



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 98 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Целоусова А.А., Широбоков М.Г.,
Трофимов С.П.

Сравнение двух прямых
методов оптимизации
межпланетных траекторий

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Целоусова А.А., Широбоков М.Г., Трофимов С.П. Сравнение двух прямых методов оптимизации межпланетных траекторий // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 98. 24 с. doi:[10.20948/prepr-2018-98](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-98)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-98>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А.А. Целоусова, М.Г. Широбоков, С.П. Трофимов

Сравнение двух прямых методов оптимизации
межпланетных траекторий

Москва — 2018

А.А. Целоусова, М.Г. Ширококов, С.П. Трофимов

Сравнение двух прямых методов оптимизации межпланетных траекторий

Настоящая работа посвящена реализации и сравнению двух прямых методов оптимизации траекторий перелета с малой тягой. Для этого ставится модельная задача межпланетного перелета с малой тягой от Земли к Марсу. Методы сравниваются с точки зрения времени работы, количества итераций и размеров областей сходимости. Расчеты выполнены на персональном компьютере в среде MATLAB, а также на многопроцессорной вычислительной системе.

Ключевые слова: проектирование траекторий, малая тяга, прямой метод оптимизации, метод пристрелки, задача оптимального управления, вычислительный кластер К-60

Anastasiia Tselousova, Maksim Shirobokov, Sergey Trofimov

Comparison of two direct interplanetary trajectory optimization techniques

In this work, two direct methods of low-thrust trajectory optimization are implemented and compared. The first method is based on optimization of the thrust acceleration, whereas the second method optimizes the impulses that approximate the thrust arcs. The methods are applied to the sample problem of a transfer from the Earth to Mars. The results are obtained on a personal computer in MATLAB and on a multiprocessing computing system.

Key words: trajectory design, low thrust, direct optimization method, shooting method, optimal control, cluster K-60

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 17-71-10242.

Введение

В настоящее время наряду с химическими двигателями большой тяги широко распространены также двигатели малой тяги. Они представлены сейчас в основном электроракетными двигательными установками (ЭРДУ), которые используются преимущественно для поддержания орбитального движения спутников связи и довыведения космических аппаратов (КА) с промежуточной орбиты на геостационарную орбиту. Обзор двигателей малой тяги можно найти в монографии [1]. Благодаря высокому удельному импульсу двигатели малой тяги расходуют меньше топлива, что позволяет увеличить массу выводимой полезной нагрузки, пусть и за счет увеличения продолжительности маневров. Это делает двигатели малой тяги привлекательным средством доставки КА к целям в дальнем космосе.

Проектирование оптимальных траекторий перелета с малой тягой выполняется с помощью численных методов оптимизации. Методы решения задач оптимального управления можно условно разделить на прямые, непрямые и гибридные методы. Непрямые методы основаны на методах вариационного исчисления, принципе максимума Понтрягина или принципе Беллмана [2, 3]. Решение, полученное непрямым методом, удовлетворяет необходимым условиям оптимальности в классе кусочно-непрерывных ограниченных функций. В типичных задачах оптимизации времени перелета или затрат топлива удается получить явное выражение для вектора оптимального управления как функции сопряженных переменных. Наиболее существенным недостатком непрямых методов можно назвать высокую чувствительность поведения итерационной процедуры расчета сопряженных переменных к их начальному приближению. Тем не менее, для специальных случаев разработаны надежные методы проектирования траекторий с любым количеством витков [4–6].

В прямых методах задача оптимального управления сводится к задаче нелинейного программирования. Хорошо известно, что для сходимости возникающих при этом итерационных процедур удается сравнительно легко подобрать начальное приближение. Решение, полученное прямым методом, удовлетворяет необходимым условиям оптимальности в более узком классе функций. Тем не менее, оно может оказаться близким к оптимальному решению в классе кусочно-непрерывных ограниченных функций. Кроме того, параметры управления, выбираемые в прямых методах, легко интерпретируются. Это позволяет упростить реализацию модели возмущенного движения и применять прямые методы к более сложным динамическим системам. На практике управление можно строить в два этапа: сначала прямым методом получить начальное приближение функции оптимального управления, а затем уточнить его непрямыми методами. Поэтому на предварительном этапе проектирования траекторий перелета важно уметь получать решение пря-

мым методом как можно быстрее и точнее.

На данный момент существует множество прямых методов оптимизации траекторий перелета с малой тягой [7–11]. Общим для этих методов является то, что искомая функция управления дискретизируется, т.е. определяется с помощью конечного числа переменных. Эффективность решения получаемой задачи нелинейного программирования определяется тремя аспектами: выбором численного метода оптимизации, количеством неизвестных переменных и способом дискретизации.

Данная работа направлена на изучение двух методов с различными способами дискретизации функции управления. В рамках одного метода функция управления задается как кусочно-постоянная ограниченная функция с фиксированными моментами переключения. В этом случае траектория разбивается на несколько участков, на каждом из которых оптимизации подвергаются векторы ускорения тяги¹ [7]. При этом на каждом участке траектории необходимо решать задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей движение КА в центральном ньютоновском поле с постоянным вектором тяги. Эта задача называется задачей Штарка [13] и может быть решена как с помощью численного интегрирования, так и аналитически. Основными современными и эффективными аналитическими методами решения задачи Штарка являются методы, разработанные Г. Лантуаном [14], Ф. Бискани [15] и Э. Пеллегрини [16]. Согласно исследованиям, проведенным Р. Расселом [17], использование аналитических методов помогает повысить быстродействие и точность вычислений. Метод Пеллегрини оказался наиболее эффективным по быстродействию и самым простым в реализации среди трех вышеперечисленных. В данной работе решение задачи Штарка производится численным интегрированием и с помощью метода Пеллегрини.

В рамках другого метода решения оптимизационной задачи используется импульсное приближение функции управления [11]. При этом перелет представляет собой дуги эллипсов, сопряженные в узлах импульсов. Моменты времени осуществления импульсов фиксированы, оптимизируются величины и направления импульсов. Таким образом, можно воспользоваться моделью задачи двух тел, найти оптимальное импульсное управление, а затем произвести обратный переход от импульсов к протяженным активным участкам [18]. Вопрос такого перехода в данной работе не обсуждается. Среди других прямых методов оптимизации отметим метод интерполяции искомого оптимального управления полиномами Эрмита или Лагранжа с оптимизируемыми коэффициентами [8–10]. Этот метод в данной работе не рассматривается.

¹Эффективность воздействия тяги на движение космического аппарата характеризуется реактивным ускорением, или ускорением тяги, т. е. тем ускорением, которое получил бы космический аппарат, если бы никакие другие силы, кроме силы тяги, на него не действовали [12].

