ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 42 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Гавриков М.Б., Таюрский А.А.

# Простая математическая модель торнадо

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки:*** Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Простая математическая модель торнадо // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 42. 34 с. doi:10.20948/prepr-2019-42
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-42

**О р д е н а   Л е н и н а**
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**
**имени М.В.Келдыша**
**Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к**

**М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский**

# Простая математическая модель торнадо

**Москва — 2019**

*Гавриков М.Б., Таюрский А.А.*

**Простая математическая модель торнадо**

В работе предложена математическая модель торнадо, опирающаяся на аппарат механики сплошных сред, согласно которой закрученные потоки восходящего воздуха в торнадо имеют место и без учёта силы Кориолиса и вертикальной конвекции тёплого воздуха. Согласно полученным результатам необходимыми условиями возникновения торнадо являются наличие мощного вихревого движения в верхних слоях атмосферы и рост давления воздуха по мере удаления от центра торнадо. Нахождение параметров воздушных течений в торнадо сводится к решению краевой задачи для полученного в работе нелинейного параболического интегро-дифференциального уравнения относительно комплексной “температуры”. Предложен алгоритм решения указанной краевой задачи, и численно, методом установления, исследованы её стационарные решения.

***Ключевые слова:*** математическая модель торнадо, сила Кориолиса, вихревое движение, метод установления.

*Mikhail Borisovich Gavrikov, Aleksei Aleksandrovich Taiurskii*

**Simple mathematical model of tornado**

The paper proposes a mathematical model of tornado, based on the apparatus of continuum mechanics, according to which swirling flows of ascending air in a tornado take place without taking into account Coriolis force and vertical convection of warm air. According to the results obtained, the necessary conditions for the occurrence of a tornado are the presence of a powerful vortex motion in the upper atmosphere and an increase in air pressure with distance from the center of the tornado. Finding the parameters of air currents in a tornado reduces to solving a boundary value problem for a nonlinear parabolic integro-differential equation obtained in the work with respect to a complex “temperature”. An algorithm for solving the specified boundary value problem is proposed and its stationary solutions are investigated numerically by the method of establishment.

***Key words:*** mathematical model of tornado, Coriolis force, vortex motion, method of establishment.

## 1. Введение

В работе предложена простая математическая модель торнадо, помогающая понять природу этого сложного явления. При этом предполагается, что:

1) торнадо – это воздушное течение специального типа, который будет уточнён ниже,

2) необходимым условием возникновения торнадо является превышение давления воздуха на периферии торнадо над давлением в его центре,

3) другим необходимым условием существования торнадо является также наличие вихревого движения в верхних слоях атмосферы.

При этом, как показывает наше исследование, угловая скорость вихревого движения должна быть жёстко связана с перепадом давления периферия–центр в торнадо.

В ряде работ [1,2] считается, что причиной возникновения торнадо является вертикальное движение вверх тёплого воздуха, вызванное локальным нагревом солнечной энергией участков земной или водной поверхности и прилегающих к ним воздушных масс. Восходящие потоки воздуха приводят сначала к радиальному, а затем к вихревому движениям воздуха у поверхности Земли, обусловленным силой Кориолиса. Наше исследование указывает на другой механизм движения воздушных масс в торнадо, который не исключает механизм из работ [1,2] и позволяет более глубоко понять физическую природу явления торнадо. Если согласиться с причиной возникновения торнадо из работ [1,2], то торнадо должны возникать “как грибы” на большей части поверхности Земли, чего, однако, не наблюдается. Кроме того, огромные скорости (~100 м/сек) воздушных масс в торнадо могут достигаться только в результате значительных энерговложений извне. Однако силы Кориолиса и энергия воздушных потоков тёплого воздуха слишком малы и не могут объяснить наблюдаемые огромные значения кинетической энергии воздушных потоков в торнадо.

Предлагаемая модель основана на обобщении точного решения Т. Кармана [3], которое задаёт течение вязкой несжимаемой жидкости, расположенной над бесконечным плоским горизонтальным диском, обусловленное его равномерным вращением. Решение Кармана показывает, что вращение диска приводит к “эффекту пылесоса” – жидкость из бесконечности с некоторой постоянной скоростью втягивается по направлению к вращающемуся диску и растекается вдоль него. При этом давление жидкости может меняться по высоте, но на каждой плоскости, параллельной диску, оно постоянное. Если отказаться от последнего требования и считать давление в каждой горизонтальной плоскости непостоянным и на периферии большим, чем в центре, то, как показано в работе, при определённых условиях течение жидкости над диском кардинально меняет свой характер – жидкость притекает вдоль диска к вертикальной оси, вращаясь вокруг неё, и затем выбрасывается вдоль вертикальной оси в бесконечность. Но именно так, отвлекаясь от деталей, ведут себя воздушные массы в торнадо. При этом оказывается, что вращение жидкости у Земли (обусловленное силой Кориолиса) играет второстепенную роль, а определяющим является вращение жидкости на бесконечности, угловая скорость которого должна быть определённым образом связана с перепадом давления в горизонтальной плоскости.

С математической точки зрения предлагаемая модель торнадо сводится к начально-краевой задаче на вертикальной полупрямой $0 \le z < +\infty$ для некоторого нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных относительно комплексной функции $u(t,z) = (U_r / r) + \mathrm{i}(U_\varphi / r)$, где $U_r$, $U_\varphi$ – радиальная и азимутальная компоненты скорости, $z \ge 0$ – высота. Основной интерес представляют стационарные решения указанной задачи, которые численно ищутся методом установления, однако не исключено, что нестационарные решения при дальнейшем исследовании окажутся более важными. Мы также приводим некоторые точные решения рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения, которые помогают протестировать численный алгоритм его решения.

Кроме того, вкратце рассмотрено обобщение математической модели торнадо, позволяющее учесть влияние магнитного поля на процессы в торнадо в предположении, что вместо воздуха мы имеем дело с несжимаемой электропроводной классической МГД-плазмой [4]. Однако исследование торнадо на базе этой обобщённой модели выходит за рамки настоящей работы и требует отдельного рассмотрения.

## 2. Основные уравнения

Исходными являются уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости в постоянном поле тяжести Земли:

$$\begin{gathered} \mathrm{div}\boldsymbol{U} = 0, \quad \rho = \mathrm{const}, \\ \frac{\partial \rho \boldsymbol{U}}{\partial t} + \mathrm{Div}\left(\rho \boldsymbol{U}\boldsymbol{U} + p\mathrm{I}_3\right) = 2\mu \mathrm{Div}\,\mathrm{def}\boldsymbol{U} + \rho \boldsymbol{g}, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\rho$, $p$, $\boldsymbol{U}$ – плотность, давление, гидродинамическая скорость жидкости, соответственно, $\mu$ – коэффициент динамической вязкости, $\boldsymbol{g}$ – постоянное ускорение силы тяжести, $\mathrm{I}_3$ – единичный трёхмерный тензор, $\mathrm{def}\boldsymbol{U}$ тензор деформации векторного поля $\boldsymbol{U}$, имеющий в декартовых координатах вид:

$$\mathrm{def}\boldsymbol{U} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U^k}{\partial x^s} + \frac{\partial U^s}{\partial x^k}\right)\right]_{1 \le k,s \le 3}.$$

Ниже считается $\mu = \text{const}$, $\rho = \text{const}$ – заданные величины, а 4 неизвестные функции – $p$ и 3 компоненты вектора $\boldsymbol{U}$ – ищутся из 4 скалярных уравнений (1).

В осесимметричном случае $(\partial / \partial\varphi = 0)$ система (1) допускает частное решение вида

$$U_r = rA(r,z), \quad U_\varphi = rB(t,z), \quad U_z = C(t,z), \quad p = Q(t)r^2 + R(t,z), \tag{2}$$

где ось $z$ совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{g} = (0,0,-g)$, функция $Q(t)$ задана, а функции $A,B,C,R$ ищутся подстановкой выражений (2) в систему (1). Учитывая условие осевой симметрии, $\partial / \partial\varphi = 0$, после несложных преобразований приходим к следующему результату.

**Теорема 1.** *В случае осевой симметрии функции* (2) *являются решением системы* (1) *тогда и только тогда, когда функции* $A,B,C$ *удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial t} + A^2 - B^2 + C\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{2Q}{\rho} = 0,\\
&\frac{\partial B}{\partial t} + 2AB + C\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0,\\
&\frac{\partial C}{\partial z} = -2A.
\end{aligned} \tag{3}$$

*При этом по найденным из системы* (3) *функциям* $A,B,C$ *функция* $R$ *ищется из уравнения*

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{C^2}{2} + \frac{2\mu}{\rho}A + \frac{R}{\rho} + gz\right) = 0, \tag{4}$$

*которое позволяет однозначно вычислить производную* $\partial R / \partial z$ *и, значит, и функцию* $R$ *с точностью до произвольной функции времени.* #

Система (3) переписывается относительной неизвестной комплексной функции $u \underset{\text{def}}{=} A + \mathrm{i}B$ с учётом равенств $A = \operatorname{Re} u$, $u^2 = (A^2 - B^2) + 2\mathrm{i}AB$ в следующем виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 + \frac{2Q(t)}{\rho} = 0,\\
&\frac{\partial C}{\partial z} = -2\operatorname{Re} u,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $C(t,z)\in\mathbb{R}$, $u(t,z)\in\mathbb{C}$ – вещественная и комплексная неизвестные функции. Наконец, систему (5) можно переписать в виде одного интегро-дифференциального уравнения. Пусть $C_0(t)\underset{\text{def}}{=}-C(t,0)$ – произвольная вещественная. Тогда система (5), очевидно, равносильна одному интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\left(C_0(t)+2\int_0^z \mathrm{Re}\,u\,\mathrm{d}z\right)\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+u^2+\frac{2Q(t)}{\rho}=0, \tag{6}$$

где $C_0(t)$, $Q(t)$ – произвольные заданные вещественные функции.

В работе [3] (см. также [5]) изучены некоторые стационарные ($\partial/\partial t=0$) решения системы (3) в случае $Q(t)\equiv 0$. Тогда система (3) сводится к автономной нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений 5-го порядка. В работах [3,5] рассмотрены полученные численно решения краевой задачи для указанной нелинейной системы 5-го порядка на полупрямой $0\le z<+\infty$ с определёнными (см. ниже) граничными условиями в точках $z=0$ и $z=+\infty$.

Рассмотрим начально-краевые задачи для системы (5).

