



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 18 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Брагин М.Д., Криксин Ю.А.,
Тишкин В.Ф.**

Верификация одного метода
энтропийной регуляризации
разрывных схем Галеркина
для уравнений
гиперболического типа

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брагин М.Д., Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф. Верификация одного метода энтропийной регуляризации разрывных схем Галеркина для уравнений гиперболического типа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 18. 25 с.
doi:[10.20948/prepr-2019-18](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-18)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-18>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук

М. Д. Брагин, Ю. А. Криксин, В. Ф. Тишкин

**Верификация одного метода энтропийной
регуляризации разрывных схем Галеркина
для уравнений гиперболического типа**

Москва — 2019

Брагин М. Д., Криксин Ю. А., Тишкин В. Ф.

Верификация одного метода энтропийной регуляризации разрывных схем Галеркина для уравнений гиперболического типа

В работе дан подробный обзор методов энтропийной коррекции в численных схемах для уравнений гиперболического типа. Вариационный метод энтропийной регуляризации разрывных схем Галеркина протестирован на одномерной газодинамической задаче Эйнфельдта о двух расходящихся волнах разрежения. На основе результатов этой проверки построен упрощенный метод энтропийной регуляризации разрывных схем Галеркина, включающий в себя ограничитель наклонов. Разработанный метод успешно апробирован на нескольких задачах Римана для одномерных уравнений Эйлера.

Ключевые слова: уравнения гиперболического типа, энтропийное условие, разрывные схемы Галеркина, вариационный принцип.

**Michael Dmitrievich Bragin, Yury Anatolievich Kriksin,
Vladimir Fedorovich Tishkin**

Verification of an entropic regularization method for discontinuous Galerkin schemes applied to hyperbolic equations

In this work, methods of entropic correction in numerical schemes for hyperbolic equations are extensively overviewed. The variational method of entropic regularization in discontinuous Galerkin schemes is tested on the one-dimensional gasdynamic Einfeldt problem of two scattering rarefaction waves. Based on the results of this test, a simplified method of entropic regularization in discontinuous Galerkin schemes coupled with a slope limiter is proposed. The designed method is successfully verified on a number of Riemann problems for one-dimensional Euler equations.

Keywords: hyperbolic equations, entropy condition, discontinuous Galerkin schemes, variational principle.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №17-71-30014).

Введение

Системы уравнений гиперболического типа составляют основу многих моделей, используемых для описания самых разных физических процессов. Хорошо известно, что уравнения этого типа допускают решения, содержащие сильные разрывы. Более того, в нелинейном случае даже при гладких начальных и граничных условиях решение достаточно быстро перестает быть классическим, теряет непрерывность и переходит в класс слабых решений.

Как правило, практически интересные системы уравнений гиперболического типа являются энтропийными. Это значит, что для таких систем существует по крайней мере одна пара «энтропия — поток энтропии» и связанное с ней энтропийное неравенство [1]. Например, энтропийными являются системы уравнений газодинамики, магнитной газодинамики, акустики, динамики мелкой воды, механики упругих сред. Энтропийные неравенства имеют большую ценность для аналитического и численного исследования слабых решений, так как позволяют выделить среди них единственное физически адекватное, или энтропийное решение, удовлетворяющее всем возможным энтропийным неравенствам.

При построении численной схемы для систем уравнений гиперболического типа весьма желательно, чтобы на дискретном уровне аппроксимировалась не только сама система уравнений, но также одно или несколько (в зависимости от физики моделируемых явлений) энтропийных неравенств. В этом случае схема называется энтропийно устойчивой. Энтропийно устойчивые схемы привлекательны своей вычислительной устойчивостью и тем, что они дают численное решение, сходящееся при сгущении сетки к точному физически адекватному слабому решению.

Помимо энтропийно устойчивых схем нередко рассматриваются энтропийно консервативные схемы, то есть схемы, в которых на дискретном уровне выполняется одно или несколько энтропийных равенств, описывающих законы сохранения энтропии на классических решениях.

Обычно некоторая схема конструируется сначала только для системы уравнений, после чего она регуляризуется (исправляется) так, чтобы помимо системы аппроксимировалось хотя бы одно энтропийное неравенство, то есть так, чтобы схема была энтропийно устойчивой.

Ниже мы попытаемся дать как можно более полный обзор результатов, связанных с энтропией и методами ее контроля в численных схемах.

В работе [2] определен более сильный класс схем, называемых E -схемами: это схемы, являющиеся энтропийно устойчивыми для всех воз-

можных энтропийных пар. В E -схемах выполняются все возможные энтропийные неравенства аналогично определению энтропийного решения. Однако в работах [2–4] установлено, что консервативные E -схемы не могут иметь порядок аппроксимации по пространству выше первого, и поэтому, когда речь идет о консервативных энтропийно устойчивых схемах высокого порядка, обычно неявно подразумевается, что в таких схемах обеспечивается выполнение только одного энтропийного неравенства. Добавим, что в скалярном случае всякая монотонная консервативная схема является E -схемой [3, 5] и потому дает решение, которое при сгущении сетки сходится к энтропийному слабому решению системы уравнений. Сходимость следует из свойства TVD [6] и теоремы Лакса–Вендрова [7]. В некотором смысле понятие энтропийной устойчивости обобщает привычное понятие вычислительной устойчивости, методы исследования которой хорошо известны в случае простейших линейных уравнений.

Отдельного упоминания заслуживает MUSCL-схема [8] второго порядка аппроксимации, удовлетворяющая всем возможным энтропийным неравенствам. Ее существование не противоречит результату [4], так как она не может быть записана в консервативной форме.

Немало современных подходов к решению проблемы энтропийной устойчивости конечно-разностных и конечно-объемных схем берут свое начало в теореме Тадмора, доказанной в работе [9]. Эта теорема устанавливает достаточное условие энтропийной устойчивости схемы, сформулированное относительно функции численного потока. Важно отметить, что условие теоремы Тадмора является не только достаточным, но и необходимым для схем с трехточечным пространственным шаблоном.

Теорема Тадмора [9] имеет весьма полезное следствие. Предположим, мы имеем в своем распоряжении энтропийно консервативную конечно-разностную/объемную схему. Тогда ее можно сделать энтропийно устойчивой путем добавления численной диссипации (так называемый «метод сравнения», см. [9]). Это положение можно использовать как явное и конструктивное руководство для построения энтропийно устойчивых конечно-разностных/объемных схем: взяв некоторую уже известную схему, мы добавляем к ее численным потокам некоторые новые члены, которые сначала обеспечивают сохранение энтропии и затем — ее диссипацию (мы имеем в виду математическую энтропию, отличающуюся от физической знаком).

В работах [9, 10] построены энтропийно консервативные конечно-разностные схемы второго порядка аппроксимации по пространству. Исходя из вышеизложенной идеи в работе [11] разработаны энтропийно консервативные и энтропийно устойчивые конечно-разностные схемы третьего

порядка. В работе [12] предложен общий подход к конструированию энтропийно консервативных конечно-разностных схем произвольного порядка аппроксимации. Однако авторами [11, 12] рассмотрен лишь скалярный случай. Кроме того, оказалось, что найденные ими схемы производят недостаточное количество физической энтропии у разрывов, что приводит к появлению вблизи них ложных осцилляций большой амплитуды.

В работе [13] построен экономичный энтропийно-согласованный численный поток второго порядка для уравнений Эйлера. Благодаря дополнительным диффузионным членам данный поток обеспечивает производство достаточного количества физической энтропии на ударных волнах. В результате конечно-объемные схемы [13], во-первых, не генерируют осцилляции и, во-вторых, обладают свойством энтропийной устойчивости.

Особо отметим энтропийно устойчивые конечно-объемные схемы [14] для уравнений Эйлера и Навье–Стокса, обеспечивающие сохранение кинетической энергии. Это свойство важно при расчетах гиперзвуковых течений газа вблизи затупленных тел, так как оно исключает возможность образования численных артефактов — карбункулов в некоторых областях течения.

