ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 43 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Беклемишев Н.Д., Беляев М.Ю., Богуславский А.А., Монахов М.И., Сазонов В.В., Соколов С.М., Софинский А.Н.

Исследование колебаний элементов конструкции космической станции по видеоинформации

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Исследование колебаний элементов конструкции космической станции по видеоинформации / Н.Д.Беклемишев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 43. 46 с. doi:10.20948/prepr-2019-43
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-43

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Н.Д. Беклемишев, М.Ю. Беляев, А.А. Богуславский, М.И. Монахов, В.В. Сазонов, С.М. Соколов, А.Н. Софинский

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ КОСМИЧЕСКОЙ СТАНЦИИ ПО ВИДЕОИНФОРМАЦИИ

Москва — 2019

Беклемишев Н.Д., Богуславский А.А., Беляев М.Ю., Монахов М.И., Сазонов В.В, Соколов С.М, Софинский А.Н.

Исследование колебаний элементов конструкции космической станции по видеоинформации

Зрительные данные о колебаниях элементов конструкции *Международной космической станции* (МКС) позволяют получить количественные характеристики этих колебаний. Такие характеристики находятся в результате анализа временных рядов, полученных прослеживанием на видеопоследовательностях объектов интереса в конструкции МКС. Числовые данные представляют собой выраженные в пикселях вертикальные и горизонтальные координаты в кадре выделенной точки элемента конструкции. Анализ полученных временных рядов позволяет восстановить реальную зависимость указанных координат от времени. Эта зависимость в ряде случаев носит колебательный характер и может быть представлена суммой конечного числа гармоник, амплитуды и частоты которых определяются с помощью спектрального анализа.

Ключевые слова: МКС, обработка видеоданных, спектральный анализ временных рядов

Beklemishev N.D., Belyaev M.Yu., Boguslavsky A.A., Monakhov M.I., Sazonov V.V., Sokolov S.M, Sofinsky A.N.

Research of vibrations of structure elements of the space station on video information

Video information about vibrations of elements of ISS structure allows to establish quantitative characteristics of these vibrations. Such characteristics are found as a result of processing of time series obtained by digitizing of video film shots. Digital data are vertical and horizontal coordinates, expressed in pixels, of some points on a station structure element in a shot. Processing of the time series allows evaluating the real time dependence of the coordinates. This dependence in common has an oscillation character and can be presented by the sum of eventual number of simple harmonics, their amplitudes and frequencies being determined by means of spectral analysis.

Key words: ISS, processing of video data, spectral analysis of time series

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 17-01-00143, 16-19-10705

1. Введение. Цель данной работы – показать, что зрительная информация о колебаниях элементов конструкции станции позволяет получить содержательные количественные характеристики этих колебаний. Такие характеристики найдены в результате обработки временных рядов, полученных оцифровкой четырех видеофильмов, снятых фотоаппаратом Nikon D5 в 2018 году: 4 апреля, 31 мая и 27 июля. Длительность каждого фильма около получаса. Объектом съемки служили внешние элементы конструкции МКС со сравнительно малыми инерционными параметрами (массами и моментами инерции). Фотоаппарат располагался рядом с одним из иллюминаторов Российского сегмента (РС) МКС и крепился к корпусу станции с помощью специального кронштейна. На объектах съемки выделялись характерные точки, движение которых прослеживалось в течение практически всего видеофильма. Метод межкадрового прослеживания описан в [1]. Координаты выделенных точек в кадре определялись в цифровом виде. Их значения задавались на равномерной временной сетке с шагом 0.04 с. Полученные временные ряды служили объектом последующего анализа. Такой анализ позволяет восстановить реальную зависимость указанных координат от времени и получить сведения о движении снятых объектов.

Найденные движения представляют собой колебания, характер которых со временем меняется. Однако на большом числе продолжительных по времени отрезков эти колебания можно считать установившимися и представить в виде суммы конечного числа гармоник (циклических трендов). Параметры гармоник (частоты, амплитуды и фазы) определяются методами спектрального анализа [2]. В результате удается получить количественные характеристики колебаний объектов. Ниже основное внимание уделено выявлению и исследованию таких многочастотных колебаний.

Заметим, что видеосъемка – наиболее практичный способ получения такого рода данных для малоинерционных объектов. В случае массивных объектов похожую (и более точную) информацию можно получить, анализируя данные бортовых акселерометров [3, 4], но в случае внешних малоинерционных объектов использовать акселерометры гораздо сложнее.

2. Характеристики фотоаппарата. Видеосъемка производилась фотоаппаратом Nikon D5 с объективом AFZoom-Nikkor 80-400 мм f/4.5-f/5.6. Объектив имеет фокусное расстояние 400 мм, скорость видеосъемки – 25 кадров в секунду, размер кадра – 3840x2160 пикселей.

Размер матрицы фотоаппарата – 35.9x23.9 мм [5]. Отсюда находим значения фокусного расстояния объектива в пикселях видео – $f = 42785.5$. Масштаб съемки – длина стороны одного пикселя изображения объекта, находящегося на расстоянии d от фотоаппарата, – определяется как отношение d/f. Например, при расстоянии до объекта 10 м (как при съемке 04.04.2018) размер пикселя равен примерно 0.23 мм.

3. Съемка 04.04.2018. Объект съемки – край левого трехполосного радиатора, если смотреть в направлении Американского сегмента (АС) МКС (рис. 1). Фотоаппарат закреплен кронштейном УПК LIV/106/20 к поручню выходного люка СО1 у иллюминатора № 2. Расстояние до объекта съемки – около 10 м, масштаб съемки – 1 пиксель≈0.23 мм. Начало съемки – 13:34 (здесь и ниже время – московское). Продолжительность видео – 28 мин 8 с, всего обработано 42200 кадров.

По данной видеопоследовательности прослеживались 8 точек, показанных на рис. 2. Графики зависимости пиксельных координат точки от номера кадра построены для точки 7, отмеченной на рис. 2 красным цветом. За время съемки происходило постепенное смещение объекта съемки в кадре на величину примерно 700 пикселей≈16 см (рис. 3). По-видимому, это связано с долгопериодическими колебаниями конструкции с периодом, большим, чем время съемки видео.

В некоторые моменты наблюдались резкие толчки с амплитудой до 150 пикселей≈35мм со смазом кадров видео, как показано на рис. 4 и 5.

Значительную часть времени съемки конструкция совершала колебания, близкие к периодическим, с амплитудой около 10 пикселей≈2.3 мм и периодом примерно 180 кадров≈7 с, частота 0.14 Гц (рис. 6).

4. Съемка 31.05.2018. Объект съемки – край правого (если смотреть в направлении АС МКС) трехполосного радиатора (рис. 7). Фотоаппарат закреплен кронштейном УПК LIV/106/20 к поручню выходного люка МИМ2 у иллюминатора № 8. Расстояние до объекта съемки – примерно 8 м, масштаб съемки – 1 пиксель≈0.19 мм. Начало съемки – 12:37. Продолжительность видео – 28 мин 25 с, всего обработано 42627 кадров.

По данной видеопоследовательности прослеживались 7 точек, показанных на рис. 8. Графики зависимости пиксельных координат точки от номера кадра построены для точки 7, которая отмечена на рис. 8 красным цветом. Смещение объекта за время съемки относительно первого кадра находилось в пределах 200 пикселей ≈40 мм по каждой координате (рис. 9). Значительную часть времени съемки конструкция совершала колебания, близкие к периодическим, с амплитудой примерно 7 пикселей≈1.4 мм и периодом около 110 кадров≈ 4.5 с, частота 0.22 Гц (рис. 10). Иногда амплитуда колебаний уменьшалась до 2 пикселей ≈0,4 мм и колебания имели более сложную форму (рис. 11).

Такие «спокойные» периоды сменялись периодами, когда конструкция испытывала толчки и колебания с переменной амплитудой до 30 пикселей≈6 мм и периодом примерно 3.3 кадра≈0.13 с, частота 7.5 Гц (см. рис. 12). Возможно, наблюдаемая переменная амплитуда колебаний здесь отчасти связана с недостаточной частотой кадров: максимальное отклонение объекта может приходиться на межкадровый промежуток.

Фон за объектом и освещенность объекта на этом видео значительно изменялись во время съемки, поэтому часть кадров была пропущена из-за ненадежной корреляции. Всего из 42627 кадров было принято 41762 кадра, пропущено 865 кадров. В частности, на графиках рис. 10 пропущены кадры 22102 – 22189 (88 кадров).

5. Съемка 26.07.2018. В этот день выполнялась одновременная видеосъемка двумя фотоаппаратами Nikon D5 из двух модулей РС МКС. Во время съемки была проведена коррекция орбиты МКС. Съемка началась в 18:55, корректирующие двигатели работали 199 с на интервале 19:10:17 – 19:13:36.

Первым фотоаппаратом проводилась съемка через иллюминатор №7 Служебного модуля (СМ) РС. Объект съемки – оконечность солнечной батареи корабля *Прогресс* (рис. 13). Расстояние до объекта съемки – примерно 11.5 м, масштаб съемки – 1 пиксель≈0.27 мм. Всего обработано 43503 кадра (29 мин). Объект прослежен на 42255 кадрах; 1248 кадров были отброшены программой из-за ненадежной корреляции. Коррекции орбиты соответствуют кадры 22925 – 27900. Однако этот интервал почти ничем не выделяется на графике смещения объекта съемки (см. ниже).

По данной видеопоследовательности прослеживались 6 точек, показанных на рис. 13. Графики зависимости пиксельных координат точки от номера кадра построены для точки 6, которая на рис. 13 отмечена красным цветом.

Во время съемки объект находился на фоне Земли, из-за этого изменялась яркость фона и возникали блики на панелях фотоэлементов. При совмещении необработанных кадров данного видео возникало много ошибок в прослеживании объекта, и вследствие плохой корреляции было отбраковано много кадров. По этой причине на каждом кадре предварительно проводилось выделение контуров объектов методом [6], как показано на рис. 14, затем оконтуренные кадры совмещались общим методом. Это помогло отфильтровать существенные детали от размытых деталей фона.

Смещение объекта за время съемки относительно первого кадра находилось в пределах 100 пикселей≈27 мм по каждой координате (рис. 15). Интервал коррекции орбиты не имеет характерных особенностей (рис. 16). На нем наблюдается плавное смещение объекта в пределах 6 пикселей (1.6 мм) и колебания с амплитудой 1 – 2 пикселя (0.27 – 0.54 мм).

Резкие смещения объекта происходили на первых 600 кадрах (24 с) от начала съемки. Эти смещения могли быть связаны с установкой штатива. Также резкие смещения наблюдались в интервале кадров 15700 – 16100 (рис. 15), 12500 – 14000 (рис. 15, 17) и 28100 – 28800 (рис. 15).

Значительную часть времени конструкция испытывала колебания с переменной амплитудой от 1 до 4 пикселей (0.27 – 1.1 мм) и периодом примерно 33 кадра (1.3 с), частота 0.75 Гц (рис. 18).

Вторым фотоаппаратом проводилась съемка через иллюминатор №2 модуля МИМ2 РС. Объект съемки: оконечность радиатора МКС, расположенного справа от корпуса станции по ходу ее движения по орбите (рис. 19).

Расстояние до объекта съемки – около 10 м, масштаб съемки – 1 пиксель≈0.23 мм. По данной видеопоследовательности прослеживались 9 точек, показанных на рис. 19. Обработано 43452 кадра (28 мин 58 с). Графики зависимости пиксельных координат точки от номера кадра построены для точки 3 (отмечена на рис. 19 красным цветом). Смещение объекта за время съемки относительно первого кадра находилось в пределах 200 пикселей (~46 мм) по каждой координате, см. рис. 20.

Интервал коррекции орбиты (кадры 22925 – 27900), как и при съемке из СМ РС, почти не имеет характерных особенностей (рис. 21), несколько увеличена амплитуда колебаний. Значительную часть времени съемки конструкция совершала колебания, близкие к периодическим, с амплитудой до 20 пикселей (4,6 мм) и периодом около 180 кадров (7,2 с), частота 0.14 Гц (рис. 22). Иногда наблюдались колебания более сложной формы с амплитудой до 50 пикселей (11 мм), в частности, во время коррекции орбиты (рис. 21).

6. Подготовка данных для спектрального анализа. Как видно из графиков на рис. 6, 10, 11 и др., колебания выделенных точек на элементах конструкции МКС описываются функциями времени, многие из которых имеют специфический вид. Функции этого вида представляют собой сумму двух слагаемых. Одно из них – медленно меняющаяся функция с характерным временем изменения несколько минут, другое – быстро меняющаяся функция, представимая в виде суммы конечного числа гармоник и в ряде случаев гармоник, умноженных на экспоненты. Слагаемое первого типа характеризует медленные движения элементов конструкции станции, вызванные тепловыми деформациями, колебаниями станции как твердого тела, поворотом солнечных батарей (СБ) и другими аналогичными причинами. Такие движения происходят с частотами менее 0.001 Гц. Гармоники, входящие во второе слагаемое, имеют частоты в пределах 0.05 – 0.3 Гц. Второе слагаемое обусловлено собственными колебаниями элементов конструкции станции. Именно эти колебания изучаются ниже.

При изучении колебаний выделенных точек на элементах конструкции МКС указанное выше первое слагаемое из функций, описывающих изменение координат этих точек, следует исключить. Исключение выполнялось с использованием дискретных рядов Фурье. Смещения выделенных точек на ПЗС матрице фотоаппарата обозначим x, y и будем выражать в пикселях, т.е. размер стороны пикселя примем в качестве единицы измерения длины. Значения смещений заданы в узлах равномерной временной сетки $t_n = t_0 + nh$, $h = 0.04$с, $n = 0, 1, \ldots, N$. Эти значения обозначим x_n, y_n и полагаем их измерениями реальных смещений $x(t), y(t)$: $x_n \approx x(t_n), y_n \approx y(t_n)$.

По данным $\{(t_n, x_n)\}_{n=0}^{N}$ и $\{(t_n, y_n)\}_{n=0}^{N}$ методом наименьших квадратов построим соответственно выражения

$$X(t) = \alpha_x + \beta_x (t - t_0) + \sum_{m=1}^{M} a_{x,m} \sin \frac{\pi m (t - t_0)}{t_N - t_0}, \tag{1}$$

$$Y(t) = \alpha_y + \beta_y (t - t_0) + \sum_{m=1}^{M} a_{y,m} \sin \frac{\pi m (t - t_0)}{t_N - t_0}.$$

Каждое выражение – сумма линейной функции и отрезка ряда Фурье по синусам. Выражения (1) удобно использовать для аппроксимации произвольных гладких функций, заданных на отрезке $t_0 \le t \le t_N$ [7]. При подходящем значении M эти выражения аппроксимируют слагаемые указанного выше первого типа в функциях $x(t), y(t)$. Разности $x_n - X(t_n)$, $y_n - Y(t_n)$ уже не содержат таких слагаемых и представляют собой сумму конечного числа гармоник и, возможно, гармоник, умноженных на экспоненты.

Примеры исключения слагаемых первого типа приведены на рис. 23 – 25. В левых частях этих рисунков зеленым цветом изображены графики исходных данных. Графики представляют собой ломаные линии. Верхние графики – ломаные, звенья которых соединяют соседние по времени точки (t_n, x_n), нижние графики – аналогичные ломаные с вершинами в точках (t_n, y_n). Иными словами, исходные данные представлены на рисунках непрерывными кусочно-линейными функциями. Красным цветом в левых частях рисунков изображены графики выражений (1). В подписях к рисункам указаны использованные значения M и пропущенное число точек от начала видео до точки t_0, если $t_0 > 0$. Графики построены на отрезках времени длиной $t_N - t_0 = Nh$.

В правых частях рис. 23 – 25 приведены графики в виде ломаных с вершинами в точках $(t_n, x_n - X(t_n))$, $(t_n, y_n - Y(t_n))$. Как видно из этих графиков, слагаемые первого типа в соответствующих кусочно-линейных функциях отсутствуют. Ниже для упрощения записи разности $x_n - X(t_n)$, $y_n - Y(t_n)$ будем обозначать x_n и y_n соответственно.

7. Спектральный анализ. Основные приемы спектрального анализа изложим на примере данных $\{(t_n, x_n)\}_{n=0}^{N}$. Данные $\{(t_n, y_n)\}_{n=0}^{N}$ анализируются аналогично. Более подробно эти приемы описаны в [2]. Спектральный анализ начинался с попытки выделить из данных x_n отдельные гармонические составляющие (их еще называют циклическими трендами). С этой целью данные аппроксимировались функцией

$$x_{\text{ap}}(t) = a_0 + a\cos 2\pi f t + b\sin 2\pi f t, \qquad (2)$$

где a_0, a, b и f – параметры. Значения параметров искались методом наименьших квадратов.

Составим выражение

$$\Psi = \sum_{n=0}^{N} [x_n - x_{\text{ap}}(t_n)]^2. \qquad (3)$$

Согласно методу наименьших квадратов определение параметров a_0, a, b и f сводится к минимизации по ним выражения (3). Функция $\Psi = \Psi(a_0, a, b, f)$ имеет, как правило, много локальных минимумов, поэтому ее минимизация проводилась поэтапно. Сначала в результате решения ряда одинаковых линейных задач наименьших квадратов вычислялись значения функции

$$\Psi_1(f) = \min_{a_0, a, b} \Psi(a_0, a, b, f)$$

в узлах достаточно мелкой равномерной сетки на отрезке $0 \le f \le F$ (значение F определено ниже), строился график этой функции. Затем перебором по сетке находились приближенные значения точек минимума $\Psi_1(f)$. Абсциссы значимых (с достаточно малыми ординатами) точек минимума могут быть частотами искомых гармоник. Значения параметров a_0, a, b и f, отвечающие значимым минимумам функции Ψ_1, уточнялись посредством минимизации функционала (2), (3). Задача одновременного уточнения параметров a_0, a, b и f является нелинейной. Ее решение находилось методом Гаусса–Ньютона [8].

Для проверки значимости найденных частот другим способом наряду с функцией $\Psi_1(f)$ рассматривалась функция

$$I(f)=\left[\sum_{n=0}^{N}(x_n-x_*)\cos 2\pi f t_n\right]^2+\left[\sum_{n=0}^{N}(x_n-x_*)\sin 2\pi f t_n\right]^2,$$

$$x_*=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}x_n,$$

называемая периодограммой Шустера [2]. Пусть исследуемый набор данных $x^{(n)}$ образован значениями в точках t_n функции

$$x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{K}(a_k\cos 2\pi f_k t+b_k\sin 2\pi f_k t), \qquad (4)$$

где все $f_k>0$ и среди них нет одинаковых. Составим выражение

$$I_1(f)=\left\{\sum_{n=0}^{N}[x(t_n)-\alpha_0]\cos 2\pi f t_n\right\}^2+\left\{\sum_{n=0}^{N}[x(t_n)-\alpha_0]\sin 2\pi f t_n\right\}^2.$$

Его можно преобразовать к виду

$$I_1(f)=\frac{(N+1)^2}{4}\sum_{k=1}^{K}(\alpha_k^2+\beta_k^2)[W(f-\lambda_k)+W(f+\lambda_k)]+\Delta I_1(f),$$

$$W(f)=\left(\sum_{n=0}^{N}\cos 2\pi f t_n\right)^2+\left(\sum_{n=0}^{N}\sin 2\pi f t_n\right)^2=\frac{N+1+2\sum\limits_{k<l}\cos 2\pi f(t_l-t_k)}{(N+1)^2},$$

$$\Delta I_1(f)=\sum_{k<l}\sum_{m}(A_m\cos\Psi_{klm}+B_m\sin\Psi_{klm}), \quad \Psi_{klm}=2\pi[\Omega_m t_k+\Omega'_m t_l+f(t_l-t_k)].$$

В выражении для $\Delta I_1(f)$ частоты Ω_m и Ω'_m принадлежат множеству чисел $\{\pm f_1,\pm f_2,\ldots,\pm f_K\}$, коэффициенты A_m и B_m выражаются через α_k и β_k $(k=1,2,\ldots,K)$.

Функция $W(f)$ называется функцией окна [2]. Она – четная, периодическая с периодом h^{-1} и удовлетворяет соотношениям $0 \le W(f) \le 1$, $W(0)=1$. Ее наименьший положительный нуль равен $[(N+1)h]^{-1}$. Для сетки $\{t_n\}_{n=0}^{N}$ с шагом $h=0.04$с и $N=1000$ фрагменты ее графика изображены на рис. 26. Функция окна периодическая с периодом 25 Гц. Значимые максимумы (пики) функции окна равны 1 и достигаются в точках $F_l = 25l$ Гц $(l=0,1,2,\ldots)$. Вне малых окрестностей этих точек $W(f)<0.01$. С увеличением N ширина пиков этой функции сужается. В силу четности и периодичности функция окна полностью определяется своими значениями на отрезке $0 \le f \le 12.5$ Гц.

Для $\Delta I_1(f)$ не удается найти простых эффективных оценок, но при большом N вкладом этого слагаемого в значения функции $I_1(f)$ вблизи точек ее значимых максимумов можно пренебречь и принять

$$I_1(f) \approx \frac{(N+1)^2}{4}\sum_{k=1}^{K}(\alpha_k^2+\beta_k^2)[W(f-f_k)+W(f+f_k)].$$

Отсюда, учитывая поведение функции $W(f)$, легко найти точки таких максимумов. Они определяются соотношениями $|f \pm f_k| = F_l$. Пусть все $f_k < F_1/2$. Тогда на отрезке $0 \le f \le F_1/2$

$$I_1(f) \approx \frac{(N+1)^2}{4}\sum_{k=1}^{K}(\alpha_k^2+\beta_k^2)W(f-f_k),$$

и отыскание значимых максимумов функции $I_1(f)$ на этом отрезке позволяет в принципе определить все частоты выражения (4). Частота $F=F_1/2$ называется частотой Найквиста. Именно она служила верхней границей диапазона частот, для которых вычислялась функция $\Psi_1(f)$. В данном случае $F=12.5$Гц.

Здесь необходимо сделать одно принципиальное замечание. Корректная обработка данных, заданных на равномерной временной сетке с шагом h, возможна лишь в том случае, если в этих данных отсутствуют частоты, превышающие частоту Найквиста $F=0.5/h$. Если в данных присутствует гармоническая составляющая частотой $f>F$, то она проявится в данных с частотой $f' = f\ (\mathrm{mod} F)$, $0 \le f' < F$. Этот эффект называется наложением частот [2]. Чтобы избежать его, регистрируемые данные перед оцифровкой подвергают фильтрации. В случае обрабатываемых видеоданных фильтрации не было, анализ их спектров показывает, что сколько-нибудь значимых гармонических составляющих с частотами из диапазона $2 \div 12.5$Гц в них нет. Колебания с частотами более 12.5 Гц в случае МКС имеют весьма малую амплитуду и в видеофильмах не проявляются. Это обстоятельство служит обоснованием корректности проводимого спектрального анализа.

Периодограмма Шустера используется следующим образом. Если функция $I_1(f)$ имеет значимый максимум в точке f_*, то f_* близка одной из частот выражения (3). При $f_* \approx f_k$ величина $2\sqrt{I_1(f_*)}/(N+1) \approx \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$, т.е. является оценкой амплитуды гармоники с частотой f_k. Так как погрешность соотношения $\alpha_0 = x_*$ обычно весьма мала, в выписанных соотношениях функцию $I_1(f)$ можно заменить функцией $I(f)$.

Ниже для удобства вместо графиков функций $\Psi_1(f)$ и $I(f)$ приводятся графики функций

$$E(f) = \sqrt{\frac{\Psi_1(f)}{N-2}}, \qquad A(f) = \frac{2}{N+1}\sqrt{I(f)}.$$

Минимумы функции $E(f)$ дают оценки средней квадратичной ошибки аппроксимации функции $x(t)$ выражением (1), максимумы функции $A(f)$ – оценки амплитуды $\sqrt{a^2+b^2}$. Функцию $A(f)$ называют еще амплитудным спектром. Ниже функции (4), построенные по данным $\{(t_n, x_n)\}_{n=0}^N$, снабжены нижним индексом x, функции, построенные по данным $\{(t_n, y_n)\}_{n=0}^N$, снабжены индексом y.