## 3. Задача о возбуждении вязкой несжимаемой жидкости вращающимся диском

Рассмотрим полупространство $z\ge 0$, заполненное вязкой несжимаемой жидкостью, граница которого $z=0$ представляет собой бесконечный жёсткий диск, вращающийся вокруг оси $z$ с постоянной угловой скоростью $\Omega$. Это вращение вызывает стационарное движение жидкости в области $z>0$, задаваемое решениями вида (2) с $A,B,C,Q,R$, не зависящими от $t$. Указанное стационарное решение можно получить интеграцией на установление на полупрямой $0\le z<+\infty$ системы (5), дополненной граничными условиями в точках $z=0$ и $z=+\infty$. Для вывода граничных условий надо учесть условия *прилипания* и *непротекания*, которые на твёрдой поверхности для вязкой жидкости должны выполняться в каждый момент времени. При $z=0$ на жёстком диске условие прилипания для решения вида (2) сводится в равенствам $B(t,0)=\Omega$, $A(t,0)=0$, а условие непротекания – к соотношению $C(t,0)=0$. Иными словами, в каждый момент времени выполнены тождества $u(t,0)=\mathrm{i}\Omega$, $C(t,0)=0$. В точке $z=+\infty$ никаких условий для $C$ ставить не надо, а для $u$ постановка граничных условий зависит от сделанных предположений о поведении функций $u$ и $C$ на бесконечности, т.е. при $z\to+\infty$. Например, будем считать, что при $z\to+\infty$ в каждый момент времени существуют конечные пределы

$$u \to u(\infty), \quad C\frac{\partial u}{\partial z} \to 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \to 0, \tag{7}$$

где $u(\infty)$ не зависит от $t$ и первое предельное условие (7) можно дифференцировать по $t$ (т.е. $\partial u / \partial t \to \partial u(\infty) / \partial t = 0$ при $z \to +\infty$).

Заметим, что второе и третье условия (7) следуют из первого, если в каждый момент времени $C(t,z)$ ограничена на бесконечности по $z$, а вещественные и мнимые части $\partial u / \partial z$, $\partial^2 u / \partial z^2$ монотонные по $z$ функции.

Из (5) и (7) следует граничное условие для $u(\infty)$:

$$u(\infty)^2 + \gamma_0 = 0 \Leftrightarrow u(\infty) = \sqrt{-\gamma_0}, \quad \gamma_0 = 2Q / \rho.$$

Таким образом, система (5) дополняется следующими граничными условиями, которые должны выполняться в каждый момент времени:

$$u\big|_{z=0} = \mathrm{i}\Omega, \quad C\big|_{z=0} = 0, \quad u\big|_{z=+\infty} = \sqrt{-\gamma_0}, \quad \gamma_0 = \frac{2Q}{\rho}. \tag{8}$$

Итак, для получения стационарного движения в области $z > 0$ надо решить систему (5), (8) на установление с произвольным начальным условием $u\big|_{t=0} = u_0(z)$, $0 \le z < +\infty$, от выбора которого результат решения не должен зависеть. Случай $\gamma_0 = 0$ рассматривался в работах [3,5]. При $\gamma_0 > 0$ на бесконечности $z = +\infty$ несжимаемая жидкость, согласно (8), вращается как твёрдое тело с постоянной угловой скоростью $\sqrt{\gamma_0}$. При $\gamma_0 < 0$ на бесконечности жидкость растекается по радиусам с радиальной скоростью, линейно зависящей от радиуса, причём коэффициент пропорциональности $\sqrt{|\gamma_0|}$ один и тот же для всех радиусов. Имея в виду приложения развиваемой теории к изучению торнадо, ниже считается, по умолчанию, $\gamma_0 > 0$.

Заметим, что ограниченность вертикальной скорости $C(t,z)$ на бесконечности по $z$ не гарантируется ограниченностью по $t$ и $z$ функции $u(t,z)$. Соответствующий контрпример содержится ниже в **Теореме 2**. Как показывает численное исследование, проведённое ниже, для стационарного решения системы (5), (8) функция $C(z)$ не только ограничена на бесконечности, но имеет конечный предел $\lim\limits_{z \to +\infty} C(z)$.

Обезразмерим систему (5), (8), выбрав следующие характерные масштабы:

$$t_0 = \frac{1}{\Omega} \text{ (времени)}, \quad U_0 = \sqrt{\frac{\mu\Omega}{\rho}} \text{ (скорости)},$$

$$L_0 = U_0 t_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho\Omega}} \text{ (длины)},\ p_0 = \frac{\mu\Omega}{2} \text{ (давления)}.$$

При этом будем считать $u_0 = 1/t_0 = \Omega$, $C_0 = U_0$. Тогда система (5), (8) в безразмерных переменных примет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 + \Gamma = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = -2\operatorname{Re} u,\\
&u\big|_{z=0} = \mathrm{i}, \quad C\big|_{z=0} = 0, \quad u\big|_{z=+\infty} = \sqrt{-\Gamma},\\
&0 \le z < +\infty, \quad t \ge 0, \quad \Gamma = 2Q/(\rho\Omega^2).
\end{aligned} \tag{9}$$

Система (9) сводится к краевой задаче для одного интегро-дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - 2\int_0^z \operatorname{Re} u\,\mathrm{d}z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 + \Gamma = 0,\\
&u\big|_{z=0} = \mathrm{i}, \quad u\big|_{z=+\infty} = \sqrt{-\Gamma},\\
&0 \le z < +\infty, \quad t \ge 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

В качестве начального условия $u_0(z)$ для задач (9), (10) можно взять любую гладкую на $[0,+\infty]$ функцию, удовлетворяющую граничным условиям. Например, можно положить

$$u_0(z) = \frac{\mathrm{i} + z\sqrt{-\Gamma}}{1+z}, \quad 0 \le z < +\infty.$$

Рассмотрим точные решения системы (9), не удовлетворяющие граничным условиям.

**Теорема 2.** *Система* (9) *имеет двухпараметрическое семейство однородных по пространству точных решений, для которых* $u = A(t) + \mathrm{i}B(t)$ *не зависит от* $z$, *а* $C = C(t,z)$ *линейно зависит от* $z$ *и, в частности, неограниченно растёт на бесконечности по* $z$.

1) *При* $\Gamma = 0$ *указанное семейство имеет вид* (Рис. 1)

$$A(t) = \frac{t}{t^2+R^2}, \quad B(t) = -\frac{R}{t^2+R^2}, \quad C(t,z) = -\frac{2tz}{t^2+R^2} + S, \quad -\infty < t < +\infty, \tag{11}$$

$R, S$ *– произвольные вещественные константы.*

*При* $R = 0$ *семейство* (11) *переходит в однопараметрическое семейство решений вида*:

$$A(t)=\frac{1}{t},\quad B(t)\equiv 0,\quad C(t,z)=-\frac{2z}{t}+S,\quad t\neq 0, \tag{12}$$

$S\in\mathbb{R}$ *– произвольная константа. Кроме того, при* $\varGamma=0$ *есть особое решение* $A(t)\equiv 0$, $B(t)\equiv 0$, $C(t,z)\equiv S$ *– произвольная константа.*

2) *При* $\varGamma>0$ *указанное семейство имеет вид* (Рис. 2)

$$A(t)=-\sqrt{\varGamma}\,\frac{\sin 2\sqrt{\varGamma}t}{\cos 2\sqrt{\varGamma}t+\mathrm{ch}2\sqrt{\varGamma}R},\quad B(t)=-\sqrt{\varGamma}\,\frac{\mathrm{sh}2\sqrt{\varGamma}R}{\cos 2\sqrt{\varGamma}t+\mathrm{ch}2\sqrt{\varGamma}R}, \tag{13}$$
$$C(t,z)=-2A(t)z+S,\quad -\infty<t<+\infty,$$

$R,S$ *– произвольные вещественные константы.*

*При* $R=0$ *семейство* (13) *переходит в однопараметрическое семейство решений вида*:

$$A(t)=-\sqrt{\varGamma}\,\mathrm{tg}\sqrt{\varGamma}t,\quad B(t)=0,\quad C(t,z)=-2A(t)z+S,\quad |t|<\frac{\pi}{2\sqrt{\varGamma}}, \tag{14}$$

*где* $S\in\mathbb{R}$ *– произвольная константа. При этом решения* (13) *периодичны по* $t$ *с периодом* $\pi/\sqrt{\varGamma}$ .

3) *При* $\varGamma=1$ *краевая задача* (9) *имеет точное решение* $u\equiv i$, $C\equiv 0$.

Решения (11)–(14) имеют простой геометрический и физический смысл.

С точки зрения геометрии формулы (11) задают в параметрической форме пучок окружностей (Рис. 1), проходящих через точку $(0,0)$ на комплексной плоскости $(A,B)=A+\mathrm{i}B=u$:

$$A^2+\left(B+\frac{1}{2R}\right)^2=\frac{1}{4R^2}\Leftrightarrow\left|u+\frac{\mathrm{i}}{2R}\right|=\frac{1}{4|R|}.$$

Каждая окружность пучка с проколотой точкой $(0,0)$ при $t$, изменяющемся от $-\infty$ до $+\infty$, однократно пробегается по часовой стрелке при $R<0$ и против часовой стрелки при $R>0$. При этом для $R<0$ окружности пучка расположены в верхней полуплоскости, а при $R>0$ – в нижней. При $R=0$ окружность пучка выпрямляется в прямую $B=0$ с проколотой точкой $(0,0)$, в параметрическом виде задаваемую формулами (12). Наконец, при различных $R\neq 0$ окружности пучка с проколотой точкой $(0,0)$ попарно не пересекаются и замащивают плоскость $(A,B)$ с выброшенной прямой $B=0$.

Формулы (13) задают в параметрической форме два семейства окружностей (Рис. 2), стягивающихся при $R\to\pm\infty$ к точкам $\mp\mathrm{i}\sqrt{\varGamma}$

$$A^2+\left(B+\frac{\sqrt{\varGamma}}{\mathrm{th}2\sqrt{\varGamma}R}\right)^2=\frac{\varGamma}{\mathrm{sh}^2 2\sqrt{\varGamma}R}\Leftrightarrow\left|u+\frac{\mathrm{i}\sqrt{\varGamma}}{\mathrm{th}2\sqrt{\varGamma}R}\right|=\frac{\sqrt{\varGamma}}{\mathrm{sh}2\sqrt{\varGamma}|R|}.$$

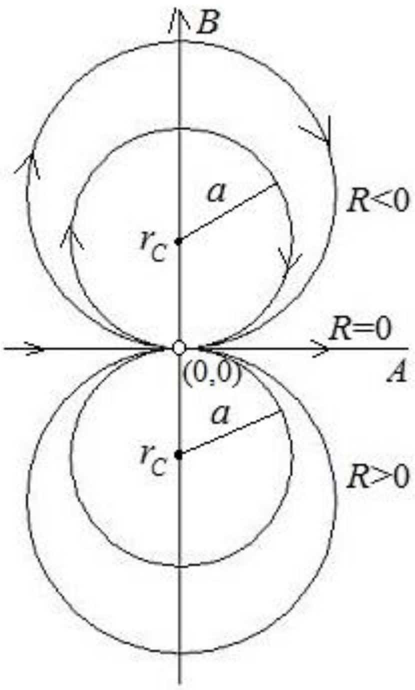


Рис. 1 Пучок окружностей $|u - r_C| = a$, $r_C = r_C(R) = -\mathrm{i}/(2R)$, $a = a(R) = 1/(2|R|)$.