В дальнейшем подходы [9–12] были развиты для получения энтропийно устойчивых конечно-разностных схем высокого (третьего и выше) порядка, основанных на ENO- [15] (так называемые TeCNO-схемы) и WENO- [16] реконструкциях. Эти высокоточные схемы пригодны для расчета широкого круга уравнений, как одномерных, так и многомерных: мелкой воды [15], Эйлера [15, 16], Навье–Стокса [16]. В работе [17] исследуется энтропийная устойчивость явных полностью дискретных TeCNO-схем для скалярных уравнений гиперболического типа. В качестве экономичной альтернативы ENO-реконструкции схем [15] в работе [18] предложено использовать оригинальный ограничитель потока; в результате авторы добиваются третьего порядка при наличии свойства энтропийной устойчивости. В работе [19] схемы [15] модифицированы так, что в них для вычисления диффузионных членов применяется WENO-реконструкция третьего порядка с пониженной диссипацией; это позволяет несколько повысить точность схем [15] без потери энтропийной устойчивости. Обратим также внимание на работу [20], где рассмотрен вопрос о построении энтропийно консервативных и энтропийно устойчивых конечно-разностных схем для неконсервативных систем уравнений гиперболического типа. В работе [21] изучено выполнение энтропийного неравенства в симметричных компактных конечно-разностных схемах четвертого порядка аппроксимации по пространству.

Схожие приемы энтропийной коррекции, базирующиеся на добавлении регуляризирующих диссипативных членов в вектор потоков, применяются в конечно-разностных схемах для квазигазодинамических уравнений [22,23]. Сам факт существования энтропийного неравенства для квазигазодинамических уравнений обсуждается в работе [24].

В работе [25] энтропийная устойчивость достигается при помощи метода энтропийной вязкости: в правую часть системы уравнений добавляется диффузионный член с коэффициентом вязкости, зависящим от того, на какую величину выполняется или не выполняется энтропийное неравенство. После этого модифицированная система уравнений решается численно при помощи спектрально-элементной разрывной схемы Галеркина (далее для краткости DG-схемы). Подход работы [25] интересен тем, что он может быть применен, по-видимому, к любой симметричной схеме [25], так как в основе метода энтропийной вязкости лежит модификация не численной схемы, а решаемой системы уравнений.

Со времен изобретения классической схемы Годунова [26] точное и приближенные решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва стали неотъемлемой частью расчета численных потоков во многих конечно-объемных и DG-схемах (см., например, [27–32]). С одной стороны, точное решение задачи Римана хорошо тем, что для конечно-объемных схем оно позволяет добиться выполнения энтропийного неравенства в каждой ячейке сетки по построению [33]. С другой стороны, зачастую из-за структуры вектора потоков и/или из-за высокого порядка реконструкции в ячейке точное решение задачи Римана оказывается неизвестным. По этой причине широкое распространение получили различные приближенные решения задачи Римана и связанные с ними численные потоки, которые, вообще говоря, не гарантируют неубывания физической энтропии [33].

В работе [33] разработана энтропийно устойчивая схема типа Годунова, основанная на решении задачи Римана в акустическом приближении. Эта схема имеет первый порядок аппроксимации по времени и пространству. В работе [34] показывается, что некоторые численные потоки типа HLL (см. [30]) гарантируют энтропийную устойчивость. На их основе строятся гибридные HLL-потоки с уменьшенной диссипацией (то есть повышенной точностью), не нарушающие энтропийной устойчивости. В уже упомянутой выше работе [13] численный поток [28] дополняется диссипативным членом в конечно-разностной форме так, чтобы результирующая конечно-объемная схема была энтропийно устойчивой. В монографии [35] рассматриваются методы энтропийной коррекции, в которых собственные числа матрицы Якоби вектора потоков, участвующие в формулах для чис-

ленных потоков, исправляются вблизи нуля и скорости звука.

Обратимся к вопросу обеспечения энтропийной устойчивости в DG-схемах. Наш обзор этой проблемы существенно опирается на достаточно полное ее обсуждение в недавней работе [36].

В работе [37] доказано, что в полудискретных DG-схемах в скалярном случае выполняется дискретный аналог энтропийного неравенства для квадратичной энтропии. Это свойство справедливо для любого числа пространственных измерений и для любых сеток с простейшими ячейками в виде треугольников, тетраэдров и так далее. Позднее этот результат был обобщен на случай симметричных систем уравнений [38]. Однако рассуждения работы [38] существенно опираются на линейность градиента энтропии относительно консервативных переменных, и распространить эти рассуждения на более общий случай представляется затруднительным. Кроме того, доказательства работ [37, 38] подразумевают, что интегралы по ячейкам и их границам вычисляются точно, что конечно же не имеет места при реальных вычислениях на компьютере, где эти интегралы аппроксимируются квадратурными формулами.

В работе [39] был предложен другой подход, в котором система уравнений и DG-схема для нее решаются относительно энтропийных переменных (они составляют вектор градиента энтропии) вместо консервативных. Это позволяет добиться выполнения всех возможных энтропийных неравенств, но ценой высокой вычислительной сложности даже при явном интегрировании по времени. В дальнейшем эта методика получила развитие в виде DG-схем, использующих конечно-элементную аппроксимацию не только по пространству, но и по времени [40, 41]. Тем не менее в рамках этого подхода все так же предполагается, что любые интегралы вычисляются точно.

В последнее время обоснование энтропийной устойчивости DG-схем при аппроксимации интегралов квадратурными формулами продвинулось вперед благодаря двум идеям: 1) применение конечно-элементных аппроксимаций коллокационного типа [42, 43] и 2) применение квадратур Гаусса-Лобатто и разностных SBP-операторов, допускающих суммирование по частям [44]. Важно, что обе идеи позволяют добиться выполнения энтропийного неравенства при сохранении консервативности и высокого порядка аппроксимации. Отметим, что для некоторых систем уравнений SBP-операторы получаются автоматически при аппроксимации пространственных производных, записанных в той или иной кососимметричной (в англоязычной литературе *skew-symmetrical*) форме. К таким системам уравнений относятся скалярное уравнение Бюргерса [44, 45], уравнения

мелкой воды [46]. В случае уравнений Эйлера и Навье–Стокса далеко не каждое кососимметричное разбиение пространственных производных гарантирует свойство SBP при переходе к их дискретной форме [16,47]. В работе [36] методология квадратур на узлах коллокации и SBP-операторов обобщается на треугольные сетки, также обсуждается влияние ограничителей потоков на выполнение свойства SBP.

В контексте описанной в предыдущем абзаце методологии уместно упомянуть высокоточные консервативные RD-схемы (residual distribution, распределение невязок) для стационарных уравнений гиперболического типа [48]. Эти схемы определенным образом связаны с чисто пространственными и пространственно-временными DG-схемами, а также с непрерывными схемами Галеркина, см. [49]. Как показано в работе [49], за счет добавления в невязки некоторых новых членов RD-схемы могут получить свойства энтропийной консервативности и энтропийной устойчивости, при этом специальный подбор квадратурных формул и SBP-операторов не требуется.

Подведем итог. На данный момент теория энтропийной устойчивости численных схем для уравнений гиперболического типа имеет несколько открытых проблем.

1. Отсутствие единого, универсального, достаточно простого и ясного подхода к обеспечению энтропийной устойчивости высокоточных конечно-разностных схем.
2. Отсутствие высокоточных численных потоков на основе приближенных решений (обобщенной) задачи Римана, гарантирующих неубывание физической энтропии.
3. Необоснованность энтропийной устойчивости DG-схем на треугольных, тетраэдральных и т. д. сетках для многомерных уравнений Эйлера и общих систем многомерных уравнений гиперболических типа.

В работе [50] предложен альтернативный метод обеспечения энтропийной устойчивости в DG-схемах для одномерных уравнений Эйлера. Ее авторы обращают внимание на то, что DG-схемы могут быть получены вариационным способом, а значит, добиться выполнения энтропийного неравенства можно путем его включения в вариационную задачу. Последняя при этом перестает быть безусловной (стандартные DG-схемы) и становится условной. В конечном итоге получаются модифицированные DG-схемы, в которых коэффициенты разложения искомой сеточной функции по базису вычисляются двумя способами в зависимости от того, является ли энтропийное соотношение равенством или неравенством.

