфигурации решения:

1. $-p_0^L < P < p^L$ – слева от КР возникает веер волн разряжения:

$$c^{L,*} = c^L + (\gamma^L - 1)(u^L - U)/2, \quad R^L = \gamma^L (P + p_0^L) / (c^{L,*})^2, \\ D^L = u^L - c^L, \quad D^{L,*} = u^L - c^{L,*};$$

2. $P \geq p^L$ – левая волна является ударной:

$$R^L = \rho^L \frac{(\gamma^L + 1)(P + p_0^L) + (\gamma^L - 1)(p^L + p_0^L)}{(\gamma^L - 1)(P + p_0^L) + (\gamma^L + 1)(p^L + p_0^L)}, \quad D^L = D^{L,*} = \frac{\rho^L u^L - R^L U}{\rho^L - R^L};$$

3. $-p_0^R < P < p^R$ – справа от КР возникает веер волн разряжения:

$$c^{R,*} = c^R - (\gamma^R - 1)(u^R - U)/2, \quad R^R = \gamma^R (P + p_0^R) / (c^{R,*})^2, \\ D^{R,*} = U + c^{R,*}, \quad D^R = u^R + c^R;$$

4. $P \geq p^R$ – правая волна является ударной:

$$R^R = \rho^R \frac{(\gamma^R + 1)(P + p_0^R) + (\gamma^R - 1)(p^R + p_0^R)}{(\gamma^R - 1)(P + p_0^R) + (\gamma^R + 1)(p^R + p_0^R)}, \quad D^R = D^{R,*} = \frac{\rho^R u^R - R^R U}{\rho^R - R^R}.$$

После этого становится возможным выписать искомое решение $\tilde{q} = (\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{\gamma}, \tilde{\rho}_0, \tilde{c}_0)$ в произвольной точке \tilde{x} на момент времени $\tilde{t} > 0$ в зависимости от того, в какую область попадает луч $\xi = \tilde{x} / \tilde{t}$ (для метода Годунова – при $\xi = 0$), см. рис. 2:

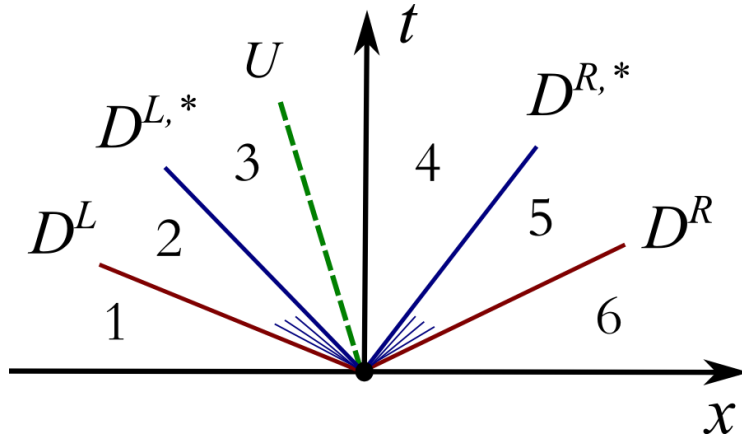


Рис. 2. Области решения задачи Римана.

1. $\xi \leq D^L$:

$$\tilde{\rho} = \rho^L, \tilde{u} = u^L, \tilde{p} = p^L, \tilde{\gamma} = \gamma^L, \tilde{\rho}_0 = \rho_0^L, \tilde{c}_0 = c_0^L;$$

2. $D^L < \xi \leq D^{L,*}$:

$$\tilde{c} = \frac{2c^L + (\gamma^L - 1)(u^L - \xi)}{\gamma^L + 1}, \tilde{\rho} = \rho^L \left(\frac{\tilde{c}}{c^L} \right)^{\frac{2}{\gamma^L - 1}},$$

$$\tilde{u} = \xi + \tilde{c}, \tilde{p} = \tilde{\rho} \tilde{c}^2 / \gamma^L - p_0^L, \tilde{\gamma} = \gamma^L, \tilde{\rho}_0 = \rho_0^L, \tilde{c}_0 = c_0^L;$$

3. $D^{L,*} < \xi \leq U$:

$$\tilde{\rho} = R^L, \tilde{u} = U, \tilde{p} = P, \tilde{\gamma} = \gamma^L, \tilde{\rho}_0 = \rho_0^L, \tilde{c}_0 = c_0^L;$$

4. $U < \xi \leq D^{R,*}$:

$$\tilde{\rho} = R^R, \tilde{u} = U, \tilde{p} = P, \tilde{\gamma} = \gamma^R, \tilde{\rho}_0 = \rho_0^R, \tilde{c}_0 = c_0^R;$$

5. $D^{R,*} < \xi \leq D^R$:

$$\tilde{c} = \frac{2c^R + (\gamma^R - 1)(\xi - u^R)}{\gamma^R + 1}, \tilde{\rho} = \rho^R \left(\frac{\tilde{c}}{c^R} \right)^{\frac{2}{\gamma^R - 1}},$$

$$\tilde{u} = \xi - \tilde{c}, \tilde{p} = \tilde{\rho} \tilde{c}^2 / \gamma^R - p_0^R, \tilde{\gamma} = \gamma^R, \tilde{\rho}_0 = \rho_0^R, \tilde{c}_0 = c_0^R;$$

6. $D^R < \xi$:

$$\tilde{\rho} = \rho^R, \tilde{u} = u^R, \tilde{p} = p^R, \tilde{\gamma} = \gamma^R, \tilde{\rho}_0 = \rho_0^R, \tilde{c}_0 = c_0^R.$$

3. Результаты расчетов

В целях валидации и верификации разработанной методики было проведено тестирование реализованных алгоритмов на трех тестовых задачах: задаче Сода об ударной трубе, модифицированной задаче Сода и задаче о распространении двух ударных волн. Подробное описание каждой из этих задач и результаты расчетов приведены далее в настоящем разделе.