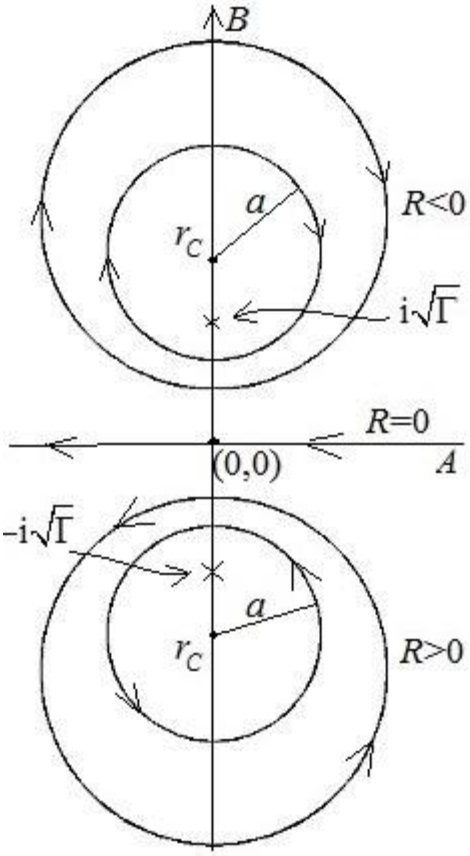


Рис. 2 Пучок окружностей $|u - r_C| = a$, $r_C = r_C(R) = -\mathrm{i}\sqrt{\Gamma}\,/\,\mathrm{th}(2\sqrt{\Gamma}R)$, $a = a(R) = \sqrt{\Gamma}\,/\,\mathrm{sh}(2\sqrt{\Gamma}|R|)$.

При $R \to 0$ окружности переходят в прямую $B = 0$, задаваемую в параметрической форме формулами (14). При $R < 0$ окружность расположена в верхней полуплоскости $u$, когда $t$ меняется от $-\infty$ до $+\infty$ периодически – с периодом $\pi/\sqrt{\Gamma}$ – пробегается по часовой стрелке. При $R > 0$ окружность расположена в нижней полуплоскости и пробегается с тем же периодом, но против часовой стрелки, когда $t$ меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Для центров $r_C = r_C(R)$ и радиусов $a = a(R)$ окружностей при $R \to \pm\infty$ имеем $r_C \to \mp\mathrm{i}\sqrt{\Gamma}$, $a \to 0$, т.е. окружности стягиваются к точкам $\mp\mathrm{i}\sqrt{\Gamma}$. Для различных $R \neq 0$ окружности на Рис. 2 попарно не пересекаются и замащивают полуплоскости $B < 0$ и $B > 0$ с проколотыми точками $\mp\mathrm{i}\sqrt{\Gamma}$ соответственно.

С физической точки зрения решения из **Теоремы 2** при $S = 0$ задают течения вязкой несжимаемой жидкости, расположенной в области $z > 0$ над диском и возбуждаемых вращением диска с угловой скоростью $\Omega$, изменяющейся во времени по закону $\Omega = B(t)$. При этом условие прилипания на диске справедливо для движения только в азимутальном направлении. В радиальном направлении жидкость свободно скользит по диску с радиальной скоростью $rA(t)$. Практически такая ситуация имеет место для дисков, материал которых обладает анизотропией по азимутальному и радиальному направлениям.

**Доказательство Теоремы 2.** Простейший способ доказательства теоремы – прямой подстановкой в систему (9) убедиться, что функции (11)–(14) доставляют решения этой системы.

Приведём более совершенное доказательство. Считая $\partial / \partial z = 0$ в первом уравнении системы (9), сведём его к виду

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u^2 + \Gamma = 0, \qquad (15)$$

где $u$ – комплексная функция.

1) Пусть $\Gamma = 0$. Тогда уравнение (15) даёт (учитывая автономность уравнения (15) здесь и ниже $t$ определяется с точностью до произвольной вещественной постоянной):

$$-\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \mathrm{d}t \Leftrightarrow \frac{1}{u} = t + \mathrm{i}R, \quad R \in \mathbb{R} - \text{произвольное.}$$

Откуда

$$u = \frac{1}{t + \mathrm{i}R} \Rightarrow A(t) = \mathrm{Re}\,u = \frac{t}{t^2 + R^2}, \quad B(t) = \mathrm{Im}\,u = -\frac{R}{R^2 + t^2}.$$

Из второго уравнения системы (9) тогда получим:

$$C(t, z) = -2\int \mathrm{Re}\,u \mathrm{d}z = -\frac{2tz}{t^2 + R^2} + S,$$

где $S \in \mathbb{R}$ – произвольная константа. Итак, получили формулы (11), (12).

2) При $\Gamma > 0$ уравнение (15) даёт:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + \Gamma} = -\int \mathrm{d}t \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \mathrm{arctg} \frac{u}{\sqrt{\Gamma}} = -(t + \mathrm{i}R),$$

где $R \in \mathbb{R}$ – произвольная константа. Отсюда

$$u = -\sqrt{\Gamma} \cdot \mathrm{tg}\sqrt{\Gamma}(t + \mathrm{i}R). \qquad (16)$$

Воспользуемся теперь равенством:

$$\mathrm{tg}z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{\mathrm{i}(e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z})} = \frac{\sin 2x + \mathrm{i} \cdot \mathrm{sh}2y}{\cos 2x + \mathrm{ch}2y}, \quad z = x + \mathrm{i}y.$$

Отсюда и из равенства (16) следуют соотношения:

$$A=\mathrm{Re}\,u=-\sqrt{\Gamma}\,\frac{\sin 2\sqrt{\Gamma}t}{\cos 2\sqrt{\Gamma}t+\mathrm{ch}2\sqrt{\Gamma}R},\quad B=\mathrm{Im}\,u=-\sqrt{\Gamma}\,\frac{\mathrm{sh}2\sqrt{\Gamma}R}{\cos 2\sqrt{\Gamma}t+\mathrm{ch}2\sqrt{\Gamma}R}.$$

Теперь из второго равенства системы (9) получим $C(t,z)=-2A(t)z+S$, где $S\in\mathbb{R}$ – произвольная постоянная. При $R=0$ получим $B\equiv 0$,

$$A(t)=-\sqrt{\Gamma}\,\frac{\sin 2\sqrt{\Gamma}t}{\cos 2\sqrt{\Gamma}t+1}=-\sqrt{\Gamma}\cdot\mathrm{tg}\sqrt{\Gamma}t,\quad t\neq\frac{\pi}{2\sqrt{\Gamma}}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Тем самым получены формулы (13), (14). Теорема доказана. #

**Замечания и комментарии.** Хотя выше считалось $\Gamma>0$, но поучительно рассмотреть также случай $\Gamma<0$. Тогда доказательство **Теоремы 2** сохраняет силу и с учётом равенства $\sqrt{\Gamma}=\sqrt{-|\Gamma|}=\mathrm{i}\sqrt{|\Gamma|}$ формула (16) даёт

$$u=-\mathrm{i}\sqrt{|\Gamma|}\cdot\mathrm{tg}\left[\mathrm{i}\sqrt{|\Gamma|}(t+\mathrm{i}R)\right],$$

откуда выводим

$$A(t)=\sqrt{|\Gamma|}\,\frac{\mathrm{sh}2\sqrt{|\Gamma|}t}{\cos 2\sqrt{|\Gamma|}R+\mathrm{ch}2\sqrt{|\Gamma|}t},\quad B(t)=\sqrt{|\Gamma|}\,\frac{\sin 2\sqrt{|\Gamma|}R}{\cos 2\sqrt{|\Gamma|}R+\mathrm{ch}2\sqrt{|\Gamma|}t},$$
$$C(t,z)=-2A(t)z+S,$$

где $R,S$ – произвольные вещественные постоянные. Тогда $(A(t),B(t))$ при $R\neq 0$ однократно пробегает дугу окружности, входящей в пучок окружностей, задаваемых уравнением

$$A^2+\left(B+\frac{\sqrt{|\Gamma|}}{\mathrm{tg}2\sqrt{|\Gamma|}R}\right)^2=\frac{|\Gamma|}{\sin^2 2\sqrt{|\Gamma|}R}\qquad(17)$$

и проходящих через точки $\left(\pm\sqrt{|\Gamma|},0\right)$ на вещественной оси (Рис. 3). Указанные дуги получаются выбрасыванием из окружностей (17) точек $\left(\pm\sqrt{|\Gamma|},0\right)$. При этом $R$ пробегает любой отрезок длины $\pi/\sqrt{|\Gamma|}$, например, можно считать $-\frac{\pi}{2\sqrt{|\Gamma|}}\le R\le\frac{\pi}{2\sqrt{|\Gamma|}}$. Поскольку окружности (17) для $R$, отличающихся лишь знаком, получаются зеркальным отражением относительно вещественной оси, то достаточно показать дуги окружностей для $0\le R\le\frac{\pi}{2\sqrt{|\Gamma|}}$. При $R=0,\frac{\pi}{2\sqrt{|\Gamma|}}$

окружность (17) переходит в интервал $\left(-\sqrt{|\Gamma|},\sqrt{|\Gamma|}\right)$ на вещественной оси, пробегаемый от точки $-\sqrt{|\Gamma|}$ к точке $\sqrt{|\Gamma|}$, когда $t$ меняется от $-\infty$ до $+\infty$. При $R=\dfrac{\pi}{4\sqrt{|\Gamma|}}$ окружность имеет вид $A^2+B^2=|\Gamma|$, для остальных $R$ дуги окружностей пучка, пробегаемых точкой $(A(t),B(t))$, изображены на Рис. 3.

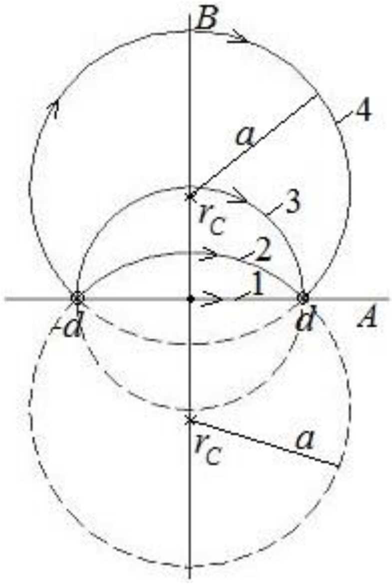


Рис. 3. Дуги пучка окружностей $|u-r_C(R)|=a(R)$, $r_C(R)=-d/\mathrm{tg}(2dR)$, $a(R)=d/\sin(2dR)$ для различных $R$: 1 – $R=0,\pi/(2d)$, 2 – $0<R<\pi/(4d)$, 3 – $R=\pi/(4d)$, 4 – $\pi/(4d)<R<\pi/(2d)$, где $d=\sqrt{|\Gamma|}$.

Выше рассмотрены три точных решения системы (15), которая может быть равносильным образом записана в виде

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}+A^2-B^2+\Gamma=0\quad \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}+2AB=0. \tag{18}$$

Оказалось, что интегральные кривые (15) в каждом из трёх рассмотренных случаев $(\Gamma=0,\Gamma>0,\Gamma<0)$ лежат на окружностях в плоскости $(A,B)$. Это неслучайно и объясняется наличием у системы (18) аналитического первого интеграла, линиями уровня которого являются окружности. Для получения этого интеграла умножим первое уравнение системы (18) на $A$, а второе – на $B$ и результаты сложим. После очевидных преобразований получим

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A^2+B^2\right)+A\left(A^2+B^2+\Gamma\right)=0\Rightarrow\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left(A^2+B^2+\Gamma\right)+A=0. \tag{19}$$

Из второго уравнения (18) получим

$$A = -\frac{1}{2B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln|B|.$$

Подставляя это выражение для $A$ в равенство (19), получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{A^2+B^2+\Gamma}{|B|} = 0 \Rightarrow f(A,B) = \frac{A^2+B^2+\Gamma}{B} = \mathrm{const}. \qquad (20)$$

Это и есть искомый первый интеграл. Линия уровня $f(A,B)=p$ имеет вид $A^2+(B-p/2)^2 = p^2/4-\Gamma$ и задаёт на плоскости $(A,B)$ либо окружность, либо точку, либо пустое множество.