Два упомянутых выше метода на примере модельной задачи межпланетного перелета от Земли к Марсу сравниваются с точки зрения времени работы, количества итераций и размера области сходимости.

В разделе 1 формулируется постановка задачи, разделы 2 и 3 посвящены описанию методов, основанных на поиске оптимального управления ускорением тяги и импульсного управления соответственно. В разделе 4 приводятся результаты расчетов оптимальных траекторий. Раздел 5 посвящен сравнительному анализу рассматриваемых методов. В разделе 6 зависимости затрат топлива от времени перелета исследуются с использованием вычислительного кластера К-60 Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН [19]. В заключении перечисляются полученные выводы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу межпланетного перелета от Земли к Марсу в рамках следующих предположений:

- На движение КА влияет только центральное гравитационное поле Солнца.
- Вектор гелиоцентрической скорости отлета равен вектору гелиоцентрической скорости Земли, вектор гелиоцентрической скорости прилета равен вектору гелиоцентрической скорости Марса, для расчета положений и скоростей планет и Солнца используются эфемериды DE-423 [20].
- КА оснащен двигателем малой тяги (СПД100-В с максимальной силой тяги 83 мН и удельным импульсом 1600 с), величина ускорения тяги ограничена постоянной, скорость истечения топлива постоянна.
- Масса КА — 300 кг.

В рамках выдвинутых предположений требуется определить оптимальные по затратам топлива траектории перелета при различных датах старта и временах полета и сравнить методы с точки зрения времени работы, количества итераций и размера области сходимости.

В данной работе предполагается, что относительное изменение массы в полете невелико. Поэтому, для упрощения в оптимизационной процедуре функций ограничений и их производных, ускорение тяги считается ограниченным постоянной величиной. При адаптации траектории к движению с моделью двигателя, приближенной к реальной, это предположение следует снять. Управление, найденное с постоянным ограничением на ускорение, может служить первым приближением к реальному управлению.

2. Управление ускорением тяги

Выберем инерциальную декартову систему координат $Oxyz$, в начале которой находится центр масс Солнца. Пусть $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ — фазовый вектор Земли в момент старта КА, $\mathbf{X}_f = (\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f)$ — фазовый вектор Марса в момент прилета, T — время перелета, w_{max} — максимальное значение величины ускорения тяги. Разобьем траекторию перелета на N участков равномерно по времени, тогда $\Delta t = T/N$ — время перелета на каждом участке. Обозначим вектором \mathbf{w}_i ускорение тяги на i -ом участке, $i = 1, 2, \dots, N$. Уравнения движения КА на каждом из участков траектории записываются в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{w}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где $\mu = 1.32712440041 \cdot 10^{12}$ км³/с² — гравитационный параметр Солнца [21], $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор КА, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Ускорение тяги \mathbf{w}_i на каждом участке траектории принимается постоянным по величине и направлению вектором, ограниченным константой w_{max} . Уравнения (1) являются уравнениями движения в задаче Штарка. Сведем поставленную задачу поиска оптимальных траекторий перелета к задаче нелинейного программирования. Для этого можно воспользоваться численными методами простой или параллельной пристрелки.

2.1. Метод простой пристрелки

В данном методе уравнения движения (1) последовательно интегрируются на каждом из участков траектории. В начальный момент времени фазовый вектор КА совпадает с фазовым вектором Земли \mathbf{X}_0 . Распространим траекторию КА с ускорением \mathbf{w}_1 из этой точки на интервале $[0, \Delta t]$. Получим новый фазовый вектор \mathbf{X}_2 . Затем распространим траекторию КА из точки \mathbf{X}_2 с ускорением \mathbf{w}_2 на следующем интервале длины Δt до точки \mathbf{X}_3 . Повторим эту процедуру для каждого участка траектории. В результате получим фазовый вектор \mathbf{X}_N . Так как целью является перелет к Марсу, введем следующие ограничения типа равенства:

$$\mathbf{X}_N - \mathbf{X}_f = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Ускорение тяги на каждом участке траектории ограничено величиной w_{max} , поэтому введем дополнительно ограничения типа неравенства:

$$|\mathbf{w}_i| \leq w_{max}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Теперь перейдем к постановке задачи оптимизации. Масса израсходованного топлива Δm , согласно формуле Циолковского, равна

$$\Delta m = m_0 \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta v}{I_{sp} g} \right) \right), \quad \Delta v = \sum_{i=1}^N |\mathbf{w}_i| \Delta t, \quad (4)$$

где m_0 — масса КА в начальный момент времени, Δv — затраты характеристической скорости, I_{sp} — удельный импульс двигателя, $g = 9.80665$ м/с². Отсюда следует, что задача оптимизации по затратам топлива в приведенной постановке эквивалентна задаче оптимизации затрат характеристической скорости, то есть минимизации функции:

$$J_1 = \sum_{i=1}^N |\mathbf{w}_i| \Delta t. \quad (5)$$

Таким образом, поставленная задача является задачей нелинейного программирования с целевой функцией (5), ограничениями типа неравенства (3) и ограничениями типа равенства (2):

$$\begin{cases} J_1 = \sum_{i=1}^N |\mathbf{w}_i| \Delta t \rightarrow \min, \\ |\mathbf{w}_i| \leq w_{max}, i = 1, 2, \dots, N, \\ \mathbf{X}_N - \mathbf{X}_f = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (6)$$

Переменными здесь являются векторы ускорения тяги \mathbf{w}_i на каждом участке траектории, поэтому всего имеем $3N$ переменных и $N + 6$ ограничений. Траекторию, полученную в результате решения задачи (6), будем называть J_1 -оптимальной. Схема метода изображена на рис. 1. Здесь и далее на рис. 2 и рис. 3 траектория КА обозначена розовым цветом, оптимизируемые переменные выделены зеленым цветом, черной рамкой выделены узлы траектории, в которых накладываются ограничения типа равенства.