Методика тестирования соответствует предложенной в работе [10]. Помимо визуального сравнения результатов расчетов с известным эталонным решением также сравнивались абсолютная и относительная L_1 норма ошибки, рассчитанные по следующим формулам:

$$\|\Delta f\|_1 = \frac{\sum_{i=1}^N |\Delta f_i| \cdot h_i}{\sum_{i=1}^N h_i}, \quad \|\varepsilon_f\|_1 = \frac{\sum_{i=1}^N |\Delta f_i| \cdot h_i}{\sum_{i=1}^N \tilde{f}_i \cdot h_i},$$

где f_i – расчетное значение исследуемой величины в ячейке сетки с номер i , \tilde{f}_i – эталонное значение исследуемой величины в той же ячейке, N – количество ячеек сетки, h_i – размер ячейки, $\Delta f_i = f_i - \tilde{f}_i$.

Кроме определения погрешности как таковой, также оценивался порядок сходимости численного решения при измельчении ячеек расчетной сетки. Для этих целей использовались 4 равномерных сетки размерами $N = 500, 1000, 2000$ и 4000 ячеек с шагом, последовательно измельчающимся в два раза. Для оценки порядка сходимости была использована следующая формула для равномерных сеток:

$$\sigma(f) = \sigma(f : N_1, N_2) = \ln \frac{\|\Delta f^{(N_1)}\|_1}{\|\Delta f^{(N_2)}\|_1} / \ln \frac{h_1}{h_2}.$$

Для всех трех задач были получены приемлемые результаты. Так, относительная погрешность для каждой из основных газодинамических величин не превысила 5% при $N = 500$ и 2% при $N = 4000$. Кроме того, полученные порядки сходимости превысили ожидаемое для схем первого порядка точности значение $\sigma = 1/2$ [11].

3.1. Задача Сода

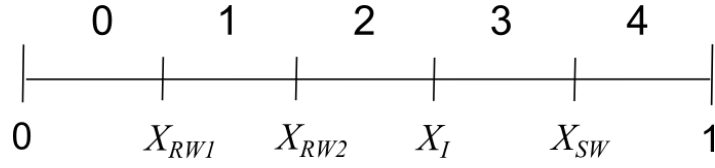
В качестве первого тестового примера рассмотрим задачу Сода об ударной трубе, представляющую интерес с точки зрения моделирования ударноволновых течений с распадами разрыва на контактных границах газов с одинаковыми показателями адиабаты. Подробно задача описана в работах [10, 12] и ставится следующим образом. В области $0 \leq x \leq 1$ содержатся два одинаковых идеальных совершенных газа, разделенных в начальный момент времени:

$$(\rho, u, p, \gamma)|_{t=0} = \begin{cases} 1.0, & 0.0, 1.0, 1.4 \text{ при } 0 \leq x \leq 0.5, \\ 0.125, & 0.0, 0.1, 1.4 \text{ при } 0.5 < x \leq 1. \end{cases}$$

Обозначим газ слева от разрыва индексом «I», справа – индексом «II».

На внешних границах области ставится условие твердой стенки. В качестве контрольного момента времени используется величина $t = 0.2$.

В задаче происходит распад разрыва, возникающее течение содержит пять подобластей, схематично изображенных на рис. 3:

Рис. 3. Области течения при $t = 0.2$.

- область 0: $0 \leq x < X_{RW1}$ – газ I с начальными параметрами ρ_I, u_I, p_I ;
- область 1: $X_{RW1} \leq x < X_{RW2}$ – газ I , охваченный волной разрежения, с параметрами ρ_1, u_1, p_1 ;
- область 2: $X_{RW2} \leq x < X_I$ – газ I , по которому прошла волна разрежения, с параметрами ρ_2, u_2, p_2 ;
- область 3: $X_I \leq x < X_{SW}$ – газ II , поджатый ударной волной, с параметрами ρ_3, u_3, p_3 , при этом $p_3 = p_2, u_3 = u_2$;
- область 4: $X_{SW} \leq x \leq 1$ – газ II с начальными параметрами $\rho_{II}, u_{II}, p_{II}$,

где X_{RW1} – положение переднего фронта волны разрежения, X_{RW2} – положение заднего фронта волны разрежения, X_I – положение контактного разрыва, X_{SW} – положение фронта ударной волны.

В качестве эталонного используется аналитическое решение задачи [12]. Значения p_3 и u_3 (p_2 и u_2) определяются из решения системы

$$\begin{cases} p_3 = p_I [1 - (\gamma - 1)u_3 / (2c_I)]^{2\gamma/(\gamma-1)}, \\ u_3^2 = \frac{2(p_3 - p_{II})^2}{\rho_{II} [(\gamma - 1)p_{II} + (\gamma + 1)p_3]}, \end{cases}$$

где $c_I = \sqrt{\gamma p_I / \rho_I}$ – скорость звука в области 0. Остальные величины находятся согласно следующим формулам:

$$\rho_3 = \rho_{II} \frac{(\gamma - 1)p_{II} + (\gamma + 1)p_3}{(\gamma + 1)p_{II} + (\gamma - 1)p_3}, \quad \rho_2 = \rho_I (p_3 / p_I)^{1/\gamma},$$

$$u_1(x, t) = \frac{2}{\gamma + 1} \left(c_I - \frac{X_I|_{t=0} - x}{t} \right),$$

$$\rho_1(x, t) = \rho_I \left(1 - \frac{(\gamma - 1)u_1(x, t)}{2c_I} \right)^{2/(\gamma-1)},$$

$$p_1(x,t) = p_I \left(1 - \frac{(\gamma-1)u_1(x,t)}{2c_I} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)},$$

$$e(x,t) = \frac{p(x,t)}{(\gamma-1)\rho(x,t)}, \quad D = (p_3 - p_{II})/(\rho_{II}u_3),$$

$$X_{SW} = X_I|_{t=0} + Dt, \quad X_{RW1} = X_I|_{t=0} - c_I t,$$

$$X_{RW2} = X_I|_{t=0} - [c_I - (\gamma+1)u_3/2]t, \quad X_I = X_I|_{t=0} + u_3 t.$$