Наконец, заметим, что при $\Gamma = 0$ система (18) сводится к однородному уравнению $\mathrm{d}A/\mathrm{d}B = (A/B - B/A)/2$, которое легко интегрируется.

## 4. Простая модель торнадо

Явление торнадо ($\equiv$ смерча) обусловлено физическими процессами, происходящими в атмосферном воздухе Земли. Для описания этих процессов используем математический аппарат механики сплошных сред. При этом необходимо учесть вращение Земли с *постоянной* угловой скоростью $\Omega$ вокруг оси, проходящей через северный $(N)$ и южный $(S)$ полюса. Рассмотрим две системы координат – неподвижную $Oxyz$ с точкой $O$, совпадающей с центром Земли, осью $Oz$, направленной вдоль оси вращения Земли, и подвижной $O'x'y'z'$, жёстко связанной с поверхностью Земли. При этом ось $O'x'$ направлена на восток вдоль параллели, проходящей через точку $O'$, а ось $O'y'$ – на север вдоль меридиана, проходящего через точку $O'$ (Рис. 4).

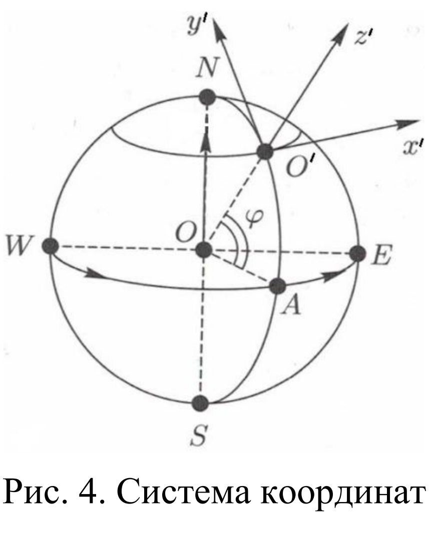


Рис. 4. Система координат

Мы хотим записать уравнение динамики атмосферного воздуха в подвижной системе координат. Считая неподвижную систему координат приближённо инерциальной, уравнение движения материальной точки массы $m$ под действием силы тяжести вблизи поверхности Земли и начала координат $O'$, согласно второму закону Ньютона, имеет вид

$$m\boldsymbol{w}_a = m g, \quad \boldsymbol{g} = -g\frac{\boldsymbol{r}}{r} \cong -g\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0}, \tag{21}$$

где $\boldsymbol{r}_0$ – радиус-вектор точки $O'$, $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор движущейся точки в неподвижной системе, $g = 980.665\text{см}/\text{сек}^2$ – ускорение силы тяжести вблизи поверхности Земли, $\boldsymbol{w}_a$ – абсолютное ускорение точки. Как известно, в случае постоянной скорости вращения Земли, $\Omega = \text{const}$, справедливо соотношение

$$\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{w}_r + 2[\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{v}_r] + [\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{r}']] + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}, \tag{22}$$

где $\boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_r$ – относительные скорость и ускорение движущейся точки, $\boldsymbol{r}'$ – радиус-вектор точки в подвижной системе координат, $\boldsymbol{\Omega} = (0,0,\Omega)$ – в неподвижной системе и $\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega\cos\varphi, \sin\varphi)$ – в подвижной системе, где $\varphi$ – широта точки $O'$. Наконец, в подвижной системе $\boldsymbol{g} = (0,0,-g)$, а $\boldsymbol{r}_0(t) = r_0(\cos\varphi\cos\Omega t, \cos\varphi\sin\Omega t, \sin\varphi)$. Из (21), (22) следует уравнение:

$$m\boldsymbol{w}_r = m\boldsymbol{g} - m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t} - 2m[\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{v}_r] - m[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{r}']], \quad \boldsymbol{v}_0 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}.$$

Из явного выражения для $\boldsymbol{r}_0$ выводим

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{r}_0] = [\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{r}_0]].$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство и учитывая очевидное тождество $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}'$, получим окончательно

$$m\boldsymbol{w}_r = \underset{\text{сила тяжести}}{m\boldsymbol{g}} - \underbrace{2m[\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{v}_r]}_{\text{сила Кориолиса}} - \underbrace{m[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{r}]]}_{\text{центробежная сила}}. \tag{23}$$

Считая воздух сплошной средой, заменяя $m \to \rho$, $\boldsymbol{w}_r \to \mathrm{d}\boldsymbol{U}/\mathrm{d}t$, $\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{U}$ (т.е. применяя уравнение (23) к единичному объёму воздуха) и учитывая силы вязких напряжений и гидродинамическое давление воздуха, получим из (23):

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\,\mathrm{div}\boldsymbol{U} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{g} - 2[\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{U}] - [\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{r}]] + \frac{\mu}{\rho}\Delta\boldsymbol{U} + \frac{\nabla p}{\rho}, \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0(t) + \boldsymbol{r}',$$

где все пространственные производные берутся по $\boldsymbol{r}'$. Система (24) должна быть дополнена уравнением для давления $p$, но ниже для простоты рассматриваются только несжимаемые течения воздуха в торнадо и, таким образом, считается $\rho = \mathrm{const}$, $\mathrm{div}\boldsymbol{U} = 0$. Сравним по порядку величины различные слагаемые в правой части (24). Учитывая, что $r = |\boldsymbol{r}| \cong R_З = 6371\text{км} = 6.371 \cdot 10^8 \text{см}$, $\Omega = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{сек}^{-1}$, $\mu / \rho = 0.15 \text{см}^2 / \text{сек}$ (для воздуха при температуре $20°\mathrm{C}$ [5]), имеем:

$$\frac{g}{|[\boldsymbol{\Omega},[\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{r}]]|} \geq \frac{g}{\Omega^2 R_З} \cong 3 \cdot 10^2,$$

и, таким образом, центробежная сила много меньше силы тяжести. С другой стороны,

$$\frac{g}{2|[\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{U}]|} \geq \frac{g}{2\Omega|\boldsymbol{U}|} = \frac{671.7 \cdot 10^4}{|\boldsymbol{U}|}.$$

Считая скорость воздуха в торнадо $|\boldsymbol{U}| \simeq 100\text{м} / \text{сек} = 10^4 \text{см} / \text{сек}$ [2], заключаем, что сила Кориолиса в сотни раз меньше силы тяжести. Сравним, наконец, силу Кориолиса и силу вязких напряжений:

$$\frac{2|[\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{U}]|}{\mu\rho^{-1}|\Delta^2 \boldsymbol{U}|} \simeq \frac{2\Omega L_0^2}{\mu\rho^{-1}} = 1.82 \cdot 10^{-4} \cdot L_0^2,$$

где $L_0$ – характерная длина. Отсюда следует, что при исследовании мелкомасштабных процессов $(L_0 \sim 1\text{см})$ силой Кориолиса можно пренебречь по сравнению с вязкими напряжениями, для крупномасштабных процессов $(L_0 \sim 1\text{м})$ силы Кориолиса и вязких напряжений имеют один порядок величины. Ниже учитываются принципиально мелкомасштабные вязкие эффекты в воздухе, благодаря которым, как будет показано, происходит закручивание и вертикальное ускорение воздушных масс, типичное для торнадо. Весьма важно – и это один из главных результатов работы, – что означенные эффекты обусловлены исключительно вязкими эффектами, а не силой Кориолиса и конвективными процессами. Поэтому ниже мы пренебрегаем силой Кориолиса и центробежной силой, и итоговая система уравнений имеет вид

$$\rho = \text{const}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{U} = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{g} + \frac{\mu}{\rho}\Delta\boldsymbol{U} - \frac{\nabla p}{\rho},$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{U}\cdot\nabla,$$

совпадающий с системой (1).

Заметим, что приближение несжимаемой жидкости справедливо, если $U^2 \ll c_s^2$, где $c_s$ – скорость звука в воздухе. Для максимального значения $U$ в торнадо высокой мощности, согласно шкале Фуджиты [2], $U \simeq 100\text{м}/\text{сек}$, а средняя скорость звука в атмосферном воздухе, как известно, равна $c_s \simeq 330\text{м}/\text{сек}$, поэтому $(U/c_s)^2 < 0.1$. Для торнадо средней мощности, согласно шкале Фуджиты [2], $(U/c_s)^2 \simeq 10^{-2}$. Таким образом, соотношение $(U/c_s)^2 \ll 1$ для воздушных потоков в торнадо можно считать приближённо выполненным, что оправдывает приближение несжимаемой жидкости, принятое выше.

Численное исследование специальных решений системы (1) вида (2), проведённое ниже, показывает, что они задают движение воздушных масс, типичное для торнадо.

## 5. Численное решение краевой задачи (9)

Выберем счётную область $[0, L]$ с достаточно большим $L$ (результаты расчётов не должны существенно меняться при увеличении $L$) и равномерную сетку $x_k = kh$, $0 \le k \le N$, $N = L/h$ – целые, $h > 0$. Рассмотрим разностную схему

$$\frac{u_k^1 - u_k^0}{\tau} + C_k^0 \frac{u_{k+1}^1 - u_{k-1}^1}{2h} - \frac{u_{k+1}^1 - 2u_k^1 + u_{k-1}^1}{h^2} + u_k^1 u_k^0 + \varGamma = 0, \qquad (25)$$
$$0 < k < N, \quad u_0^1 = \mathrm{i}, \quad u_N^1 = \sqrt{-\varGamma},$$

из которой $u_k^1$, $0 < k < N$ ищутся прогонкой при решении системы линейных уравнений

$$u_{k+1}^1\left[\frac{\tau}{2h}C_k^0 - \frac{\tau}{h^2}\right] + u_k^1\left[1 + \tau u_k^0 + \frac{2\tau}{h^2}\right] + u_{k-1}^1\left[-\frac{\tau}{2h}C_k^0 - \frac{\tau}{h^2}\right] = u_k^0 - \tau\varGamma,$$
$$0 < k < N, \qquad (26)$$
$$u_0^1 = \mathrm{i}, \quad u_N^1 = \sqrt{-\varGamma}.$$

После этого величина $C$ на верхнем слое ищется решением задачи Коши на отрезке $[0, L]$

$$\frac{\mathrm{d}C^1}{\mathrm{d}z} = -2\,\mathrm{Re}\,u^1, \quad C^1(0) = 0 \tag{27}$$

с учётом, что правая часть (27) задана в узлах $x_k$. Поскольку порядок аппроксимации схемы (25) равен $O(\tau + h^2)$ при численном решении задачи (27) можно использовать метод невысокого порядка. Например, достаточно рассмотреть метод Рунге-Кутты второго порядка точности, который сводится к квадратурной формуле трапеций:

$$\begin{gathered} C_k^1 = C_{k-1}^1 - h\left(A_k^1 + A_{k-1}^1\right), \quad k = 1,\ldots,N, \quad C_0^1 = 0, \\ A_k^1 = \mathrm{Re}\,u_k^1. \end{gathered} \tag{28}$$

Условие устойчивости прогонки выполнено при условии диагонального преобладания матрицы коэффициентов системы (26)

$$\left|\frac{\tau}{2h}C_k^0 - \frac{\tau}{h^2}\right| + \left|\frac{\tau}{2h}C_k^0 + \frac{\tau}{h^2}\right| < \left|1 + \tau u_k^0 + \frac{2\tau}{h^2}\right|, \quad 1 \le k \le N-1.$$

Последнее условие заведомо выполнено, если

$$\tau < \frac{h}{2\max\limits_{0\le k\le N}\left|C_k^0\right|}, \quad \tau < \frac{1}{2\max\limits_{0\le k\le N}\left|u_k^0\right|}. \tag{29}$$

Неравенства (29) дают ограничения на временной шаг $\tau$.