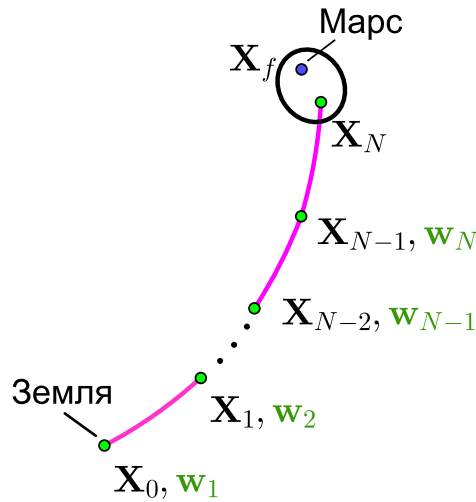


Рис. 1. Схема метода простой пристрелки в задаче оптимизации ускорения тяги

2.2. Метод параллельной пристрелки

Переменными в данном случае являются не только векторы ускорения тяги \mathbf{w}_i , но также фазовые векторы КА в узлах разбиения траектории. Обозначим их через $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N$. Уравнения движения (1), таким образом, интегрируются независимо друг от друга на каждом из участков траектории с началом в точках \mathbf{X}_i на интервале времени длины Δt (рис. 2). Обозначим фазовые векторы КА в конце каждого участка интегрирования $\mathbf{X}_1^+, \dots, \mathbf{X}_N^+$. Чтобы получить гладкую в координатном пространстве траекторию перелета, введем следующие ограничения типа равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{X}_i^+ - \mathbf{X}_{i+1} &= \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \mathbf{X}_N^+ - \mathbf{X}_f &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как величина ускорения тяги ограничена на каждом участке траектории, то имеем ограничения типа неравенства:

$$|\mathbf{w}_i| \leq w_{max}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Согласно формуле Циолковского (4), задача оптимизации по затратам топлива в приведенной постановке эквивалентна задаче оптимизации затрат характеристической скорости, то есть минимизации следующей функции

$$J_1 = \sum_{i=1}^N |\mathbf{w}_i| \Delta t. \quad (8)$$

В результате получаем задачу нелинейного программирования:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1 = \sum_{i=1}^N |\mathbf{w}_i| \Delta t \longrightarrow \min, \\ |\mathbf{w}_i| \leq w_{max}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{X}_i^+ - \mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \mathbf{X}_N^+ - \mathbf{X}_f = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Здесь $9N$ переменных и $N + 6(N + 1)$ ограничений. Траекторию, полученную в ходе решения задачи (9), будем называть J_1^* -оптимальной, символ $*$ в верхнем индексе означает, что траектория получена методом параллельной пристрелки.

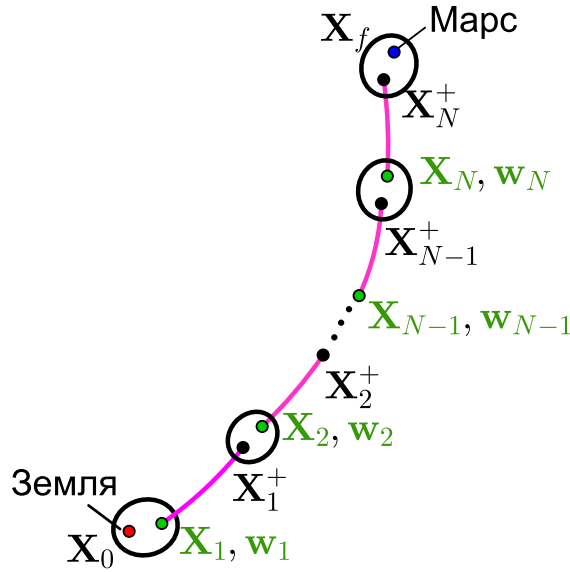


Рис. 2. Схема метода параллельной пристрелки в задаче оптимизации ускорения тяги

3. Импульсное управление

Идея импульсного управления принципиально отличается от методов, рассмотренных выше. В качестве управления выбирается импульс скорости (вектор ее скачкообразного изменения) в начале каждого участка траектории перелета (рис. 3). Пусть выбрана инерциальная декартова система координат $Oxyz$, в начале которой находится центр масс Солнца. Пусть $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ — фазовый вектор Земли в момент старта КА, $\mathbf{X}_f = (\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f)$ — фазовый вектор Марса в момент прилета, T — время перелета, w_{max} — максимальное значение величины ускорения тяги. Разобьем траекторию перелета на N участков равномерно по времени, тогда $\Delta t = T/N$ — время перелета на каждом участке. Пусть $\Delta \mathbf{v}_i$ — импульс в i -ом узле, $i = 1, 2, \dots, N$, $\Delta v_{max} = w_{max} \Delta t$ — его максимальная величина. При этом уравнения движения КА после подачи импульса на каждом участке траектории имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}. \quad (10)$$

Уравнения (10) являются уравнениями движения в задаче двух тел. Чтобы свести задачу поиска оптимальных траекторий к задаче нелинейного программирования, воспользуемся методом параллельной пристрелки.

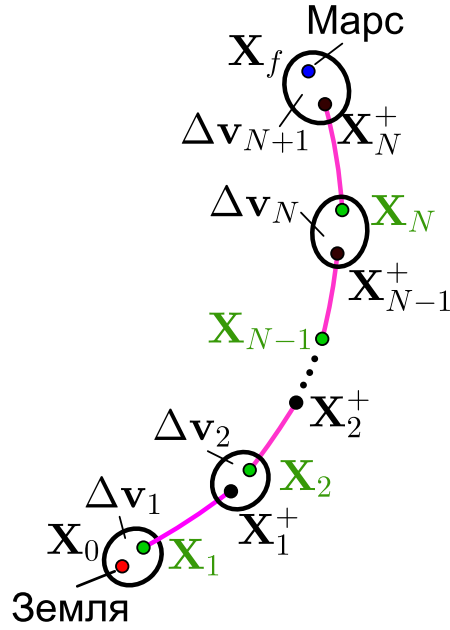


Рис. 3. Схема метода параллельной пристрелки в задаче оптимизации импульсного управления

Переменными будут являться фазовые векторы КА в узлах разбиения траектории перелета, обозначим их $\mathbf{X}_i = (\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Проинтегрируем уравнения движения (10) независимо на каждом участке траектории с началом в точках \mathbf{X}_i за время Δt и введем следующие ограничения типа равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}_i^+ - \mathbf{r}_{i+1} &= \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \mathbf{r}_N^+ - \mathbf{r}_f &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\mathbf{X}_i^+ = (\mathbf{r}_i^+, \mathbf{v}_i^+)$ — фазовые векторы КА в конце каждого участка траектории, $i = 1, 2, \dots, N$.

Импульсы $\Delta \mathbf{v}_i$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \\ \Delta \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i-1}^+, \quad i = 2, 3, \dots, N, \\ \Delta \mathbf{v}_{N+1} &= \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_N^+. \end{aligned}$$

Так как максимальное значение величины импульса скорости ограничено, имеем следующие ограничения типа неравенства:

$$|\Delta \mathbf{v}_i| \leq \Delta v_{max}, \quad i = 1, 2, \dots, N+1. \quad (12)$$

Задача оптимизации траектории перелета по затратам топлива в приведенной постановке эквивалентна минимизации затрат характеристической скорости, то есть функции:

$$J_2 = \sum_{i=1}^N |\Delta \mathbf{v}_i|. \quad (13)$$

В результате получаем задачу нелинейного программирования:

$$\begin{cases} J_2 = \sum_{i=1}^N |\Delta \mathbf{v}_i| \longrightarrow \min, \\ |\Delta \mathbf{v}_i| \leq \Delta v_{max}, \quad i = 1, 2, \dots, N + 1, \\ \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}_i^+ - \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \\ \mathbf{r}_N^+ - \mathbf{r}_f = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь $6N$ переменных и $(N + 1) + 3(N + 1)$ ограничений. Траекторию, полученную в ходе решения задачи (14), будем называть J_2^* -оптимальной.