Численные расчеты проводились на равномерных сетках, содержащих 500, 1000, 2000 и 4000 ячеек соответственно. На рис. 4 приводятся профили плотности, давления, внутренней энергии и скорости на момент времени $t = 0.2$ для расчетов на самой грубой и самой мелкой сетках в сравнении с эталонным решением. На рис. 5 показаны графики абсолютной L_1 нормы погрешности (разницы между расчетным и эталонным решением) на тот же момент времени. В табл.1 и табл. 2 дополнительно приведены абсолютная и относительная L_1 нормы погрешности решения.

Таблица 1.

Задача Сода: абсолютная L_1 норма разницы между эталонным решением и расчетными данными на момент времени $t = 0.2$.

Δ_{L1}	500	1000	2000	4000	σ
$p \cdot 10^{-3}$	5.3817	3.1701	1.8240	1.0459	0.7878
$\rho \cdot 10^{-3}$	6.9116	4.3833	2.7502	1.7418	0.6628
$e \cdot 10^{-2}$	2.6482	1.7432	1.1440	0.7629	0.5985
$u \cdot 10^{-2}$	1.0160	0.5748	0.3045	0.1671	0.8681

Таблица 2.

Задача Сода: относительная L_1 норма разницы между эталонным решением и расчетными данными на момент времени $t = 0.2$.

ε_{L1} [%]	500	1000	2000	4000
p	1.03	0.61	0.35	0.20
ρ	1.23	0.78	0.49	0.31
e	1.17	0.77	0.51	0.34
u	2.30	1.30	0.69	0.38

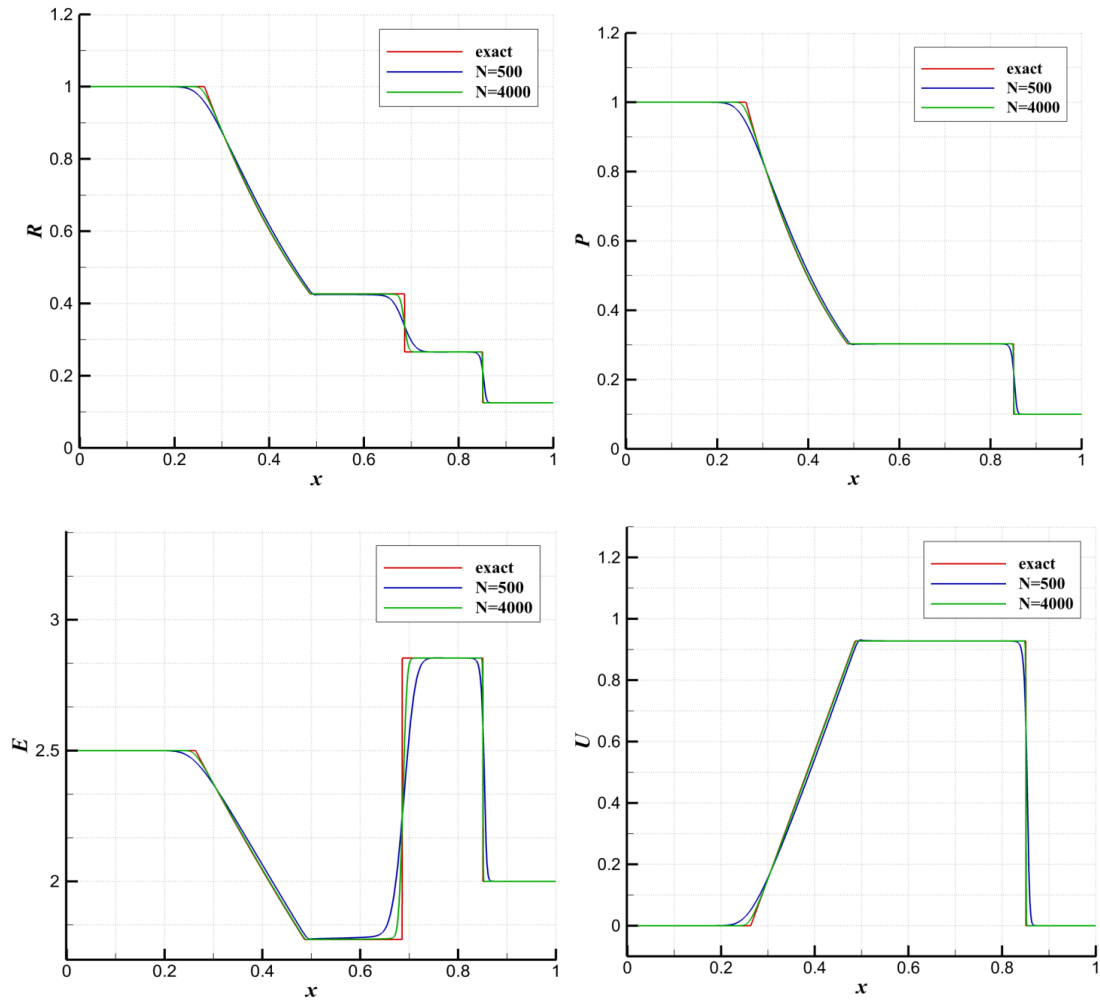


Рис. 4. Задача Сода: эталонное решение и результаты расчетов на момент времени $t = 0.2$ (профили плотности, давления, внутренней энергии и скорости).