Для контроля счёта применялись и другие аппроксимации системы (9). Например, используя аппроксимацию разности против потока

$$\left(C\frac{\partial u}{\partial z}\right)_k \sim \frac{C_k^0 + \left|C_k^0\right|}{2}\cdot\frac{u_k^0 - u_{k-1}^0}{h} + \frac{C_k^0 - \left|C_k^0\right|}{2}\cdot\frac{u_{k+1}^0 - u_k^0}{h},$$

получим для нахождения $u_k^1$, $0 < k < N$ систему линейных уравнений

$$\begin{gathered} -u_{k+1}^1\frac{\tau}{h^2} + u_k^1\left[1 + \tau u_k^0 + \frac{2\tau}{h^2}\right] - u_{k-1}^1\frac{\tau}{h^2} = u_k^0 - \tau\Gamma - \\ -\frac{\tau}{2h}\left(C_k^0 + \left|C_k^0\right|\right)\left(u_k^0 - u_{k-1}^0\right) - \frac{\tau}{2h}\left(C_k^0 - \left|C_k^0\right|\right)\left(u_{k+1}^0 - u_k^0\right), \\ 0 < k < N, \\ u_0^1 = \mathrm{i}, \quad \mathrm{u}_N^1 = \sqrt{-\Gamma} \end{gathered}$$

с условием устойчивости прогонки

$$\tau < \frac{h}{\max\limits_{0\le k\le N}\left|C_k^0\right|}, \quad \tau < \frac{1}{\max\limits_{0\le k\le N}\left|u_k^0\right|}.$$

С другой стороны, можно более точно решать задачу Коши (27). Например, применим схему Рунге-Кутта 4-го порядка точности, которая сводится к квадратурной формуле Симпсона. Чтобы избежать интерполирования, надо число узлов $N$ выбрать чётным, $N = 2M$, и тогда

$$C_{2(\ell+1)}^1 = C_{2\ell}^1 - \frac{h}{3}\left(A_{2\ell}^1 + 4A_{2\ell+1}^1 + A_{2(\ell+1)}^1\right), \quad \ell = 0,\dots,M-1, \quad C_0^1 = 0,$$

$$C_{2\ell+1}^1 = C_{2\ell-1}^1 - \frac{h}{3}\left(A_{2\ell-1}^1 + 4A_{2\ell}^1 + A_{2\ell+1}^1\right), \quad \ell = 1,\dots,M-1, \quad C_1^1 = -\frac{h}{2}\left(4A_1^1 - A_2^1\right).$$

При этом $C_1^1$ вычисляется с точностью $\sim h^3$. Установим формулу для $C_1^1$. Для функций на верхнем слое, применяя формулу Тейлора, получим:

$$C_1 = C(h) = C(0) + C'(0)h + C''(0)\frac{h^2}{2} + O(h^3) = -A'(0)h^2 + O(h^3), \tag{30}$$

где учтены равенства, определяемые граничными условиями $C(0) = 0$, $C'(0) = -2A(0) = 0$. Вычислим теперь $A'(0)$. Снова, применяя формулу Тейлора, получим:

$$A(h) = A(0) + A'(0)h + A''(0)\frac{h^2}{2} + O(h^3), A(2h) = A(0) + 2A'(0)h + 2A''(0)h^2 + O(h^3).$$

Откуда $2A(h) - A(2h)/2 = 3A(0)/2 + hA'(0)h + O(h^3)$, и, значит, с учётом $A(0) = 0$, имеем

$$A'(0) = \frac{4A(h) - 3A(0) - 2A(2h)}{2h} + O(h^2) = \frac{4A(h) - A(2h)}{2h} + O(h^2) = \frac{4A_1^1 - A_2^1}{2h} + O(h^2).$$

Подставляя полученное равенство в формулу (30), приходим к искомому выражению:

$$C_1^1 = -\frac{h}{2}\left(4A_1^1 - A_2^1\right) + O(h^3) \cong -\frac{h}{2}\left(4A_1^1 - A_2^1\right).$$

Простейшее условие окончания итераций на установление имеет вид:

$$\max_{0\le k\le N}\max\left\{\left|u_k^1 - u_k^0\right|, \left|C_k^1 - C_k^0\right|\right\} < \varepsilon,$$

где $\varepsilon$ – задаваемая малая положительная величина. Типичное значение $\varepsilon = 10^{-9}$. При выполнении последнего неравенства счёт останавливается и $u_k^1$, $C_k^1$,

$0 \le k \le N$ считаются сеточными аппроксимациями искомого стационарного течения. Построенный выше алгоритм нахождения стационарных решений краевой задачи (9) значительно проще прямых методов – типа метода стрельбы [6] или метода квазилинеаризации Р. Беллмана [7] – решения краевой задачи для нелинейной системы ОДУ пятого порядка, которая получится, если в (9) положить $\partial / \partial t = 0$. Это объясняется тем, что в указанных алгоритмах ключевую роль играет метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений, сходимость которого определяется выбором начального приближения неизвестного решения, что ведёт к проблемам в счёте.

Результаты расчётов будут рассмотрены в п.7. Предварительно отметим роль вязкости для существования решений типа торнадо.

## 6. Роль вязкости

В случае нулевой вязкости $\mu = 0$ краевая математическая задача (9) теряет смысл, поскольку теряют физический смысл краевые условия. Можно перепоставить краевую задачу в случае $\mu = 0$, но делать это, скорее всего, бесполезно, поскольку, как будет показано ниже, среди стационарных решений системы (9) с $\mu = 0$ нет течений типа торнадо, т.е. течений, для которых вертикальная скорость при $z \to +\infty$ растёт и выходит на установление. Есть вероятность, что такие течения могут быть среди нестационарных решений вида (2). Это тем более актуально, что реальные торнадо нестационарные, а воронка смерча движется вдоль поверхности Земли. Однако для анализа этих процессов в исходной постановке задачи надо учесть дополнительные физические факторы, например, наличие ветра вдоль поверхности Земли. Кроме того, при $\mu = 0$, согласно результатам п.4, на первый план может выдвинуться сила Кориолиса, но тогда функции вида (2) не будут доставлять частные решения системы (1) с добавленной силой Кориолиса и предложенный выше подход поиска течений типа торнадо среди специальных решений вида (2) делается несостоятельным. Добавим, что роль вязкости в образовании вихревых течений общеизвестна: слои вязкой жидкости цепляются друг за друга, передавая движение соседним слоям, вызывая, в том числе, и вихревое движение. Следует учесть также, что воздух в реальном торнадо содержит большое количество водяной или песчаной пыли (в зависимости от того, над поверхностью воды или суши образуется торнадо), что существенно увеличивает гидродинамическую вязкость воздушной смеси. Кроме того, в случае торнадо вязкость ответственна также за трансформацию азимутального и радиального движений воздуха в вертикальное движение.

Итак, рассмотрим систему (9) с $\partial / \partial t = 0$:

$$C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dz}} + u^2 + \Gamma = 0, \quad \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{dz}} = -2\,\mathrm{Re}\,u. \tag{31}$$

Оказывается, что нелинейная система может быть полностью решена.

**Теорема 3.** 1) *При* $\Gamma = 0$ *общее решение системы* (31) *имеет вид*, $u = A + \mathrm{i}B$:

$$A(z) = -\frac{Rk}{2}\sin 2kz, \quad B(z) = Rk\sin^2 kz, \quad C(z) = R\sin^2 kz, \tag{32}$$

*где* $R, k \in \mathbb{R}$ – *произвольные вещественные постоянные. Кроме того, существует особое решение*:

$$A(z) = -Rz, \quad B(z) = 0, \quad C(z) = Rz^2, \tag{33}$$

*где* $R \in \mathbb{R}$ – *произвольное*.
2) *При* $\Gamma > 0$ *общее решение системы* (31) *имеет вид*

$$\begin{gathered} A(z) = -\sqrt{\Gamma}\,\frac{\sin 2pz}{\mathrm{sh} 2\sqrt{\Gamma}R}, \quad B(z) = -\sqrt{\Gamma}\left(\mathrm{th}\sqrt{\Gamma}R\cos^2 pz + \mathrm{cth}\sqrt{\Gamma}R\sin^2 pz\right), \\ C(z) = \frac{1}{2D}\left(\frac{\cos^2 pz}{\mathrm{ch}^2\sqrt{\Gamma}R} + \frac{\sin^2 pz}{\mathrm{sh}^2\sqrt{\Gamma}R}\right), \end{gathered} \tag{34}$$

*где* $p = D\sqrt{\Gamma}\,\mathrm{sh} 2\sqrt{\Gamma}R$, $R \neq 0$, $D \neq 0$ – *произвольные константы*.
*Кроме того, существует особое решение*

$$A(z) = -\Gamma Dz, \quad B(z) = 0, \quad C(z) = \frac{1}{D} + \Gamma Dz^2, \tag{35}$$

$D \neq 0$ – *произвольная константа*.