4. Результаты расчетов

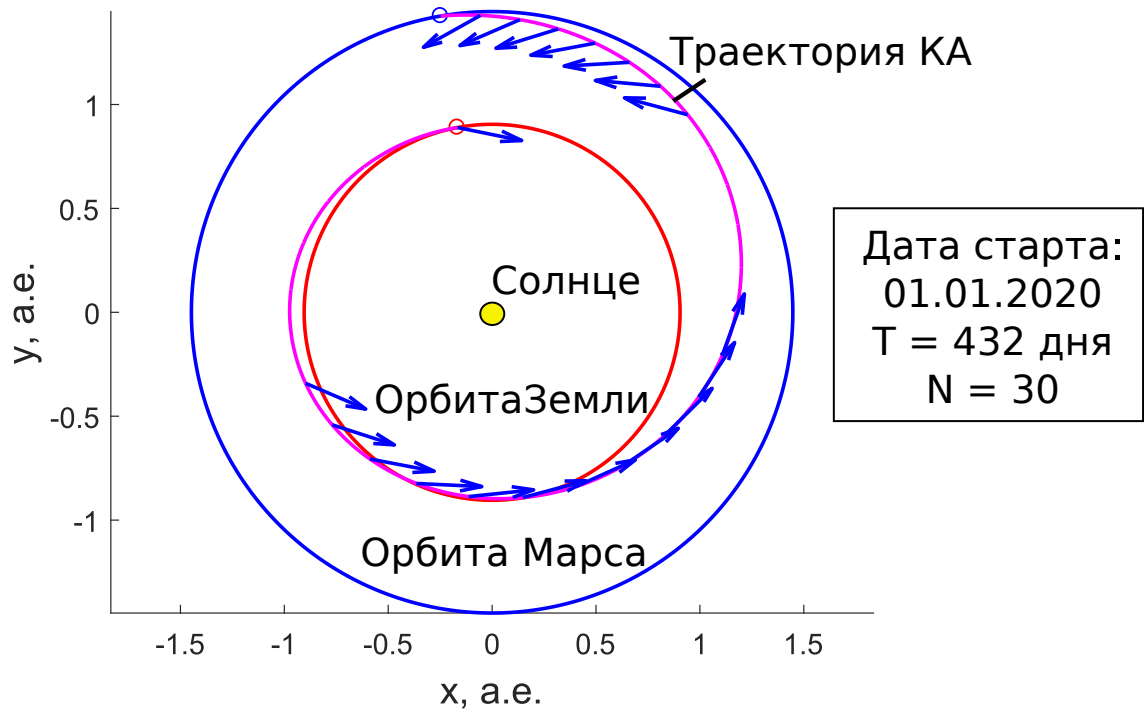
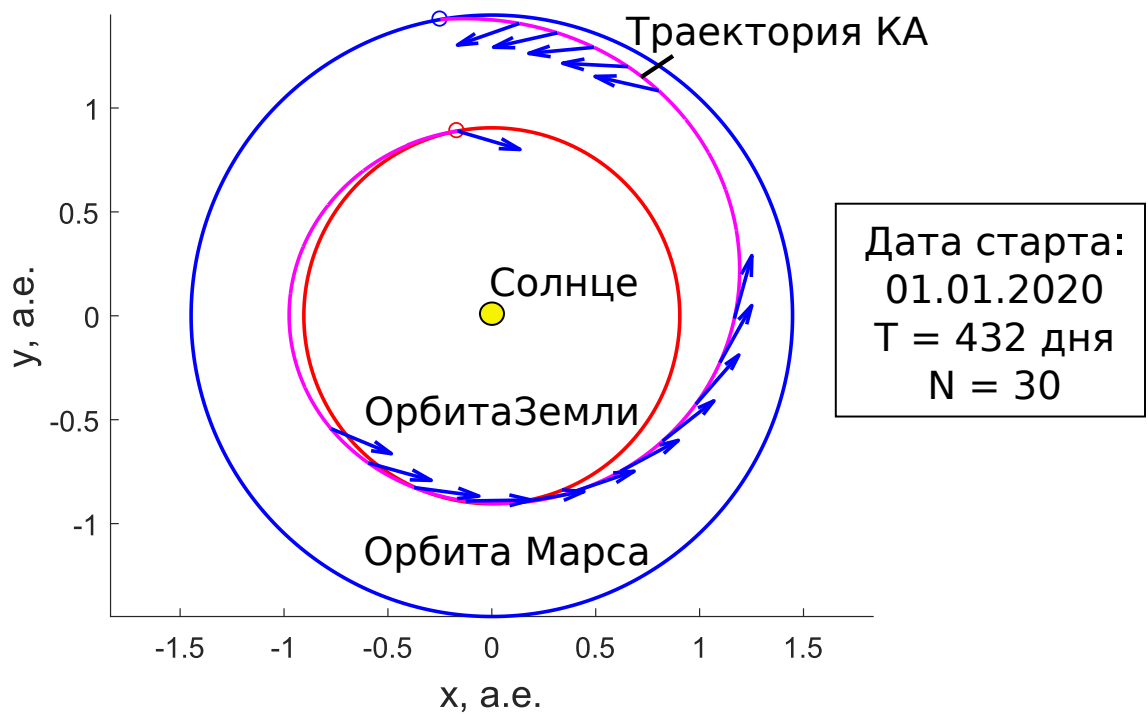
Для решения поставленной задачи поиска оптимальных траекторий перелета можно воспользоваться любым из методов, описанных в разделах 2 и 3. При этом задача поиска оптимального управления сводится к решению соответствующей задачи нелинейного программирования (6), (9) или (14), каждую из которых можно решать различными численными методами. В настоящей работе оптимизация выполняется методом последовательного квадратичного программирования (sequential quadratic programming, SQP) [22]. Метод SQP имеет множество реализаций, в том числе на языке MATLAB в рамках интерфейса функции `fmincon` из библиотеки Optimization Toolbox, а также на языке Fortran в рамках интерфейса пакета SNOPT [23]. В этом и последующем разделах результаты были получены с использованием функции `fmincon`. Расчеты на МВС, описанные в разделе 6, проводились с использованием программы SNOPT.