Результаты спектрального анализа некоторых фрагментов данных, выделенных из данных на рис. 23 – 25, приведены на рис. 27 – 41. Рис. 27, 30, 33, 36 и 39 иллюстрируют выделенные фрагменты и результаты их первичного анализа. В левой части этих рисунков представлены графики анализируемых данных – ломаные с вершинами в точках (t_n, x_n), (t_n, y_n). В средней и правой частях рисунков приведены соответствующие периодограммы (спектры) $E_x(f)$, $A_x(f)$ и $E_y(f)$, $A_y(f)$. Спектры построены на отрезке $0 \le f \le 0.4$Гц. При $f > 0.4$Гц значимых экстремумов периодограмм не обнаружено. В подписях к рисункам указаны частоты f и амплитуды $A = \sqrt{a^2+b^2}$ циклических трендов, отвечающих значимым и с подозрением на значимость минимумам функции $\Psi_1(f)$. Частоты приведены в герцах, амплитуды – в пикселях. Нижние индексы x и y указывают, к каким данным $\{x_n\}$ или $\{y_n\}$ эти частоты и амплитуды относятся.

Анализ найденных частот обнаруживает их повторяемость и локализацию в нескольких достаточно узких диапазонах. Например, частоты из окрестностей значений 0.09, 014, 0.18, 0.22 Гц и др. встречаются в разные дни съемки.

Вообще, поиск гармонических составляющих в данных измерений является коварной задачей. Если амплитуда найденной гармоники мала и нет априорной уверенности в существовании такой гармоники, то вывод о ее обнаружении может оказаться ошибочным [2]. Гармоники с малыми амплитудами могут порождаться случайными ошибками в данных. Для гармоник с большими амплитудами таких сомнений не возникает. Еще одна сложность, которая может возникнуть в спектральном анализе, – это разрешение близких частот. В приведенных фрагментах этот эффект встречается неоднократно (см. ниже). Чтобы проверить правильность и оценить значимость найденных гармонических составляющих, решалась задача синтеза – построение аппроксимации выбранного отрезка данных в виде линейной комбинации этих составляющих.

Пусть с использованием периодограммы $\Psi_1(f)$ описанным выше способом найдены частоты f_k° $(k=1,2,\ldots,K;\, K \ll N)$. Отвечающий этим частотам тренд (сумму полиномиального и циклических трендов) ищем в виде

$$x_{\text{ap}}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{K} (a_k \cos 2\pi f_k t + b_k \sin 2\pi f_k t), \tag{5}$$

где a_0 и a_k, b_k, f_k $(k=1, \ldots, K)$ – постоянные параметры. На первом этапе поиска полагаем $f_k = f_k^\circ$ и находим a_0, a_k, b_k методом наименьших квадратов – из условия минимума функции, заданной соотношениями (2) и (5). Это условие приводит к системе линейных уравнений относительно a_0, a_k, b_k. Решаем систему и ее решение вместе с частотами f_k° используем в качестве первого приближения при минимизации функции (2), (5) методом Гаусса – Ньютона по всей совокупности переменных a_0 и a_k, b_k, f_k. Аналогичным образом, но с независимым выбором частот строилось выражение $y_{\text{ap}}(t)$.

Уточненные частоты f_k обычно оказывались близкими к исходным частотам первого приближения f_k°, но если частоты первого приближения были близкими, то соответствие между исходными и уточненными частотами, как правило, нарушалось. Построение аппроксимирующего выражения (5) проводилось в несколько этапов (почти всегда в два этапа). Опишем это построение на примере данных $\{x_n\}$. На первом этапе в (5) включались гармоники с основными частотами спектра исходных данных. Построенное по этим частотам выражение использовалось для расчета остатков $\Delta x_n = x_n - x_{\text{ap}}(t_n)$ $(n = 0,1,\ldots,N)$. Остатки подвергались спектральному анализу. Для них по описанным выше правилам строились периодограммы $E_{\Delta x}(f), A_{\Delta x}(f)$, находились наиболее значимые частоты, и эти частоты добавлялись к частотам, найденным на первом этапе. Для расширенного набора частот по исходным данным $\{x_n\}$ строилось новое выражение (5), вычислялись новые остатки Δx_n, которые затем подвергались спектральному анализу, и т.д.

На каждом этапе точность построения аппроксимирующего выражения (5) характеризовалась отношением среднеквадратичных значений

$$D_{x,1} = \sqrt{\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} (\Delta x_n)^2}, \quad D_{x,0} = \sqrt{\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} (x_n - x_*)^2}$$

и видом периодограмм $E_{\Delta x}(f), A_{\Delta x}(f)$. Построение выражения (5) заканчивалось, когда отношение $D_{x,1}/D_{x,0}$ оказывалось меньше 0.5 и когда в периодограммах $E_{\Delta x}(f), A_{\Delta x}(f)$ не наблюдалось явного доминирования какой-либо частоты. В случае данных $\{y_n\}$ аналогичным образом вводятся и используются периодограммы $E_{\Delta y}(f), A_{\Delta y}(f)$ и среднеквадратичные значения $D_{y,0}$ и $D_{y,1}$.

Полученные таким способом результаты представлены на рис. 28, 29, 31, 32, 34, 35, 37, 38 и 40, 41. Перечисленные рисунки устроены одинаково, поэтому опишем только пару рис. 28, 29, иллюстрирующую фрагмент съемки 26.07.2018. На рис. 28 представлены результаты двухэтапного построения выражения (5) по данным $\{x_n\}$. График этого выражения изображен красной кривой в верхней системе координат в левой части рисунка. Рядом с ним зелеными маркерами отмечены точки (t_n, x_n). График ошибок аппроксимации приведен в нижней системе координат левой части рисунка. Этот график представляет собой ломаную, последовательно соединяющую точки $(t_n, \Delta x_n)$, $n = 0, 1, \ldots, N$. Частоты и амплитуды гармоник построенного выражения (5) приведены в подписи к рис. 28, где они по-прежнему обозначены $f_{x,k}$, $A_{x,k}$. Процесс построения выражения (5) практически не изменил основную гармонику с номером $k = 3$. Частоты остальных гармоник изменились в 3-4 цифре после запятой, что для частоты с номером $k = 1$ оказалось существенным. Амплитуды изменились несколько больше – сказалось распределение энергии данных по разным гармоникам. Построенная аппроксимация выглядит правдоподобной. Периодограммы $E_{\Delta x}(f)$, $A_{\Delta x}(f)$ приведены в правой части рис. 28. В них нет существенно доминирующих пиков, а отвечающие им амплитуды малы.

Рис. 29 иллюстрирует результат двухэтапного процесса построения аппроксимирующего выражения вида (5) для данных $\{y_n\}$.

По описанной схеме были обработаны еще 4 фрагмента съемок, выполненных 26.07.2018, 04.04.2018 и 31.05.2018 (рис. 30 – 41). Построение аппроксимирующих выражений во всех случаях, кроме данных $\{y_n\}$ одной из съемок 26.07.2018 (рис. 32), потребовало проведения второго этапа.

8. О точности определения параметров циклических трендов. Поскольку отыскание параметров циклических трендов в оцифрованных видеоданных выполнялось методом наименьших квадратов, точность определения этих параметров удобно характеризовать обычными оценками точности метода наименьших квадратов – соответствующими стандартными отклонениями. Опишем используемые для этого формулы и сформулируем лежащие в их основе гипотезы. Начнем с задачи поиска циклических трендов в данных $\{x_n\}$. Формулы (2), (3) запишем в виде

$$x_{\text{ap}}(t_n) = a_0 + a\cos n\alpha + b\sin n\alpha \equiv \chi(n), \quad \alpha = 2\pi f h, \tag{6}$$

$$\Psi = \sum_{n=0}^{N} [x_n - \chi(n)]^2 . \tag{7}$$

Параметр α введен вместо f для упрощения вычислений. Уточнение параметров a_0, a, b и α в окрестности значимых максимумов функции $\Psi_1(f)$, найденных на некоторой равномерной сетке $\{f_m\} \subset [0, F]$, выполнялось методом Гаусса–Ньютона [8]. На каждой итерации этого метода поправки Δa_0, Δa, Δb и $\Delta\alpha$ к имеющимся значениям a_0, a, b и α определяются переопределенной системой уравнений

$$\Delta a_0 + \cos n\alpha \cdot \Delta a + \sin n\alpha \cdot \Delta b + n(b\cos n\alpha - a\sin n\alpha)\Delta\alpha = x_n - \chi(n)$$

$$(n = 0, 1, \dots N).$$

Ее решение находится методом наименьших квадратов. Матрицу, вектор неизвестных и правую часть этой системы обозначим соответственно B, ξ и β. Тогда $\xi = (B^{\mathrm{T}} B)^{-1} B^{\mathrm{T}} \beta$. Итерации заканчиваются, когда норма вектора поправок ξ становится достаточно малой. Ковариационная матрица найденных оценок параметров a_0, a, b и α имеет вид

$$C = \frac{\Psi_*}{N-3}(B_*^{\mathrm{T}} B_*)^{-1} = \| C_{pq} \| \quad (p, q = a_0, a, b, \alpha).$$

Здесь Ψ_* – значение функции (6), (7) в точке локального минимума, отвечающего найденному циклическому тренду, B_* – матрица B, вычисленная в этой точке. Так как для большинства циклических трендов соотношения $x_n \approx \chi(n)$ $(n = 0, 1, \dots N)$ не выполнены, применение оценок метода наименьших квадратов в данном случае не обосновано. Однако эти оценки позволяют получить полезную информацию о точности определения параметров a_0, a, b и α тренда (6). Стандартные отклонения этих параметров – квадратные корни из соответствующих элементов матрицы C – обозначим σ_{a0}, σ_a, σ_b и σ_α. В частности, $\sigma_a = \sqrt{C_{aa}}$, $\sigma_\alpha = \sqrt{C_{\alpha\alpha}}$. Стандартное отклонение частоты f задается формулой $\sigma_f = \sigma_\alpha (2\pi h)^{-1}$, стандартное отклонение амплитуды $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ – формулой

$$\sigma_A = \frac{\sqrt{C_{aa} a^2 + C_{bb} b^2 + 2C_{ab} ab}}{A}.$$

Для примера приведем оценки точности циклических трендов с частотами и амплитудами

$$f_{x,2} = 0.09691, \quad A_{x,2} = 0.717,$$
$$f_{x,3} = 0.13655, \quad A_{x,3} = 2.85,$$
$$f_{x,4} = 0.18251, \quad A_{x,4} = 0.738$$

на рис. 27 имеем

$$\sigma_{f_{x,2}} = 0.00047, \quad \sigma_{A_{x,2}} = 0.066,$$
$$\sigma_{f_{x,3}} = 0.000070, \quad \sigma_{A_{x,3}} = 0.040,$$
$$\sigma_{f_{x,4}} = 0.00046, \quad \sigma_{A_{x,4}} = 0.066.$$

Описанная схема применяется и при поиске циклических трендов в данных $\{y_n\}$. Для циклических трендов

$$f_{y,2} = 0.07430, \quad A_{y,2} = 2.25,$$
$$f_{y,3} = 0.11526, \quad A_{y,3} = 2.06,$$
$$f_{y,4} = 0.13878, \quad A_{y,4} = 6.32$$

на рис. 27 имеем

$$\sigma_{f_{y,2}} = 0.00044, \quad \sigma_{A_{y,2}} = 0.195,$$
$$\sigma_{f_{y,3}} = 0.000048, \quad \sigma_{A_{y,3}} = 0.195,$$
$$\sigma_{f_{y,4}} = 0.00013, \quad \sigma_{A_{x,4}} = 0.157.$$

Аналогичным образом можно получить оценки точности параметров аппроксимирующего выражения (5). Величины $x_{\text{ap}}(t_n)$ представим в виде

$$x_{\text{ap}}(t_n) = a_0 + \sum_{k=1}^{K} (a_k \cos n\alpha_k + b_k \sin n\alpha_k) \equiv \chi(n), \tag{8}$$
$$\alpha_k = 2\pi f_k h.$$

Минимизация функционала (7), (8) выполняется методом Гаусса–Ньютона. Схема вычислений была описана выше. Дальнейшая ее детализация приводит к системе линейных уравнений

$$\Delta a_0 + \sum_{k=1}^{K} [\cos n\alpha_k \cdot \Delta a_k + \sin n\alpha_k \cdot \Delta b_k + n(b_k \cos n\alpha_k - a_k \sin n\alpha_k)\Delta\alpha_k] =$$
$$= x_n - \chi(n) \quad (n = 0, 1, \ldots N).$$

Смысл использованных здесь обозначений такой же, как в системе, использованной при минимизации функционала (6), (7). Новая система так же решается методом наименьших квадратов, описанным выше способом, и, по существу, по тем же формулам вычисляются стандартные отклонения $\sigma_{f_{x,k}}$ и $\sigma_{A_{x,k}}$. Ниже приведены параметры трендов из подписи к рис. 28, рядом с ними в скобках указаны их стандартные отклонения:

$$f_{x,1} = 0.00826(0.00031), \quad A_{x,1} = 0.456(0.023),$$
$$f_{x,2} = 0.09880(0.00020), \quad A_{x,2} = 0.633(0.023),$$
$$f_{x,3} = 0.13639(0.000055), \quad A_{x,3} = 2.85(0.024),$$

$$f_{x,4} = 0.18111(0.00018), \quad A_{x,4} = 0.717\,(0.024)$$
$$f_{x,5} = 0.25268(0.00043), \quad A_{x,5} = 0.284\,(0.024),$$
$$f_{x,6} = 0.30557(0.00063), \quad A_{x,6} = 0.193\,(0.024),$$
$$f_{x,7} = 0.14495(0.00014), \quad A_{x,7} = 1.23\,(0.024).$$

Параметры трендов из подписи к рис. 29, в скобках указаны стандартные отклонения:

$$f_{y,1} = 0.05023(0.00025), \quad A_{y,1} = 1.90\,(0.092),$$
$$f_{y,2} = 0.07422(0.00022), \quad A_{y,2} = 2.18\,(0.093),$$
$$f_{y,3} = 0.11529(0.00033), \quad A_{y,3} = 1.58\,(0.093),$$
$$f_{y,4} = 0.13832(0.00012), \quad A_{y,4} = 6.23\,(0.102),$$
$$f_{y,5} = 0.17986(0.00037), \quad A_{y,5} = 1.35\,(0.092),$$
$$f_{y,6} = 0.24788(0.00011), \quad A_{y,6} = 4.07\,(0.092),$$
$$f_{y,7} = 0.14552(0.00021), \quad A_{y,7} = 3.82\,(0.104).$$

Примерно такие же величины имеют стандартные отклонения остальных найденных циклических трендов.

Приведенные выше оценки характеризуют так называемую точность по внутренней сходимости, т. е. точность методики средствами самой методики. Представляет интерес сравнить описанные выше результаты с аналогичными результатами, полученными другими методами. При анализе колебаний конструкции МКС похожую информацию можно получить, анализируя данные бортовых акселерометров [3, 4, 9]. Акселерометр регистрирует кажущиеся ускорения, поэтому из его показаний напрямую можно использовать только частоты колебаний (и другие параметры, выражаемые в единицах времени, например, характеристики переходных процессов). Частоты, найденные разными методами, можно сравнивать непосредственно. Сравнение амплитуд требует привлечения сложных математических моделей, поскольку речь идет о разных физических величинах. По этой причине сравнение амплитуд практически невозможно. Кроме того, акселерометры на борту МКС «чувствуют» колебания только достаточно массивных объектов, которые в случае малоинерционных объектов проявляются как вынужденные колебания.

Частоты, приведенные в [3, 4, 9] и в данной работе, относятся к разным конфигурациям МКС, поэтому априори нельзя было ожидать очень точного совпадения. Однако все указанные выше частоты оказались весьма близкими некоторым частотам, приведенным в [9]. Среди полученных видеоданных нет таких содержательных примеров переходных процессов, как в работе [4]. В этом направлении пока не получены интересные оценки, что можно объяснить малым объемом имеющихся данных.

В видеофильме, содержащем эпизод с коррекцией орбиты, также не зафиксировано заметного изменения характера колебаний вследствие этой коррекции. По-видимому, это обстоятельство отражает существо дела. Ускорение МКС при коррекции весьма точно регистрируется акселерометром [3]. Это ускорение вызывает смещение станции как твердого тела, а видеоданные позволяют найти только смещения одних элементов ее конструкции относительно других элементов. Более того, видеоинформация о смещениях такого рода вместе с полезными данными может содержать мешающие данные о колебаниях фотоаппарата на фиксирующем его устройстве. Тем не менее в настоящее время видеосъемка – наиболее практичный и, возможно, единственный способ получения количественных характеристик относительных смещений малоинерционных элементов конструкции МКС.

Литература

1. Беклемишев Н.Д. Оценка среднего параллакса стереоизображений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 88. 12 с. doi:10.20948/prepr-2016-88.
2. Теребиж В.Ю. Анализ временных рядов в астрофизике. М.: Наука, 1992.
3. Завалишин Д.А., Беляев М.Ю., Сазонов В.В. Оценка динамических характеристик *Международной космической станции по измерениям* микроускорений // Космические исследования. 2009. Т. 47. № 2. С. 193-203.
4. Завалишин Д.А., Беляев М.Ю., Сазонов В.В. Определение характерных частот упругих колебаний конструкции *Международной космической станции по измерениям* // Космические исследования, 2010. Т. 48. № 4, С. 362-370.
5. https://ru.wikipedia.org/wiki/Nikon_D5.
6. Canny J. A computational approach to edge detection //IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.1986.V. 8(6). P. 679–698.
7. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961.
8. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.
9. Беляев М.Ю., Волков О.Н., Рябуха С.Б. Микровозмущения на международной космической станции // Космическая техника и технологии. 2013. № 2. С. 1-11.

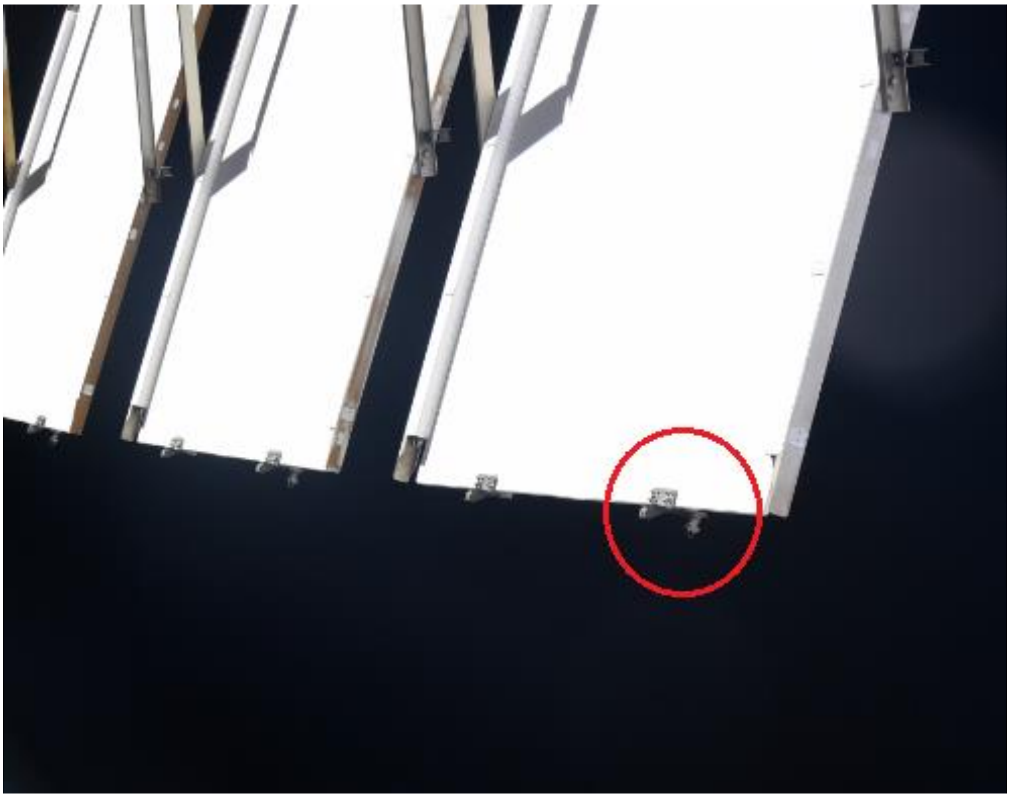


Рис. 1. Объект наблюдения 04.04.2018.

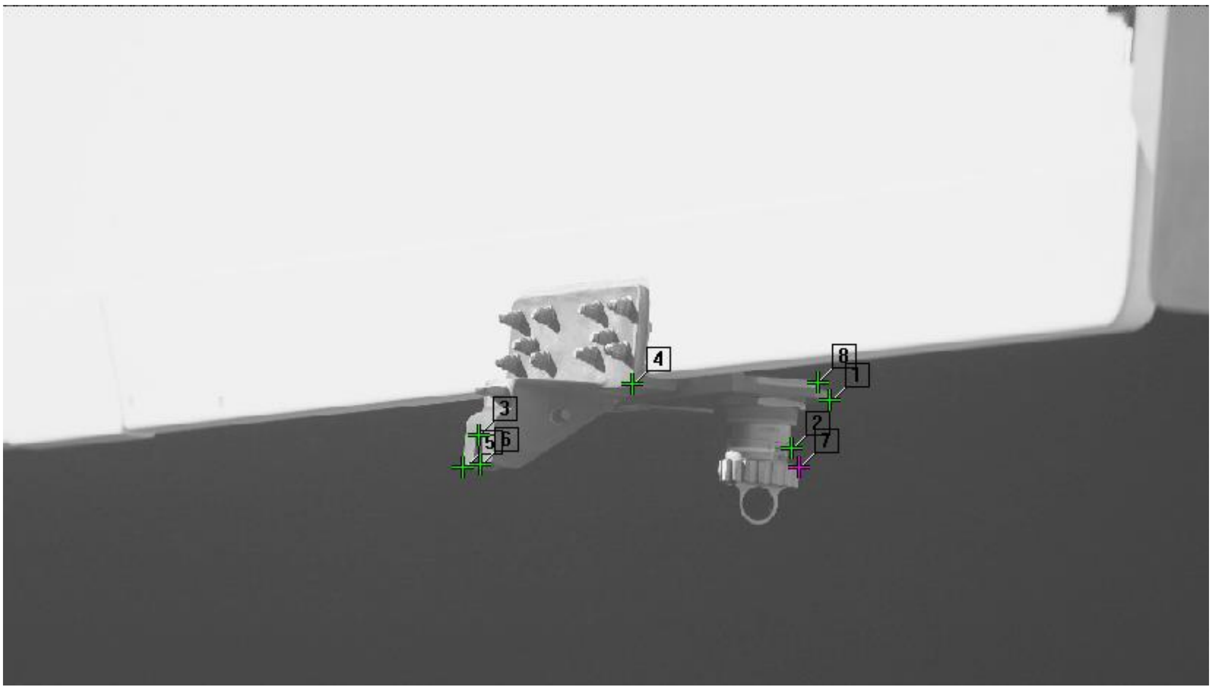


Рис. 2. Прослеживаемые точки на объекте.