**Доказательство.** Прямой подстановкой можно убедиться, что все решения (32)–(35) удовлетворяют системе (31), которая в вещественной форме имеет вид

$$C\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{dz}} + A^2 - B^2 + \Gamma = 0, \quad C\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{dz}} + 2AB = 0, \quad \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{dz}} = -2A. \tag{36}$$

Рассуждения ниже доказывают, что других решений система (31) не имеет.
1) Пусть $\Gamma = 0$. Подставляя третье уравнение (36) во второе, получим

$$C\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{dz}} - B\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{dz}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\left(\frac{B}{C}\right) = 0,$$

и тогда $B / C \equiv \mathrm{k}$ – константа. Значит, $B = kC$ и порядок системы (36) понижается

$$C\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{dz}} + A^2 - k^2C^2 = 0, \quad \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{dz}} = -2A.$$

Отсюда

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}C}=\frac{1}{2}\left(\frac{A}{C}-k^2\frac{C}{A}\right).$$

Это однородное уравнение, которое интегрируется стандартной подстановкой $A=Cw(C)$, приводящей к уравнению

$$C\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}C}=-\frac{1}{2}\left(w+\frac{k^2}{w}\right)\Rightarrow\int\frac{2w\mathrm{d}w}{w^2+k^2}=-\int\frac{\mathrm{d}C}{C}\Rightarrow\left(w^2+k^2\right)|C|=\mathrm{const}.$$

Отсюда следует, что если $C\neq 0$, то $C$ – знакоопределённая функция. Пусть $C>0$, тогда $(w^2+k^2)C\equiv S$ – константа, откуда $w(C)=(S^2/C-k^2)^{1/2}$. Считая $k\neq 0$, ищем $C(z)$ из уравнения

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}z}=-2A=-2C\sqrt{\frac{S^2}{C}-k^2}\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}C}{2\sqrt{C}\sqrt{S^2-k^2C}}=-z+\mathrm{const}.$$

Учитывая $\mathrm{d}C/(2\sqrt{C})=d(\sqrt{C})$ и вводя переменную $p=\sqrt{C}$, получим

$$\int\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{S^2-k^2p^2}}=-z+\mathrm{const}\Rightarrow\frac{1}{k}\arcsin\frac{kp}{S}=-z+\mathrm{const}.$$

Значит, $p(z)=-\dfrac{S}{k}\sin kz \Rightarrow C(z)=\dfrac{S^2}{k^2}\sin^2 kz$, откуда $A(z)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}C/\mathrm{d}z=-\dfrac{S^2}{k}\sin kz\cos kz$, $B(z)=kC(z)=\dfrac{S^2}{k}\sin^2 kz$. Обозначая $R=S^2/k^2$, приходим к формулам (32). Если $k=0$, то проведённая выше интеграция даёт $C(z)=Rz^2$ и мы приходим к формулам (33).

2) Пусть $\Gamma>0$. Обозначим $F(z)\underset{\mathrm{def}}{=}\int\mathrm{d}z/C(z)$. Тогда первое уравнение системы (31) даёт

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{\Gamma}}=\int\frac{\mathrm{d}u}{\Gamma+u^2}=-F(z),$$

откуда (см. доказательство **Теоремы 2**)

$$A(z)=-\sqrt{\Gamma}\,\frac{\sin 2\sqrt{\Gamma}F(z)}{\cos 2\sqrt{\Gamma}F(z)+\mathrm{ch}2\sqrt{\Gamma}R},\quad B(z)=-\sqrt{\Gamma}\,\frac{\mathrm{sh}2\sqrt{\Gamma}R}{\cos 2\sqrt{\Gamma}F(z)+\mathrm{ch}2\sqrt{\Gamma}R}.$$

Функцию $F(z)$ найдём из уравнения

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}z}=-2A.$$

Поскольку $C = 1/F'$, то $C' = -F''/(F')^2$. Пусть $A(F) = -\sqrt{\Gamma}\,\dfrac{\sin 2\sqrt{\Gamma}F}{\cos 2\sqrt{\Gamma}F + \mathrm{ch}2\sqrt{\Gamma}R}$. Тогда для нахождения $F$ имеем уравнение

$$F'' = 2(F')^2 A(F). \tag{37}$$

Далее считаем $R \neq 0$. Уравнение (37) берётся стандартной заменой $F' = G(F)$, понижающей его порядок:

$$G'G = 2G^2 A(F),$$

откуда

$$\int \frac{\mathrm{d}G}{G} = 2\int A(F)\mathrm{d}F. \tag{38}$$

Интеграл в правой части (38) легко берётся

$$2\int A(F)\mathrm{d}F = -2\sqrt{\Gamma}\int \frac{\sin 2\sqrt{\Gamma}F\mathrm{d}F}{\cos 2\sqrt{\Gamma}F + \mathrm{ch}2\sqrt{\Gamma}R} = \ln\left|\cos 2\sqrt{\Gamma}F + \mathrm{ch}2\sqrt{\Gamma}R\right| + \mathrm{const}.$$

Теперь из (38) следует

$$G(F) = D\left(\cos 2\sqrt{\Gamma}F + \mathrm{ch}2\sqrt{\Gamma}R\right),$$

$D \neq 0$ – произвольная константа. Теперь из уравнения $F' = G(F)$ ищется функция $F(z)$:

$$\int \frac{\mathrm{d}F}{\cos 2\sqrt{\Gamma}F + \mathrm{ch}2\sqrt{\Gamma}R} = Dz + \mathrm{const}. \tag{39}$$

Интеграл слева заменой $t = \mathrm{tg}\sqrt{\Gamma}F$ сводится к виду (где $a = \mathrm{ch}2\sqrt{\Gamma}R$)

$$\int \frac{\mathrm{d}F}{\cos 2\sqrt{\Gamma}F + \mathrm{ch}2\sqrt{\Gamma}R} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\frac{1}{a-1}\int \frac{\mathrm{d}t}{\frac{a+1}{a-1} + t^2} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(a^2-1)}}\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\sqrt{\Gamma}F\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\right).$$

С учётом равенств $a - 1 = 2\mathrm{sh}^2\sqrt{\Gamma}R$, $a + 1 = 2\mathrm{ch}^2\sqrt{\Gamma}R$, $\sqrt{a^2-1} = \mathrm{sh}2\sqrt{\Gamma}R$, $(a+1)^{1/2}(a-1)^{-1/2} = \mathrm{cth}\sqrt{R}R$ из (39) получим

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\sqrt{\Gamma}R \cdot \mathrm{tg}\left(\sqrt{\Gamma}Dz \cdot \mathrm{sh}2\sqrt{\Gamma}R\right)\right).$$

Отсюда прямым дифференцированием $C(z) = 1/F'(z)$ получается формула для $C$ из (34) и подстановкой в формулу для $A(F)$ получается выражение для $A(z)$ из (34). Аналогично с $B(z)$.

Если $R = 0$, то $B \equiv 0$, $A = -\sqrt{\Gamma}\,\mathrm{tg}\sqrt{\Gamma}F$, а интеграция (38) даёт

$$G(F) = D\cos^2\sqrt{\Gamma}F.$$

Теперь интеграция уравнения $F' = G(F)$ даёт $F(z) = \dfrac{1}{\sqrt{\Gamma}}\mathrm{arctg}\sqrt{\Gamma}Dz$. Откуда $C(F) = 1/F'(z) = 1/D + \Gamma Dz^2$, т.е. пришли к формуле (35) для $C(z)$. Аналогично выводятся формулы для $A(z)$ и $B(z)$. Теорема доказана. #

Из **Теоремы 3** следует, что в отсутствие вязкости, $\mu = 0$, вертикальная скорость стационарного течения вида (2) является периодической по высоте функцией, а в исключительных случаях зависит от высоты по квадратическому закону, что не соответствует характеру изменения вертикальной скорости в торнадо. Кроме того, в случае $\Gamma = 0$ на плоскости $(A, C)$ кривая $(A(z), C(z))$ лежит на эллипсе

$$\frac{A^2}{(Rk/2)^2} + \frac{(C - R/2)^2}{(R/2)^2} = 1$$

с центром в точке $(0, R/2)$ и полуосями $Rk/2$ и $R/2$.

## 7. Некоторые результаты расчётов

Рассмотрим численное исследование стационарных решений краевой задачи (9), для чего решим эту задачу методом установления по методике, изложенной в п.5. При этом от выбора начального условия результат счёта не зависит. Например, можно положить $u(0, z) = (\mathrm{i} + z\sqrt{-\Gamma})/(1 + z)$, $0 \le z < +\infty$. Алгоритм тестировался на известных решениях: при $\Gamma = 0$ получилось известное решение Т. Кармана [3,5] а при $\Gamma = 1$ – константное решение $u(z) \equiv \mathrm{i}$, $C(z) \equiv 0$. При $0 \le \Gamma < 1$ вертикальная скорость $C(z)$, согласно полученным результатам, всегда отрицательна (“пылесос”), а при $\Gamma > 1$ – положительна (“торнадо”). Таким образом, $\Gamma = 1$ – бифуркационное значение параметра $\Gamma$, равное квадрату угловой скорости вихря в верхних слоях атмосферы. Типичные распределения профилей $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ для установившихся течений при различных значениях $\Gamma$ изображены на Рис. 5, 6. Таким образом, вертикальная скорость $C(z)$ при $\Gamma > 1$ положительна и немонотонно растёт, стремясь к предельному значению $C(\infty) > 0$ при $z \to +\infty$. Зависимость $C(\infty)$ от $\Gamma$, полученная численно, представлена на Рис. 7 и показывает, что с ростом угловой скорости вихря в верхних слоях атмосферы предельное значение вертикальное скорости на бесконечности $C(\infty)$ тоже монотонно растёт примерно как $\sim\sqrt{\varGamma}$. Другой важный результат, полученный для левого граничного условия $u(0)=0$ (остальные граничные условия остаются без изменения), представленный на Рис. 8 для $\varGamma=4$, показывает, что наличие вихревого движения воздуха у поверхности Земли, обусловленного, скажем, силой Кориолиса, не является обязательным условием возникновения торнадо. Более того, из сравнения графиков вертикальной скорости на Рис. 5 и Рис. 8 следует, что без вихревого движения в точке $z=0$ предельная вертикальная скорость $C(\infty)$ выросла в $\cong 2.5$ раза. Таким образом, закручивание воздуха у поверхности Земли уменьшает энергию воздушного потока на бесконечности, в то время как, согласно Рис. 5, закручивание воздуха в верхних слоях атмосферы эту энергию увеличивает. Ещё один важный результат проведённых расчётов показывает, что при противоположных направлениях вращения воздуха на бесконечности и в нуле (например, $u(0)=\mathrm{i}$, $u(\infty)=-\mathrm{i}\sqrt{\varGamma}$) установления решения не происходит, что означает отсутствие стационарного решения краевой задачи в этом случае.

Проведённые расчёты позволяют дать ряд практических рекомендаций по проблеме торнадо. Во-первых, необходимы мониторинг верхних слоёв атмосферы на предмет наличия вихрей и составление карты распределения давления воздуха около поверхности Земли. Во-вторых, торнадо могут возникать только в тех районах суши или водной поверхности, которые расположены под соответствующими вихрями в верхних слоях атмосферы. Необходимым условием возникновения торнадо является выполнение равенства

$$\varOmega^2=\frac{1}{\rho}\left\langle\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\right\rangle, \qquad (40)$$

где $\varOmega$ – угловая скорость вихря, $\rho$ – плотность воздуха, $\left\langle\partial^2 p/\partial r^2\right\rangle$ – средняя по пространству вторая радиальная производная давления воздуха, при этом радиус отсчитывается от центра возможного торнадо, определяемый пересечением с поверхностью Земли луча, выпущенного из центра Земли и проходящего через центр вихря в верхних слоях атмосферы. (Заметим, что константа $Q$ из формулы (2) равна $Q=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial r^2}$). В-третьих, для предотвращения торнадо надо либо создать антивихрь, хотя бы небольшой интенсивности, в центре предполагаемого торнадо у поверхности Земли, либо изменить давление на периферии ожидаемого торнадо с целью нарушить условие (40).