В процессе оптимизации необходимо интегрировать уравнения движения КА на каждом из участков траектории. Как в случае импульсного управления, так и в случае управления ускорением тяги, уравнения движения интегрируются численно методом Рунге-Кутты 8-го порядка с постоянным шагом. Отметим, что в случае управления ускорением тяги возникающие задачи Коши можно решать и полуаналитическими методами, наиболее эффективным с точки зрения быстродействия и простым в реализации из которых,

как показали исследования Р. Рассела [17], оказался метод Пеллегрини [16]. В разделе 6 приводятся некоторые результаты расчетов этим методом.

Начальные приближения для ускорения тяги и импульса скорости на каждом участке траектории строились следующим образом: направление выбиралось перпендикулярно радиус-вектору КА в узлах разбиения траектории, величина выбиралась как максимальное значение ускорения тяги или импульса соответственно. Для получения начального приближения фазовых векторов КА в узлах разбиения траектории достаточно последовательно на каждом участке проинтегрировать уравнения движения с полученными начальными приближениями для ускорения тяги или импульса скорости соответственно. Как показывают расчеты, такой простой подход к выбору начального приближения обеспечивает широкую область сходимости. Стоит отметить, что эффективной в этом смысле также является техника продолжения по параметру: если каким-либо образом удалось получить решение для текущих дат старта и прилета, то это же решение можно использовать в качестве начального приближения для близких дат старта и прилета.

На рис. 4 и 5 представлены оптимальные траектории перелета в проекции на плоскость Oxy Международной небесной системы координат (International Celestial Reference System, ICRS) с центром в центре масс Солнца для даты старта 1 января 2020 года, временем перелета 432 дня и 30 участками разбиения траектории. Стрелками обозначено направление импульса скорости на тех участках, где он ненулевой. Методы простой и параллельной пристрелки в случае управления вектором ускорения тяги сошлись к одному и тому же решению. Затраты характеристической скорости Δv составили 6.701 км/с для оптимального управления ускорением тяги и 6.372 км/с для оптимального импульсного управления. Соответствующие относительные затраты топлива составили 34% и 33.3%. Изобразим для наглядности полученные траектории на одном рисунке (рис. 6). Кружками обозначим узлы разбиения траектории. Можно сделать вывод, что траектории, полученные методами, где оптимизируется ускорение тяги, практически совпадают (зеленая и розовая кривые), а траектория с импульсным управлением отличается от них незначительно (черная кривая). Расчеты показали, что это характерно и для других дат старта и времен перелета.

Рис. 4. J_1/J_1^* -оптимальная траектория перелетаРис. 5. J_2^* -оптимальная траектория перелета

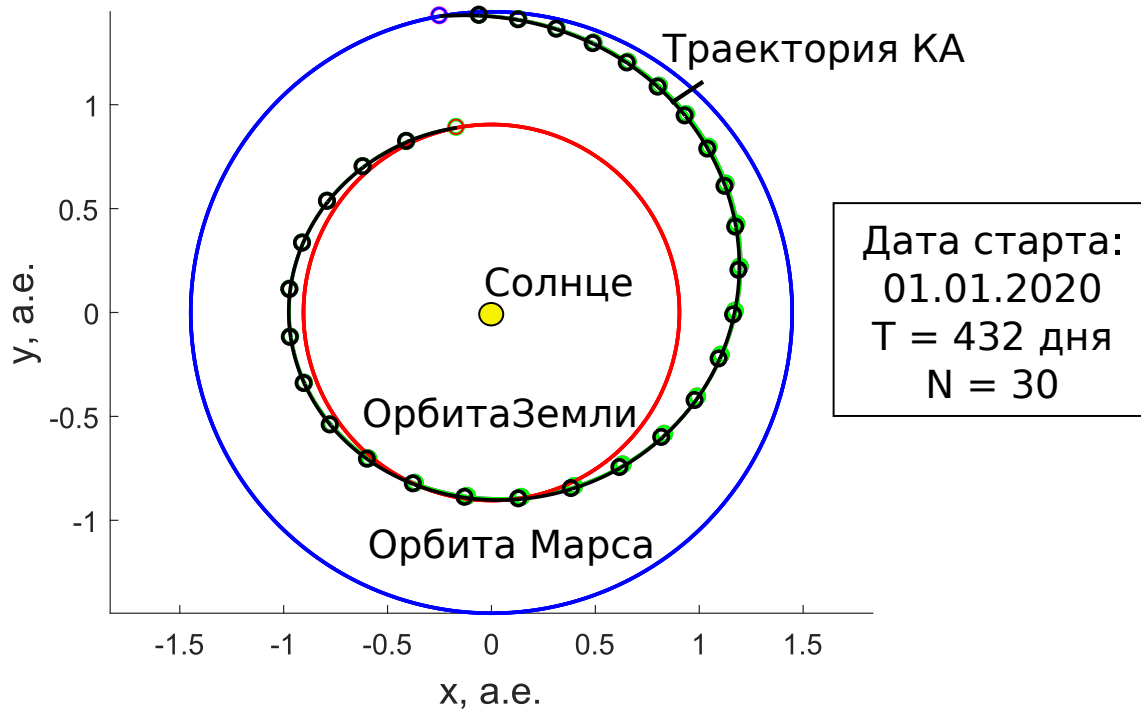


Рис. 6. Оптимальные траектории перелета, полученные различными методами

Рассмотрим также вопрос поведения функции управления. В случае импульсного управления это отдельные импульсы в начале каждого участка траектории (рис. 7). При управлении ускорением тяги имеем кусочно-постоянную функцию (рис. 8). Из рис. 7 и 8 видно, что для оптимальных решений ускорение тяги и импульс скорости максимальны на стартовом участке, далее управление выключено в течение 75 дней, затем ускорение тяги и импульс скорости достигают снова своей максимальной величины на протяжении 180 дней, далее следует 100 дней с нулевым управлением, затем еще 100 дней с максимальным управлением. Отметим, что такой релейный закон управления (bang-bang control) является характерным для разных дат старта и времен перелета и разного количества участков разбиения. Более того, релейное управление удовлетворяет необходимым условиям оптимальности принципа максимума Понтрягина в классе кусочно-непрерывных ограниченных функций управления. Решение, полученное прямыми методами, тоже оказывается близким к релейному.