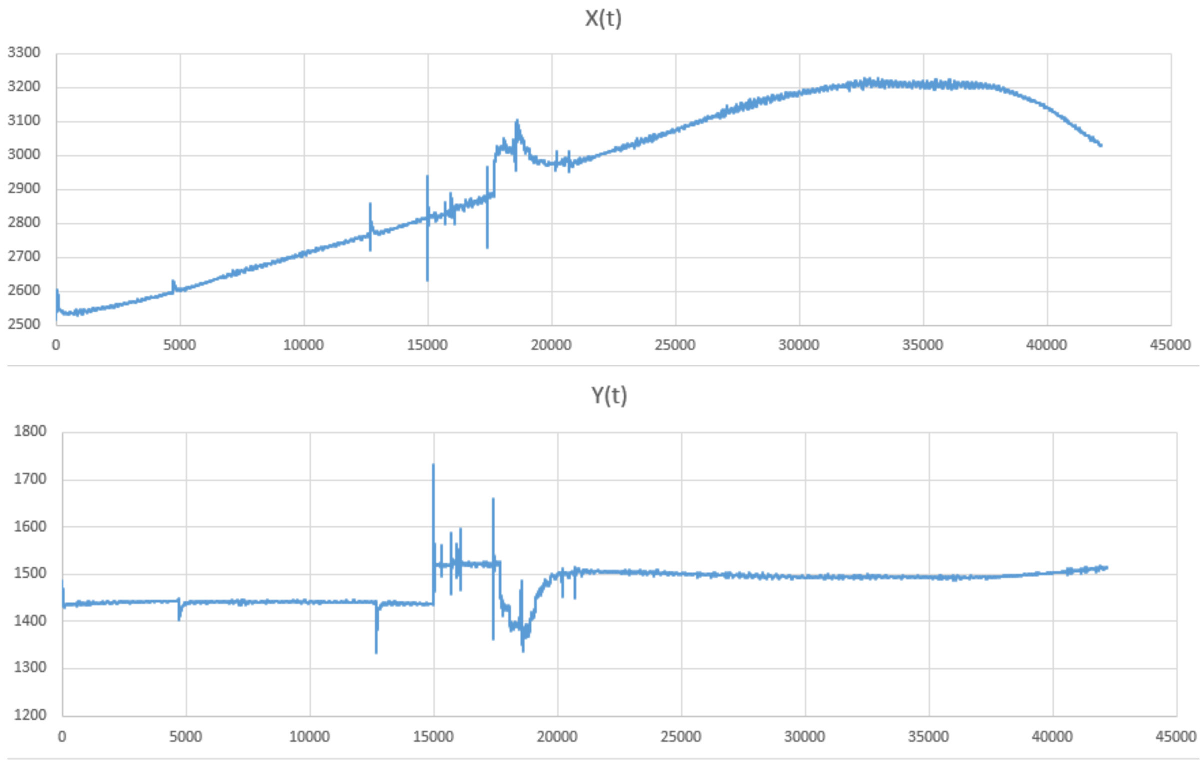


Рис. 3. Смещение объекта за время съемки.

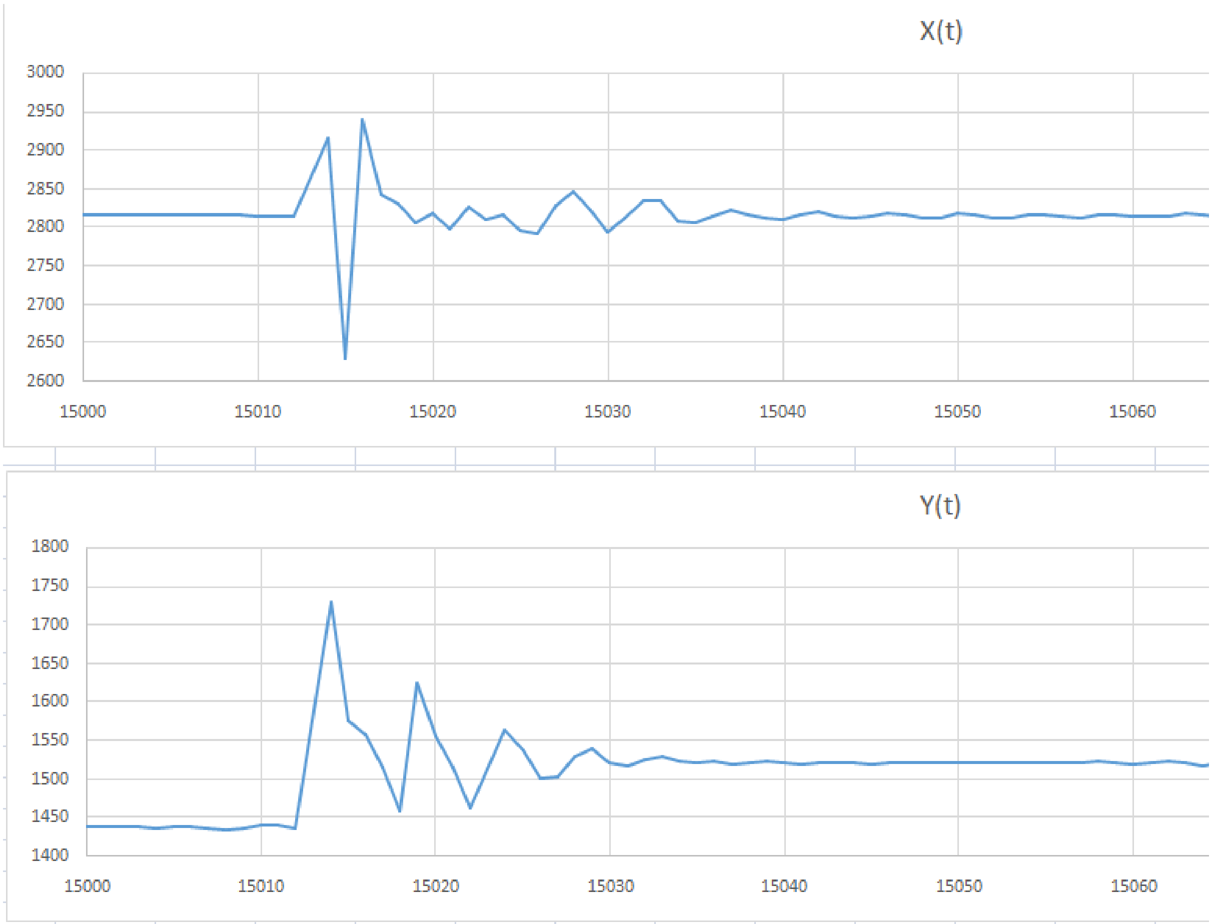


Рис. 4. Резкий толчок.

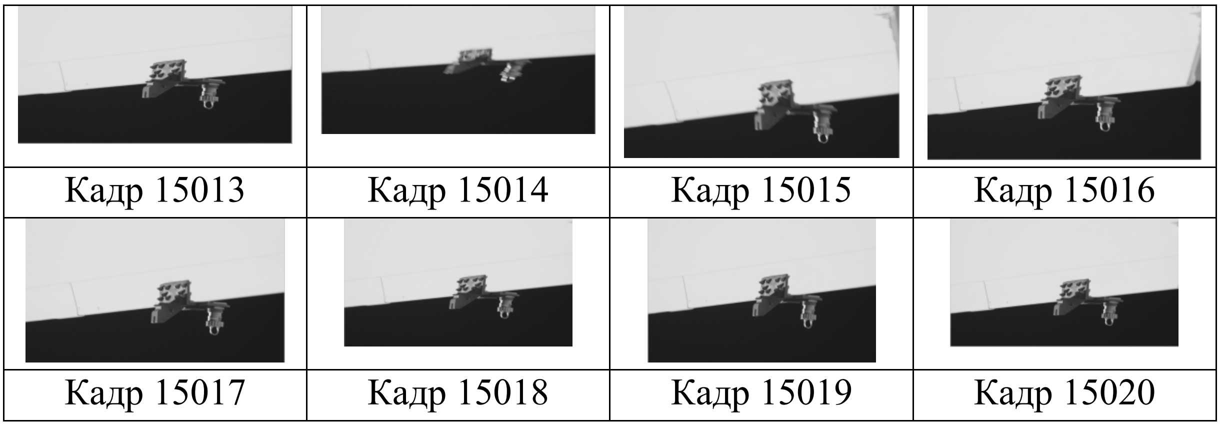


Рис. 5. Резкий толчок, смаз кадров.

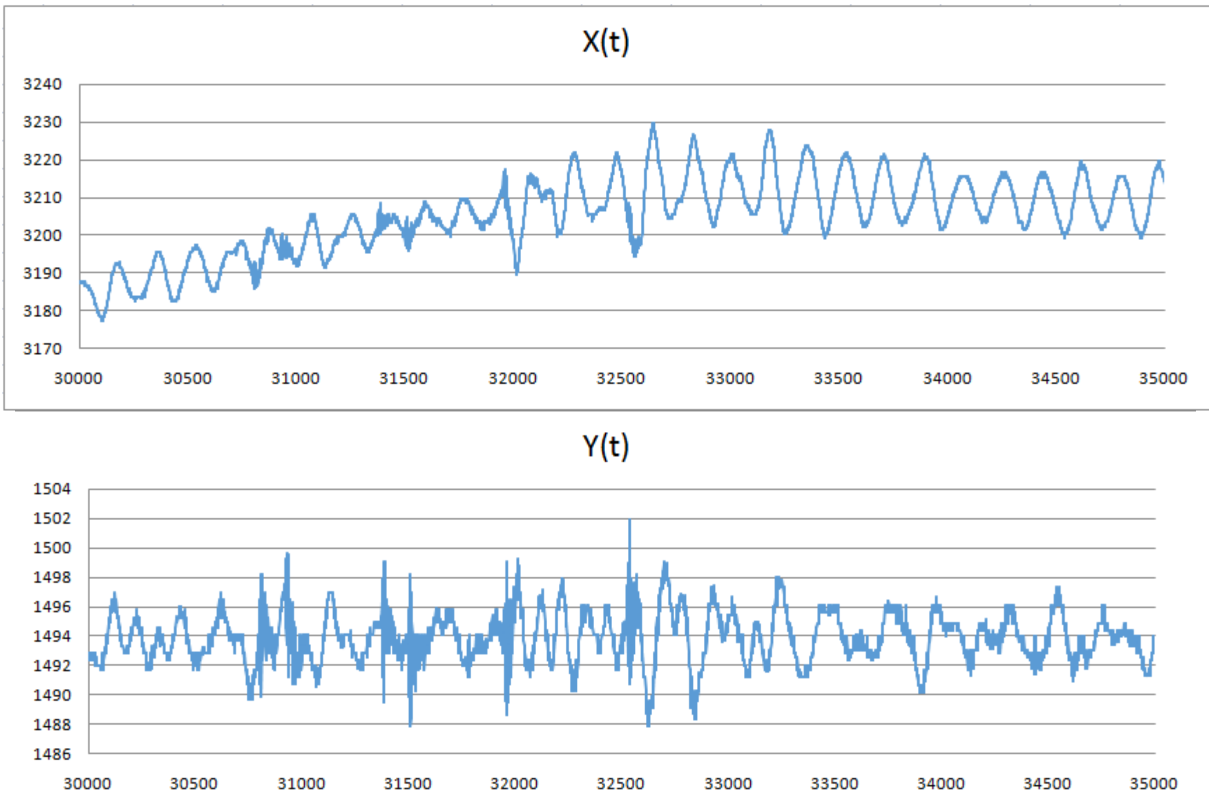


Рис. 6. Колебания, близкие к периодическим.

Рис. 7. Объект наблюдения 31.05.2018.

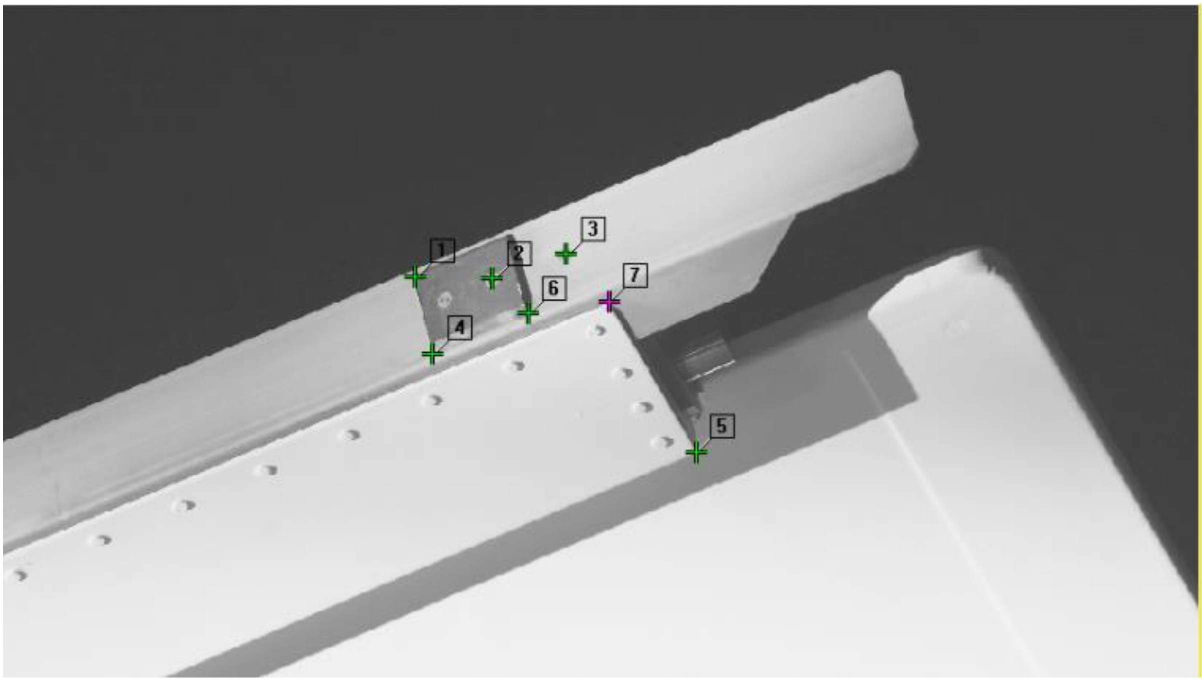


Рис. 8. Прослеживаемые точки на объекте.

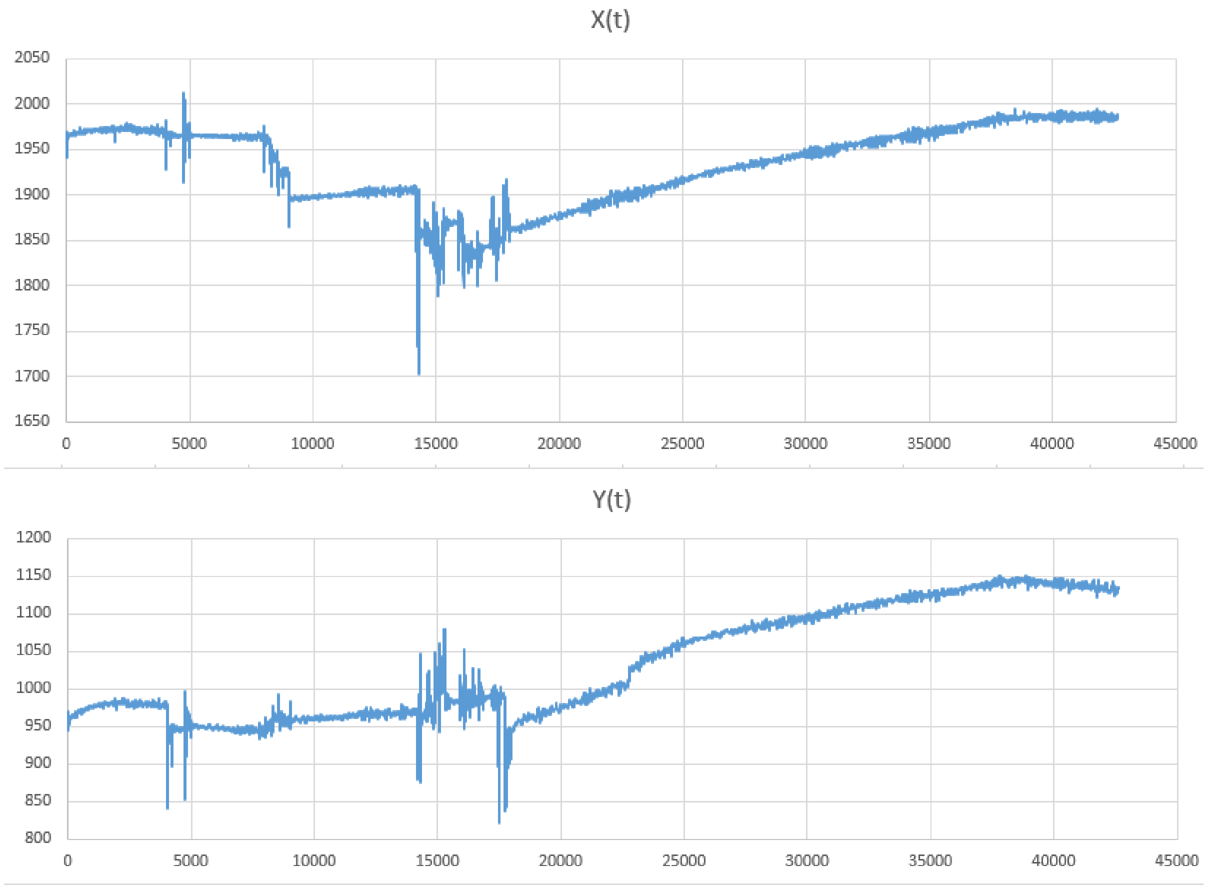


Рис. 9. Смещение объекта за время съемки.

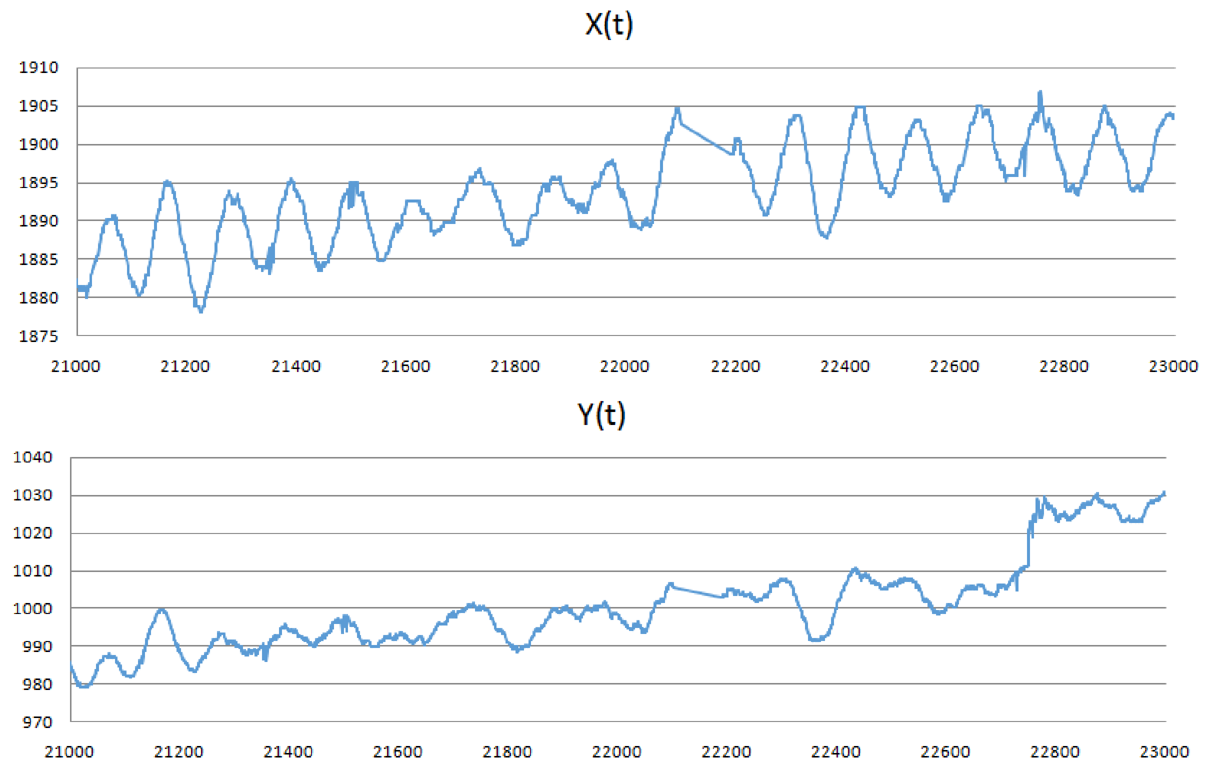


Рис. 10. Колебания, близкие к периодическим.

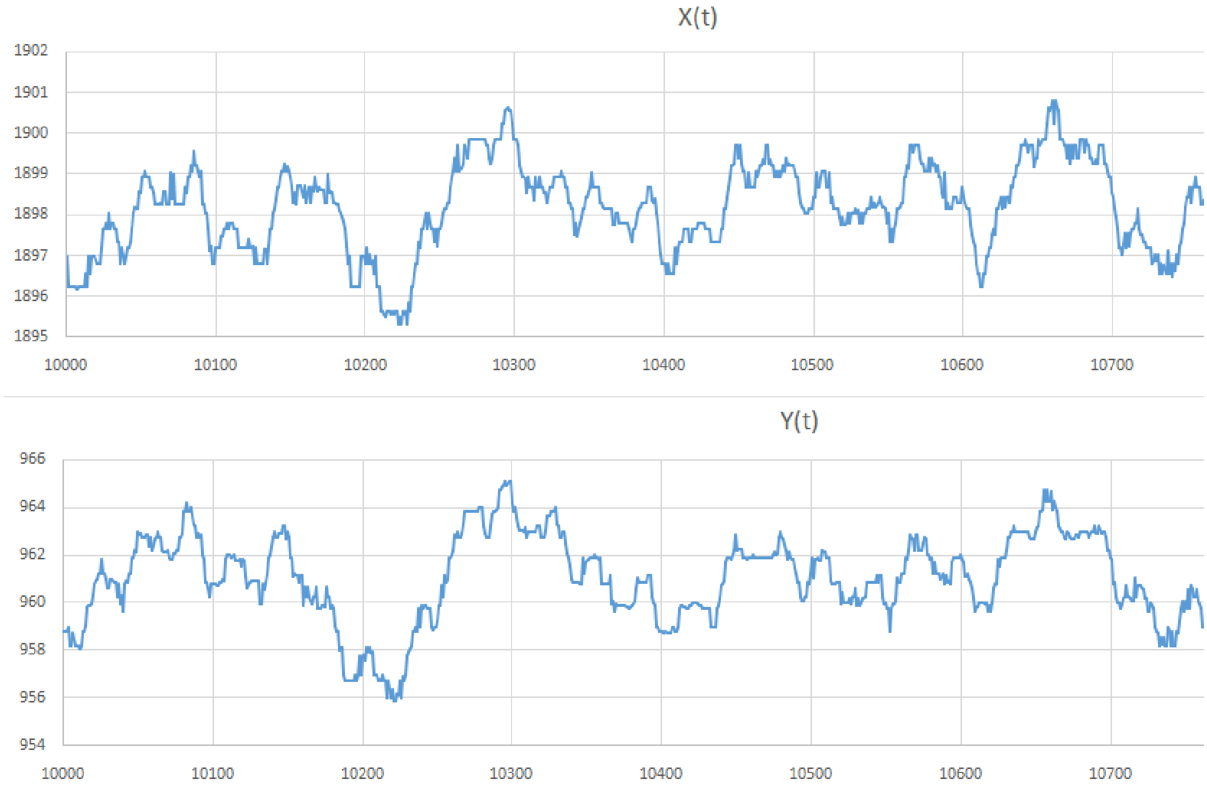


Рис. 11. Колебания сложной формы.