Учитывая сказанное выше, можно сделать вывод, что роль силы Кориолиса противоположна той, которая ей обычно приписывается. Сила Кориолиса, закручивая воздушные потоки у поверхности Земли, ведёт не к образованию торнадо [1,2], а, наоборот, препятствует возникновению торнадо, если направление вращения воздуха у поверхности Земли, обусловленное силой Кориолиса, будет противоположным направлению вращения воздушных масс в верхних слоях атмосферы.

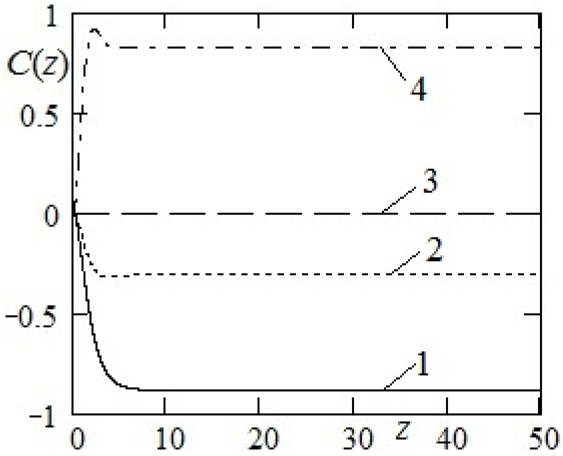


Рис. 5. Профиль вертикальной скорости $C$ в зависимости от $\Gamma$: 1 – $\Gamma = 0$, 2 – $\Gamma = 0.5$, 3 – $\Gamma = 1$, 4 – $\Gamma = 4$.

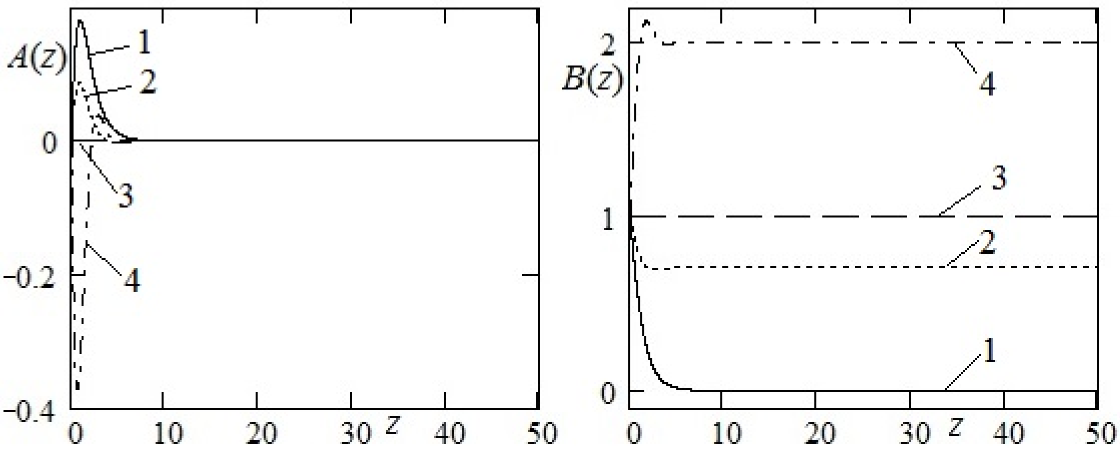


Рис. 6. Установившиеся профили функций $A(z)$ и $B(z)$ в зависимости от $\Gamma$: 1 – $\Gamma = 0$, 2 – $\Gamma = 0.5$, 3 – $\Gamma = 1$, 4 – $\Gamma = 4$.

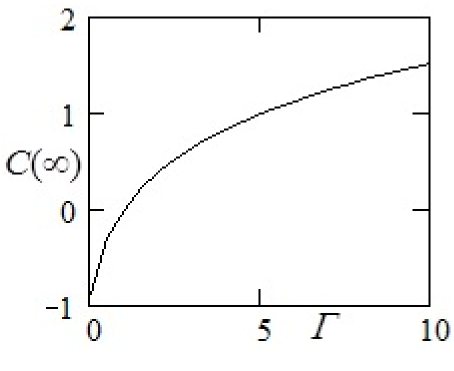


Рис. 7. Значение вертикальной скорости $C$ на бесконечности в зависимости от $\Gamma$.

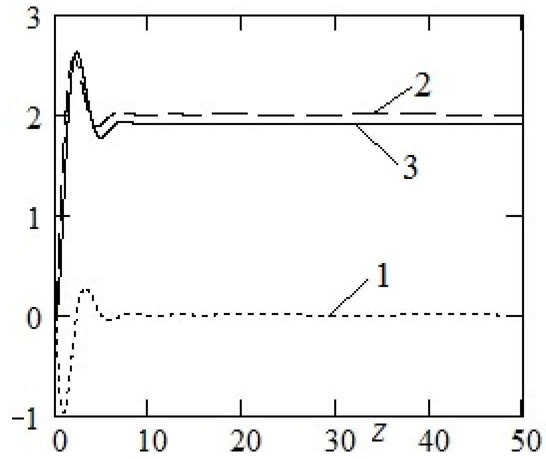


Рис. 8. Установившиеся профили функций для граничного условия $u(0)=0$ и $\Gamma=4$: 1 – $A(z)$, 2 – $B(z)$, 3 – $C(z)$.

## 8. Уравнения магнитного торнадо

Вкратце обсудим явление торнадо в плазменной среде. Магнитные торнадо, вероятно, играют важную роль в процессах, происходящих в солнечной атмосфере. Например, есть предположение, что за счёт энергии магнитного торнадо, возникающего в фотосфере, происходит аномальный разогрев солнечной короны. Рядом авторов [8–10] рассмотрено экспериментальное и численное исследование возбуждение плазмы вращающимся диском, имеющее прямое отношение, как было показано выше, к проблеме торнадо. Однако надёжно установленных экспериментальных фактов и теоретических результатов в проблеме магнитного торнадо намного меньше, чем в случае атмосферного воздуха Земли. В этих условиях наша цель весьма ограниченна: ниже будет показано, что подходы, развитые в предыдущих пунктах, могут пригодиться и для исследования магнитного торнадо, но само исследование выходит за рамки настоящей работы и требует специального рассмотрения.

Ниже предполагается, что динамика плазменной среды подчинена уравнениям классической МГД для несжимаемой плазмы, находящейся в постоянном гравитационном поле:

$$
\begin{gathered}
\operatorname{div}\boldsymbol{U}=0, \quad \rho=\mathrm{const}, \\
\rho\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\operatorname{Div}\left(\rho\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}+\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right)\mathrm{I}_3-\frac{\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}}{4\pi}\right)=2\mu\operatorname{Div}\operatorname{def}\boldsymbol{U}+\rho\boldsymbol{g}, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}+\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{H}=0,
\end{gathered}
\tag{41}
$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{U}, \boldsymbol{H}], \quad \boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\boldsymbol{H},$$

где $\mu = \mathrm{const}$, $\sigma = \mathrm{const}$ – гидродинамическая (динамическая) вязкость и проводимость плазмы, $\boldsymbol{g} = \mathrm{const}$ – ускорение силы тяжести. Исключая $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{E}$ из числа неизвестных, получим уравнение для $\boldsymbol{H}$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \mathrm{rot}\left\{\nu_m \mathrm{rot}\boldsymbol{H} - [\boldsymbol{U}, \boldsymbol{H}]\right\} = 0, \quad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}, \\ &\mathrm{div}\boldsymbol{H} = 0, \end{aligned} \tag{42}$$

где $\nu_m$ – магнитная вязкость, причём последнее равенство есть ограничение только на начальное значение напряжённости магнитного поля $\boldsymbol{H}$.

В осесимметричном случае, $\partial / \partial\varphi = 0$, система (41) допускает частные решения вида:

$$\begin{aligned} &U_r = rA(t,z), \quad U_\varphi = rB(t,z), \quad U_z = C(t,z), \\ &H_r = rP(t,z), \quad H_\varphi = rS(t,z), \quad H_z = G(t,z), \\ &p = r^2 Q(t,z) + R(t,z), \end{aligned} \tag{43}$$

где функции $A, B, C, P, S, G, Q, R$ подлежат нахождению. Для этого необходимо функции (43) подставить в систему (41). Результат этой подстановки сформулирован в следующей теореме.

**Теорема 4.** *В случае осевой симметрии функции* (43) *являются решением системы* (41) *тогда и только тогда, когда* $A, B, C, P, S, G$ *удовлетворяют системе уравнений*:

$$\begin{gathered} \frac{\partial A}{\partial t} + A^2 - B^2 + C\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{2\gamma_0(t)}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho}\left(P^2 - S^2\right) - \frac{G}{4\pi\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0, \\ \frac{\partial B}{\partial t} + 2AB + C\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{1}{4\pi\rho}\cdot 2PS - \frac{G}{4\pi\rho}\frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0, \\ \frac{\partial C}{\partial z} + 2A = 0, \end{gathered} \tag{44}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial P}{\partial t} - \nu_m \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z}(CP - AG) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} - \nu_m \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z}(BG - CS) + 2(AS - BP) = 0, \end{gathered} \tag{45}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}+2\nu_m\frac{\partial P}{\partial z}-2(CP-AG)=0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}+2P=0, \tag{46}$$

*где* $\gamma_0(t)$ *– произвольная функция времени. При этом*

$$Q=\gamma_0(t)-\frac{P^2+S^2}{8\pi},$$

*а* $\partial R/\partial z$ *однозначно ищется из уравнения*

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{C^2}{2}+\frac{2\mu}{\rho}A+\frac{R}{\rho}+gz\right)=0.$$

*Кроме того, первое уравнение системы* (45) *является следствием третьего уравнения* (45) *и уравнения* (46), *а при выполнении в некоторой точке* $z_0$ "*граничного*" *условия*

$$\left.\left(2\nu_m\frac{\partial P}{\partial z}-2CP\right)\right|_{z=z_0}=-2(AG)|_{z=z_0},\quad G(t,z_0)=\mathrm{const} \tag{47}$$

*третье уравнение системы* (45) *является следствием первого уравнения* (45) *и равенства* (46), *а первые два уравнения* (45) *могут быть равносильным образом записаны в виде*:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial t}-\nu_m\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}+C\frac{\partial P}{\partial z}-G\frac{\partial A}{\partial z}=0,\\&\frac{\partial S}{\partial t}-\nu_m\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}+C\frac{\partial S}{\partial z}-G\frac{\partial B}{\partial z}=0.\end{aligned} \tag{48}$$

Из **Теоремы 4** следует важный вывод: если выполнено граничное условие (47), то для нахождения комплексных функций $u=A+\mathrm{i}B$, $w=P+\mathrm{i}S$ и вещественных функций $C$ и $G$ имеем замкнутую определённую систему уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t}+C\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{G}{4\pi\rho}\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+u^2-\frac{w^2}{4\pi\rho}+\frac{2\gamma_0(t)}{\rho}=0,$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial t}+C\frac{\partial w}{\partial z}-G\frac{\partial u}{\partial z}-\nu_m\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0,\\ &\frac{\partial C}{\partial z}=-2\,\mathrm{Re}\,u,\quad \frac{\partial G}{\partial z}=-2\,\mathrm{Re}\,w, \end{aligned} \tag{49}$$

$$0\le z<+\infty,\quad t\ge 0.$$

Система (49) обобщает систему уравнений (5) на случай МГД-плазмы. Если граничные условия (47) не выполнены, то для нахождения функций $A,B,C,P,S,G$ имеем замкнутую определённую систему уравнений, состоящую из уравнений системы (44), двух последних уравнений системы (45) и уравнения (46).