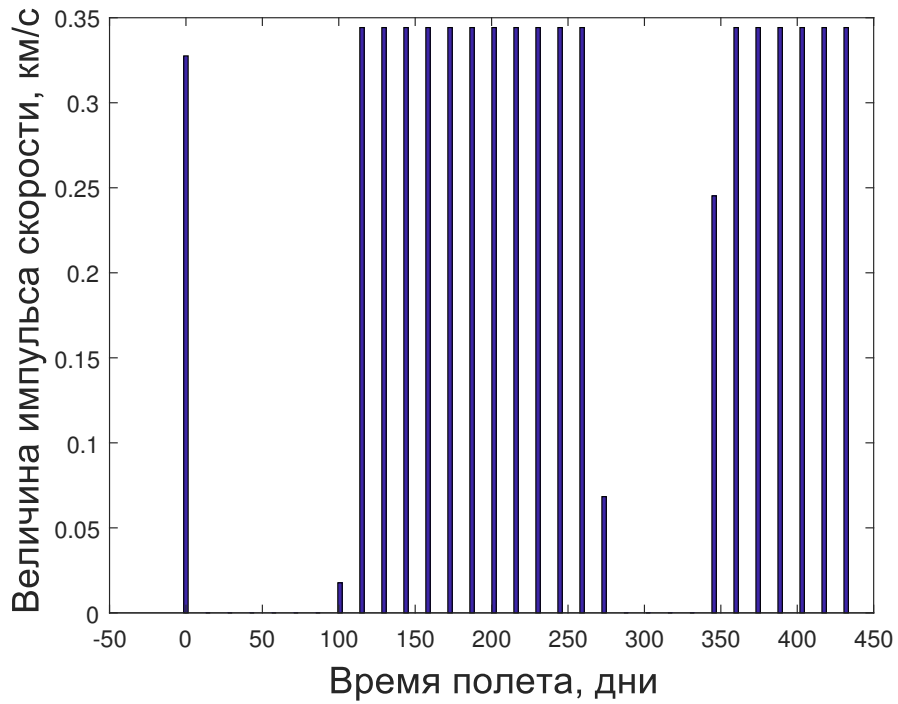


Рис. 7. Величина импульса скорости на оптимальной траектории с датой старта 01.01.2020 и временем перелета $T = 432$ дня ($N = 30$)

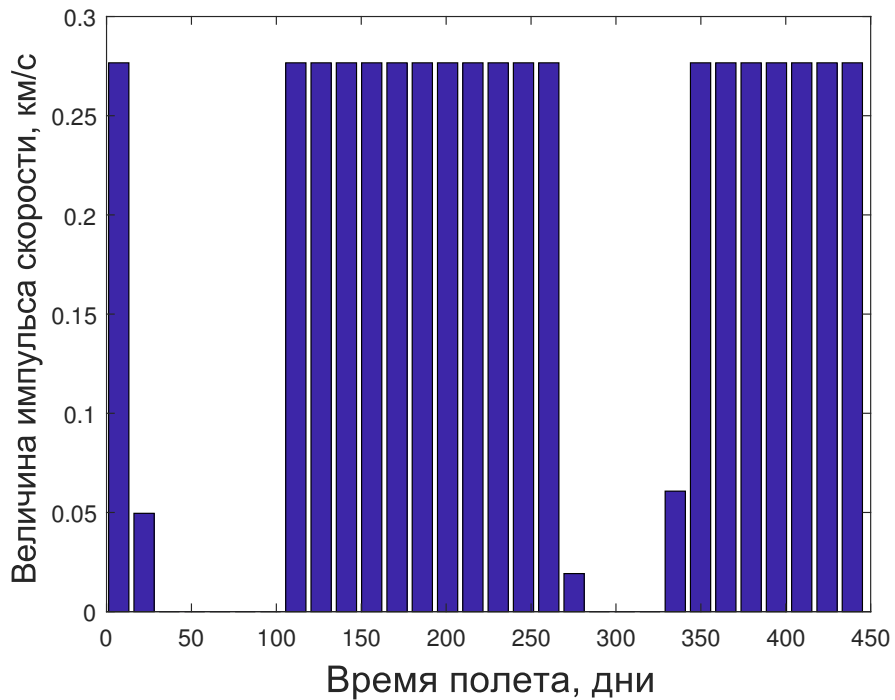


Рис. 8. Профиль ускорения тяги на оптимальной траектории с датой старта 01.01.2020 и временем перелета $T = 432$ дня ($N = 30$)

5. Сравнительная характеристика методов

Перейдем теперь к сравнительной характеристике рассмотренных методов. При решении поставленной задачи каждым методом траектория перелета разбивалась на 5 участков. Время полета варьировалось от 432 до 711 дней для даты старта 01.01.2020 (280 задач). Результаты исследования работы методов собраны в табл. 1. Для первого метода, использующего простую пристрелку, не удалось реализовать процедуру выбора начального приближения так, чтобы обеспечить широкую область сходимости. При заданных начальных данных он показал худший результат. Второй метод сошелся в 93 процентах случаев (проблемы со сходимостью возникали при больших временах перелета), а третий метод сошелся при всех начальных данных и оказался в этом смысле самым надежным. Однако он уступает в эффективности по количеству итераций первым двум методам. Количество итераций рассчитывалось только при тех начальных данных, для которых оптимальные траектории перелета удалось получить всеми методами.

Для оценки времени работы методов программы запускались на вычислительной системе со следующими характеристиками: операционная система Windows 7, процессор Intel®Core™ i3–2377M, частота 1.5 ГГц, оперативная память 4.0 ГБ. Каждый раз методы запускались на одном и том же наборе начальных данных, при котором каждый из них сошелся. Для каждого метода определялось среднее время, понадобившееся для решения соответствующей задачи нелинейного программирования, и разброс его значений. Полученные величины отражены в табл. 2. Наиболее быстрым оказался метод, использующий простую пристрелку. Метод, использующий параллельную пристрелку для поиска оптимального управления ускорением тяги, как и ожидалось, показал большее время работы, так как сводится к решению более сложной задачи нелинейного программирования. При поиске же оптимального импульсного управления методом параллельной пристрелки результат получился сопоставимым с результатом для первого метода.

Можно сделать вывод, что метод, основанный на поиске импульсного управления, хоть и является неэффективным с точки зрения количества итераций, но наиболее надежен в плане сходимости и эффективен по быстродействию. Поэтому он может быть более предпочтительным при проектировании оптимальных межпланетных траекторий перелета на этапе предварительного анализа миссии. Он, однако, дополнительно требует последующей трансформации импульсов в протяженные активные участки, что может вызвать дополнительные временные затраты.