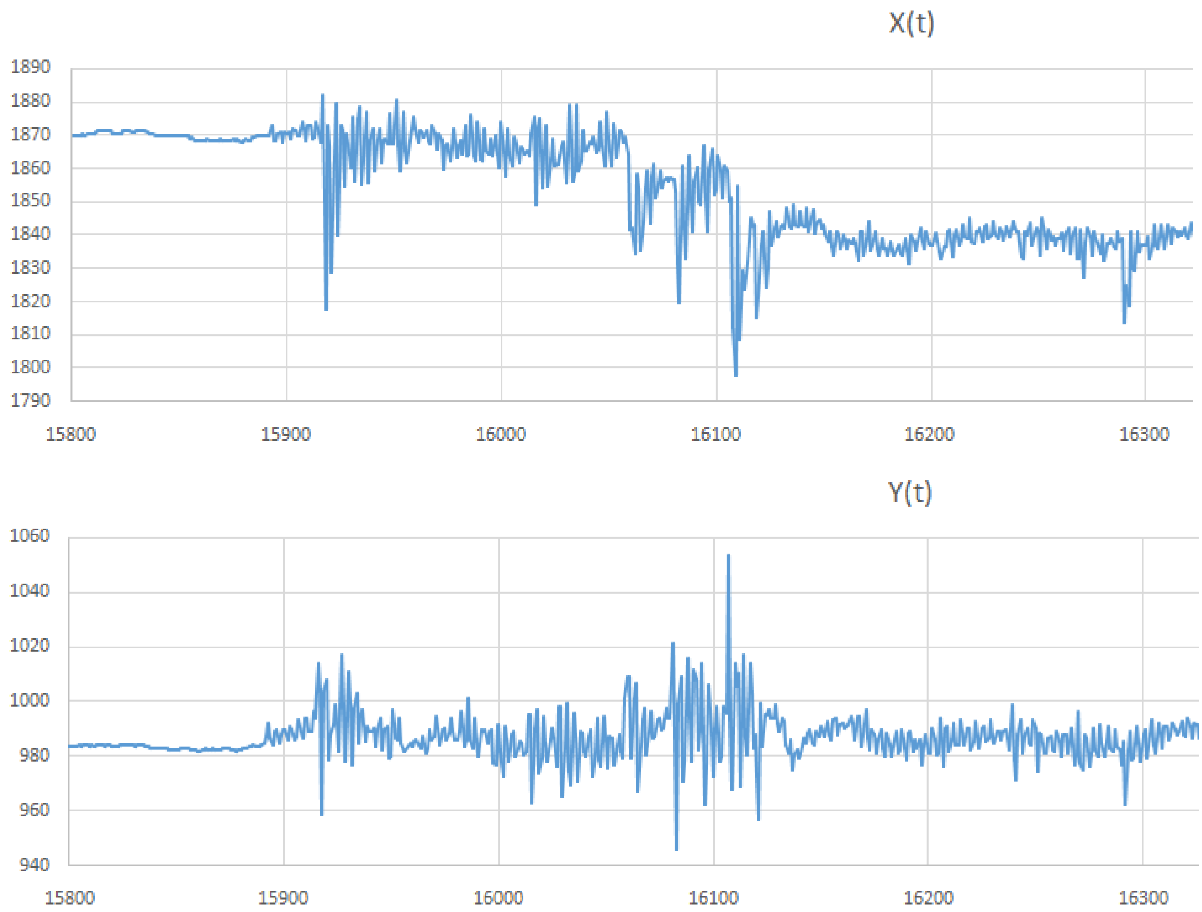


Рис. 12. Колебания с переменной амплитудой.

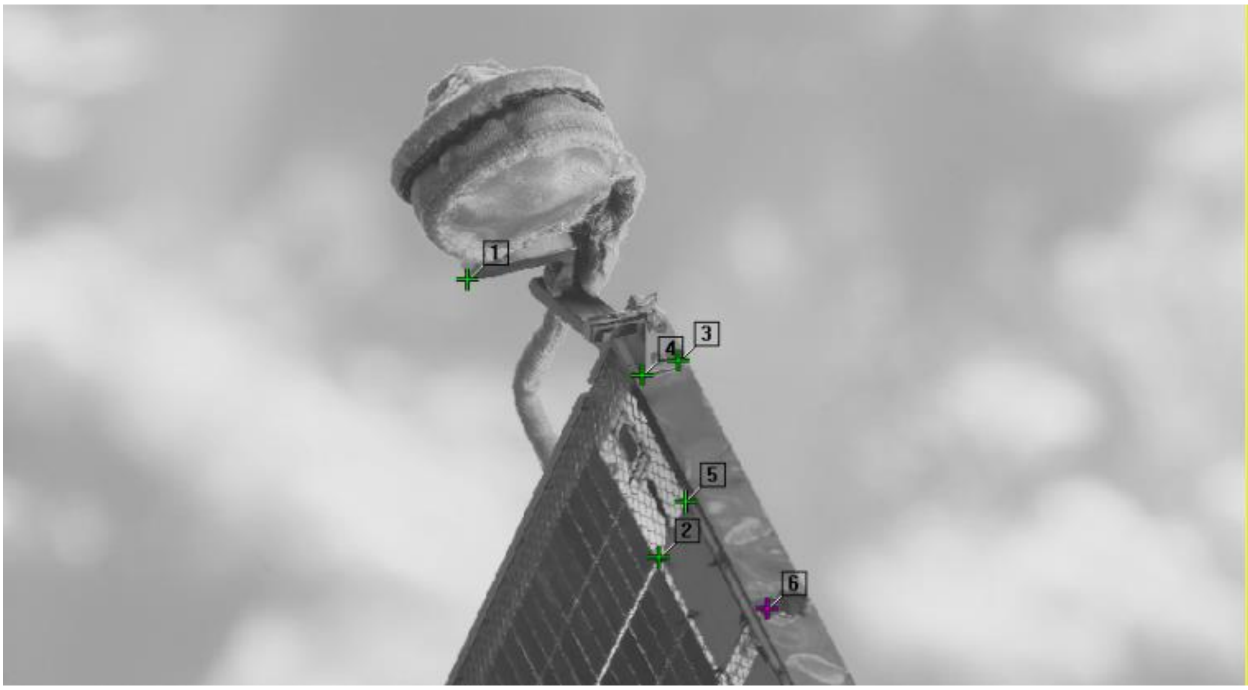


Рис. 13. Съемка 26.07.2018 через иллюминатор №7 СМ РС. Прослеживаемые точки на объекте

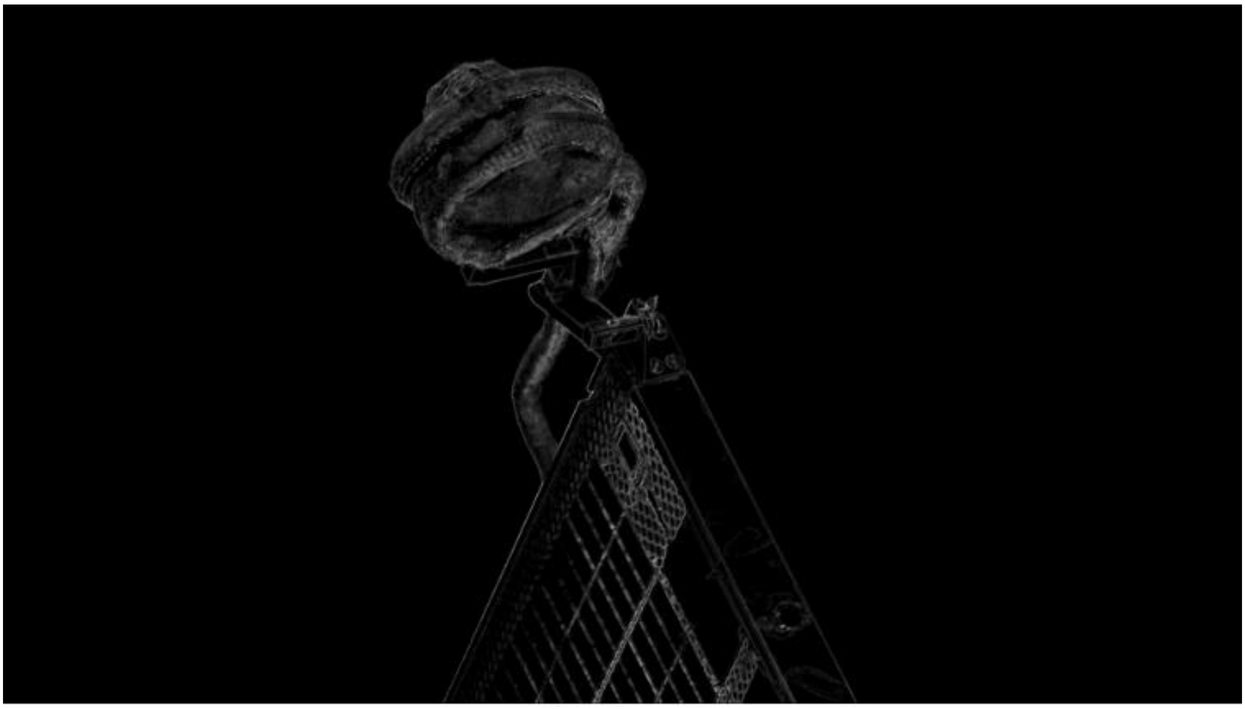


Рис. 14. Оконтуренный кадр видео.

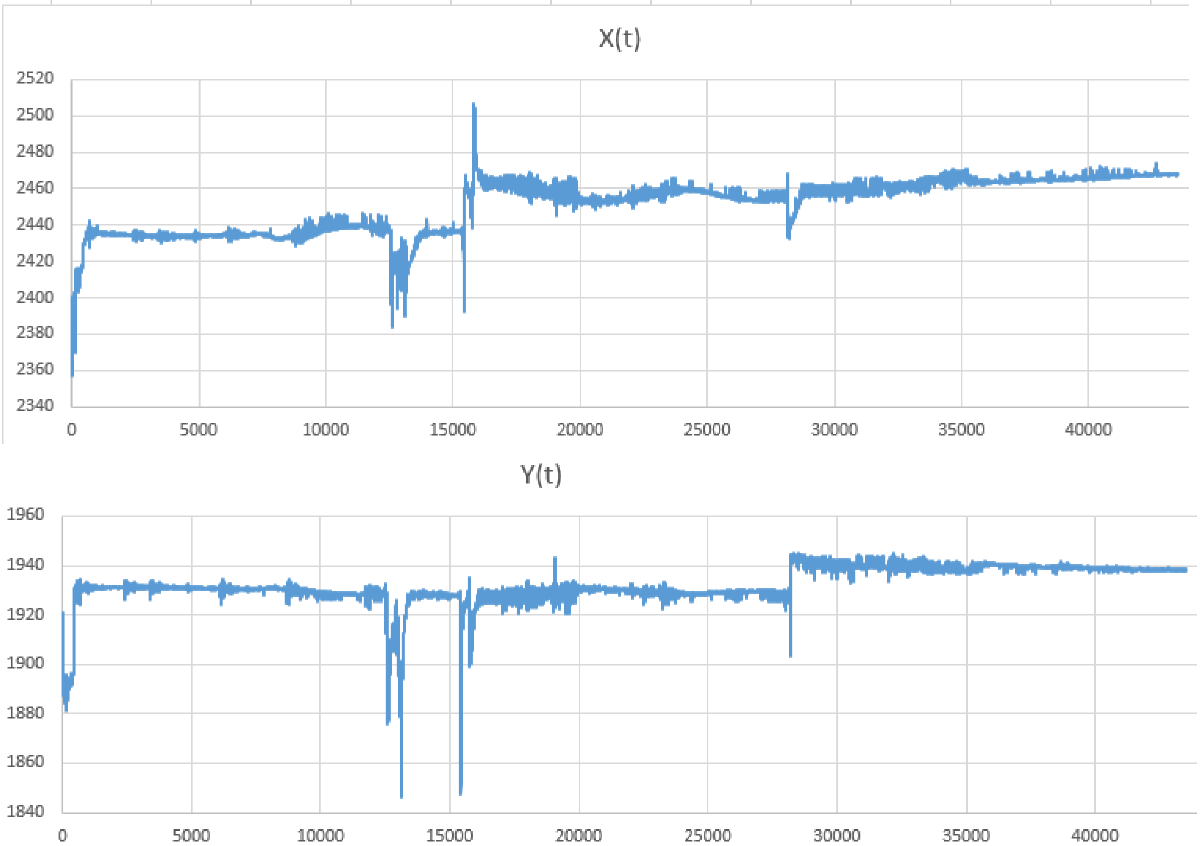


Рис. .15. Смещение объекта за время съемки.

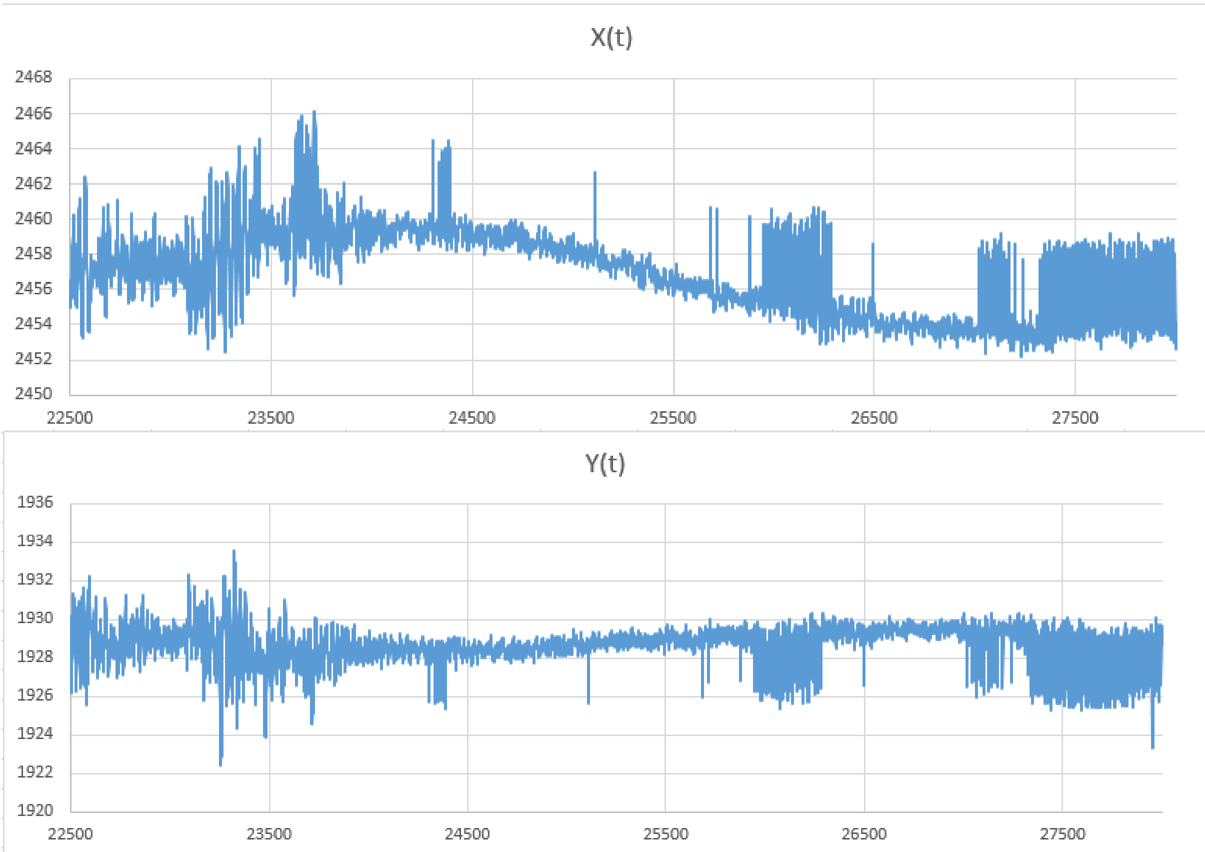


Рис. 16.Интервал коррекции орбиты.

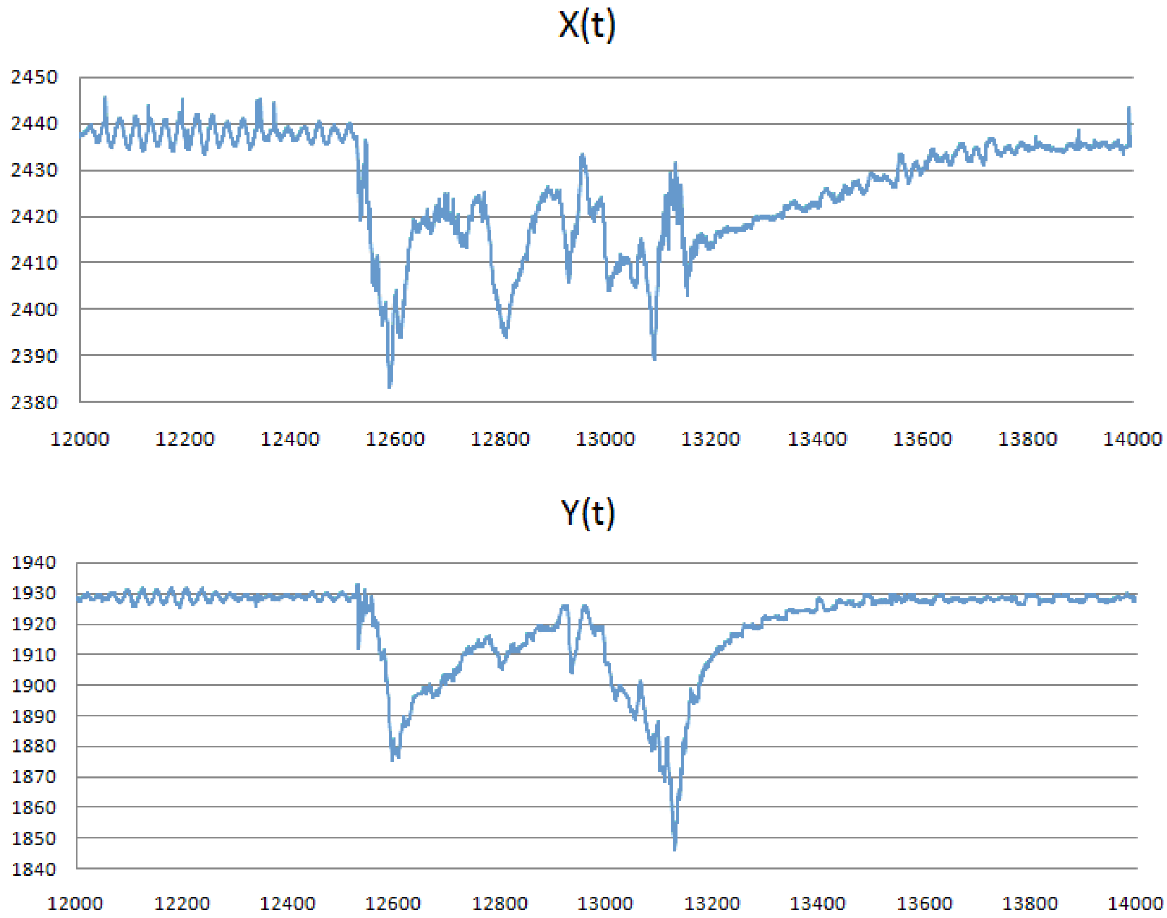


Рис. 17. Смещение объекта съемки.

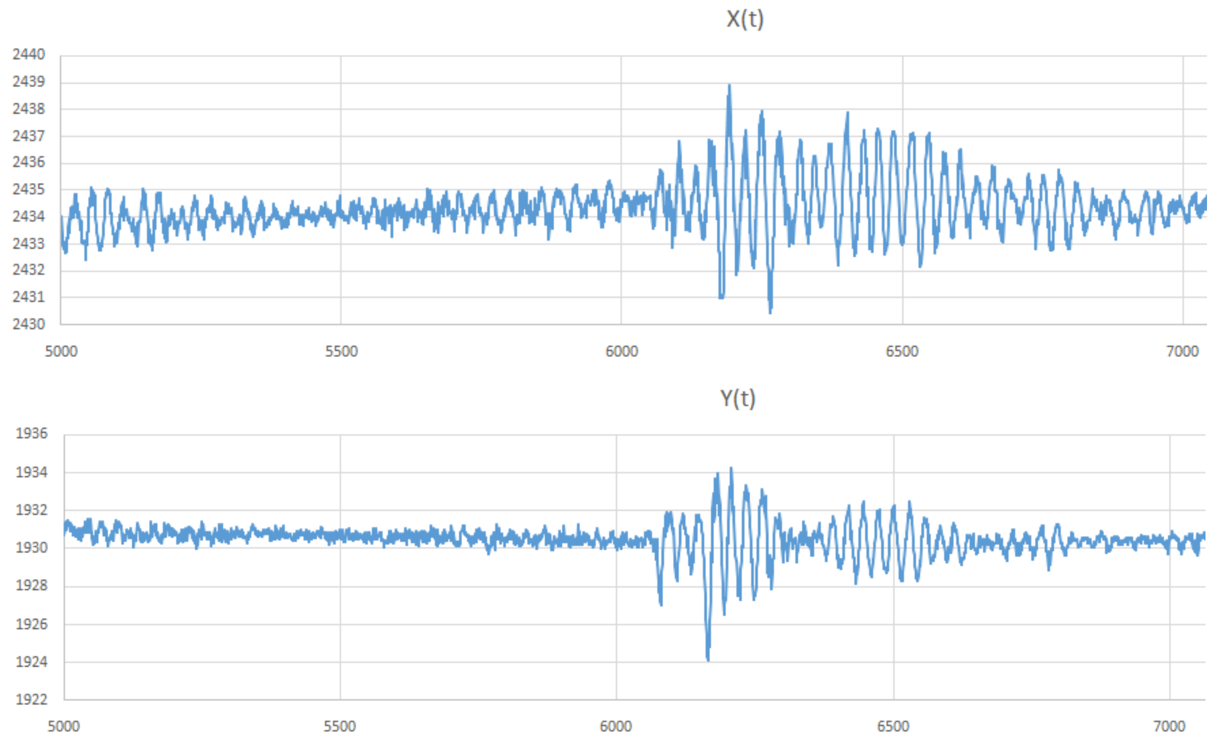


Рис. 18. Колебания с переменной амплитудой.