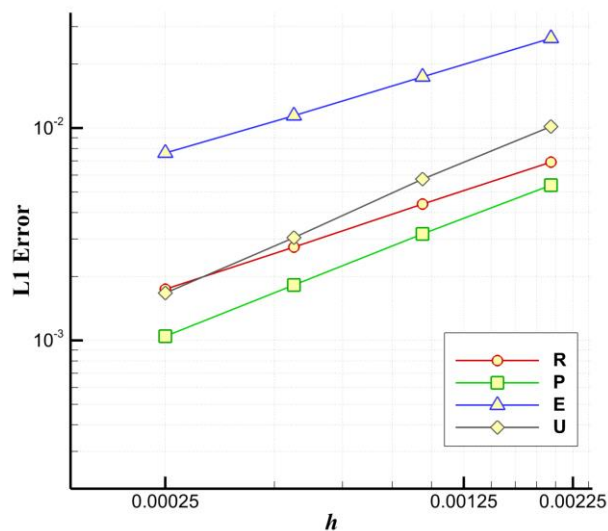


Рис. 5. Задача Сода: график абсолютной L_1 нормы разницы между расчетным и эталонным решением на момент времени $t = 0.2$.

3.2. Модифицированная задача Сода

Рассмотрим далее модифицированную задачу Сода, отличающуюся от предыдущей наличием контактной границы между газами с разными показателями адиабаты. Данная задача описана в работах [10, 13] и ставится следующим образом. В области $0 \leq x \leq 1$ содержатся два идеальных совершенных газа, разделенных в начальный момент времени:

$$(\rho, u, p, \gamma)|_{t=0} = \begin{cases} 1.0, & 0.0, 2.0, 2.0 \text{ при } 0 \leq x \leq 0.5, \\ 0.125, & 0.0, 0.1, 1.4 \text{ при } 0.5 < x \leq 1. \end{cases}$$

Обозначим газ слева от разрыва индексом «I», справа – индексом «II».

На внешних границах области ставится условие твердой стенки. В качестве контрольного момента времени используется величина $t = 0.2$.

В задаче происходит распад разрыва, возникающее течение содержит пять подобластей, положение которых такое же, как и в задаче Сода, см. рис. 3.

В качестве эталонного используется аналитическое решение задачи [14]. Значения p_3 и u_3 (p_2 и u_2) определяются из решения системы

$$\begin{cases} p_3 = p_I [1 - (\gamma_I - 1)u_3 / (2c_I)]^{2\gamma_I / (\gamma_I - 1)}, \\ u_3^2 = \frac{2(p_3 - p_{II})^2}{\rho_{II} [(\gamma_{II} - 1)p_{II} + (\gamma_{II} + 1)p_3]}, \end{cases}$$

где $c_I = \sqrt{\gamma_I p_I / \rho_I}$ – скорость звука в области 0. Остальные величины находятся согласно следующим формулам:

$$\rho_3 = \rho_{II} \frac{(\gamma_{II} - 1)p_{II} + (\gamma_{II} + 1)p_3}{(\gamma_{II} + 1)p_{II} + (\gamma_{II} - 1)p_3}, \quad \rho_2 = \rho_I (p_3 / p_I)^{1/\gamma_I},$$

$$u_1(x, t) = \frac{2}{\gamma_I + 1} \left(c_I - \frac{X_I|_{t=0} - x}{t} \right),$$

$$\rho_1(x, t) = \rho_I \left(1 - \frac{(\gamma_I - 1)u_1(x, t)}{2c_I} \right)^{2/(\gamma_I - 1)},$$

$$p_1(x, t) = p_I \left(1 - \frac{(\gamma_I - 1)u_1(x, t)}{2c_I} \right)^{2\gamma_I / (\gamma_I - 1)},$$

$$e(x,t) = \frac{p(x,t)}{(\gamma-1)\rho(x,t)}, \quad D = (p_3 - p_{II})/(\rho_{II}u_3),$$

$$X_{SW} = X_I|_{t=0} + Dt, \quad X_{RW1} = X_I|_{t=0} - c_I t,$$

$$X_{RW2} = X_I|_{t=0} - [c_I - (\gamma_I + 1)u_3/2]t, \quad X_I = X_I|_{t=0} + u_3 t.$$

Численные расчеты проводились на равномерных сетках, содержащих 500, 1000, 2000 и 4000 ячеек соответственно. На рис. 6 приводятся профили плотности, давления, внутренней энергии и скорости на момент времени $t = 0.2$ для расчетов на самой грубой и самой мелкой сетках в сравнении с эталонным решением. На рис. 7 дополнительно приведен профиль показателя адиабаты. На рис. 8 показаны графики абсолютной L_1 нормы погрешности (разницы между расчетным и эталонным решением) на тот же момент времени. В табл. 3 и табл. 4 дополнительно приведены абсолютная и относительная L_1 нормы погрешности решения.

Таблица 3.

Модифицированная задача Сода: абсолютная L_1 норма разницы между эталонным решением и расчетными данными на момент времени $t = 0.2$.

Δ_{L1}	500	1000	2000	4000	σ
$p \cdot 10^{-2}$	1.3555	0.8000	0.4559	0.2642	0.7863
$\rho \cdot 10^{-3}$	7.8724	4.9130	3.0133	1.9110	0.6808
$e \cdot 10^{-2}$	6.7964	4.6920	3.1518	2.1406	0.5556
$u \cdot 10^{-2}$	1.7293	0.9864	0.5153	0.3001	0.8409

Таблица 4.