Целью настоящей работы является верификация метода [50].

Препринт организован следующим образом. В разделе 1 вводятся основные обозначения, дается описание DG-схем. В разделе 2 кратко излагается метод [50]. В разделе 3 этот метод подвергается проверке. На основе ее результатов в разделе 4 строится метод, сочетающий энтропийную регуляризацию и ограничение наклонов. В разделе 5 он тестируется на нескольких известных задачах Римана для одномерных уравнений Эйлера.

1. Описание разрывных схем Галеркина

Рассмотрим систему одномерных однородных квазилинейных уравнений гиперболического типа:

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{U}) \equiv \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, \quad x \in (0, x_{\max}), \quad t \in (0, t_{\max}), \quad (1)$$

где $\mathbf{U} = (U^{(1)}, \dots, U^{(m)}) = \mathbf{U}(x, t)$ — искомый вектор консервативных переменных, $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ — вектор потоков в направлении оси Ox , символ $\partial_x \equiv \partial/\partial x$. Предположим, что для системы (1) существует пара скалярных функций $(S(\mathbf{U}), H(\mathbf{U}))$, такая, что функция $S(\mathbf{U})$ — вогнутая и

$$(\partial_U S(\mathbf{U}))^T \mathbf{A}(\mathbf{U}) = (\partial_U H(\mathbf{U}))^T$$

для всех \mathbf{U} , допускаемых системой уравнений (1), где $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \partial_U \mathbf{F}(\mathbf{U})$ — матрица Якоби вектора потоков. Функция $S(\mathbf{U})$ называется (физической) энтропией, а $H(\mathbf{U})$ — потоком энтропии в направлении оси Ox [1]. Среди всех возможных решений системы (1), удовлетворяющих некоторым начальным условиям при $t = 0$ и граничным условиям при $x = 0$ и x_{\max} , нас будет интересовать лишь то, для которого справедливо энтропийное условие, или неравенство

$$\partial_t S(\mathbf{U}) + \partial_x H(\mathbf{U}) \geq 0, \quad x \in (0, x_{\max}), \quad t \in (0, t_{\max}), \quad (2)$$

Мы полагаем, что такое решение, определенное на $[0, x_{\max}] \times [0, t_{\max}]$, существует и единственно.

Разумеется, в общем случае система (1) может иметь разное число энтропийных пар $(S(\mathbf{U}), H(\mathbf{U}))$: ноль, одну, больше одной, бесконечно много. Теория нахождения всех возможных энтропийных пар, равно как и контроль за выполнением всех существующих энтропийных неравенств, выходит за рамки настоящей работы. Мы будем исследовать случай, в котором имеется хотя бы одно неравенство вида (2), и добиваться выполнения одного выбранного неравенства на дискретном (разностном) уровне.

Разобьем отрезок $[0, x_{\max}]$ на N_x ячеек $K_{j+1} = [x_j, x_{j+1}]$, $j = \overline{0, N_x - 1}$, где $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N_x} = x_{\max}$, $h_{x, j+1/2} = x_{j+1} - x_j \equiv h_x$ — быть может,

переменный шаг по x . Рассмотрим ячейку K_{j+1} . Введем в ней пространство $\mathbb{L}_2(K_{j+1})$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{h_x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)g(x) dx \quad \forall f, g \in \mathbb{L}_2(K_{j+1}). \quad (3)$$

Возьмем систему полиномиальных функций $\{\varphi_l(x)\}_{l=0}^{\infty}$, полную в пространстве $\mathbb{L}_2(K_{j+1})$. Пусть эта система ортонормирована относительно скалярного произведения (3).

Будем искать решение $\mathbf{U}(x, t)$ системы (1) в ячейке K_{j+1} в виде конечного элемента — линейной комбинации первых $(k + 1)$ функций $\varphi_l(x)$:

$$\mathbf{U}(x, t) \approx \mathbf{U}_h(x, t) = \sum_{l=0}^k \mathbf{U}_l(t) \varphi_l(x), \quad x \in K_{j+1}. \quad (4)$$

Очевидно, функции $\varphi_l(x)$, $\mathbf{U}_l(t)$, $\mathbf{U}_h(x, t)$ зависят от ячейки K_{j+1} , но ради краткости мы будем указывать K_{j+1} в их аргументах лишь тогда, когда в формулах будут участвовать несколько ячеек.

Уравнения полудискретной DG-схемы получаются из условия ортогональности невязки $\mathcal{L}_1(\mathbf{U}_h)$ первым $(k + 1)$ базисным функциям:

$$(\mathcal{L}_1(\mathbf{U}_h), \varphi_l) = \mathbf{0}, \quad l = \overline{0, k}. \quad (5)$$

Опуская выкладки, приведем окончательный вид уравнений (5) (см. [51]):

$$\frac{d\mathbf{U}_l}{dt} = \frac{\varphi_l(x_j^+) \widehat{\mathbf{F}}_j - \varphi_l(x_{j+1}^-) \widehat{\mathbf{F}}_{j+1}}{h_x} + \frac{1}{h_x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{F}[\mathbf{U}_h(x, t)] \frac{d\varphi_l(x)}{dx} dx, \quad l = \overline{0, k}. \quad (6)$$

Здесь $x_j^{\pm} \equiv x_j \pm 0$ — предел справа/слева в точке x_j , вектор $\widehat{\mathbf{F}}_j$ — численный поток на границе $x = x_j$ между ячейками K_j и K_{j+1} в момент времени t . Этот поток определяется путем точного или приближенного решения классической или обобщенной задачи Римана о распаде произвольного разрыва в окрестности точки (x_j, t) . Во всех расчетах мы будем находить $\widehat{\mathbf{F}}_j$ по формуле

$$\widehat{\mathbf{F}}_j = \mathbf{F}[\mathbf{U}_{RP}(0, \mathbf{U}_h(x_j^-, t; K_j), \mathbf{U}_h(x_j^+, t; K_{j+1}))],$$

где $\mathbf{U}_{RP}((x - x_j)/t, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$ — точное решение задачи Римана с кусочно-постоянными начальными данными

$$\mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{при } x < x_j, \\ \mathbf{U}_R & \text{при } x \geq x_j. \end{cases}$$

Другими словами, в качестве $\widehat{\mathbf{F}}_j$ используется численный поток схемы Годунова. Интеграл в правой части (6) вычисляется с любой наперед заданной точностью при помощи двухточечной квадратуры Гаусса четвертого порядка с разбиением ячейки K_{j+1} на малые отрезки. Точность вычисления интеграла контролируется по правилу Рунге.

Для получения полностью дискретных DG-схем к полудискретной схеме (6) необходимо применить какой-нибудь метод интегрирования ОДУ, например, один из методов Рунге–Кутты, дающих схемы RKDG. Далее верхним индексом n обозначается номер слоя по времени, а под τ понимается шаг по времени, вообще говоря, переменный.

2. Вариационный метод энтропийной регуляризации

В работе [50] предлагается метод энтропийной регуляризации DG-схем, основанный на их вариационной трактовке.

Прежде чем изложить этот метод, введем обозначения для левой и правой частей полудискретной схемы (6):

$$\mathbf{B}_l = \frac{d\mathbf{U}_l}{dt},$$

$$\mathbf{B}_l^* = \frac{\varphi_l(x_j^+) \widehat{\mathbf{F}}_j - \varphi_l(x_{j+1}^-) \widehat{\mathbf{F}}_{j+1}}{h_x} + \frac{1}{h_x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{F}[\mathbf{U}_h(x, t)] \frac{d\varphi_l(x)}{dx} dx, \quad l = \overline{0, k}.$$

Можно показать (см. [50]), что уравнения (6) выводятся также в результате безусловной минимизации функционала

$$W = \frac{1}{2h_x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\sum_{l=0}^k \mathbf{B}_l \varphi_l + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}_h) \right]^T \left[\sum_{l=0}^k \mathbf{B}_l \varphi_l + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}_h) \right] dx \quad (7)$$

по переменным \mathbf{B}_l , $l = \overline{0, k}$. Нетрудно видеть, что функционал (7) равен $1/2$ квадрата нормы невязки $\mathcal{L}_1(\mathbf{U}_h)$ в пространстве $\mathbb{L}_2(K_{j+1})$. Заметим, что функционал (7) представим в более простом виде: после раскрытия скобок и интегрирования получим

$$W = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^k (\mathbf{B}_l - 2\mathbf{B}_l^*)^T \mathbf{B}_l + W_0, \quad (8)$$

где член W_0 зависит только от векторов $\mathbf{U}_l(t)$, но не зависит от их производных по t .