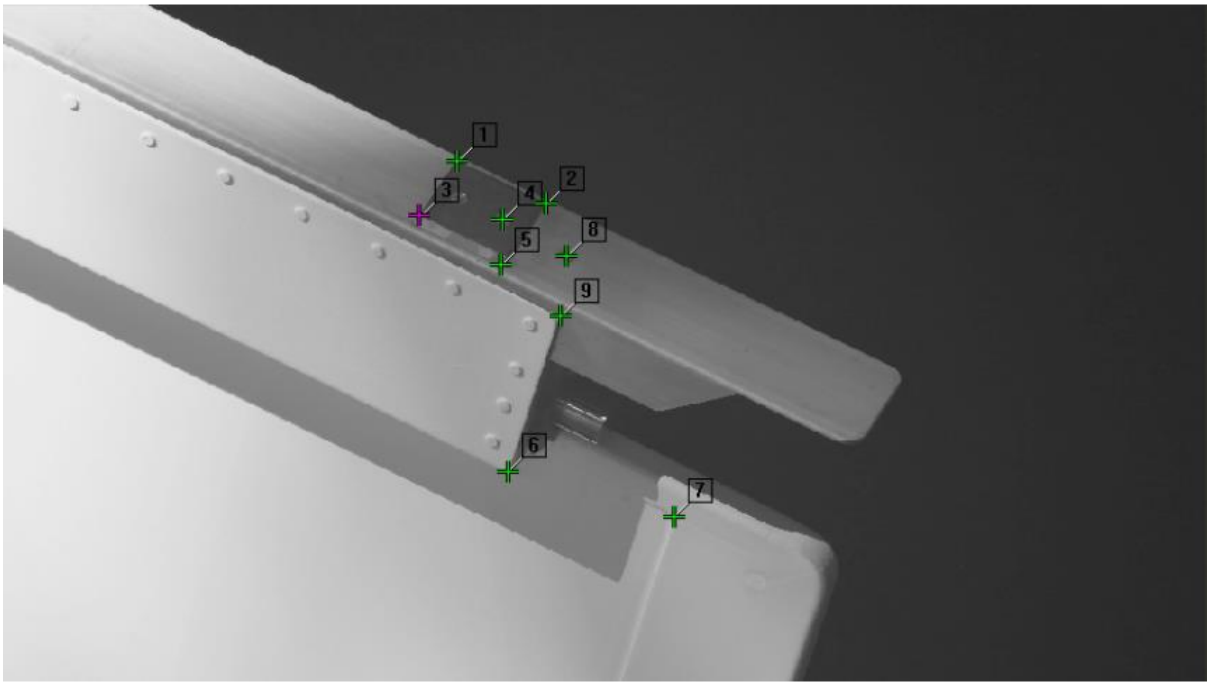
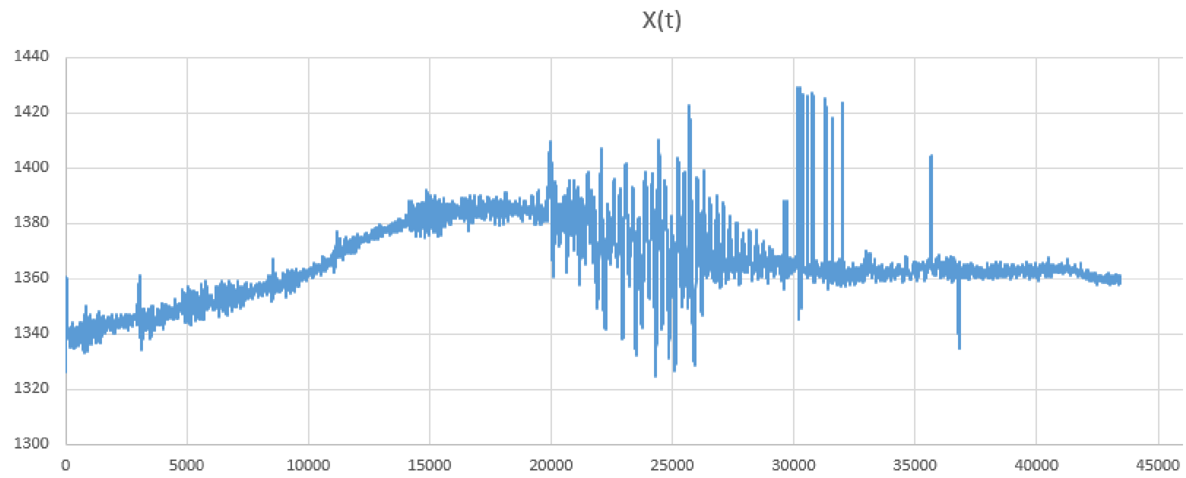


Рис. 19. Съемка 26.07.2018 через иллюминатор №2 модуля МИМ2 РС. Прослеживаемые точки на объекте.



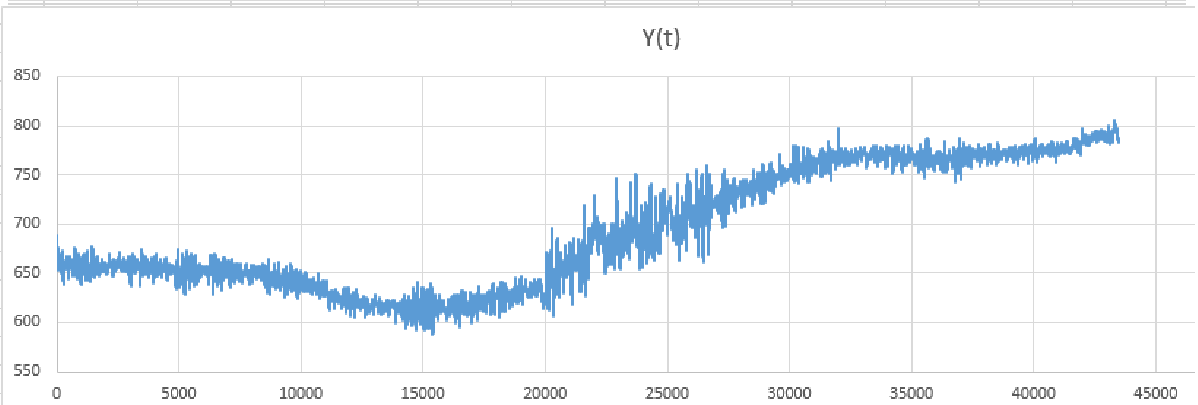


Рис. 20. Смещение объекта за время съемки.

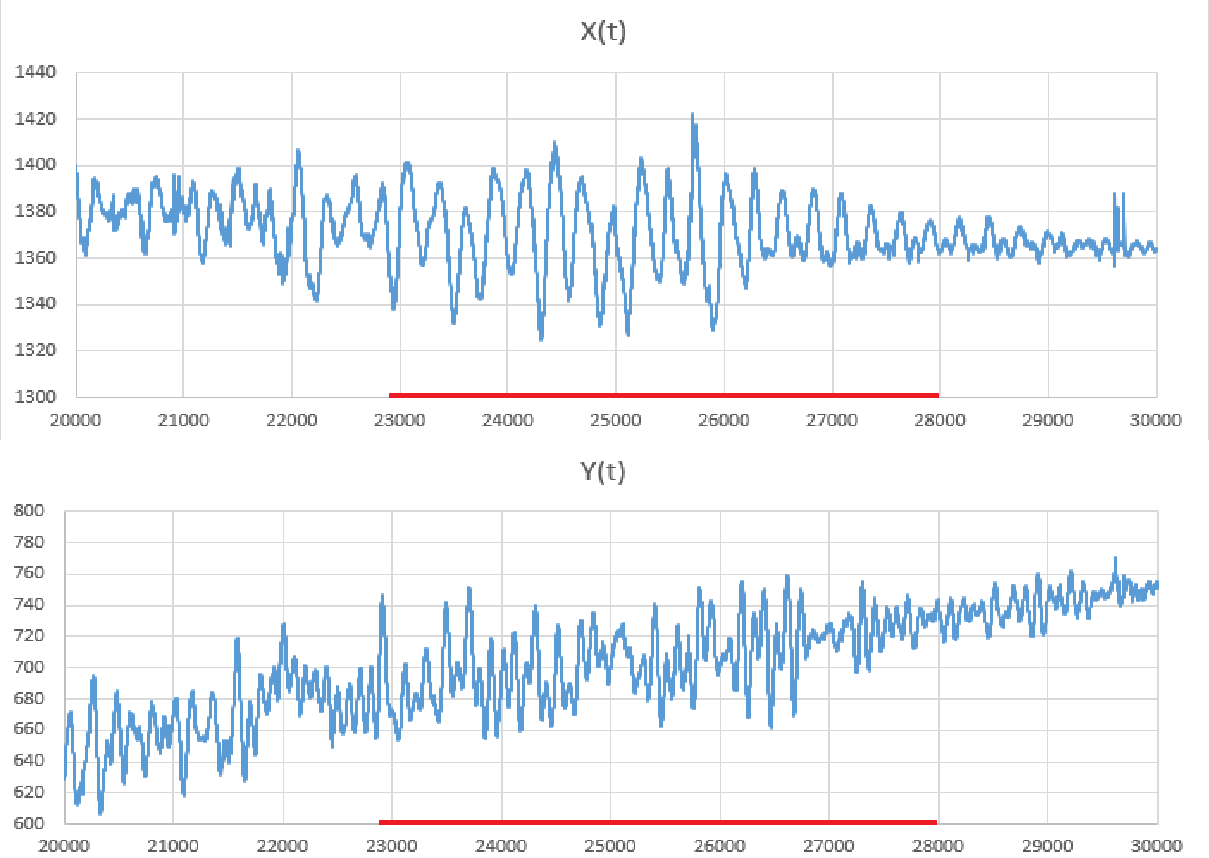


Рис. 21. Интервал коррекции орбиты.

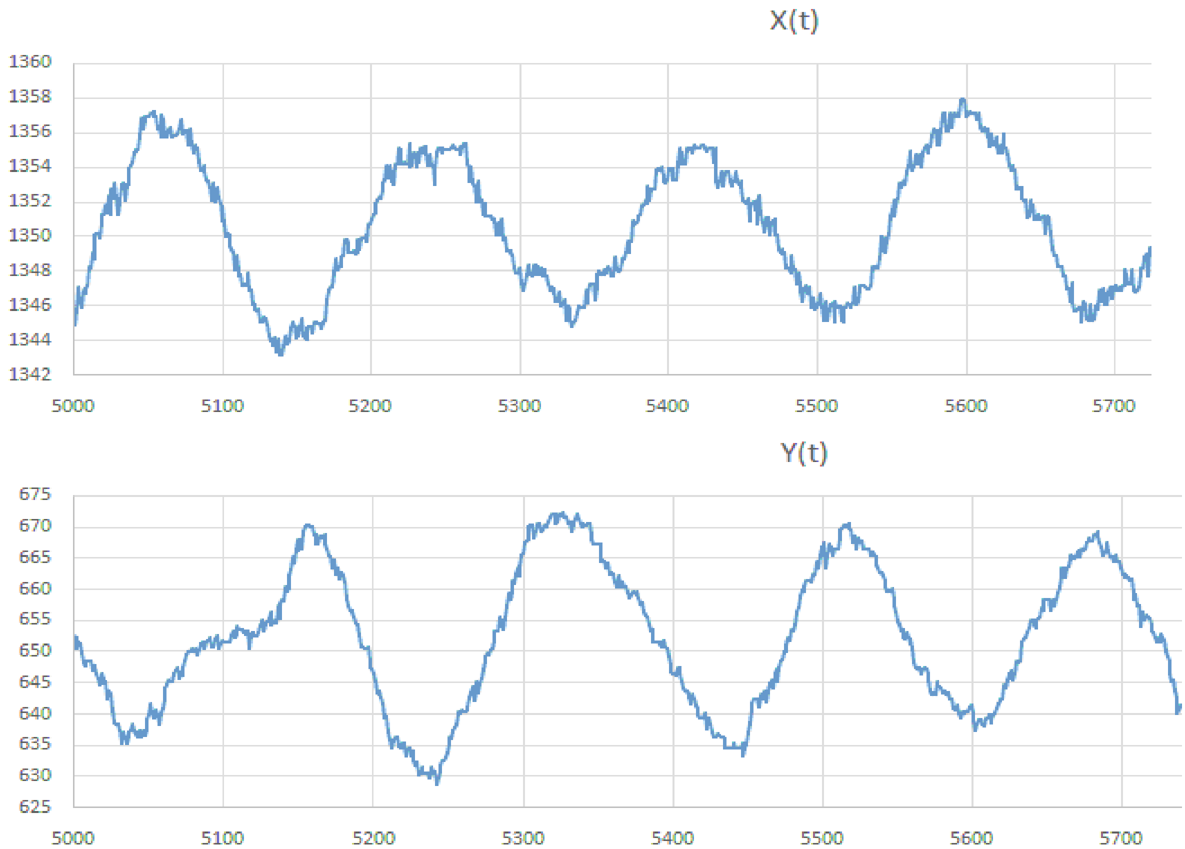


Рис. 22. Колебания, близкие к периодическим.

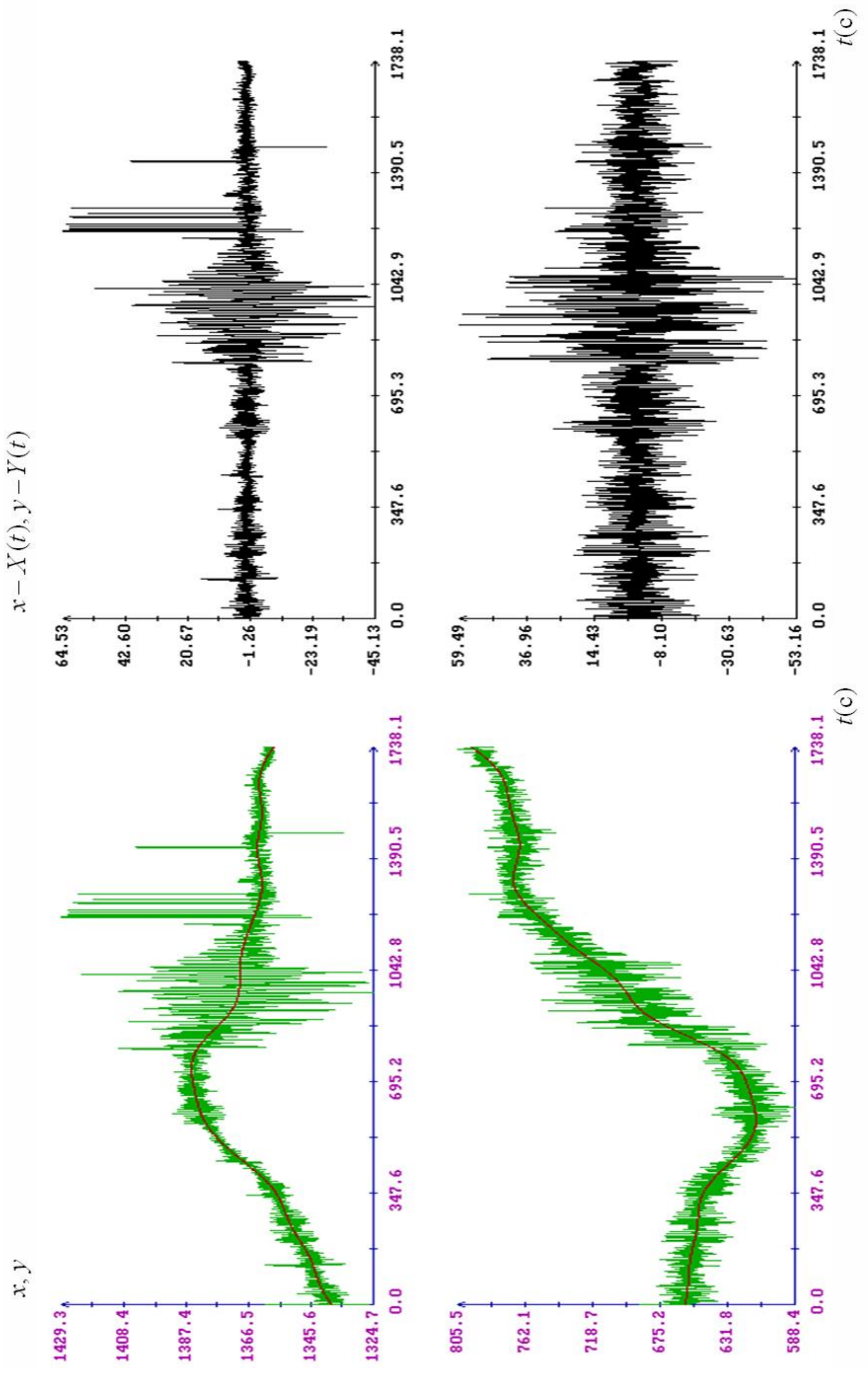


Рис. 23. Съемка 26.07.2018, $M = 20$.

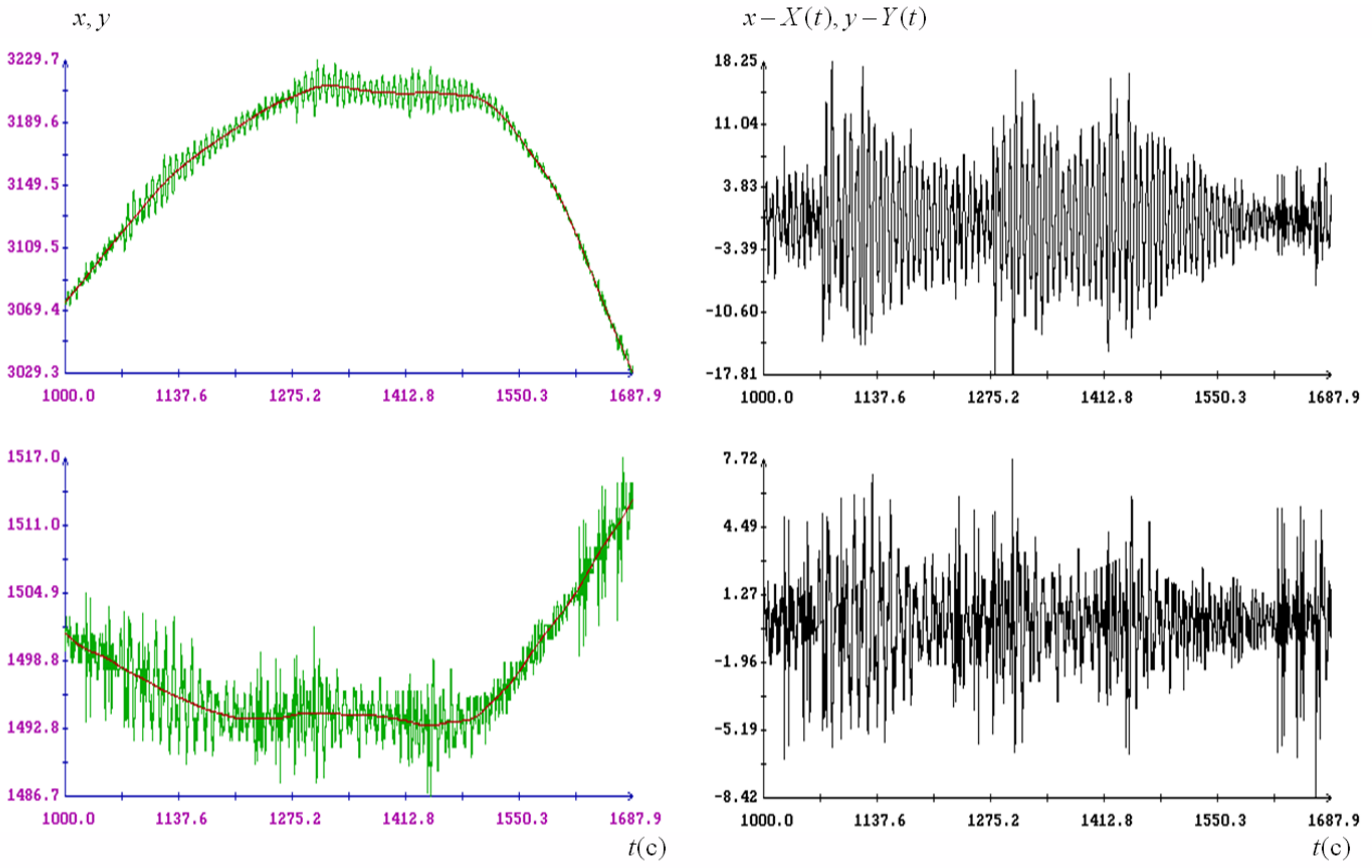


Рис. 24. Съемка 04.04.2018, $M = 30$, отступ от начала файла 25000 точек.

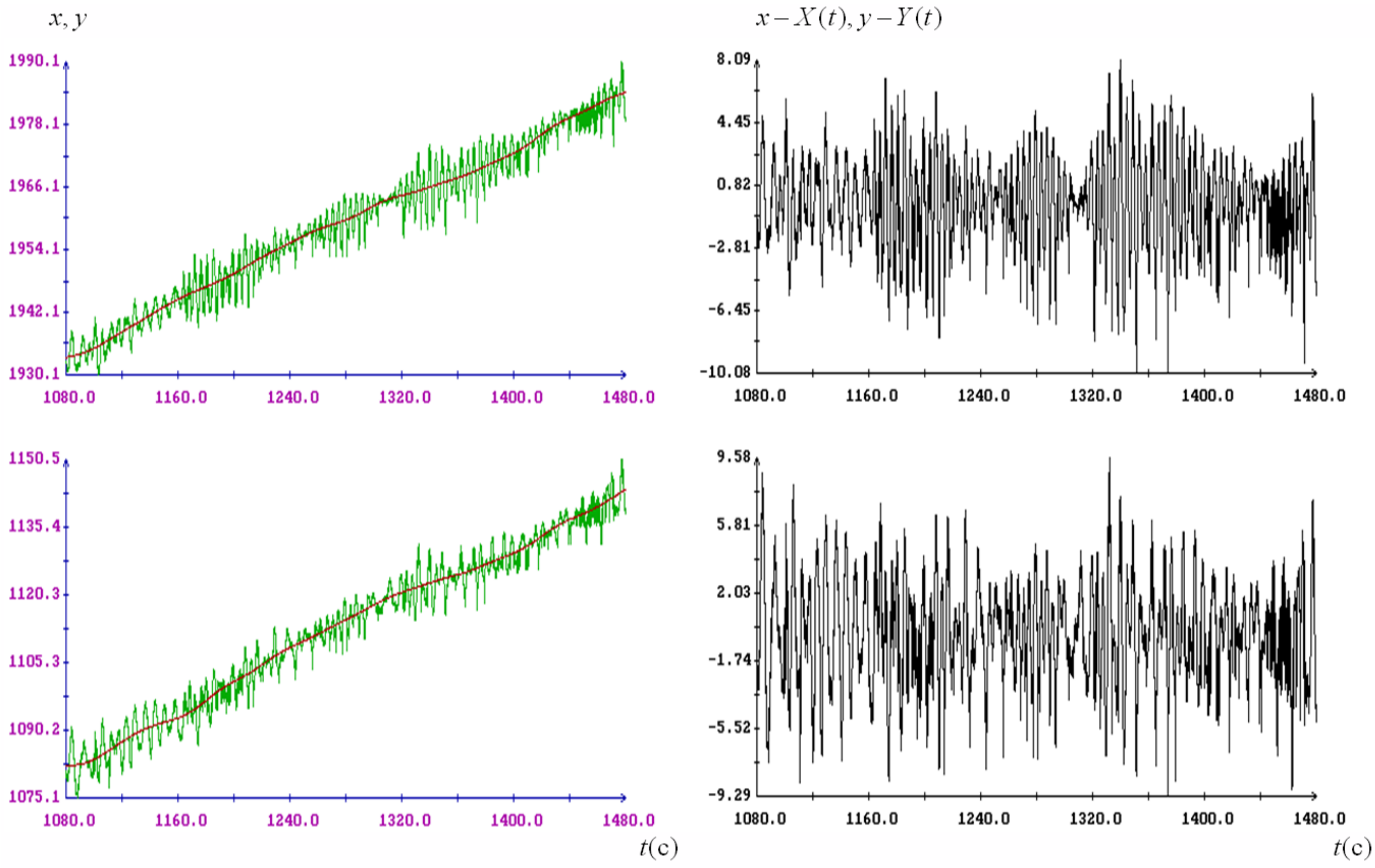


Рис. 25. Съемка 31.05.2018, $M = 20$, отступ от начала файла 27000 точек.