Модифицированная задача Сода: относительная L_1 норма разницы между эталонным решением и расчетными данными на момент времени $t = 0.2$.

ε_{L1} [%]	500	1000	2000	4000
p	1.69	1.00	0.57	0.33
ρ	1.40	0.87	0.54	0.34
e	4.01	2.76	1.86	1.26
u	2.18	1.24	0.65	0.38

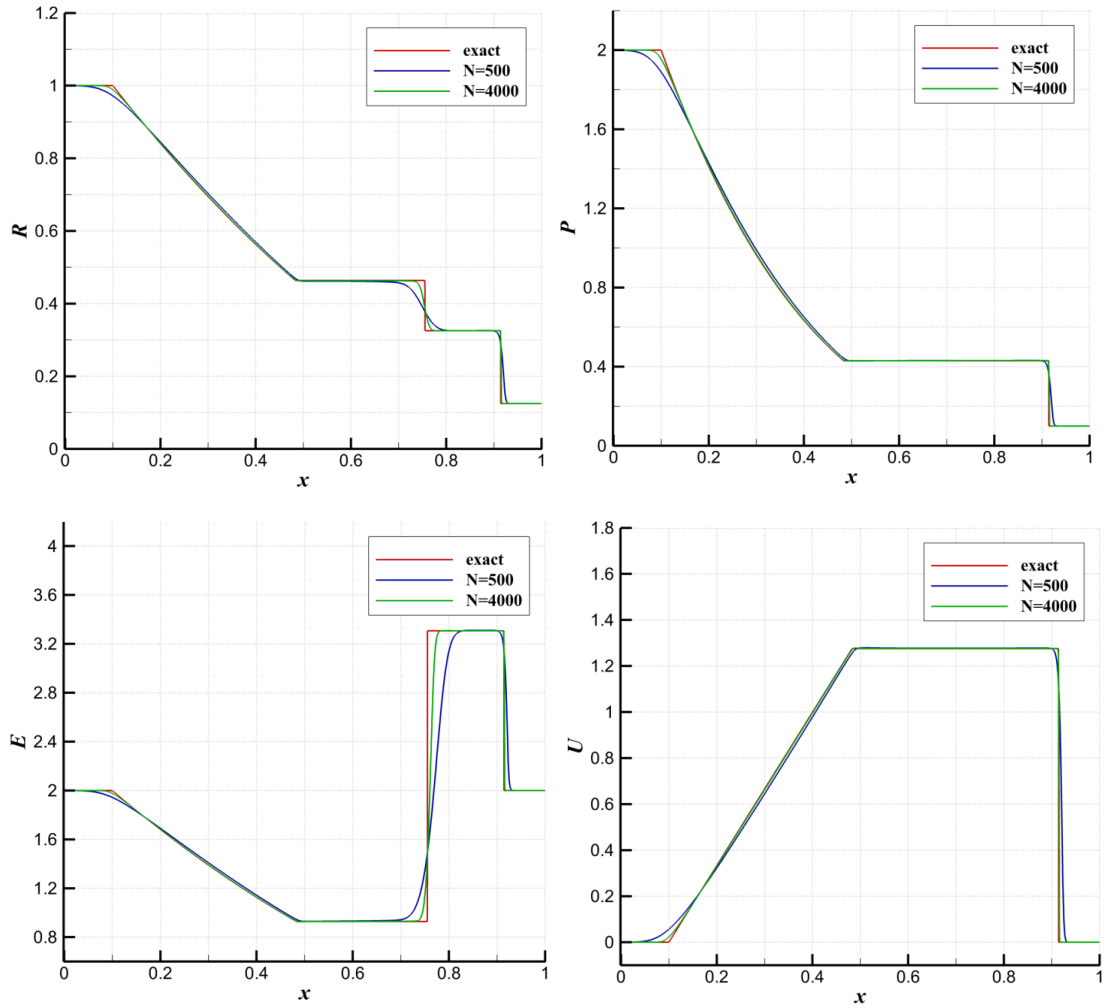


Рис. 6. Модифицированная задача Сода: эталонное решение и результаты расчетов на момент времени $t = 0.2$ (профили плотности, давления, внутренней энергии и скорости).

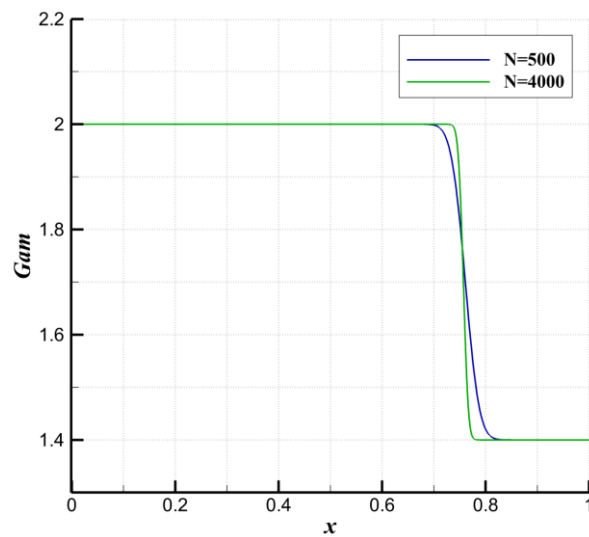


Рис. 7. Модифицированная задача Сода: получившийся в расчетах профиль γ на момент времени $t = 0.2$.