Идея вариационного метода [50] заключается в том, что функционал (8) минимизируется при условии выполнения некоторого дискретного аналога энтропийного неравенства (2). Существует несколько способов дискретизации энтропийного условия; рассмотрим пока тот из них, который дает неравенство, линейное по \mathbf{B}_l . Следуя этому способу (см. [50]), мы выделяем в левой части неравенства (2) производную $\partial_t \mathbf{U}$, подставляем в эту левую часть \mathbf{U}_h вместо \mathbf{U} и осредняем полученное неравенство по ячейке K_{j+1} . Указанные преобразования приводят к неравенству

$$P = \sum_{l=0}^k \mathbf{V}_l^T \mathbf{B}_l + \frac{\widehat{H}_{j+1} - \widehat{H}_j}{h_x} \geq 0, \quad (9)$$

где векторы \mathbf{V}_l — компоненты функции $\partial_{\mathbf{U}} S(\mathbf{U}_h)$ в базисе $\{\varphi_l(x)\}_{l=0}^k$,

$$\mathbf{V}_l = (\partial_{\mathbf{U}} S(\mathbf{U}_h), \varphi_l) = \frac{1}{h_x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \partial_{\mathbf{U}} S[\mathbf{U}_h(x, t)] \varphi_l(x) dx, \quad l = \overline{0, k}, \quad (10)$$

а численные потоки энтропии \widehat{H}_j вычисляются аналогично потокам $\widehat{\mathbf{F}}_j$. Величина P имеет наглядный физический смысл: она выражает скорость производства энтропии в ячейке.

Решение задачи минимизации функционала (8) по переменным \mathbf{B}_l , $l = \overline{1, k}$ при условии (9) имеет вид:

$$\mathbf{B}_l = \begin{cases} \mathbf{B}_l^* - \sigma^{-1} P^* \mathbf{V}_l & \text{при } P^* < 0 \text{ и } \sigma > 0, \\ \mathbf{B}_l^* & \text{иначе,} \end{cases} \quad l = \overline{1, k}, \quad (11)$$

$$P^* = \sum_{l=0}^k \mathbf{V}_l^T \mathbf{B}_l^* + \frac{\widehat{H}_{j+1} - \widehat{H}_j}{h_x}, \quad \sigma = \sum_{l=1}^k \mathbf{V}_l^T \mathbf{V}_l.$$

Вектор $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0^*$ всегда, он не участвует в задаче условной минимизации как неизвестная; в противном случае будет нарушена консервативность полудискретной DG-схемы и полностью дискретных схем на ее основе.

Счет по DG-схеме с энтропийной регуляризацией [50] отличается от счета по стандартной DG-схеме лишь тем, что производные по времени \mathbf{B}_l , $l = \overline{1, k}$ вычисляются не по формулам $\mathbf{B}_l = \mathbf{B}_l^*$, а по формулам (11).

3. Тестирование вариационного метода на одномерных задачах газодинамики

Проверим на одномерных задачах газодинамики вариационный метод энтропийной регуляризации DG-схем, описанный в разделе 2.

Модель. Система одномерных уравнений Эйлера, описывающих динамику идеального совершенного газа, имеет вид (1), где

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix}, \quad E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho v^2}{2}.$$

Энтропийное неравенство для идеального совершенного газа записывается в форме условия (2), где

$$S(U) = \rho s, \quad H(U) = \rho v s, \quad s = \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + s_0.$$

Через ρ , v , p , E , s обозначены соответственно плотность, скорость, давление, полная энергия единицы объема и плотность энтропии газа, параметр $\gamma = \text{const}$ — показатель адиабаты. Ниже во всех задачах газ двухатомный, $\gamma = 1.4$. Функция $s = s(\mathbf{U})$ определяется с точностью до произвольной постоянной s_0 , величина которой не влияет на выполнение энтропийного неравенства в силу уравнения неразрывности:

$$\partial_t(\rho s_0) + \partial_x(\rho v s_0) = s_0[\partial_t \rho + \partial_x(\rho v)] = 0.$$

Для удобства мы задаем $s_0 = 0$.

Схема и ее параметры. В этом разделе расчеты проводятся по схеме RKDG с $k = 1$ (базис $\{\varphi_l(x)\}_{l=0}^1$ состоит из тождественной единицы и линейной функции), для интегрирования по t в ней применяется явный метод Эйлера. Погрешность аппроксимации выбранной схемы на гладких решениях составляет $\mathcal{O}(\tau, h_x^2)$ при $h_x, \tau \rightarrow 0$. Интегралы (10) вычисляются точно таким же способом, как и интегралы в правых частях (6). Численные потоки и квадратуры находятся с относительной погрешностью $\text{rtol} = 10^{-7}$.

Задача Эйнфельдта. В этой известной задаче Римана [52, тест №2] начальный разрыв распадается на две расходящиеся волны разрежения, между которыми располагается область малых плотностей и давлений. Эта задача интересна тем, что любая схема, записанная в эйлеровых координатах относительно искомых функций, среди которых нет S , генерирует нефизическую особенность между волнами разрежения. Она имеет вид резкого «выброса» на профиле плотности внутренней энергии $\varepsilon = p/[\rho(\gamma - 1)]$.

Вычисления по схеме выполним при $h_x = 0.01$ ($N_x = 100$, $x_{\max} = 1$) и $\tau = 3.75 \cdot 10^{-4}$ ($N_t = 400$ — число шагов по t , $t_{\max} = 0.15$).

Результаты оказываются отрицательными: схема теряет устойчивость при переходе со слоя t^4 на слой t^5 по причине выхода давления в отрицательную область. На рис. 1 приведены профили давления при $t = t^5$

в окрестности точки начального разрыва. Сплошной линией изображено точное решение, маркерами — давление в центрах ячеек p_c и минимальное давление на границах ячеек p_m , вычисляемое как

$$p_m = p_{m,j+1/2}^n = \min(p_h^n(x_j^+), p_h^n(x_{j+1}^-)).$$

Из графиков на рис. 1 видно, что давления p_m в двух ячейках с общей границей в точке $x = 0.5$ отрицательны, что недопустимо для процедуры вычисления потоков \widehat{F}_j .

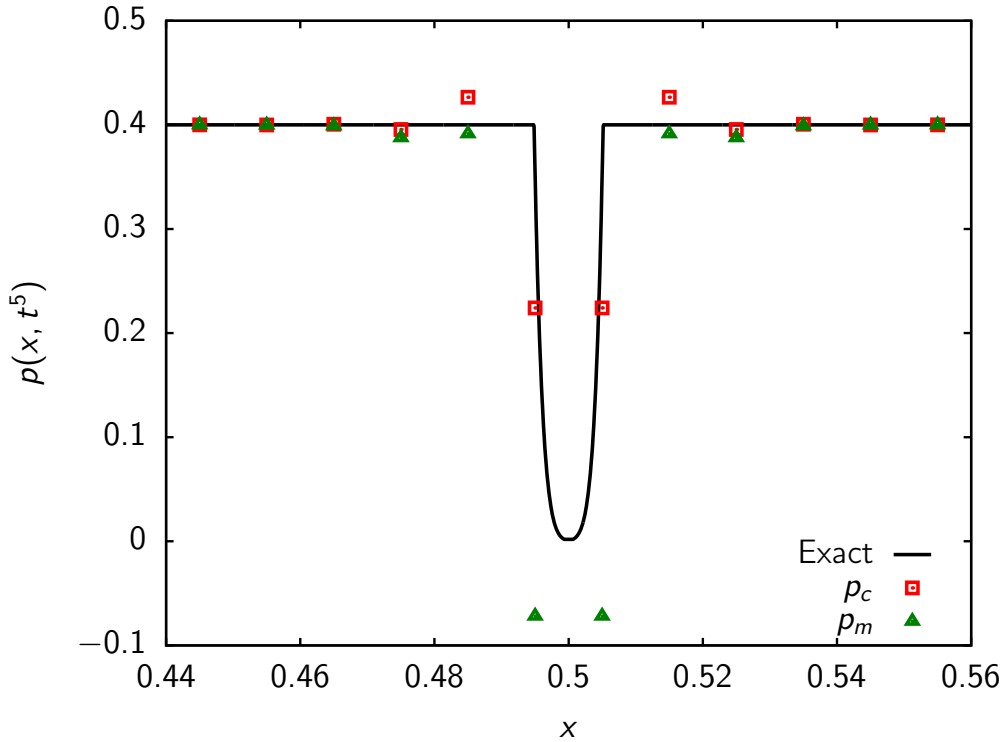


Рис. 1. Профили давления в задаче Эйфельдта при $t = t^5$ в окрестности точки начального разрыва