	Сходимость (количество раз, когда метод сошелся)	Эффективность (количество итераций)
Управление ускорением тяги, пристрелка	✗ 239/280 (86%)	✓ Высокая (41 итерация)
Управление ускорением тяги, параллельная пристрелка	✗ 259/280 (93%)	✓ Высокая (55 итераций)
Импульсное управление, параллельная пристрелка	✓ 280/280 (100%)	✓ Средняя (97 итераций)

Таблица 1. Сравнительная характеристика методов по сходимости и эффективности (в смысле количества итераций)

Управление ускорением тяги, пристрелка	✓ 4.6217 ± 2.1534 с
Управление ускорением тяги, параллельная пристрелка	✗ 65.8191 ± 6.2296 с
Импульсное управление, параллельная пристрелка	✓ 4.6809 ± 2.0532 с

Таблица 2. Сравнительная характеристика методов по времени работы

6. Расчеты на вычислительном кластере

При решении поставленной задачи проектирования оптимальных траекторий перелета прямыми методами оптимальные решения для разных дат старта и прилета могут вычисляться независимо друг от друга. Иными словами, можно одновременно рассчитывать оптимальные траектории космического аппарата на нескольких процессорах с использованием многопроцессорных вычислительных систем (МВС).

В данном разделе приводятся результаты расчета J_1 -оптимальных траекторий перелета (см. раздел 2.1) на вычислительном кластере К-60 Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН [19]. Параметры каж-

дого из вычислительных узлов многопроцессорной вычислительной системы К-60: узел представляет собой сервер с двумя 14-ядерными процессорами Intel® Xeon® E5-2690 v4 и оперативной памятью 256 ГБ. При параллельных вычислениях использовалась технология параллельного программирования Message Passing Interface (MPI). Метод был реализован на языке программирования Fortran 90 с использованием компилятора Intel Fortran и оптимизационного пакета SNOPT 7.6 [23]. При интегрировании уравнений движения использовалась реализация метода Пеллегрини решения задачи Штарка, предложенная в работе [16].

На рис. 9 приведена зависимость относительных затрат топлива $\Delta m/m_0$ от времени перелета для дат старта 01.01.2020 – 28.01.2020. Рис. 10 соответствует оптимальной траектории перелета с датой старта 28.01.2020 и временем перелета 500 дней. Расчет полученных оптимальных решений проводился с использованием 28 ядер одного из узлов вычислительного кластера К-60. На каждом ядре оптимальные траектории рассчитывались для конкретной даты старта, а время перелета менялось от 432 до 711 дней (280 задач для одного ядра). Из рис. 9 видно, что при увеличении времени перелета расход топлива для различных дат старта быстро уменьшается, а затем, начиная с какого-то момента, становится практически неизменным. При длительных временах перелета характерным значением относительного расхода топлива является $\Delta m/m_0 \approx 28\%$. Выбросы отвечают данным, для которых оптимизационная процедура не сошлась. Стоит отметить, что применение МВС к поставленной задаче позволяет значительно сократить время расчетов. Суммарное время вычисления полученных J_1 -оптимальных траекторий перелета на вычислительном кластере К-60 с использованием 28 ядер составило 1156.2 ± 46.4 сек ≈ 19 мин, в то время как аналогичные вычисления на одном ядре вычислительного кластера заняли 32405.6 ± 443.2 сек ≈ 9 ч. Таким образом, использование дополнительных вычислительных ядер позволило сократить суммарное время вычислений в 28 раз. Это соответствует ожидаемому ускорению, так как вычисления производятся независимо для разных дат старта и прилета.

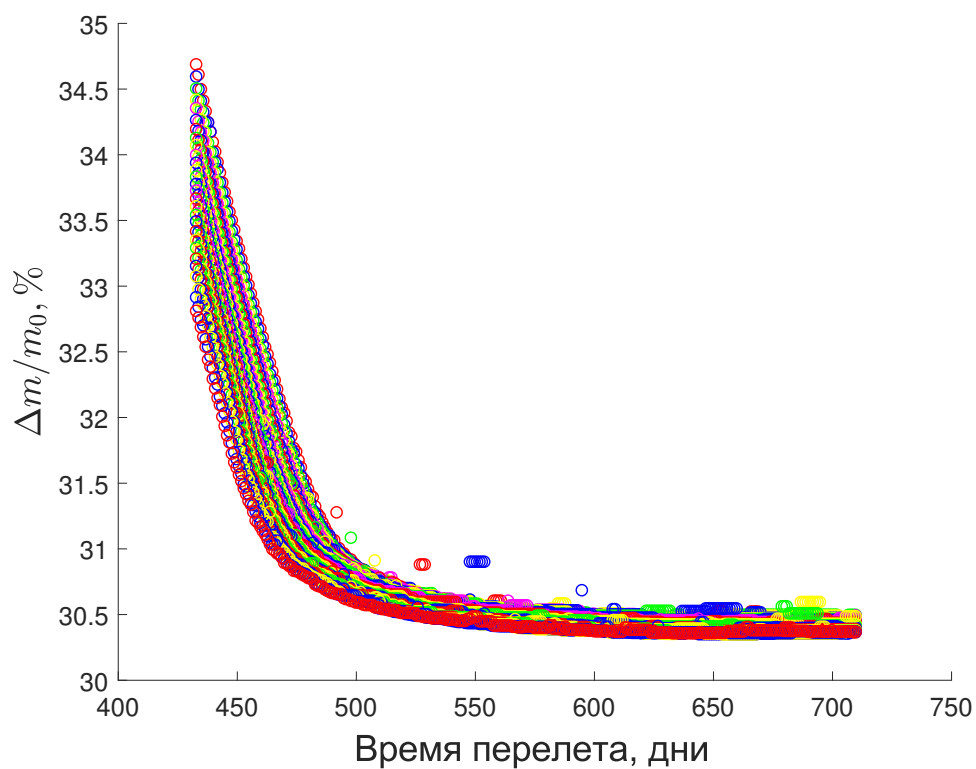


Рис. 9. Зависимость массы расходуемого топлива от времени перелета для дат старта 01.01.2020 – 28.01.2020 ($N = 30$)