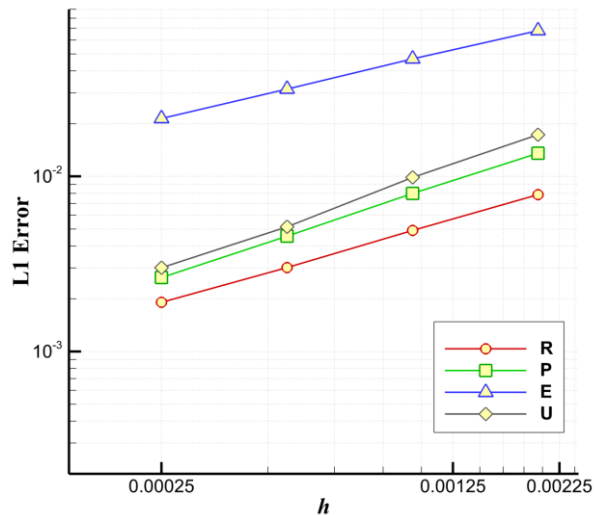


Рис. 8. Модифицированная задача Сода: график абсолютной L_1 нормы разницы между расчетным и эталонным решением на момент времени $t = 0.2$.

3.3. Задача с двумя ударными волнами

В качестве завершающего теста рассмотрим задачу с двумя ударными волнами, представляющую интерес с точки зрения моделирования ударноволновых течений с распадами разрыва на контактных границах. Задача была предложена в работе [15] и в похожем виде представлена в [10].²

Задача ставится следующим образом. В области $-0.37 \leq x \leq 1$ содержатся два идеальных совершенных газа, по одному из которых распространяется стационарная ударная волна. Начальные данные задачи:

$$(\rho, u, p, \gamma)|_{t=0} = \begin{cases} 2.7647, 1.4833, 4.4468, 1.35 & \text{при } -0.37 \leq x \leq 0.1, \\ 1.0, 0.0, 1.0, 1.35 & \text{при } 0.1 < x \leq 0.5, \\ 1.9, 0.0, 1.0, 5.0 & \text{при } 0.5 < x \leq 1. \end{cases}$$

Обозначим газ слева от разрыва индексом «I», справа – индексом «II», при этом начальное состояние для $-0.37 \leq x \leq 0.1$ отметим индексом «I0», для $0.1 < x \leq 0.5$ – индексом «I1».

На левой границе области задается поток импульса, массы и энергии в соответствии с данными ударной волны, правая граница – жесткая стенка. В качестве контрольного момента времени используется величина $t = 0.25$.

Заданная в начальный момент ударная волна достигает контактной границы между газами. В результате распада разрыва образуются две ударных волны, распространяющихся направо и налево от контактной границы между газа-

² Однако за счет округлений разрядов в представлении начальных данных точное значение конечного решения в [10] отличается от данных работы [15].

ми, которая при этом движется направо. Возникающее течение содержит четыре области, схематично изображенные на рис. 9:

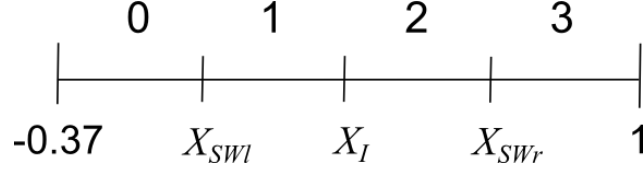


Рис. 9. Области течения при $t = 0.25$.

- область 0: $-0.37 \leq x < X_{SWl}$ – газ I , охваченный начальной ударной волной, с параметрами ρ_I^*, u_I^*, p_I^* ;
- область 1: $X_{SWl} \leq x < X_I$ – газ I за фронтом ударной волны, отраженной от контактной границы и идущей налево, с параметрами ρ_1, u_1, p_1 ;
- область 2: $X_I \leq x < X_{SWr}$ – газ II , поджатый ударной волной, с параметрами ρ_2, u_2, p_2 , при этом $p_2 = p_1, u_2 = u_1$;
- область 3: $X_{SWr} \leq x \leq 1$ – газ II с начальными параметрами $\rho_{II}, u_{II}, p_{II}$,

где X_{SWl} и X_{SWr} – положение фронтов ударных волн, X_I – положение контактного разрыва.

Получение эталонного решения распадается на два этапа [15]. Сначала находится время t_0 , за которое начальная ударная волна достигает контактной границы. Давление за фронтом и скорость распространения ударной волны в области 0 определяются из соответствующих условий на разрыве при $u_I^* = u_{I0}$:

$$\begin{cases} p_I^* = p_{II} + \rho_{II} D^* u_I^*, \\ D^* = \sqrt{\frac{(\gamma + 1)p_I^* + (\gamma - 1)p_{II}}{2\rho_{II}}}. \end{cases}$$

Тогда $t_0 = (X_I|_{t=0} - X_{SW}|_{t=0})/D^*$, где $X_I|_{t=0}$ и $X_{SW}|_{t=0}$ – начальные положения контактной границы и фронта ударной волны соответственно.

Значения p_1 и u_1 (p_2 и u_2) определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} u_1^2 = \frac{2(p_1 - p_{II})^2}{\rho_{II} [(\gamma_{II} - 1)p_{II} + (\gamma_{II} + 1)p_1]}, \\ u_1 = u_I^* - \sqrt{\frac{2(p_1 - p_I^*)^2}{\rho_I^* [(\gamma_I - 1)p_I^* + (\gamma_I + 1)p_1]}}. \end{cases}$$

Остальные параметры течения:

$$\rho_1 = \rho_I^* \frac{(\gamma_{II} - 1)p_I^* + (\gamma_{II} + 1)p_1}{(\gamma_{II} + 1)p_I^* + (\gamma_{II} - 1)p_1}, \quad \rho_2 = \rho_{II} \frac{(\gamma_{II} - 1)p_{II} + (\gamma_{II} + 1)p_1}{(\gamma_{II} + 1)p_{II} + (\gamma_{II} - 1)p_1},$$

$$e(x, t) = \frac{p(x, t)}{(\gamma - 1)\rho(x, t)}, \quad X_I = X_I|_{t=0} + u_1(t - t_0),$$

$$X_{swl} = X_I|_{t=0} + (D_l - u_I^*)(t - t_0), \quad X_{swr} = X_I|_{t=0} + D_r(t - t_0),$$

где D_l и D_r – скорости распространения ударных волн, двигающихся налево и направо соответственно.