В ходе расчетов задачи Эйфельдта было экспериментально обнаружено, что скорость производства энтропии

$$P_{FD} = \frac{1}{h_x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{S(\mathbf{U}_h^{n+1}) - S(\mathbf{U}_h^n)}{\tau} dx + \frac{\widehat{H}_{j+1}^n - \widehat{H}_j^n}{h_x} \quad (12)$$

оказывается сильнее аналогичной величины P из неравенства (9) в том смысле, что при $P > 0$ возможно $P_{FD} < 0$, но при $P_{FD} \geq 0$ всегда имеет место $P \geq 0$. Можно решать задачу условной минимизации функционала (8), используя неравенство $P_{FD} \geq 0$ вместо $P \geq 0$, при этом ограничение на

векторы \mathbf{B}_l , $l = \overline{1, k}$ становится нелинейным. Однако, это не помогает добиться устойчивости счета.

Таким образом, для устойчивого счета по DG-схемам в случае квазилинейных уравнений и систем одной лишь энтропийной регуляризации недостаточно. Этот факт имеет достаточно несложное объяснение. Проинтегрируем неравенство (2) по x от 0 до x_{\max} :

$$\frac{dI}{dt} \leq H[\mathbf{U}(x_{\max}, t)] - H[\mathbf{U}(0, t)], \quad I = - \int_0^{x_{\max}} S[\mathbf{U}(x, t)] dx. \quad (13)$$

Из неравенства (13) следует, что интегральная норма решения, понимаемая в смысле функционала I , не может меняться произвольным образом; например, при равенстве потоков энтропии в точках $x = 0$ и $x = x_{\max}$ она не возрастает. Следовательно, выполнение энтропийного неравенства на дискретном уровне гарантирует нелинейную устойчивость схемы в смысле функционала I (см. [1]). Однако это свойство отнюдь не страхует от появления локальных немонотонностей, способных вывести решение из области допустимых значений и разрушить счет по схеме. Значит, энтропийная регуляризация не может заменить собой ограничители наклонов и другие методы, обеспечивающие монотонность схемы в том или ином смысле, эти подходы должны применяться совместно.

4. Упрощенный метод энтропийной регуляризации

Ниже нам понадобится обобщение формулы (12) для производства энтропии P_{FD} в явных схемах RKDG повышенного порядка аппроксимации по t . Пусть интегрирование по t осуществляется при помощи явного метода Рунге–Кутты с числом стадий s и таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|cccccc} c_1 & 0 & & & & \\ c_2 & a_{21} & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss-1} & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s \end{array}.$$

Разумно построить формулу для P_{FD} аналогично формуле, связывающей \mathbf{U}^n и \mathbf{U}^{n+1} . Пусть \mathbf{Y}_r , $r = \overline{1, s}$, — вспомогательное решение, на котором вычисляется r -й наклон метода Рунге–Кутты, а $\hat{H}_{j+1}(\mathbf{Y}_r)$ — численный поток энтропии, посчитанный на \mathbf{Y}_r . Тогда искомое выражение для P_{FD}

запишется так:

$$P_{FD} = \frac{1}{h_x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{S(\mathbf{U}_h^{n+1}) - S(\mathbf{U}_h^n)}{\tau} dx + \sum_{r=1}^s b_r \frac{\widehat{H}_{j+1}(\mathbf{Y}_r) - \widehat{H}_j(\mathbf{Y}_r)}{h_x}. \quad (14)$$

Сформулируем теперь упрощенный метод энтропийной регуляризации явных схем RKDG. Рассмотрим переход со слоя t^n на слой t^{n+1} . Сначала по выбранной схеме RKDG без каких-либо ограничителей рассчитывается решение \mathbf{U}^{n+1} на верхнем слое. После этого в каждой ячейке проверяется неравенство:

$$\left| U_1^{(i)} \right| \leq \alpha \left| U_0^{(i)} \right|, \quad i = \overline{1, m}, \quad (15)$$

где $\alpha = \text{const} > 0$ — задаваемый параметр метода, верхние индексы $(n+1)$ у компонент векторов \mathbf{U}_l^{n+1} опущены ради меньшей громоздкости записи. Если условие (15) не удовлетворено, то $U_1^{(i)}$ умножается на поправочный коэффициент

$$R_1 = \alpha \left| U_0^{(i)} \right| / \left| U_1^{(i)} \right| < 1,$$

иначе $U_1^{(i)}$ не меняется. Затем аналогичным образом сравниваются компоненты векторов \mathbf{U}_2 и \mathbf{U}_1 , \mathbf{U}_3 и \mathbf{U}_2 и так далее. В результате этой процедуры на слое t^{n+1} мы получаем некоторые скорректированные векторы $\widetilde{\mathbf{U}}_l$, $l = \overline{1, k}$; вектор \mathbf{U}_0 остается неизменным. С учетом этих новых коэффициентов разложения по формуле (14) вычисляется величина \widetilde{P}_{FD} . Проверяется энтропийное неравенство:

$$\widetilde{P}_{FD} \geq 0. \quad (16)$$

Если условие (16) не удовлетворено, то векторы $\widetilde{\mathbf{U}}_l$, $l = \overline{1, k}$ заменяются на нулевые, иначе с ними ничего не происходит.

Поясним смысл действий, выполняемых в данном методе.

Проверка старших коэффициентов конечно-элементной аппроксимации (4) через неравенство (15) не позволяет им становиться слишком большими. Немонотонности при этом могут быть заметными, но их амплитуду всегда можно ограничить. В частности, при $\alpha = 0$ схема RKDG переходит в монотонную схему Годунова. Вообще, неравенство (15) используется для простейшего контроля за векторами \mathbf{U}_l , $l = \overline{1, k}$, эта процедура не претендует на то, чтобы быть полноценным ограничителем наклонов.

Минимизация функционала невязки (8) при условии (16) не производится, вместо этого при любом, даже малейшем, нарушении энтропийного неравенства старшие коэффициенты аппроксимации (4) сразу же обнуляются. Это не является оптимальным с точки зрения нормы невязки, но

пока нашим приоритетом будет гарантия неотрицательного производства энтропии, пусть даже избыточно положительного.

5. Тестирование упрощенного метода на одномерных задачах газодинамики

Верифицируем на одномерных задачах газодинамики упрощенный метод энтропийной регуляризации схем RKDG, построенный в разделе 4. Выражения для \mathbf{U} , $\mathbf{F}(\mathbf{U})$, $S(\mathbf{U})$, $H(\mathbf{U})$ выписаны в разделе 3.

Схемы и их параметры. Возьмем схему RKDG с $k = 1$, в которой для счета по t применяется явный двухстадийный TVD-метод Рунге–Кутты второго порядка с таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}.$$

Погрешность аппроксимации этой схемы на гладких решениях составляет $\mathcal{O}(\tau^2, h_x^2)$ при $h_x, \tau \rightarrow 0$. Мы рассмотрим две версии этой схемы: (1) с ограничителем наклонов MUSCL [51] и (2) с упрощенной энтропийной регуляризацией, описанной в разделе 4. Обозначим первую версию аббревиатурой RKDG-L(2, 2), а вторую — RKDG-E(2, 2). В схеме RKDG-E(2, 2) параметр $\alpha = 0.2$. Численные потоки и квадратуры находятся с относительной погрешностью $\text{rtol} = 10^{-7}$.