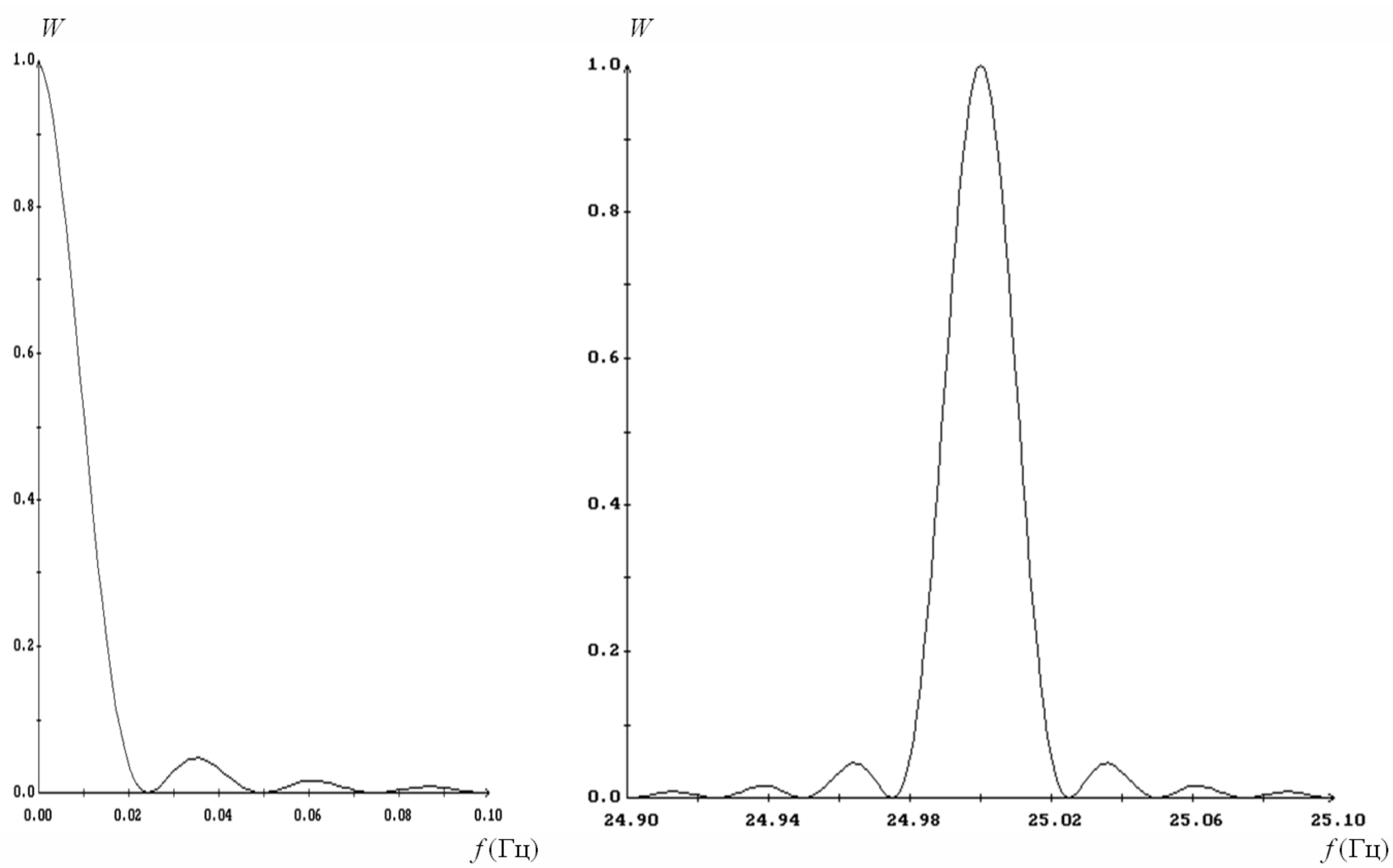
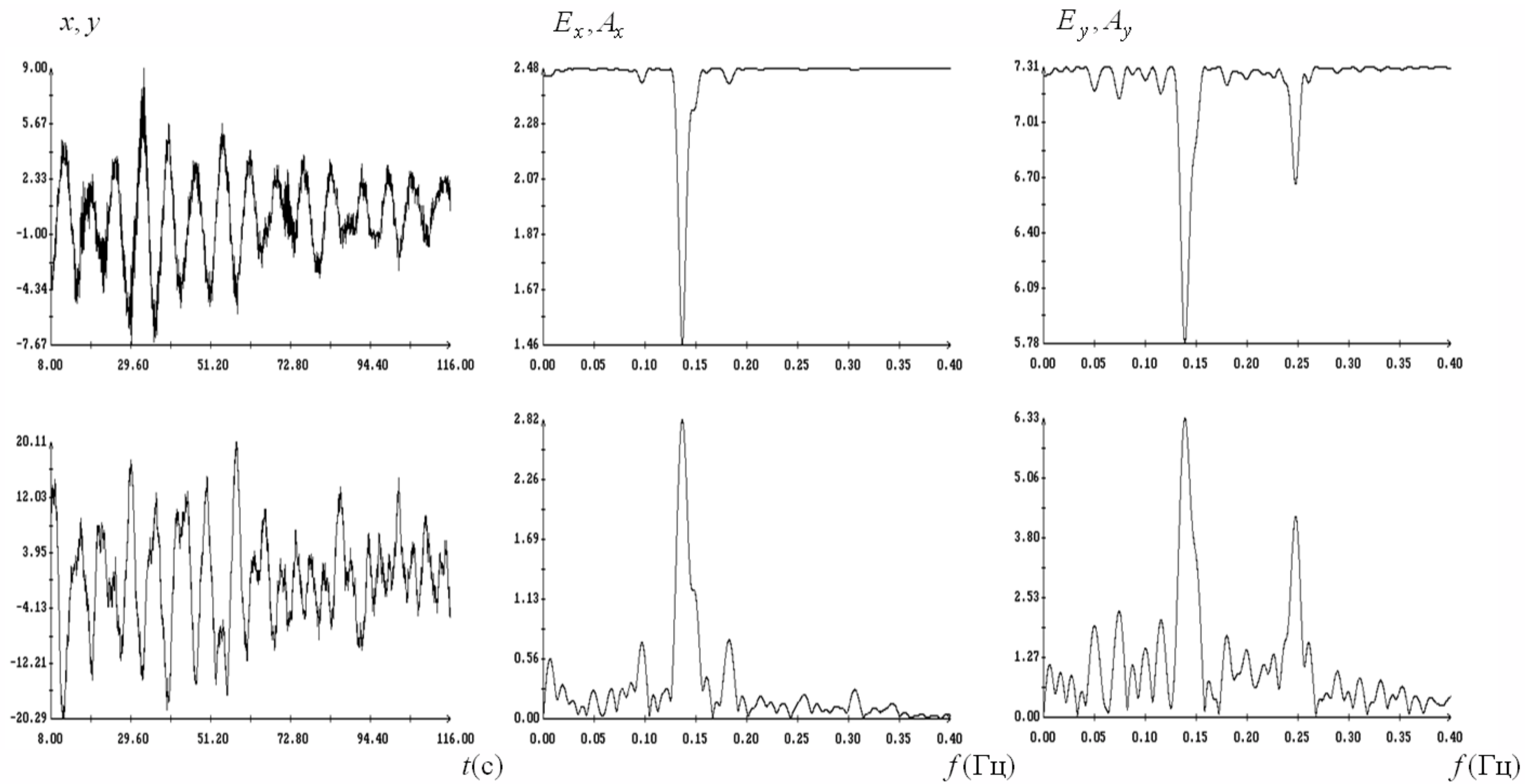


Рис. 26. Графики функции окна в окрестности ее двух соседних точек максимума при $N = 1000$, $h = 0.04$ с.



(а) (б) (в)

Рис. 27. Фрагмент съемки 26.07.2018: (а) колебания выделенной точки; (б, в) спектры координат x, y: $f_{x,1} = 0.00506$, $A_{x,1} = 0.569$, $f_{x,2} = 0.09692$, $A_{x,2} = 0.719$, $f_{x,3} = 0.13656$, $A_{x,3} = 2.85$, $f_{x,4} = 0.18249$, $A_{x,4} = 0.739$, $f_{x,5} = 0.25639$, $A_{x,5} = 0.226$, $f_{x,6} = 0.30595$, $A_{x,6} = 0.276$, $f_{y,1} = 0.05010$, $A_{y,1} = 1.94$, $f_{y,2} = 0.07429$, $A_{y,2} = 2.25$, $f_{y,3} = 0.11527$, $A_{y,3} = 2.06$, $f_{y,4} = 0.13878$, $A_{y,4} = 6.33$, $f_{y,5} = 0.18002$, $A_{y,5} = 1.72$, $f_{y,6} = 0.24759$, $A_{y,6} = 4.27$.

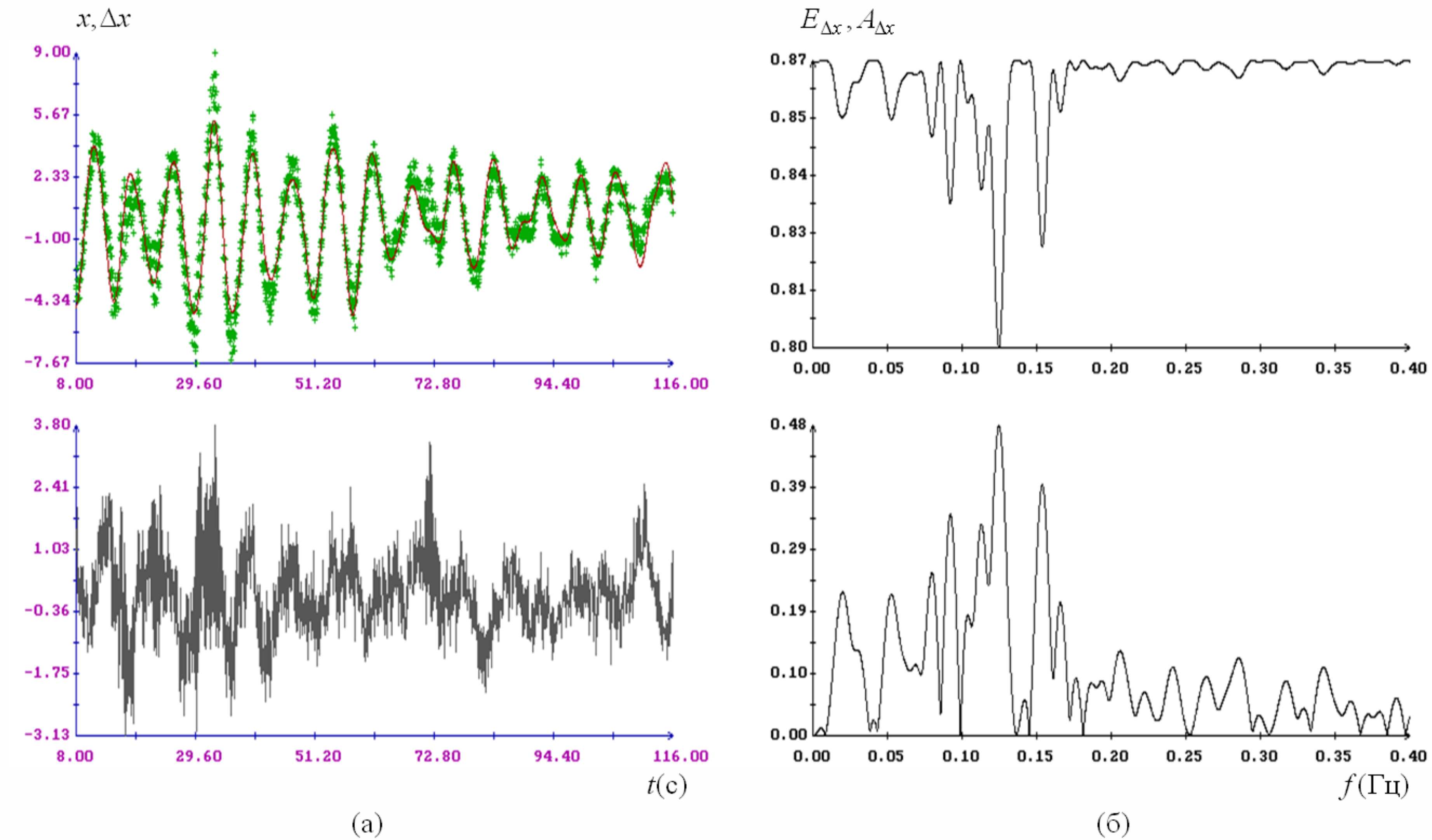
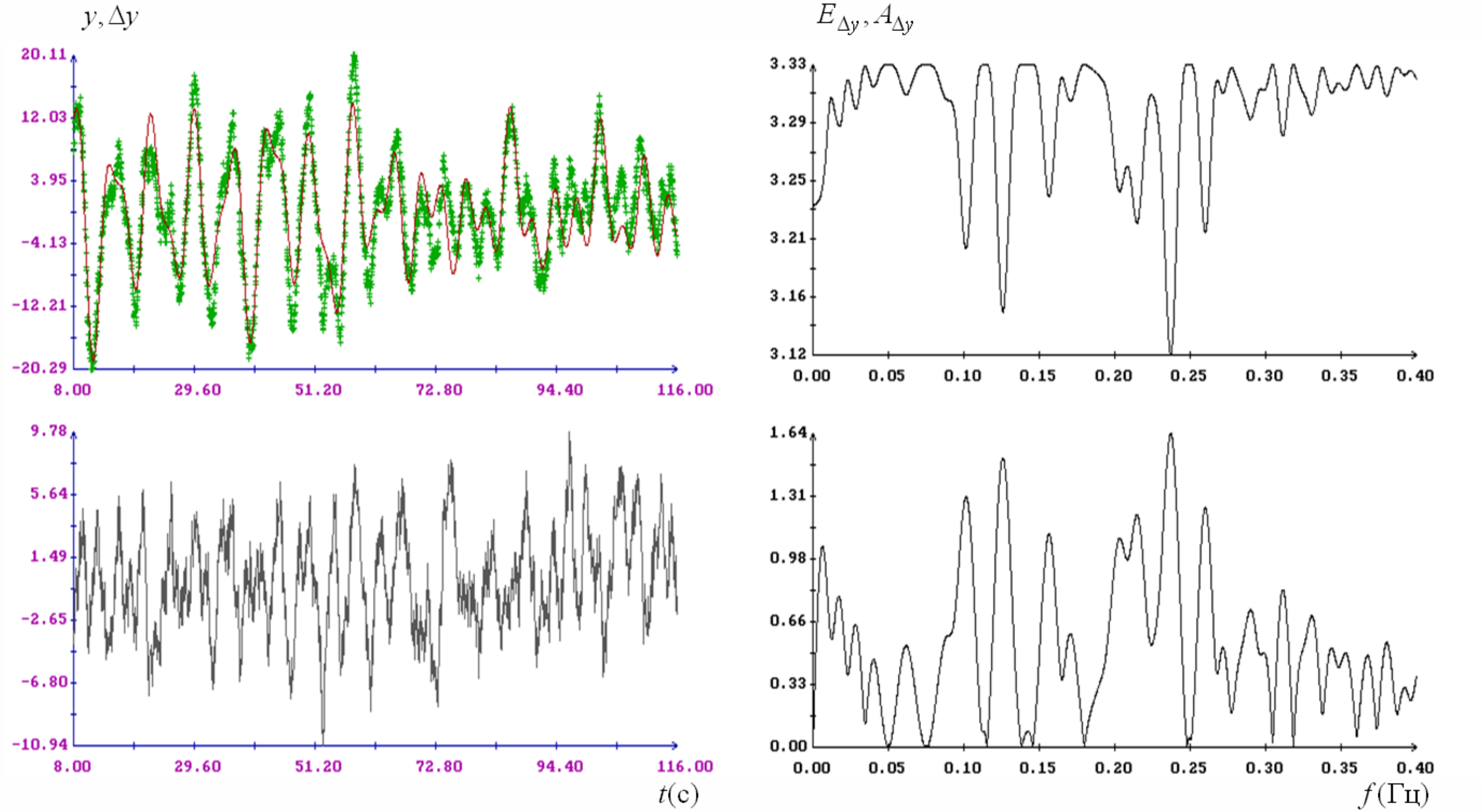
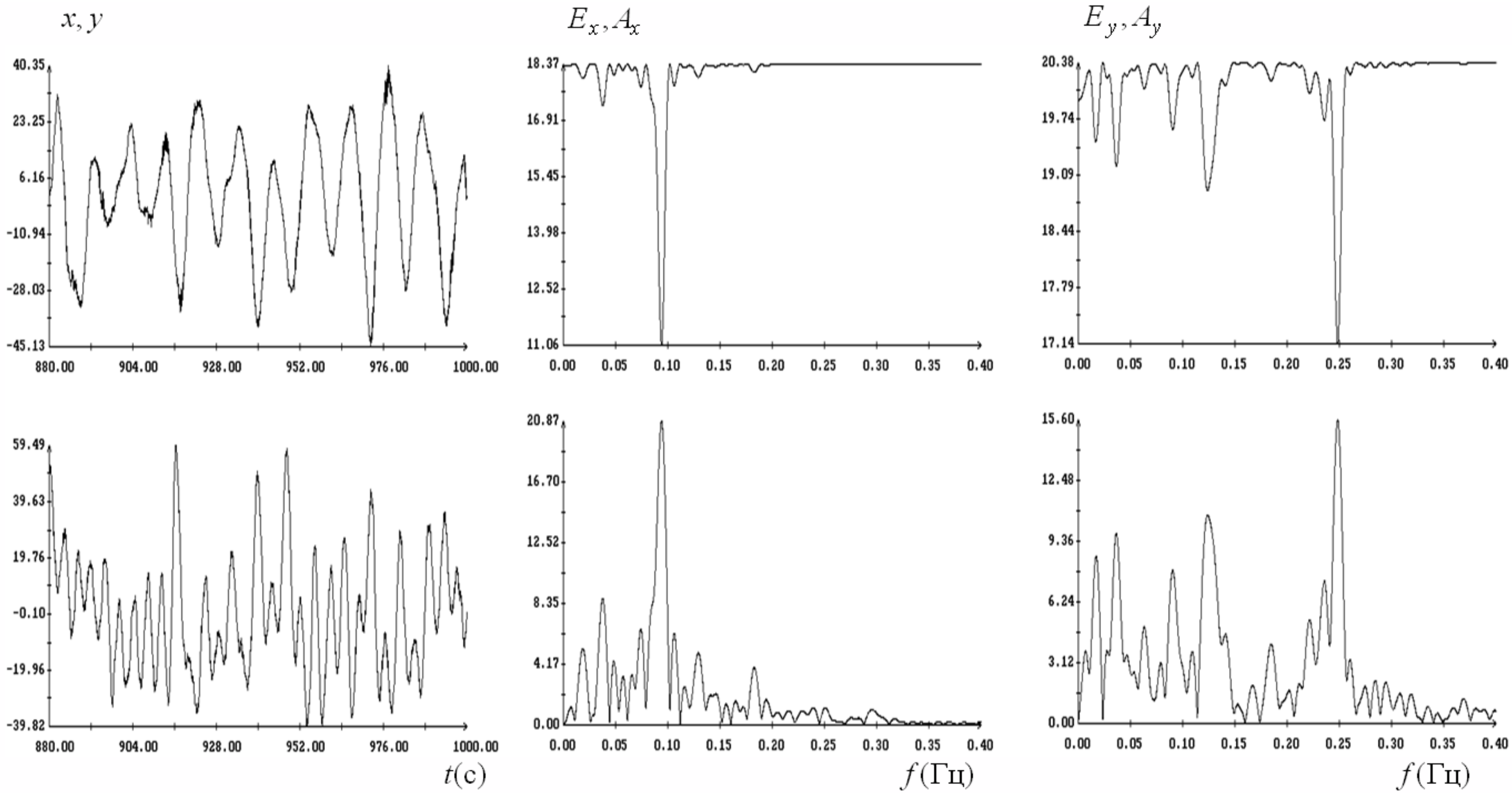


Рис. 28. Фрагмент съемки 26.07.2018: (а) аппроксимация координаты x, 7 гармоник: $f_{x,1} = 0.00829$, $A_{x,1} = 0.456$, $f_{x,2} = 0.09881$, $A_{x,2} = 0.632$, $f_{x,3} = 0.13639$, $A_{x,3} = 2.85$, $f_{x,4} = 0.18112$, $A_{x,4} = 0.716$, $f_{x,5} = 0.25267$, $A_{x,5} = 0.284$, $f_{x,6} = 0.30566$, $A_{x,6} = 0.194$, $f_{x,7} = 0.14497$, $A_{x,7} = 1.23$; (б) спектры ошибки аппроксимации Δx.



(а) (б)

Рис. 29. Фрагмент съемки 26.07.2018: (а) аппроксимация координаты y, 7 гармоник: $f_{y,1} = 0.05022$, $A_{y,1} = 1.90$, $f_{y,2} = 0.07421$, $A_{y,2} = 2.18$, $f_{y,3} = 0.11525$, $A_{y,3} = 1.57$, $f_{y,4} = 0.13832$, $A_{y,4} = 6.22$, $f_{y,5} = 0.17988$, $A_{y,5} = 1.34$, $f_{y,6} = 0.24788$, $A_{y,6} = 4.07$, $f_{y,7} = 0.14556$, $A_{y,7} = 3.81$; (б) спектры ошибки аппроксимации Δy.



(а) (б) (в)

Рис. 30. Фрагмент съемки 26.07.2018: (а) колебания выделенной точки; (б, в) спектры координат x, y: $f_{x,1} = 0.01875$, $A_{x,1} = 5.11$, $f_{x,2} = 0.03773$, $A_{x,2} = 8.73$, $f_{x,3} = 0.09399$, $A_{x,3} = 20.61$, $f_{x,4} = 0.12918$, $A_{x,4} = 4.96$, $f_{x,5} = 0.18278$, $A_{x,5} = 3.94$, $f_{y,1} = 0.01673$, $A_{y,1} = 8.53$, $f_{y,2} = 0.03661$, $A_{y,2} = 9.68$, $f_{y,3} = 0.06317$, $A_{y,3} = 4.97$, $f_{y,4} = 0.09041$, $A_{y,4} = 7.83$, $f_{y,5} = 0.12372$, $A_{y,5} = 10.8$, $f_{y,6} = 0.18466$, $A_{y,6} = 4.09$, $f_{y,7} = 0.24834$, $A_{y,7} = 15.6$.

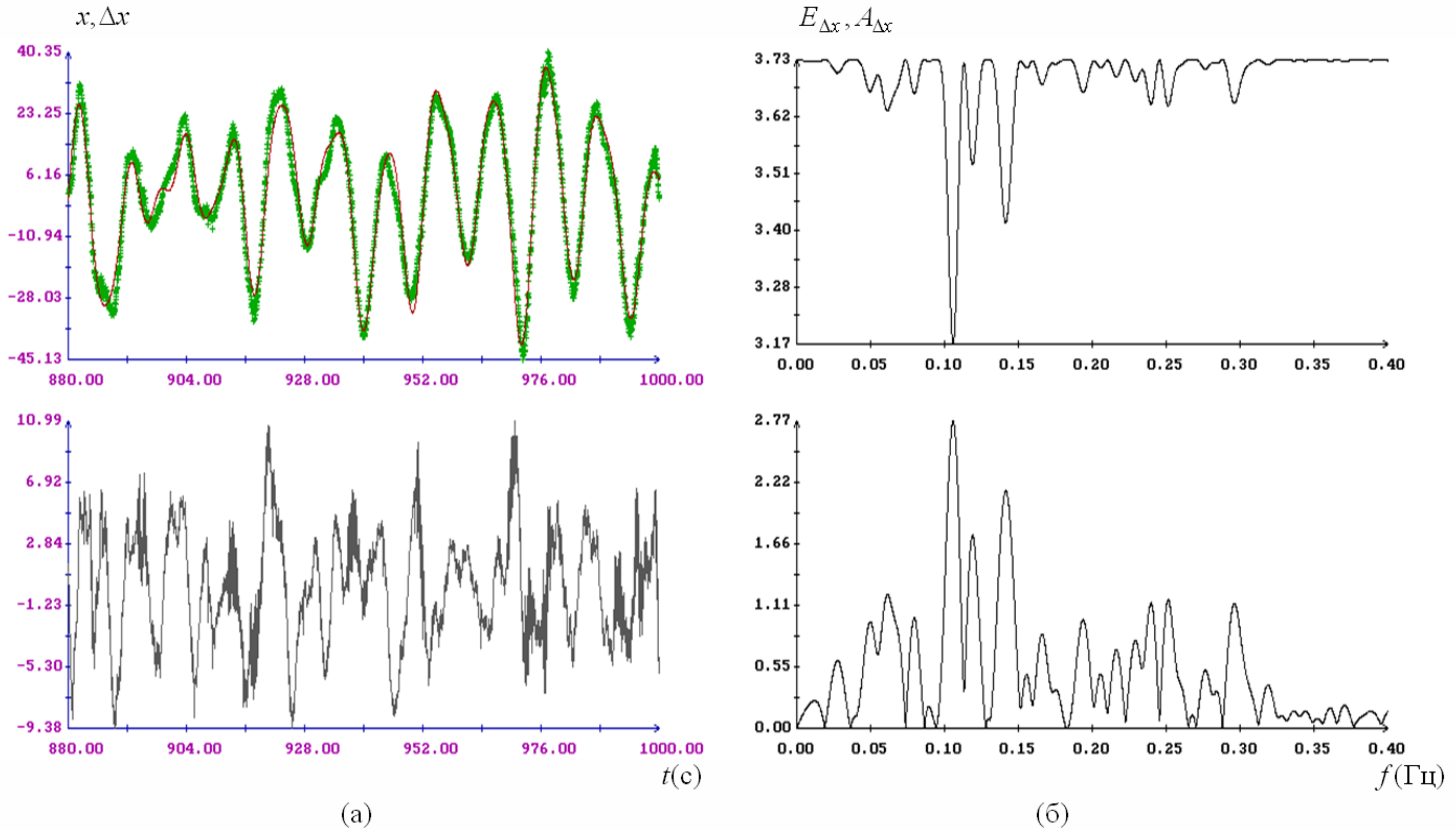


Рис. 31. Фрагмент съемки 26.07.2018: (а) аппроксимация координаты x, 7 гармоник: $f_{x,1} = 0.01899$, $A_{x,1} = 5.03$, $f_{x,2} = 0.03631$, $A_{x,2} = 7.83$, $f_{x,3} = 0.09446$, $A_{x,3} = 20.64$, $f_{x,4} = 0.12793$, $A_{x,4} = 4.67$, $f_{x,5} = 0.18299$, $A_{x,5} = 3.74$, $f_{x,6} = 0.07364$, $A_{x,6} = 3.82$, $f_{x,7} = 0.08647$, $A_{x,7} = 7.94$; (б) спектры ошибки аппроксимации Δx.