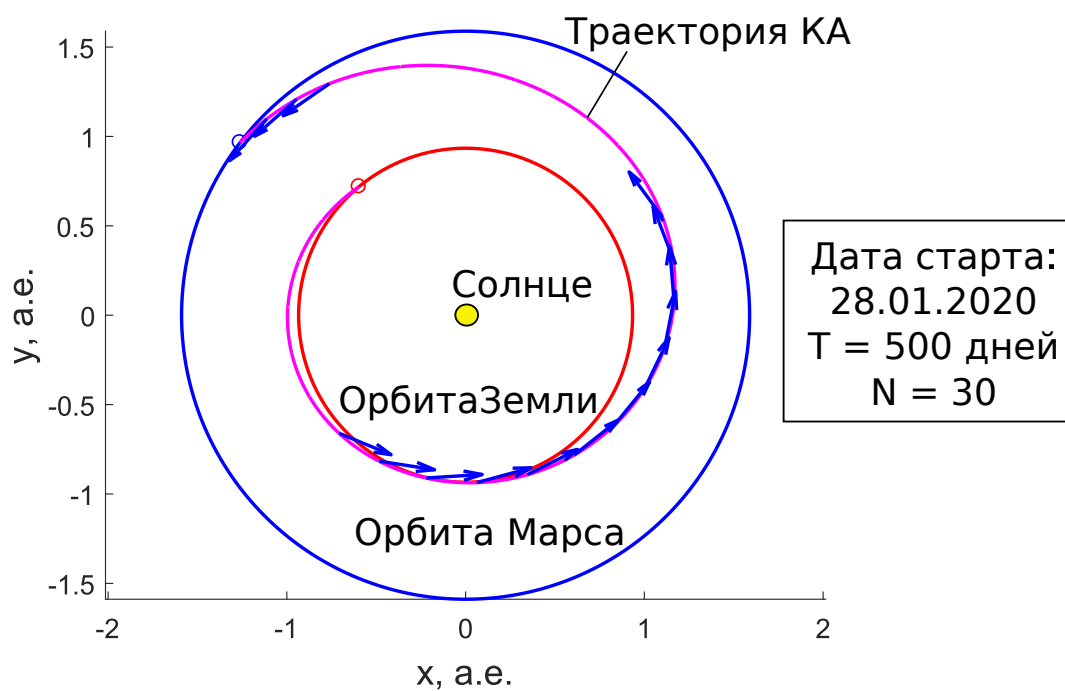


Рис. 10. J_1 -оптимальная траектория перелета

Заключение

В ходе работы были реализованы два прямых метода проектирования оптимальных траекторий перелета с малой тягой. Первый основан на поиске оптимального управления ускорением тяги, второй — на поиске оптимального импульсного управления. Методы применялись к модельной задаче межпланетного перелета с малой тягой от Земли к Марсу. В результате были найдены оптимальные траектории КА для различных дат старта и прилета. Полученное оптимальное управление получилось близким к релейному в обоих случаях. Также проведено сравнение предложенных методов по времени работы, размеру области сходимости и количеству итераций. Метод, основанный на поиске оптимального импульсного управления, хотя и уступает двум другим методам по количеству итераций, оказался наиболее надежным в плане сходимости и эффективным по быстродействию. Поэтому он является более предпочтительным на начальных этапах проектирования миссии. Также исследована зависимость затрат топлива от времени перелета. Показано, что при его увеличении затраты топлива значительно уменьшаются, а затем, начиная с какого-то момента, практически не меняются. С использованием технологии параллельного программирования MPI на вычислительном кластере К-60 в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН успешно реализован и запущен параллельный вариант программы, с помощью которого можно одновременно рассчитывать оптимальные траектории перелета для разных дат старта и времен полета. Как и ожидалось, он позволяет сократить время расчетов во столько раз, сколько вычислительных ядер используется, так как траектории для разных дат старта и прилета вычисляются независимо друг от друга.

Список литературы

- [1] Важенин Н.А., Обухов В.А., Плохих А.П., Попов Г.А. Электрические ракетные двигатели космических аппаратов и их влияние на радиосистемы космической связи. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. 432 с.
- [2] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.
- [3] Liberzon, D. Calculus of variations and optimal control theory: a concise introduction. New Jersey: Princeton University Press, 2011. 256 p.
- [4] Петухов В.Г. Робастное квазиоптимальное управление с обратной связью для перелета с малой тягой между некомпланарными эллиптической и круговой орбитами // Вестник Московского авиационного института. 2010. Т. 17, № 3. С. 50–58.

- [5] Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования. 2004. Т. 42, № 3. С. 260–279.
- [6] Константинов М.С., Петухов В.Г., Тейн М. Оптимизация траекторий гелиоцентрических перелетов. 2 изд. М.: Изд-во МАИ, 2015. 260 с.
- [7] Conway, B. Spacecraft trajectory optimization. New York: Cambridge University Press, 2010. 298 p.
- [8] Tang, S., Conway, B. Optimization of low-thrust interplanetary trajectories using collocation and nonlinear programming // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1995. Vol. 18, No. 3. P. 599–604.
- [9] Hargraves, C., Paris, S. Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1987. Vol. 10, No. 4. P. 338–342.
- [10] Fahroo, F., Ross, I. Direct trajectory optimization by a Chebyshev pseudospectral method // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2002. Vol. 25, No. 1. P. 160–166.
- [11] Sims, J., Flanagan, S. Preliminary design of low-thrust interplanetary missions // AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. Girdwood, Alaska, USA: August 16-19, 1999, Paper AAS 99-338. 9 p.
- [12] Левантовский В.И. Небесная баллистика. М.: Знание, 1965, 95 с.
- [13] Белецкий В.В. О траекториях космических полетов с постоянным вектором реактивного ускорения // Космические исследования. 1964. Т. 2, № 3. С. 408–413.
- [14] Lantoine, G., Russell, R. Complete closed-form solutions of the Stark problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2011. Vol. 109, No. 4. P. 333–366.
- [15] Biscani, F., Izzo, D. The Stark problem in the Weierstrassian formalism // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2014. Vol. 439, No. 1. P. 810–822.
- [16] Pellegrini, E., Russell, R., Vittaldev, V. F and G Taylor series solutions to the Stark and Kepler problems with Sundman transformations // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2014. Vol. 118, No. 4. P. 355–378.
- [17] Hatten, N., Russell, R. Comparison of three Stark problem solution techniques for the bounded case // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2015. Vol. 121, No. 1. P. 39–60.

- [18] Ильин В.А., Кузмак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. М.: Наука, 1976. 744 с.
- [19] Вычислительный комплекс К-60. URL: <http://www.kiam.ru/MVS/resources/k60.html> (дата обращения: 02.05.2018).
- [20] JPL Planetary and Lunar Ephemerides. URL: https://ssd.jpl.nasa.gov/?planet_eph_export (дата обращения: 02.05.2018).
- [21] The Astronomical Almanac. URL: http://asa.hmnao.com/SecK/Section_K.html (дата обращения: 02.05.2018).
- [22] Nocedal, J., Wright, S. Numerical optimization. N. Y.: Springer, 2006. 664 p.
- [23] UCSD/Stanford Optimization Software. URL: <https://ccom.ucsd.edu/~optimizers/> (дата обращения: 02.05.2018).

Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи	5
2. Управление ускорением тяги	6
2.1. Метод простой пристрелки	6
2.2. Метод параллельной пристрелки	8
3. Импульсное управление	9
4. Результаты расчетов	11
5. Сравнительная характеристика методов	16
6. Расчеты на вычислительном кластере	17
Заключение	20
Список литературы	20