Модифицированная задача Сода. Решение этой задачи Римана [52, тест №1], предложенной Содом и модифицированной Торо, содержит ударную волну, контактный разрыв и волну разрежения. Модификация Торо заключается в том, что на волне разрежения имеется звуковая точка. Некоторые схемы, например схема Годунова, генерируют нефизический скачок уплотнения в этой точке.

Расчеты проведем при $h_x = 0.01$ ($N_x = 100$, $x_{\max} = 1$) и $\tau = 2 \cdot 10^{-3}$ ($N_t = 100$, $t_{\max} = 0.2$).

Посчитанные профили плотности в конечный момент времени приведены на рис. 2. Сплошной черной линией изображается точное решение, маркерами — численные решения. Для визуализации численных решений используются значения \mathbf{U}_h в центрах ячеек. Схема RKDG-E(2, 2) показывает лучшее разрешение ударной волны по сравнению с RKDG-L(2, 2). Кроме того, схема с упрощенной энтропийной регуляризацией ведет себя корректно у звуковой точки, находящейся на абсциссе $x = 0.3$, в то время как схема с ограничителем наклонов ведет себя там несколько «неровно».

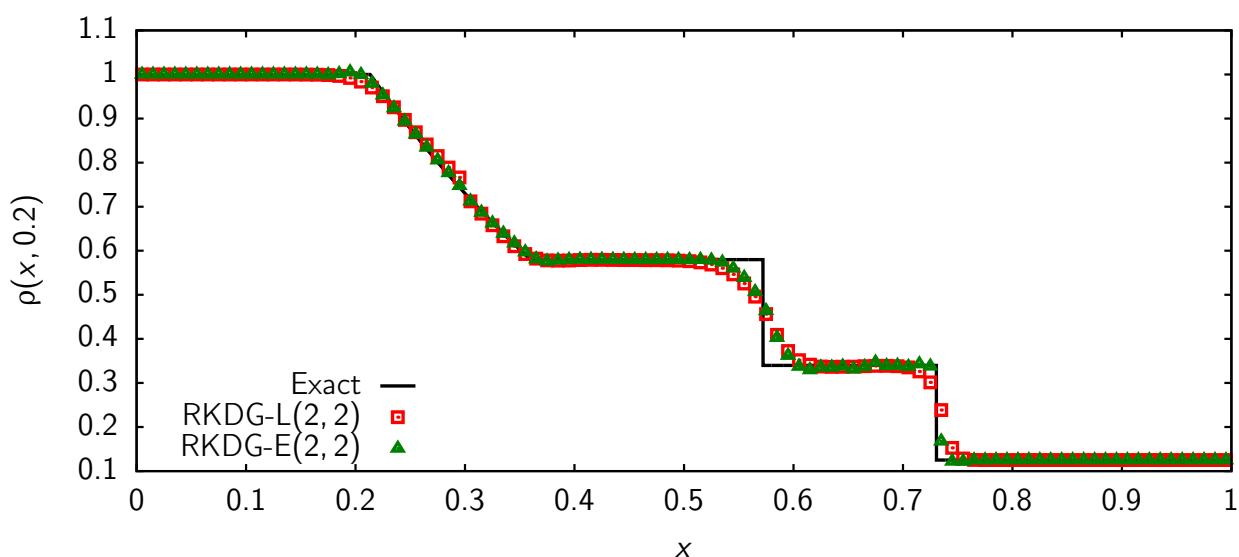


Рис. 2. Профили плотности в модифицированной задаче Сода при $t = t_{\max} = 0.2$

Задача Эйнфельдта. Описание этой задачи дано в разделе 3, расчеты осуществим при тех же шагах сеток по x, t .

Найденные профили плотности внутренней энергии в конечный момент времени приведены на рис. 3. Схема RKDG-E(2, 2) чуть-чуть точнее разрешает волны разрежения, дает более правильные значения ε на отрезке $x \in [0.3, 0.7]$ и несколько меньший нефизический выброс в точке $x = 0.5$.

Задача За Торо. Эта задача Римана [52, тест №3а] любопытна тем, что ее решение содержит сильную ударную волну с перепадом давления примерно в 45000 раз.

Посчитаем этот тест при $h_x = 0.005$ ($N_x = 200$, $x_{\max} = 1$) и $\tau = 3 \cdot 10^{-5}$ ($N_t = 400$, $t_{\max} = 0.012$).

Профили плотности в конечный момент времени приведены на рис. 4. В целом решения схем RKDG-L(2, 2) и RKDG-E(2, 2) близки друг к другу, но схема с упрощенной энтропийной регуляризацией генерирует более заметные немонотонности на «полочке» между ударной волной в точке $x \approx 0.85$ и контактными разрывом в точке $x = 0.8$. Почти точное разрешение неподвижного контактного разрыва, демонстрируемое обеими схемами, не является чем-то экстраординарным, так как они используют численный поток Годунова, обладающий нулевой диссипацией на такой структуре.

Задача Римана о двух расходящихся ударных волнах. Решение этой задачи Римана [52, тест №4], как следует из ее названия, содержит две расходящиеся ударные волны (одна из них сильная), а также подвижный контактный разрыв.

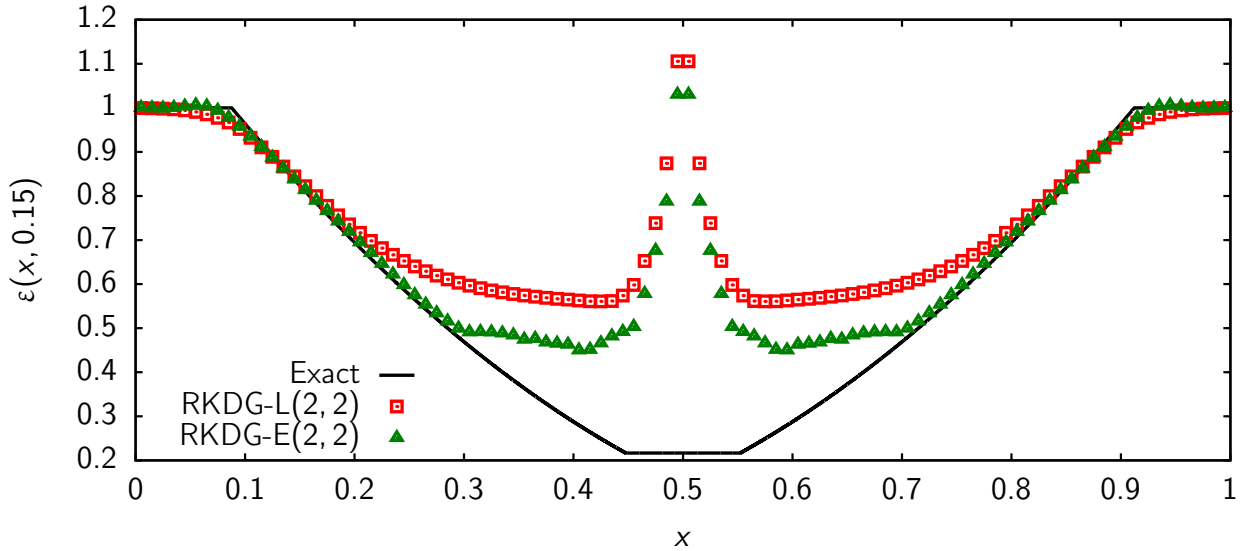


Рис. 3. Профили плотности внутренней энергии в задаче Эйнфельдта при $t = t_{\max} = 0.15$