Численные расчеты проводились на равномерных сетках, содержащих 500, 1000, 2000 и 4000 ячеек соответственно. На рис. 10 приводятся профили плотности, давления, внутренней энергии и скорости на момент времени $t = 0.25$ для расчетов на самой грубой и самой мелкой сетках в сравнении с эталонным решением. На рис. 11 дополнительно приведен профиль показателя адиабаты. На рис. 12 показаны графики абсолютной L_1 нормы погрешности (разницы между расчетным и эталонным решением) на тот же момент времени. В табл. 5 и табл. 6 дополнительно приведены абсолютная и относительная L_1 нормы погрешности решения.

Таблица 5.

Задача с двумя ударными волнами: абсолютная L_1 норма разницы между эталонным решением и расчетными данными на момент времени $t = 0.25$.

Δ_{L1}	500	1000	2000	4000	σ
$p \cdot 10^{-2}$	2.8795	1.4834	0.8681	0.6478	0.7174
$\rho \cdot 10^{-2}$	1.9971	1.2239	0.7949	0.5376	0.6311
$e \cdot 10^{-2}$	5.4717	4.1388	2.7856	2.0339	0.4759
$u \cdot 10^{-3}$	4.8389	2.5330	1.5262	1.1154	0.7057

Таблица 6.

Задача с двумя ударными волнами: относительная L_1 норма разницы между эталонным решением и расчетными данными на момент времени $t = 0.25$.

ε_{L1} [%]	500	1000	2000	4000
p	0.64	0.33	0.19	0.14
ρ	0.74	0.46	0.30	0.20
e	1.64	1.24	0.84	0.61
u	0.43	0.23	0.14	0.10

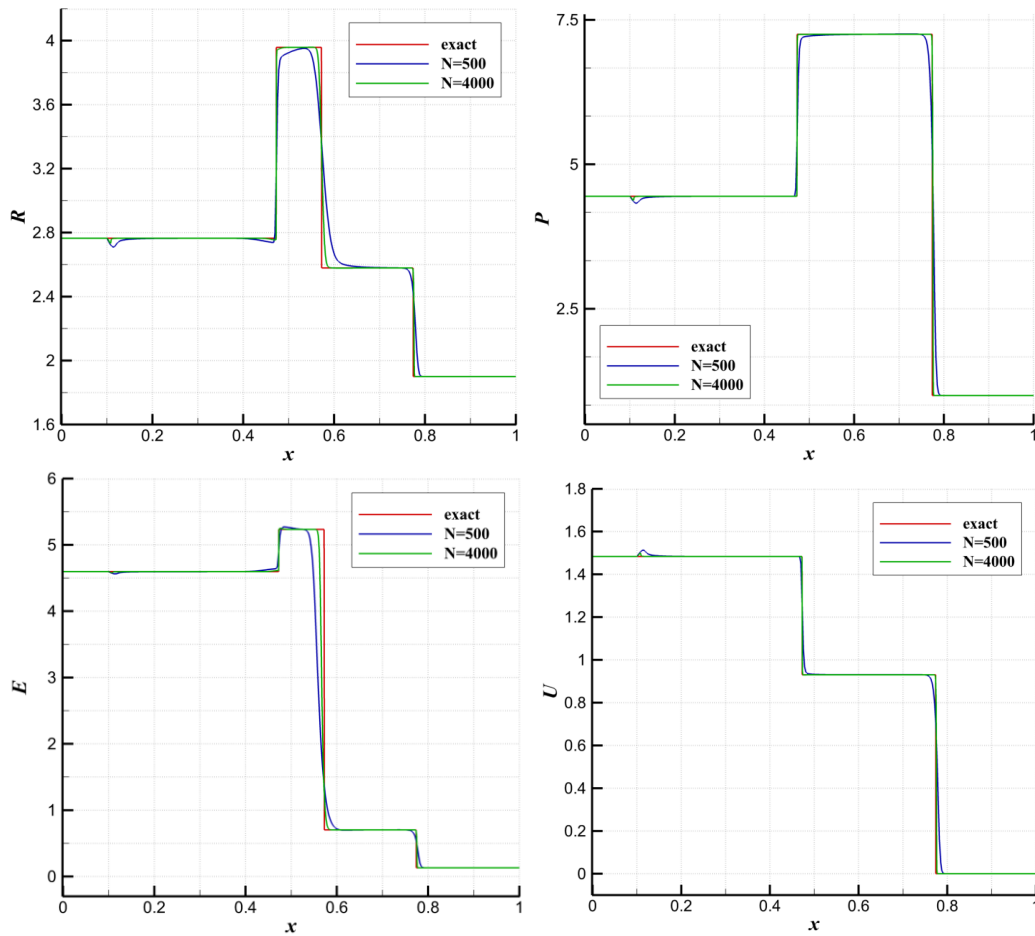


Рис. 10. Задача с двумя ударными волнами: эталонное решение и результаты расчетов на момент времени $t = 0.25$ (профили плотности, давления, внутренней энергии и скорости).