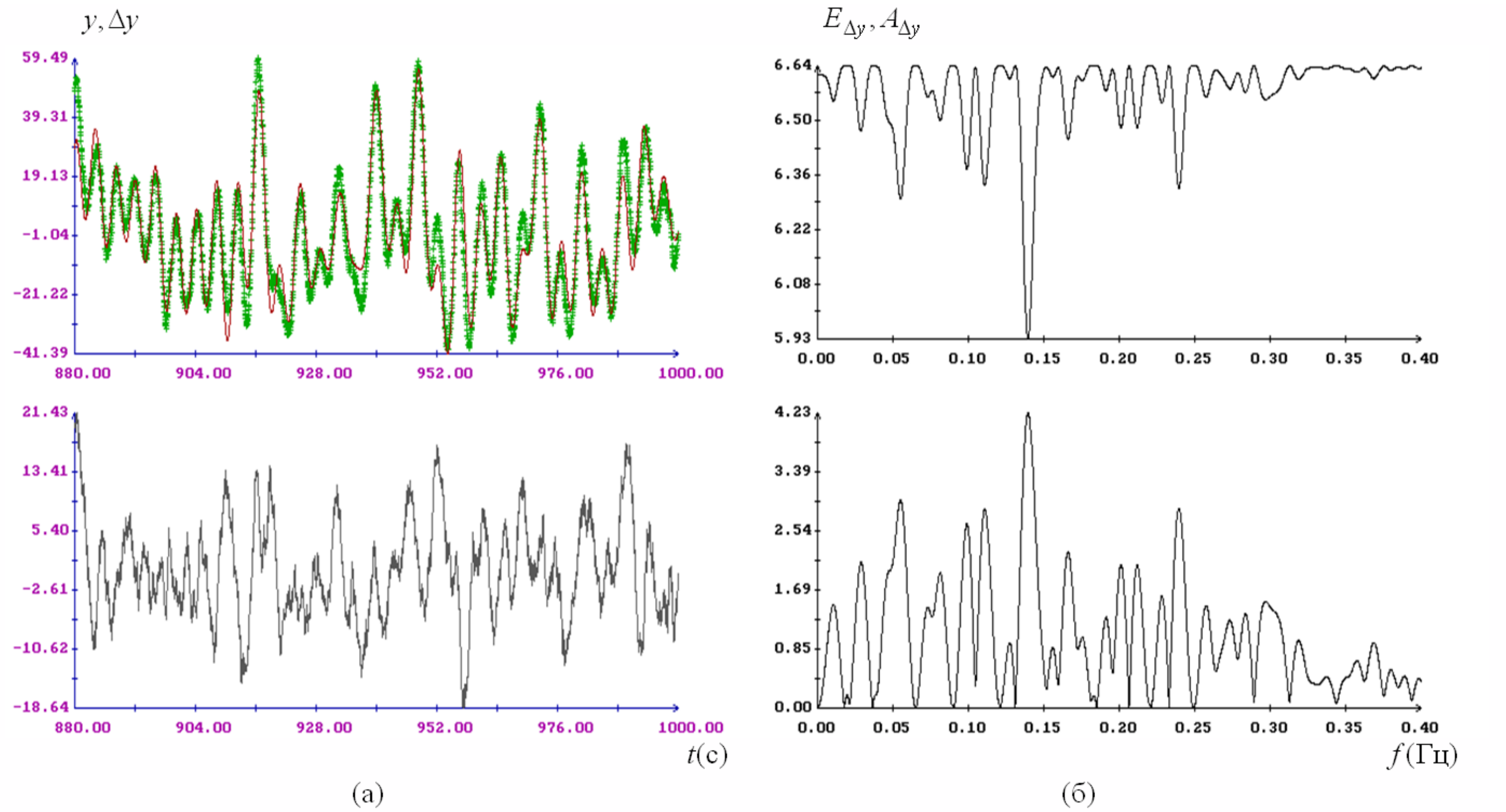


Рис. 32. Фрагмент съемки 26.07.2018: (а) аппроксимация координаты y, 10 гармоник: $f_{y,1} = 0.01773$, $A_{y,1} = 6.76$, $f_{y,2} = 0.03645$, $A_{y,2} = 8.90$, $f_{y,3} = 0.06521$, $A_{y,3} = 4.29$, $f_{y,4} = 0.09063$, $A_{y,4} = 8.35$, $f_{y,5} = 0.12115$, $A_{y,5} = 11.4$, $f_{y,6} = 0.18496$, $A_{y,6} = 4.12$, $f_{y,7} = 0.24868$, $A_{y,7} = 15.1$, $f_{y,8} = 0.13103$, $A_{y,8} = 9.83$, $f_{y,9} = 0.22114$, $A_{y,9} = 5.84$, $f_{y,10} = 0.23294$, $A_{y,10} = 6.55$; (б) спектры ошибки аппроксимации Δy.

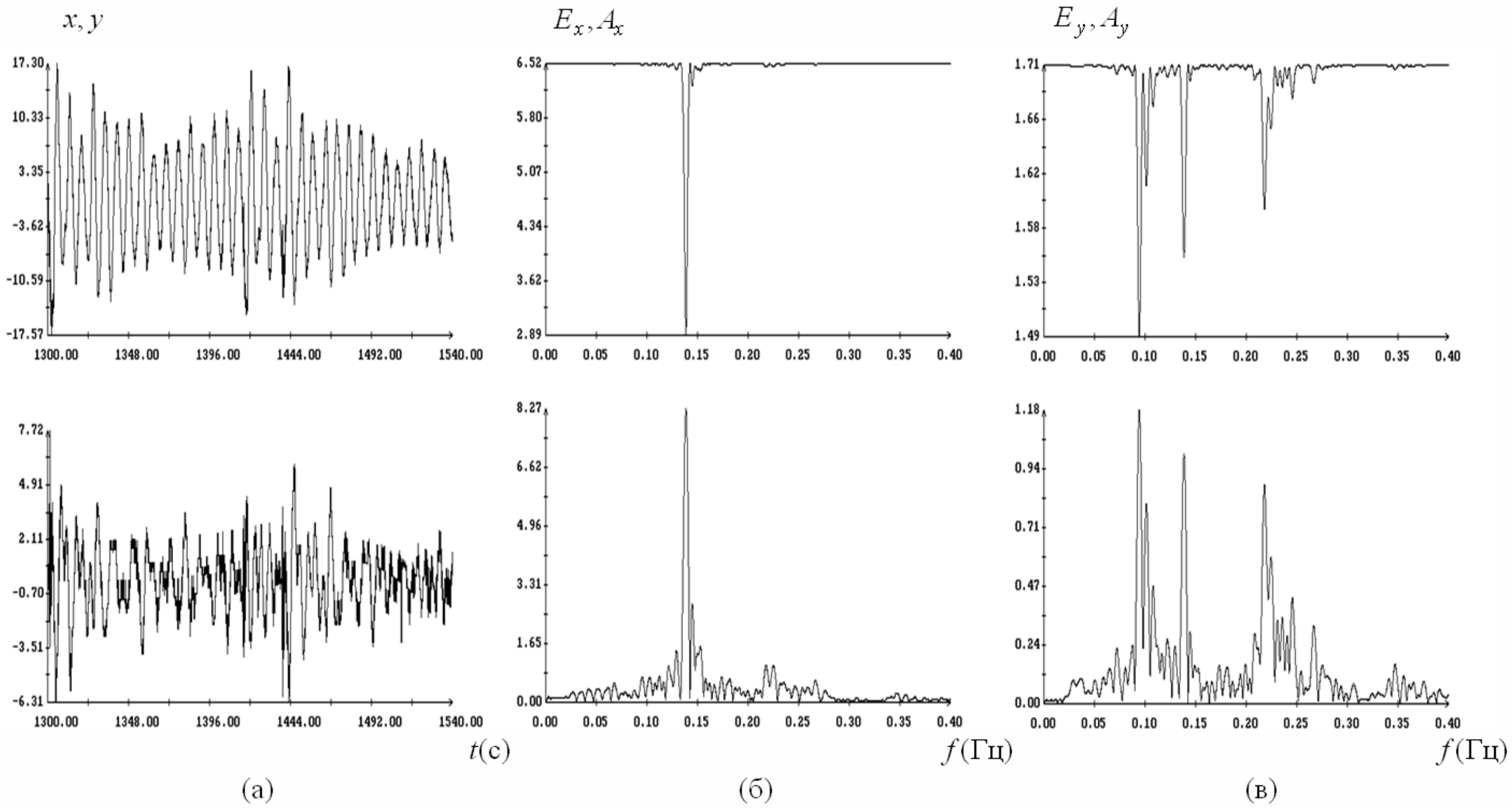


Рис. 33. Фрагмент съемки 26.07.2018: (а) колебания выделенной точки; (б, в) спектры координат x, y: $f_{x,1} = 0.13851$, $A_{x,1} = 8.27$, $f_{y,1} = 0.09432$, $A_{y,1} = 1.18$, $f_{y,2} = 0.10120$, $A_{y,2} = 0.801$, $f_{y,3} = 0.10787$, $A_{y,3} = 0.474$, $f_{y,4} = 0.13847$, $A_{y,4} = 1.00$, $f_{y,5} = 0.21796$, $A_{y,5} = 0.873$, $f_{y,6} = 0.22441$, $A_{y,6} = 0.586$, $f_{y,7} = 0.23080$, $A_{y,7} = 0.337$, $f_{y,8} = 0.24552$, $A_{y,8} = 0.424$, $f_{y,9} = 0.26675$, $A_{y,9} = 0.315$.

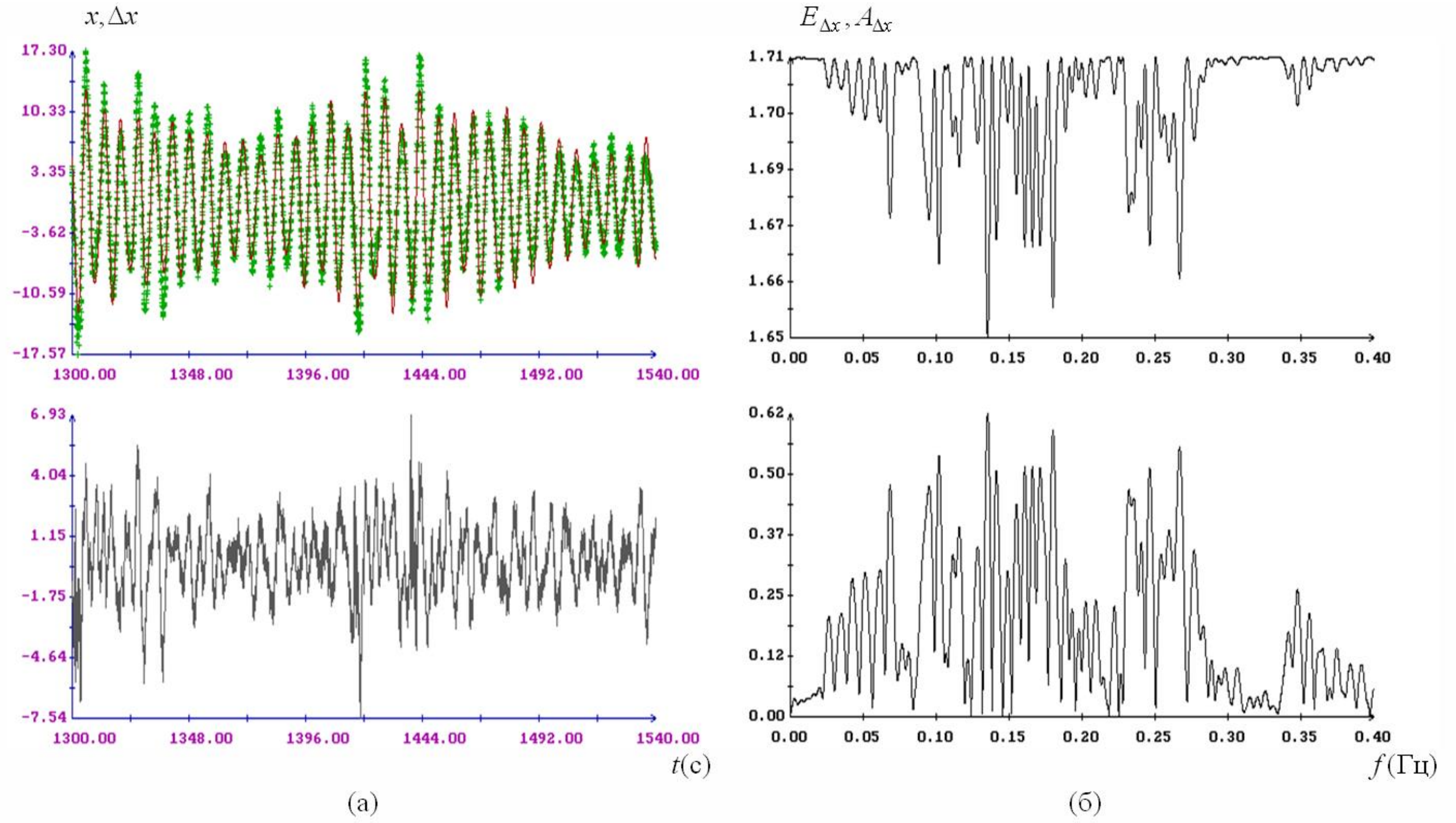
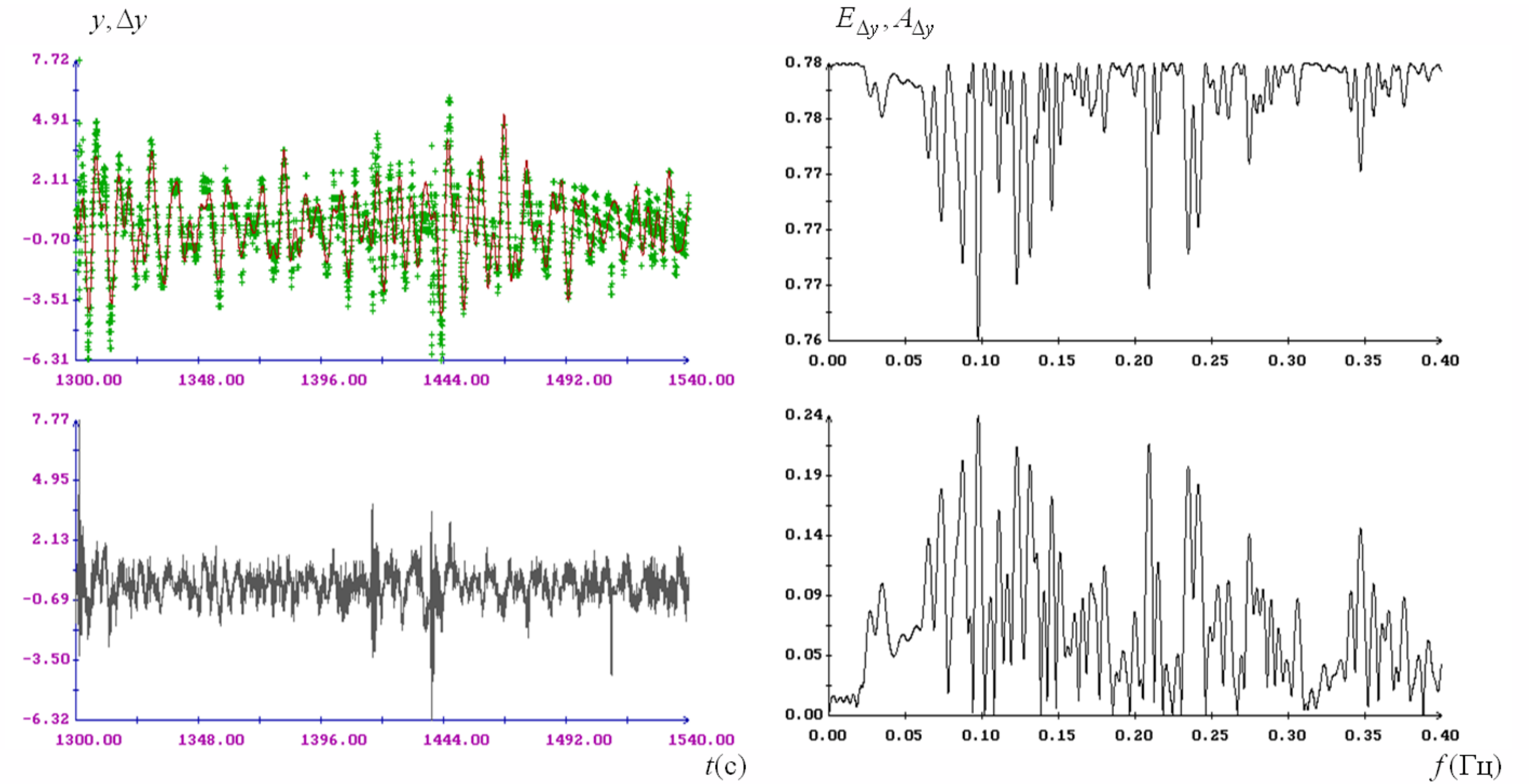
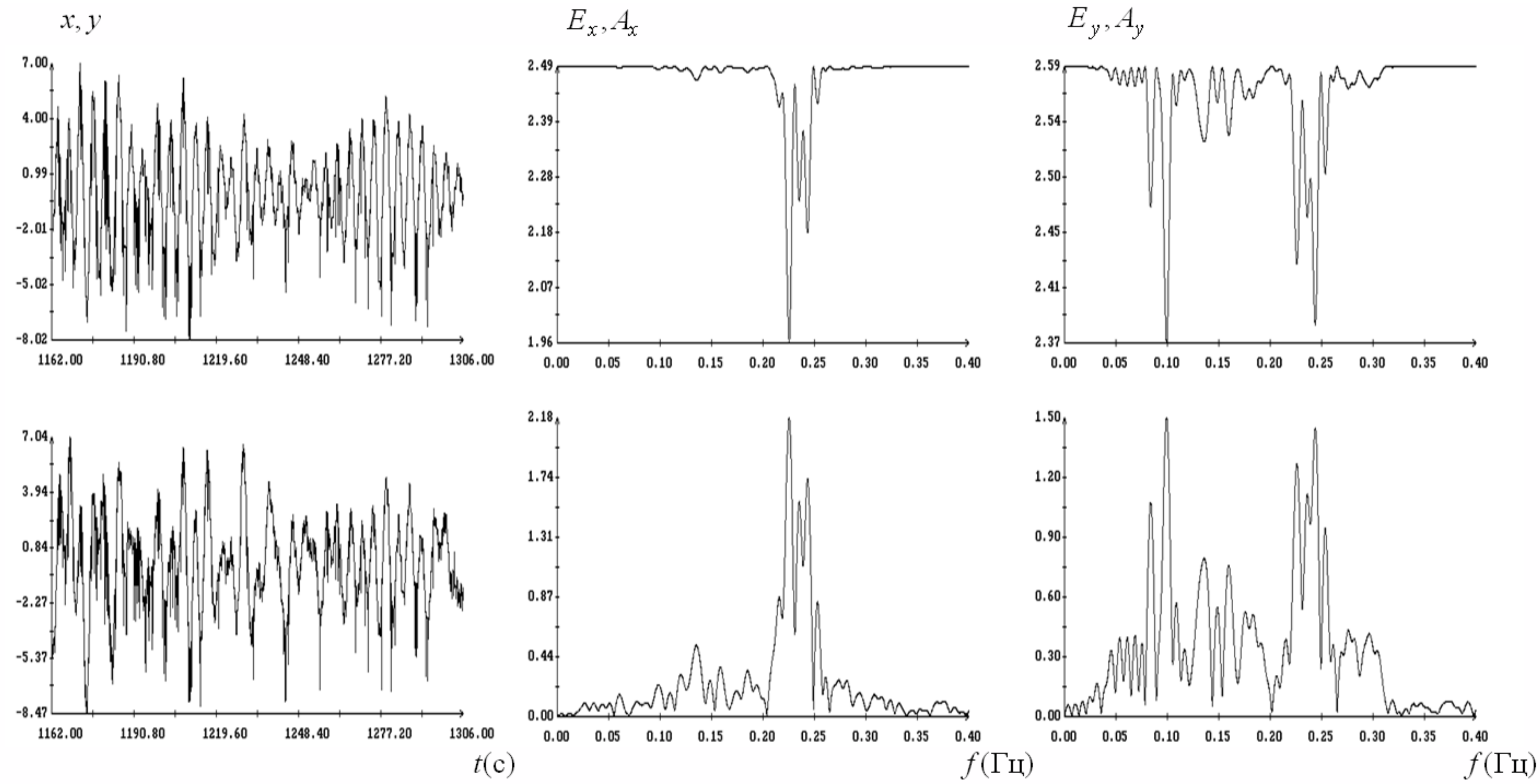


Рис. 34. Фрагмент съемки 26.07.2018: (а) аппроксимация координаты x, 7 гармоник: $f_{x,1} = 0.13836$, $A_{x,1} = 8.64$, $f_{x,2} = 0.12381$, $A_{x,2} = 1.20$, $f_{x,3} = 0.13163$, $A_{x,3} = 1.95$, $f_{x,4} = 0.14559$, $A_{x,4} = 1.32$, $f_{x,5} = 0.15163$, $A_{x,5} = 1.11$, $f_{x,6} = 0.21841$, $A_{\Delta x,6} = 1.20$, $f_{x,7} = 0.22502$, $A_{x,7} = 1.11$; (б) спектры ошибки аппроксимации Δx.



(а) (б)

Рис. 35. Фрагмент съемки 26.07.2018: (а) аппроксимация координаты y, 6 гармоник: $f_{y,1} = 0.09405$, $A_{y,1} = 1.10$, $f_{y,2} = 0.10177$, $A_{y,2} = 0.749$, $f_{y,3} = 0.10785$, $A_{y,3} = 0.428$, $f_{y,4} = 0.13842$, $A_{y,4} = 0.968$, $f_{y,5} = 0.21813$, $A_{y,5} = 0.978$, $f_{y,6} = 0.22432$, $A_{y,6} = 0.704$, $f_{y,7} = 0.23008$, $A_{y,7} = 0.285$, $f_{y,8} = 0.24603$, $A_{y,8} = 0.384$, $f_{y,9} = 0.26669$, $A_{y,9} = 0.297$; (б) спектры ошибки аппроксимации Δy.