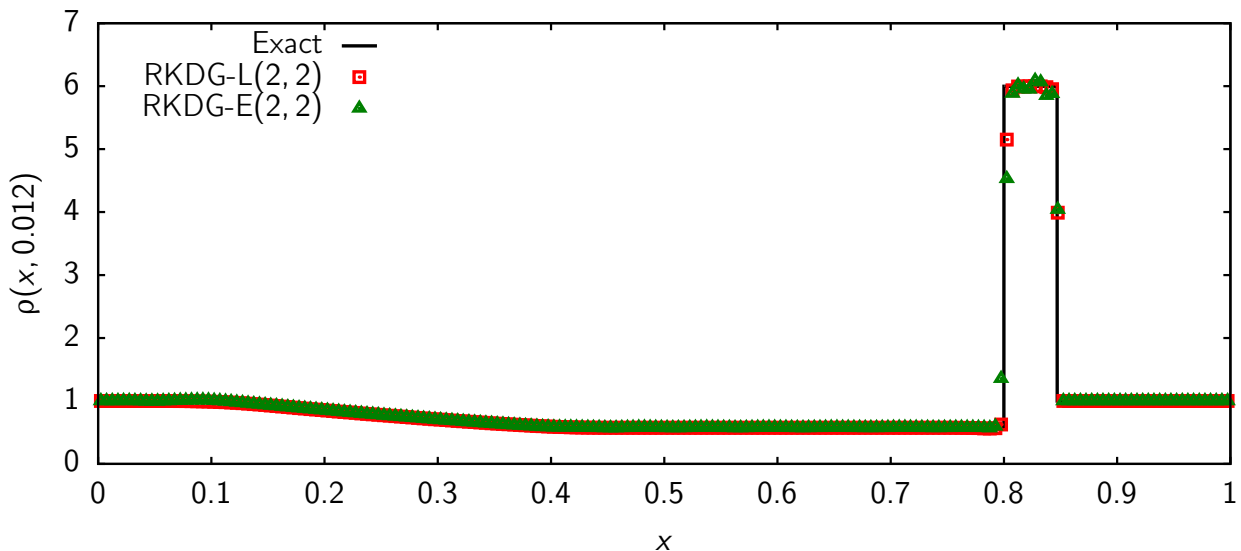


Рис. 4. Профили плотности в задаче За Торо при $t = t_{\max} = 0.012$

Посчитаем данный тест при шагах $h_x = 0.005$ ($N_x = 200$, $x_{\max} = 1$) и $\tau = 8.75 \cdot 10^{-5}$ ($N_t = 400$, $t_{\max} = 0.035$).

Профили плотности в конечный момент времени приведены на рис. 5. Схема RKDG-E(2, 2) меньше размывает контактный разрыв, но генерирует немонотонности большей амплитуды. Обе схемы разрешают ударные волны одинаково хорошо.

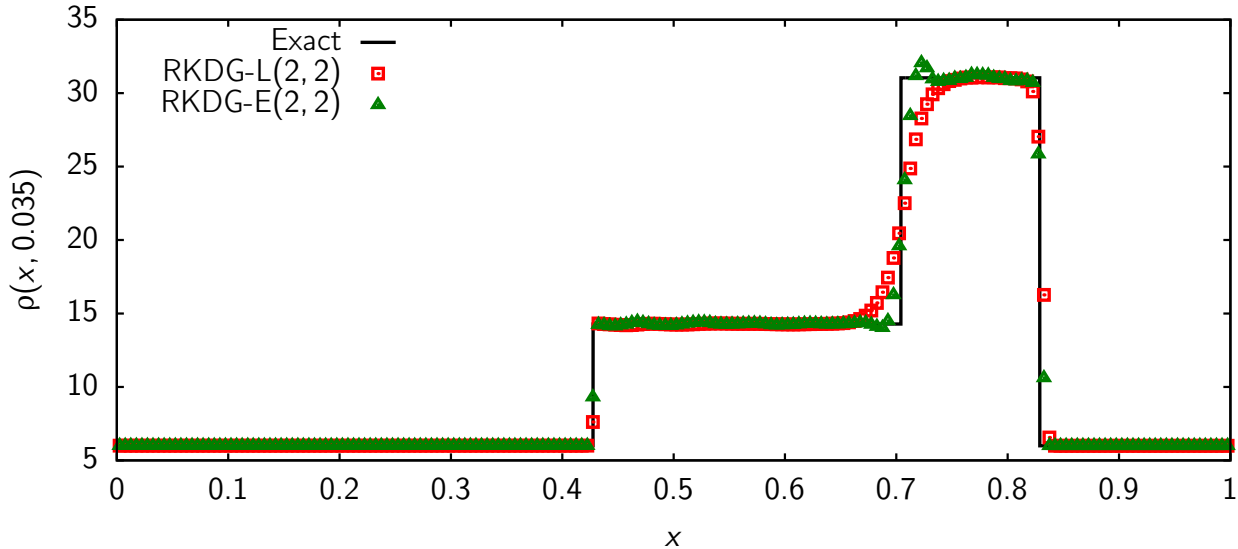


Рис. 5. Профили плотности в задаче Римана о двух расходящихся ударных волнах при $t = t_{\max} = 0.035$

Заключение

Дан подробный обзор методов энтропийной коррекции в конечно-разностных, конечно-объемных, конечно-элементных схемах для систем уравнений гиперболического типа. Сформулированы открытые проблемы теории энтропийно устойчивых численных схем.

Вариационный метод энтропийной регуляризации DG-схем проверен на газодинамической задаче Эйнфельдта. На ее примере показано, что в случае систем квазилинейных уравнений одна лишь энтропийная устойчивость без контроля за амплитудой немонотонностей (например, без ограничителей наклонов) не может гарантировать устойчивого счета по DG-схемам.

Ввиду этого факта разработан упрощенный метод энтропийной регуляризации DG-схем. Этот метод применен к DG-схеме второго порядка аппроксимации по пространству и времени. Полученная схема успешно протестирована на задачах Римана для одномерных уравнений Эйлера: модифицированной задаче Сода, задаче Эйнфельдта, задаче Торо о сильной ударной волне, задаче о двух расходящихся ударных волнах. Кроме то-

го, проведено сравнение нового метода с ограничителем наклонов MUSCL. Показано, что метод упрощенной энтропийной регуляризации позволяет добиться лучшего разрешения волн разрежения и контактных разрывов.

Библиографический список

1. Tadmor E. Entropy stable schemes // Handbook of Numerical Analysis. — 2016. — Vol. 17. — P. 467–493.
2. Osher S. Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximations // SIAM J. Numer. Anal. — 1984. — Vol. 21. — P. 217–235.
3. On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks / A. Harten, J. M. Hyman, P. D. Lax, B. Keyfitz // Comm. Pure Appl. Math. — 1976. — Vol. 29. — P. 297–322.
4. Osher S., Tadmor E. On the convergence of difference approximations to scalar conservation laws // Math. Comput. — 1988. — Vol. 50. — P. 19–51.
5. Crandall M. G., Majda A. Monotone difference approximations for scalar conservation laws // Math. Comput. — 1980. — Vol. 34. — P. 1–21.
6. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. — 1983. — Vol. 49. — P. 357–393.
7. Lax P., Wendroff B. Systems of conservation laws // Comm. Pure Appl. Math. — 1960. — Vol. 13. — P. 217–237.
8. Bouchut F., Bourdarias C., Perthame B. A MUSCL method satisfying all the numerical entropy inequalities // Math. Comput. — 1996. — Vol. 65. — P. 1439–1461.
9. Tadmor E. The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws. I // Math. Comp. — 1987. — Vol. 49. — P. 91–103.
10. Tadmor E. Entropy stability theory for difference approximations of nonlinear conservation laws and related time-dependent problems // Acta Numerica. — 2003. — P. 451–512.
11. Le Floch P., Rohde C. High-order schemes, entropy inequalities, and non-classical shocks // SIAM J. Numer. Anal. — 2000. — Vol. 37, no. 6. — P. 2023–2060.
12. Le Floch P., Mercier J. M., Rohde C. Fully discrete, entropy conservative schemes of arbitrary order // SIAM J. Numer. Anal. — 2002. — Vol. 40, no. 5. — P. 1968–1992.