Можно надеяться, что решения системы (49), дополненной начальным и граничными условиями (в число которых обязательно должно входить условие (47)), будет содержать течения типа торнадо.

В безразмерном виде система (49) перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}+C\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-M_{\mathrm{A}}^2\frac{\partial w}{\partial z}+u^2-M_{\mathrm{A}}^2 w^2+\Gamma(t)=0,\\ &\frac{\partial w}{\partial t}+C\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{1}{\mathrm{Re}_m}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-G\frac{\partial u}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial C}{\partial z}=-2\,\mathrm{Re}\,u,\quad \frac{\partial G}{\partial z}=-2\,\mathrm{Re}\,w,\\ &0\le z<+\infty,\quad t\ge 0, \end{aligned} \tag{50}$$

где $\mathrm{Re}=\dfrac{U_0L_0\rho}{\mu}$, $\mathrm{Re}_m=\dfrac{U_0L_0}{\nu_m}$ – числа Рейнольдса (гидродинамическое и магнитное), $M_{\mathrm{A}}=v_{\mathrm{A}}/U_0$ – альфвеновское число Маха, $v_{\mathrm{A}}=H_0/\sqrt{4\pi\rho}$ – альфвеновская скорость, $U_0$, $L_0$, $H_0$ – характерные значения скорости, длины и напряжённости магнитного поля. Граничное условие при $z=0$ в безразмерном виде перепишется в форме:

$$\left.\left(\frac{1}{\mathrm{Re}_m}\frac{\partial P}{\partial z}-CP\right)\right|_{z=0}=-\left.(AG)\right|_{z=0},\quad G(t,0)=\mathrm{const}. \tag{51}$$

При этом считается $L_0=U_0t_0$, $\Gamma(t)=2\gamma_0(t)t_0^2/\rho$.

Граничные условия для системы (50) имеет смысл ставить в каждой конкретной задаче. Наличие магнитного поля существенно меняет гидродинамику плазмы. Это видно на примере решений системы (50) специального вида, для которых $\Gamma(t) \equiv \Gamma = \mathrm{const}$, $u$ и $w$ зависят лишь от $t$, а $C$ и $G$ в каждый момент времени линейно зависят от $z$. Полагая в первых двух уравнениях системы (50) $\partial / \partial z = 0$, получим $w = \mathrm{const}$ – произвольная комплексная константа, а для нахождения $u(t)$ имеем уравнение

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u^2 - M_{\mathrm{A}}^2 w^2 + \Gamma = 0.$$

При $w = \pm\sqrt{\Gamma} / M_{\mathrm{A}}$ решение этого уравнения задаётся формулами (11) и (12). При $w \neq \pm\sqrt{\Gamma} / M_{\mathrm{A}}$ решение имеет вид (см. Доказательство **Теоремы 2**)

$$\begin{aligned} &u(t) = -\sqrt{\Gamma - M_{\mathrm{A}}^2 w^2}\,\mathrm{tg}\sqrt{\Gamma - M_{\mathrm{A}}^2 w^2}\,(t + \mathrm{i}R), \quad C(z) = -2(\mathrm{Re}\,u)z, \\ &w(t) \equiv w \in \mathbb{C} - \text{произвольное}, \quad Q(z) = -2(\mathrm{Re}\,w)z. \end{aligned} \tag{52}$$

Причём для решения (52) граничное условие (51) в точке $z = 0$ автоматически выполняется. Для комплексного $w$ (т.е. $\mathrm{Re}\,w \neq 0$, $\mathrm{Im}\,w \neq 0$) на плоскости $(A, B) = A + \mathrm{i}B = u$ кривая $u(t)$ уже не обязана лежать на некоторой окружности, как это было в случае **Теоремы 2**.

**Доказательство Теоремы 4.** Запишем уравнения системы (41) в цилиндрических координатах с учётом осевой симметрии. Уравнение импульсов в системе (41) даёт

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial t} + 3A^2 - B^2 + \frac{\partial AC}{\partial z} + \frac{2}{\rho}\left(Q + \frac{P^2 + S^2}{8\pi}\right) - \frac{1}{4\pi\rho}\left(3P^2 - S^2 + \frac{\partial PG}{\partial z}\right) = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}, \\ &\frac{\partial B}{\partial t} + 4AB + \frac{\partial BC}{\partial z} - \frac{1}{4\pi\rho}\left(4PS + \frac{\partial SG}{\partial z}\right) = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}, \\ &\frac{\partial C}{\partial t} + 2AC + \frac{\partial C^2}{\partial z} + \frac{r^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(Q + \frac{P^2 + S^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(R + \frac{G^2}{8\pi}\right) - \\ &-\frac{1}{4\pi\rho}\left(2PG + \frac{\partial G^2}{\partial z}\right) = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - g. \end{aligned} \tag{53}$$

Уравнение $\mathrm{div}\boldsymbol{U} = 0$ даёт соотношение

$$2A + \frac{\partial C}{\partial z} = 0. \tag{54}$$

Закон Фарадея сведётся к трём соотношениям:

$$\frac{\partial P}{\partial t}-\nu_m\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial z}(CP-AG)=0,$$
$$\frac{\partial S}{\partial t}-\nu_m\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial z}(BG-CS)+2(AS-BP)=0, \qquad (55)$$
$$\frac{\partial G}{\partial t}+2\nu_m\frac{\partial P}{\partial z}-2(CP-AG)=0,$$

а условие $\mathrm{div}\boldsymbol{H}=0$ даёт

$$2P+\frac{\partial G}{\partial z}=0. \qquad (56)$$

Итак, для функций $A,B,\ldots,Q,R$ получили систему уравнений (53)–(56). Упростим её. Из третьего равенства (53) следует, что сумма $Q+(P^2+S^2)/(8\pi)$ не зависит от $z$ и, значит, является произвольной функцией времени $\gamma_0(t)$, откуда

$$Q(t)=\gamma_0(t)-\frac{P^2+S^2}{8\pi} \qquad (57)$$

исключается из числа неизвестных. Из (54) следуют равенства

$$3A^2-B^2+\frac{\partial AC}{\partial z}=A^2-B^2+C\frac{\partial A}{\partial z},\quad 4AB+\frac{\partial BC}{\partial z}=2AB+C\frac{\partial B}{\partial z},$$

а из (56) вытекают равенства

$$3P^2-S^2+\frac{\partial PG}{\partial z}=P^2-S^2+G\frac{\partial P}{\partial z},\quad 4PS+\frac{\partial SG}{\partial z}=2PS+G\frac{\partial S}{\partial z}.$$

Подставляя полученные соотношения в первые два равенства системы (53), имеем с учётом тождества (57):

$$\frac{\partial A}{\partial t}+A^2-B^2+C\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{2\gamma_0(t)}{\rho}-\frac{1}{4\pi\rho}\left(P^2-S^2\right)-\frac{G}{4\pi\rho}\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}=0,$$
$$\frac{\partial B}{\partial t}+2AB+C\frac{\partial B}{\partial z}-\frac{1}{4\pi\rho}\cdot 2PS-\frac{G}{4\pi\rho}\frac{\partial S}{\partial z}-\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}=0.$$

Кроме того, из (54) следуют равенства

$$2AC+\frac{\partial C^2}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{dC^2}{\partial z},\quad \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}=-2\frac{\partial A}{\partial z},$$

а из тождества (56) вытекает соотношение

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{G^2}{8\pi}-\frac{1}{4\pi}\left(2PG+\frac{\partial G^2}{\partial z}\right)=-\frac{1}{4\pi}\left(2PG+\frac{1}{2}\frac{\partial G^2}{\partial z}\right)=-\frac{1}{4\pi}G\left(2P+\frac{\partial G}{\partial z}\right)=0.$$

Подставляя полученные результаты в третье равенство системы (53) и учитывая (57), получим

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{C^2}{2}+\frac{2\mu}{\rho}A+\frac{R}{\rho}+gz\right)=0.$$

Преобразуем систему (55). Очевидно, продифференцированное по $z$ третье уравнение системы (55) даёт, с учётом тождества (56), первое уравнение. Таким образом, первое уравнение системы (55) является следствием третьего, а второе и третье уравнения (55) с учётом преобразования

$$-\frac{\partial}{\partial z}(BG-CS)+2(AS-BP)=-G\frac{\partial B}{\partial z}+C\frac{\partial S}{\partial z}$$

и равенства (56) дают систему уравнений для нахождения функций $P,S,G$;

$$\begin{gathered}\frac{\partial S}{\partial t}-\nu_m\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}-G\frac{\partial B}{\partial z}+C\frac{\partial S}{\partial z}=0,\\ \frac{\partial G}{\partial t}-\nu_m\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}+C\frac{\partial G}{\partial z}+2AG=0,\\ 2P+\frac{\partial G}{\partial z}=0.\end{gathered}\tag{58}$$

Далее, как уже отмечалось, производная по $z$ от левой части третьего уравнения (55) в силу первого уравнения (55) тождественно равна нулю. Поэтому функция

$$\frac{\partial G}{\partial t}+2\nu_m\frac{\partial P}{\partial z}-2(CP-AG)\tag{59}$$

зависит только от $t$ и при выполнении в некоторой точке $z_0$ граничных условий (47) в каждый момент времени, очевидно, (59) есть тождественный нуль. Значит, при выполнении условий (47) третье уравнение (55) есть следствие первого, а первые переписываются в виде (48). Теорема доказана. #

## Список литературы

1. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. – Новосибирск: Наука, 2008. – 96 с.
2. Вараксин А.Ю., Роман М.Э., Копейцев В.Н. Торнадо. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 344 с.
3. Karman T. Über laminare and turbulente Reibung. ZAMM, 1921, v. 1, pp. 244-247.
4. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005. 328 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика – 4-е изд. стер. – М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1988. – 736 с.
6. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 312 с.
7. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные уравнения. – М.: Наука, 1982.
8. Lundquist S. Experimental Investigation of Magneto-Hydrodynamic Waves // Physical Review, V. 76. N 12. 1949. pp. 1805–1809.
9. Сычев В.В. О движении вязкой электропроводной жидкости под действием вращающегося диска в присутствии магнитного поля – ПММ, 1960, т. 24, № 5, с. 906.
10. Шидловский В.П. Исследование движения вязкой электропроводной жидкости, вызванное вращением диска, при наличии осевого магнитного поля. // Магнитная гидродинамика, 1966, № 1, с. 93–97.

## Оглавление

1. Введение ........ 3
2. Основные уравнения ........ 4
3. Задача о возбуждении вязкой несжимаемой жидкости вращающимся диском ........ 6
4. Простая модель торнадо ........ 14
5. Численное решение краевой задачи (9) ........ 17
6. Роль вязкости ........ 20
7. Некоторые результаты расчётов ........ 24
8. Уравнения магнитного торнадо ........ 27
Список литературы ........ 34