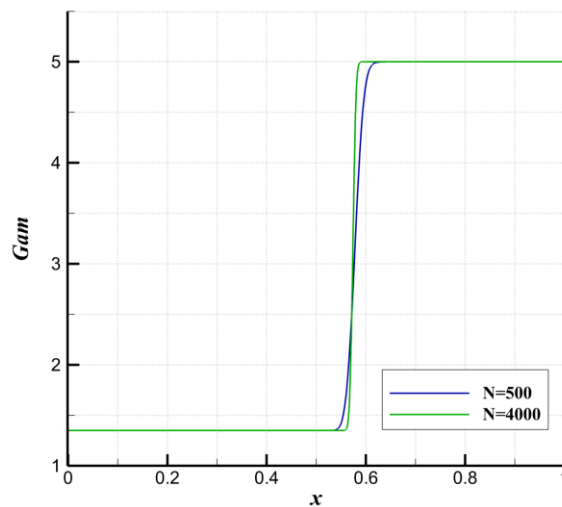


Рис. 11. Задача с двумя ударными волнами: получившийся в расчетах профиль γ на момент времени $t = 0.25$.

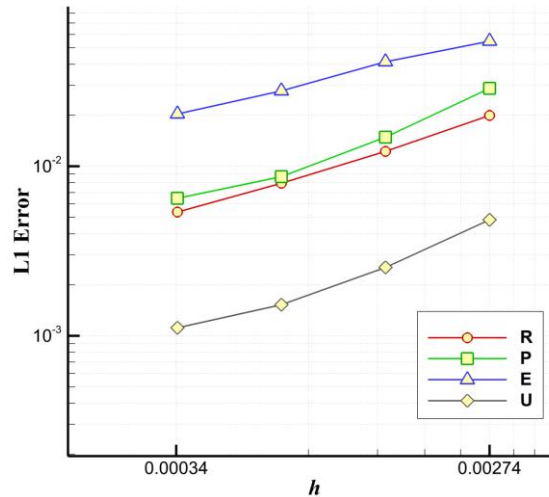


Рис. 12. Задача с двумя ударными волнами: график абсолютной L_1 нормы разницы между расчетным и эталонным решением на момент времени $t = 0.25$.

Заключение

В работе представлена явная схема Годуновского типа для расчета многокомпонентных газодинамических течений, модифицированная для предотвращения осцилляций давления на контактных границах. Используемый «метод двойного потока» показывает достаточно хорошие результаты по точности и сходимости расчетов как на контактных разрывах, так и на сильных ударных волнах. Этот метод вследствие своей простоты и робастности представляется подходящим для реализации в многомерных алгоритмах и дальнейших расчетах высокоскоростных потоков, возникающих в практических задачах полета ГЛА с ПВРД.

Разработку соответствующих алгоритмов и их тестирование в двумерной и трехмерной ситуации предполагается провести в последующих публикациях.

Авторы выражают благодарность В.Т. Жукову, О.Б. Феодоритовой и Е.Б. Савенкову за внимательное отношение к работе и помощь в проведении дополнительных верификационных расчетов.

Список литературы

- [1] Laroutou B., Fezoui L. On the equations of multi-component perfect or real gas inviscid flow. In Nonlinear hyperbolic problems, Lecture Notes in Math., Springer. 2006. Vol. 1402, pp. 69 – 97.
- [2] Жуков В. Т., Забродин А. В., Феодоритова О. Б. Метод решения двумерных уравнений динамики теплопроводного газа в областях сложной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33, № 8, с. 1240–1250; Comput. Math. Math. Phys., 33:8 (1993), 1099–1108.

- [3] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001, 608 с.
- [4] Billet G., Abgrall R. An adaptive shock-capturing algorithm for solving unsteady reactive flows // *Computers & Fluids*. 2003. Vol. 32, No. 10, pp. 1473 – 1495.
- [5] Abgrall R. How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: a quasi conservative approach // RR-2372, INRIA. 1994.
- [6] Saurel R., Abgrall R. A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows // *Journal of Computational Physics*. 1999. Vol. 150, pp. 425 – 467.
- [7] Ma P.C., Lv Yu, Ihme M. An entropy-stable hybrid scheme for simulations of transcritical real-fluid flows // *Journal of Computational Physics*. 2017. Vol. 340, pp. 330 – 357.
- [8] Abgrall R. Generalisation of the ROE scheme for the computation of mixture of perfect gases // *Rech. Aerosp.* 6, 1988.
- [9] Янилкин Ю.В., Бондаренко Ю.А., Гончаров Е.А., Гужова А.Р., Колобянин В.Ю., Софронов В.Н., Стаценко В.П.. Тесты для гидрокодов, моделирующих ударноволновые течения в многокомпонентных средах. Том 1. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2017.
- [10] Годунов С.К. [и др.] Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
- [11] Иванов М.Я., Корецкий В.В., Курочкина Н.Я. Исследование свойств разностных схем сквозного счета повышенного порядка аппроксимации // *Численные методы механики сплошной среды*. 1980. Т.11, № 4, с. 88 – 103 .
- [12] Sod G. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws // *J. Comp. Phys*. 1978. Vol. 27, pp. 1 – 31.
- [13] Barlow A. A new Lagrangian scheme for multimaterial cells, in *Proceedings of European Congress on Computation Methods in Applied Science and Engineering, ECCOMAS computational Fluid Dynamics Conference, Swansea, Wales, U.K.* 2001, pp. 235 – 294.
- [14] Shashkov M.J. Close models for multimaterial cells in arbitrary Lagrangian-Eulerian hydrocodes // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. 2007. Vol. 56, pp. 1497 – 1504.
- [15] Banks J.W., Schwendeman D.W., Kapila A.K., Henshaw W.D. A high-resolution Godunov method for compressible multi-material flow on overlapping grids // *J. Comp. Phys*. 2007. Vol. 223, pp. 262 – 297.