13. Ismail F., Roe P. Affordable, entropy-consistent Euler flux functions II: Entropy production at shocks // *J. Comput. Phys.* — 2009. — Vol. 228. — P. 5410–5436.
14. Chandrashekar P. Kinetic energy preserving and entropy stable finite volume schemes for compressible Euler and Navier–Stokes equations // *Commun. Comput. Phys.* — 2013. — Vol. 14, no. 5. — P. 1252–1286.
15. Fjordholm U. S., Mishra S., Tadmor E. Arbitrarily high-order accurate entropy stable essentially nonoscillatory schemes for systems of conservation laws // *SIAM J. Numer. Anal.* — 2012. — Vol. 50, no. 2. — P. 544–573.
16. Fisher T. C., Carpenter M. H. High-order entropy stable finite difference schemes for nonlinear conservation laws: Finite domains // *J. Comput. Phys.* — 2013. — Vol. 252. — P. 518–557.
17. Zakerzadeh H., Fjordholm U. S. High-order accurate, fully discrete entropy stable schemes for scalar conservation laws // *IMA J. Numer. Anal.* — 2016. — Vol. 2, no. 1. — P. 633–654.
18. Cheng X., Nie Y. A third-order entropy stable scheme for hyperbolic conservation laws // *J. Hyperbolic Differ. Equ.* — 2016. — Vol. 13, no. 1. — P. 129–145.
19. Biswas B., Dubey R. K. Low dissipative entropy stable schemes using third order WENO and TVD reconstructions // *Adv. Comput. Math.* — 2017. — Vol. 44, no. 4. — P. 1153–1181.
20. Entropy conservative and entropy stable schemes for nonconservative hyperbolic systems / M. J. Castro, U. S. Fjordholm, S. Mishra, C. Pares // *SIAM J. Numer. Anal.* — 2013. — Vol. 51, no. 3. — P. 1371–1391.
21. Остапенко В. В. Симметричные компактные схемы с искусственными вязкостями повышенного порядка дивергентности // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2002. — Т. 42, № 7. — С. 1019–1038.
22. Гаврилин В. А., Злотник А. А. О пространственной дискретизации одномерной квазигазодинамической системы уравнений с общими уравнениями состояния и балансе энтропии // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2015. — Т. 55, № 2. — С. 267–284.
23. Злотник А. А. Энтропийно консервативная пространственная дискретизация многомерной квазигазодинамической системы уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2017. — Т. 57, № 4. — С. 710–729.

24. Дородницын Л. В. Энтروпийная теорема для семейства квазигазодинамических систем уравнений // Матем. моделирование. — 2002. — Т. 14, № 11. — С. 3–9.
25. Guermond J.-L., Pasquetti R., Popov B. Entropy viscosity method for nonlinear conservation laws // J. Comput. Phys. — 2011. — Vol. 230, no. 11. — P. 4248–4267.
26. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. — 1959. — Т. 47 (89), № 3. — С. 271–306.
27. Courant R., Isaacson E., Rees M. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite difference // Commun. Pure and Appl. Math. — 1952. — Vol. 5, no. 3. — P. 243–255.
28. Roe P. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. Comput. Phys. — 1981. — Vol. 43, no. 2. — P. 357–372.
29. Engquist B., Osher S. One-sided difference approximations for nonlinear conservation laws // Math. Comput. — 1981. — Vol. 36. — P. 321–351.
30. Harten A., Lax P. D., van Leer B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // SIAM Rev. — 1983. — Vol. 25, no. 1. — P. 35–61.
31. Toro E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: a Practical Introduction. — Springer, 2009.
32. A unified framework for the construction of one-step finite volume and discontinuous Galerkin schemes on unstructured meshes / M. Dumbser, D. S. Balsara, E. F. Toro, C.-D. Munz // J. Comput. Phys. — 2008. — Vol. 227, no. 18. — P. 8209–8253.
33. Годунов С. К., Куликов И. М. Расчет разрывных решений уравнений гидродинамики с гарантией неубывания энтропии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2014. — Т. 54, № 6. — С. 1008–1021.
34. Schmidtman B., Winters A. R. Hybrid entropy stable HLL” type Riemann solvers for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. — 2017. — Vol. 330. — P. 566–570.
35. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М. : Физматлит, 2012. — 656 с.

36. Chen T., Shu C.-W. Entropy stable high order discontinuous Galerkin methods with suitable quadrature rules for hyperbolic conservation laws // *J. Comput. Phys.* — 2017. — Vol. 345. — P. 427–461.
37. Jiang G. S., Shu C.-W. On a cell entropy inequality for discontinuous Galerkin methods // *Math. Comput.* — 1994. — Vol. 62. — P. 531–538.
38. Hou S., Liu X.-D. Solutions of multi-dimensional hyperbolic systems of conservation laws by square entropy condition satisfying discontinuous Galerkin method // *J. Sci. Comput.* — 2007. — Vol. 31. — P. 127–151.
39. Hughes T. J., Franca L., Mallet M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: I. symmetric forms of the compressible Euler and Navier–Stokes equations and the second law of thermodynamics // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* — 1986. — Vol. 54. — P. 223–234.
40. Barth T. J. Numerical methods for gasdynamic systems on unstructured meshes. in an introduction to recent developments in theory and numerics for conservation laws // *Lecture Notes in Computational Science and Engineering.* — 1999. — Vol. 5. — P. 195–285.
41. Hildebrand A., Mishra S. Entropy stable shock capturing space–time discontinuous Galerkin schemes for systems of conservation laws // *Numer. Math.* — 2014. — Vol. 126. — P. 103–151.
42. Hesthaven J. S., Warburton T. *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications.* — Springer, 2007.
43. Kopriva D. A., Gassner G. On the quadrature and weak form choices in collocation type discontinuous Galerkin spectral element methods // *J. Sci. Comput.* — 2010. — Vol. 44. — P. 136–155.
44. Gassner G. J. A skew-symmetric discontinuous Galerkin spectral element discretization and its relation to SBP-SAT finite difference methods // *SIAM J. Sci. Comput.* — 2013. — Vol. 35. — P. A1233–A1253.
45. Discretely conservative finite-difference formulations for nonlinear conservation laws in split form: Theory and boundary conditions / T. C. Fisher, M. H. Carpenter, J. Nordström et al. // *J. Comput. Phys.* — 2013. — Vol. 234. — P. 353–375.
46. Gassner G. J., Winters A. R., Kopriva D. A. A well balanced and entropy conservative discontinuous Galerkin spectral element method for the shal-

- low water equations // *Appl. Math. Comput.* — 2016. — Vol. 272. — P. 291–308.
47. Entropy stable spectral collocation schemes for the Navier–Stokes equations: Discontinuous interfaces / M. H. Carpenter, T. C. Fisher, E. J. Nielsen, S. H. Frankel // *SIAM J. Sci. Comput.* — 2014. — Vol. 36. — P. B835–B867.
48. Abgrall R. Essentially non-oscillatory residual distribution schemes for hyperbolic problems // *J. Comput. Phys.* — 2006. — Vol. 214. — P. 773–808.
49. Abgrall R. A general framework to construct schemes satisfying additional conservation relations. application to entropy conservative and entropy dissipative schemes // *J. Comput. Phys.* — 2018. — Vol. 372. — P. 640–666.
50. Криксин Ю. А., Тишкин В. Ф. Энтروпийная регуляризация разрывного метода Галеркина в одномерных задачах газовой динамики // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2018. — № 100. — 22 с. — URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-100>.
51. Cockburn B. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems // *Lect. Notes Math.* — 1997. — Vol. 1697. — P. 150–268.
52. Liska R., Wendroff B. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations // *SIAM J. Sci. Comput.* — 2003. — Vol. 25, no. 3. — P. 995–1017.

Оглавление

Введение	3
1. Описание разрывных схем Галеркина	9
2. Вариационный метод энтропийной регуляризации	11
3. Тестирование вариационного метода на одномерных задачах газодинамики	12
4. Упрощенный метод энтропийной регуляризации	15
5. Тестирование упрощенного метода на одномерных задачах газодинамики	17
Заключение.	20
Библиографический список	21