(а) (б) (в)

Рис. 36. Фрагмент съемки 04.04.2018: (а) колебания выделенной точки; (б, в) спектры координат x, y: $f_{x,1} = 0.13525$, $A_{x,1} = 0.517$, $f_{x,2} = 0.22530$, $A_{x,2} = 2.17$, $f_{x,3} = 0.23515$, $A_{x,3} = 1.56$, $f_{x,4} = 0.24327$, $A_{x,4} = 1.73$, $f_{y,1} = 0.08375$, $A_{y,1} = 1.07$, $f_{y,2} = 0.09920$, $A_{y,2} = 1.48$, $f_{y,3} = 0.13590$, $A_{y,3} = 0.792$, $f_{y,4} = 0.15965$, $A_{y,4} = 0.755$, $f_{y,5} = 0.22590$, $A_{y,5} = 1.27$, $f_{y,6} = 0.24370$, $A_{y,6} = 1.44$.

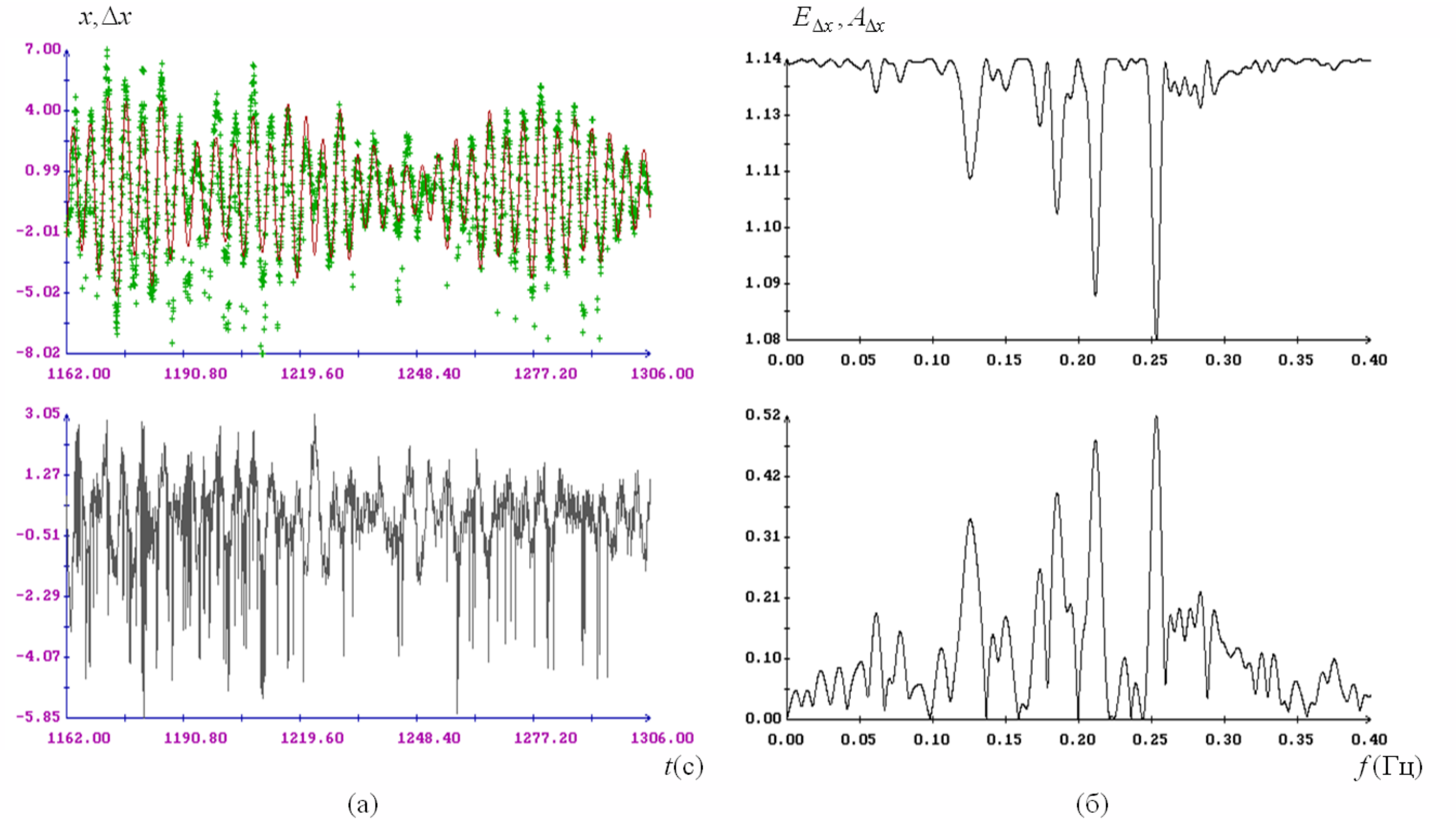


Рис. 37. Фрагмент съемки 04.04.2018: (а) аппроксимация координаты x, 7 гармоник: $f_{x,1} = 0.13657$, $A_{x,1} = 0.532$, $f_{x,2} = 0.22419$, $A_{x,2} = 2.46$, $f_{x,3} = 0.23586$, $A_{x,3} = 1.32$, $f_{x,4} = 0.24376$, $A_{x,4} = 1.54$, $f_{x,5} = 0.22121$, $A_{x,5} = 1.31$, $f_{x,6} = 0.15868$, $A_{x,6} = 0.402$, $f_{x,7} = 0.09808$, $A_{x,7} = 3.05$; (б) спектры ошибки аппроксимации Δx.

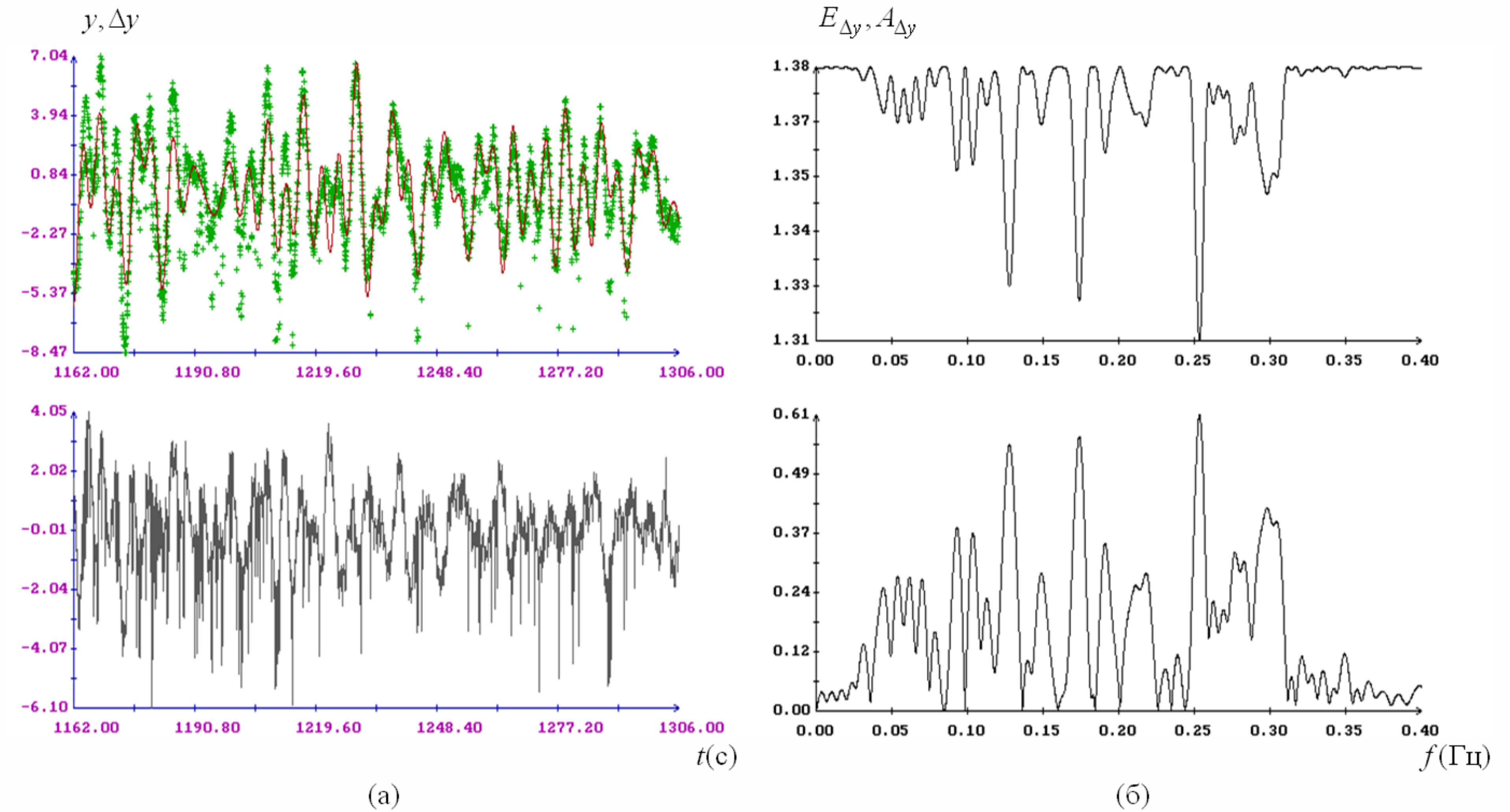


Рис. 38. Фрагмент съемки 04.04.2018: (а) аппроксимация координаты y, 8 гармоник: $f_{y,1} = 0.08468$, $A_{y,1} = 1.07$, $f_{y,2} = 0.09841$, $A_{y,2} = 1.52$, $f_{y,3} = 0.13639$, $A_{y,3} = 0.932$, $f_{y,4} = 0.15981$, $A_{y,4} = 0.845$, $f_{y,5} = 0.22592$, $A_{y,5} = 1.18$, $f_{y,6} = 0.24373$, $A_{y,6} = 1.49$, $f_{y,7} = 0.18435$, $A_{y,7} = 0.565$, $f_{y,8} = 0.23463$, $A_{y,8} = 1.05$; (б) спектры ошибки аппроксимации Δy.

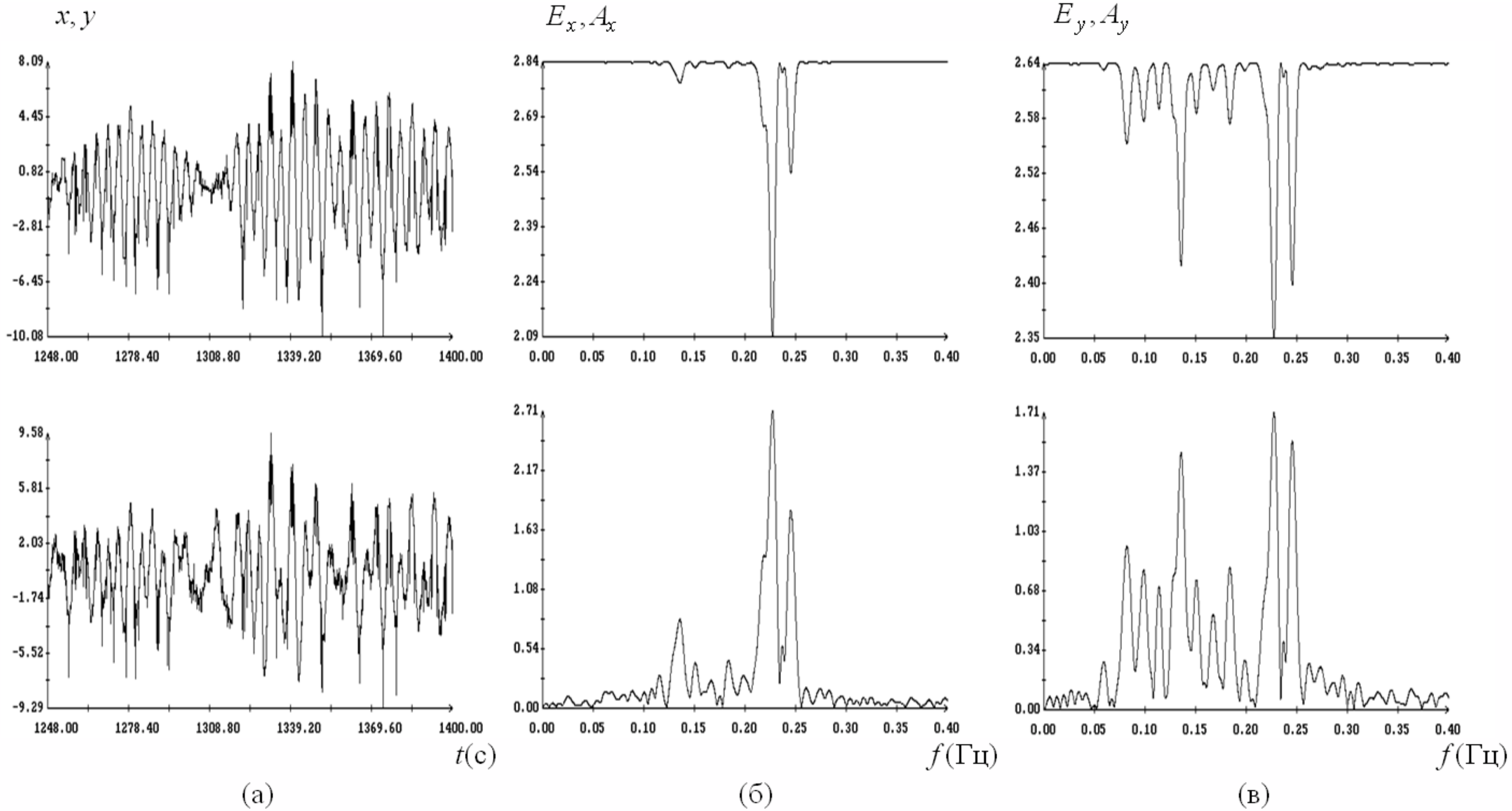
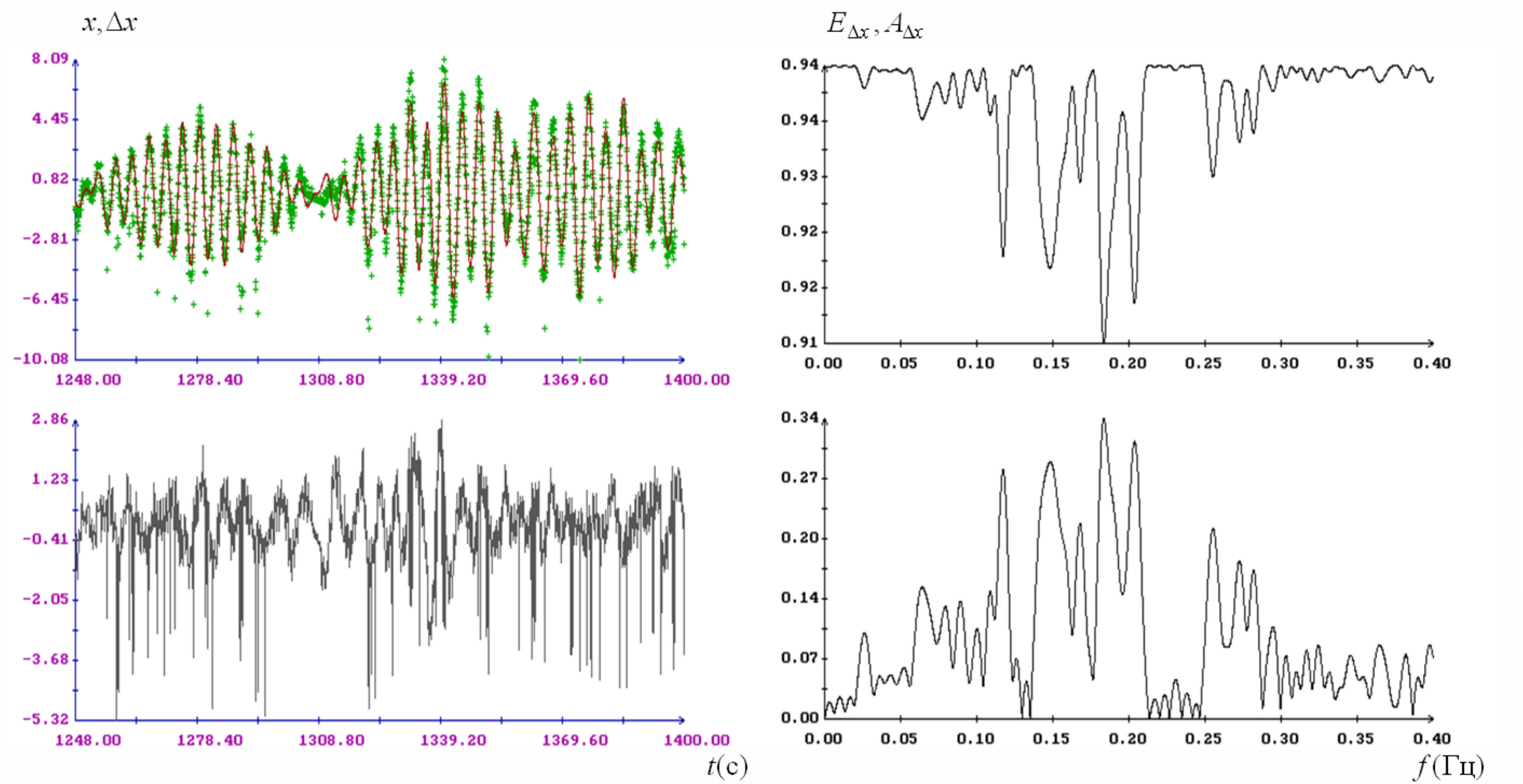
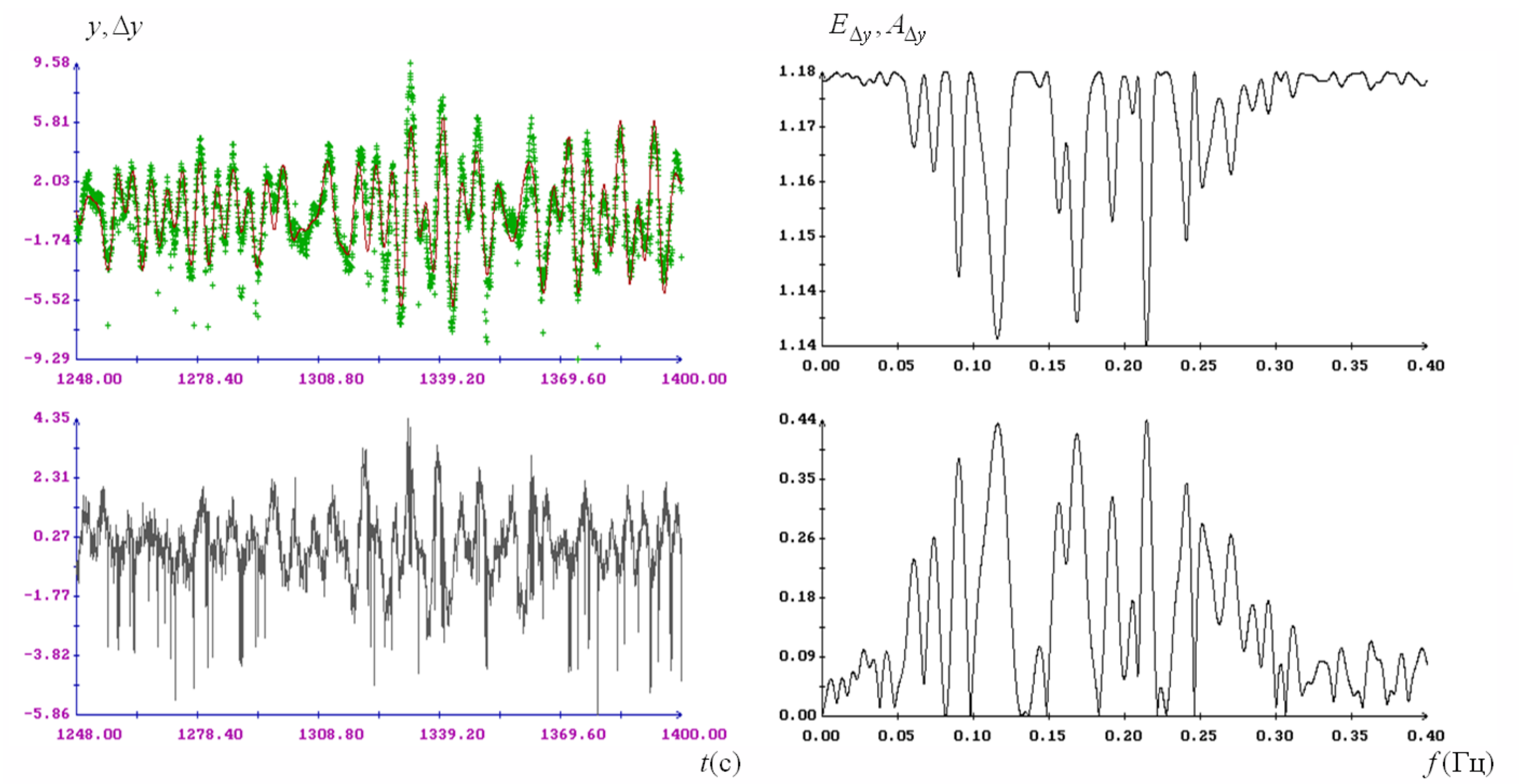


Рис. 39. Фрагмент съемки 31.05.2018: (а) колебания выделенной точки; (б, в) спектры координат x, y: $f_{x,1} = 0.13545$, $A_{x,1} = 0.799$, $f_{x,2} = 0.22703$, $A_{x,2} = 2.66$, $f_{x,3} = 0.24530$, $A_{x,3} = 1.72$, $f_{y,1} = 0.08206$, $A_{y,1} = 0.956$, $f_{y,2} = 0.09859$, $A_{y,2} = 0.753$, $f_{y,3} = 0.13557$, $A_{y,3} = 1.42$, $f_{y,4} = 0.18383$, $A_{y,4} = 0.729$, $f_{y,5} = 0.22731$, $A_{y,5} = 1.61$, $f_{y,6} = 0.24549$, $A_{y,6} = 1.49$.



(а) (б)

Рис. 40. Фрагмент съемки 31.05.2018: (а) аппроксимация координаты x, 8 гармоник: $f_{x,1} = 0.13508$, $A_{x,1} = 0.791$, $f_{x,2} = 0.22658$, $A_{x,2} = 2.83$, $f_{x,3} = 0.24637$, $A_{x,3} = 1.73$, $f_{x,4} = 0.22017$, $A_{x,4} = 1.36$, $f_{x,5} = 0.12976$, $A_{x,5} = 0.514$, $f_{x,6} = 0.21352$, $A_{x,6} = 0.707$, $f_{x,7} = 0.23472$, $A_{x,7} = 0.477$, $f_{x,8} = 0.24160$, $A_{x,8} = 0.693$; (б) спектры ошибки аппроксимации Δx.



(а) (б)

Рис. 41. Фрагмент съемки 31.05.2018: (а) аппроксимация координаты y, 9 гармоник: $f_{y,1} = 0.08174$, $A_{y,1} = 1.02$, $f_{y,2} = 0.09805$, $A_{y,2} = 0.764$, $f_{y,3} = 0.13171$, $A_{y,3} = 1.02$, $f_{y,4} = 0.13631$, $A_{y,4} = 1.56$, $f_{y,5} = 0.14837$, $A_{y,5} = 0.790$, $f_{y,6} = 0.18294$, $A_{y,6} = 0.734$, $f_{y,7} = 0.22158$, $A_{y,7} = 0.741$, $f_{y,8} = 0.22746$, $A_{y,8} = 1.60$, $f_{y,9} = 0.24608$, $A_{y,9} = 1.49$; (б) спектры ошибки аппроксимации Δy.