



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Вашковьяк М.А.

О приближенном
построении
околоэкваториальных орбит
спутников сфероидальных
небесных тел

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Вашковьяк М.А. О приближенном построении околоэкваториальных орбит спутников сфероидальных небесных тел // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 5. 26 с.
doi:[10.20948/prepr-2019-5](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-5)

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-5>

Публикации по материалам препринта

М.А. Вашковьяк. Полуаналитический метод построения околоэкваториальных орбит гипотетических спутников астероидов почти сфероидальной формы. Это препринт Произведения, принятого для публикации в журнале «Астрономический вестник» @ 2019 г. М.А.Вашковьяк.

(M.A. Vashkov'yak. Semi-analytical method for construction of near equatorial orbits of hypothetical satellites of asteroids with almost spheroidal form. This is a preprint of the Work accepted for publication in "Solar System Research". © Pleiades Publishing, Inc., 2019.)

URL: <http://pleiades.online/>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

М.А. Вашковьяк

**О приближенном построении
околоэкваториальных орбит спутников
сфероидальных небесных тел**

Москва — 2019

Вашковьяк М.А.

О приближенном построении околоэкваториальных орбит спутников сфероидальных небесных тел.

Рассмотрена задача о движении материальной точки пренебрежимо малой массы (спутника) вблизи экваториальной плоскости сфероидального тела, в частности астероида. Для малых наклонов орбиты спутника в первом приближении возможно разделение движений на экваториальную и широтную компоненты. Экваториальное центральное движение, когда силовая функция зависит лишь от расстояния спутника до начала координат (центра масс астероида), строится предложенным ранее полуаналитическим методом. Построение широтного движения предусматривает решение линеаризованной системы дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами путем численного определения матрицы монодромии на периоде экваториального движения и его временное аналитическое продолжение. Рассмотрены модельные задачи о возмущенном движении гипотетических почти экваториальных спутников Цереры и Весты. Оценка методической точности получена путем сравнения с численным решением.

Ключевые слова: потенциал сфероида, околоэкваториальные орбиты, гипотетические спутники Цереры и Весты.

Mikhail Alexandrovich Vashkov'yak

On approximate construction of near equatorial orbits of the satellites of spheroidal celestial bodies.

The problem about a motion of material point (satellite) with negligible small mass nearby the equatorial plane of spheroidal body, in particular asteroid, is considered. For the small inclinations of satellite orbit in the first approximation dividing of motions is possible into equatorial and latitudinal components. Equatorial central motion, when a power function depends only on distance of satellite to origin of coordinates (centre of mass of asteroid), is constructed by offered early a semi-analytical method. The construction of latitudinal motion foresees the solution of linearized system of second order differential equations with periodic coefficients by numeral determination of monodromy matrix on the period of equatorial motion and its analytical continuation at time. Model problems are considered about perturbed motion of hypothetical almost equatorial satellites of Ceres and Vesta. The estimation of methodical accuracy is obtained by comparing to the numerical solution.

Key words: potential of spheroid, near equatorial orbits, hypothetical satellites of Ceres and of Vesta.

1. Введение и постановка задачи

Известную классическую задачу о движении пробной материальной точки пренебрежимо малой массы в поле притяжения произвольного твердого тела (или системы тел) в небесной механике терминологически иногда называют задачей Фату по имени французского ученого, систематически исследовавшего ее и выявившего в ней ряд динамических свойств (Fatou P., 1931; Дубошин, 1964). В настоящей работе рассматривается частный случай этой задачи, когда притягивающее тело является однородным сфероидом, а движение пробной точки происходит вблизи его экваториальной плоскости.

Силовая функция притяжения однородного сфероида, зависящая от координат спутника, выражается известными формулами (Дубошин, 1961; Кондратьев, 2007). В дальнейшем будет использоваться система координат с началом в центре масс притягивающего тела O , а в качестве основной координатной плоскости xOy – плоскость экватора, нормальная к оси его вращения Oz . В силу осевой симметрии задачи направление оси Ox произвольно, а вместо пары прямоугольных координат x, y естественно и удобно использовать полярные координаты:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg(y/x). \quad (1)$$

При этом силовая функция притяжения $U(\rho, z)$ не зависит от полярного угла (или долготы) θ , а уравнения движения точки в выбранных цилиндрических координатах ρ, θ, z

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad \rho^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\rho \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2)$$

допускают два первых интеграла (Дубошин, 1964)

$$\left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = 2(U + h), \quad \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = c. \quad (3)$$

Постоянные c и h определяются начальными значениями координат и их производных по времени t при начальном значении $t_0 = 0$:

$$\rho_0, \quad \left. \frac{d\rho_0}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \right|_{t_0=0}, \quad \theta_0, \quad \left. \frac{d\theta_0}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \right|_{t_0=0}, \quad z_0, \quad \left. \frac{dz_0}{dt} = \frac{dz}{dt} \right|_{t_0=0}.$$

Интегралы (3) оказываются полезными при контроле точности численного решения уравнений (2) с произвольной функцией $U(\rho, z)$.

С использованием интеграла c уравнения (2), (3) принимают вид

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{c^2}{\rho^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = U(\rho, z) - \frac{c^2}{2\rho^2} + h. \quad (5)$$

Угловая переменная θ после определения явной зависимости ρ от времени t может быть найдена вычислением интеграла

$$\theta = \theta_0 + c \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{\rho^2(\tau)}. \quad (6)$$

Целью настоящей работы является построение приближенного полуаналитического решения системы уравнений (2) для ограниченного изменения ρ , а также малых значений z_0 и $\frac{dz_0}{dt}$. Предполагается, что на рассматриваемом интервале времени остаются малыми наклонение орбиты спутника i и модуль его широты $\varphi = \arctg(z/\rho)$. Предложенное решение может быть использовано в качестве первого (начального) приближения для описания орбитального движения околоэкваториальных спутников небесных тел, геометрические формы которых в известной степени близки к сжатым сфероидам, в том числе карликовой планеты Церера и астероида Веста.

В действительности астероиды имеют достаточно сложную структуру гравитационного поля. Исследование, выполненное в ходе миссии Dawn,

начавшейся в сентябре 2007 г., в частности, выявило наличие от 10 до 25 гармоник гравитационных полей Цереры и Весты. Оно детально описано в работе (Konopliv et al., 2011), содержащей и обзор исследований этих небесных тел, выполненных с помощью наземных средств. В дополнение к этому можно отметить, что при исследовании динамики перспективных искусственных спутников некоторых астероидов, в частности Апофиса, используется модель вытянутого эллипсоида вращения (Ивашкин, Лан, 2018), а также трехосного эллипсоида (Гуо, Ивашкин, 2018).

2. Силовая функция притяжения однородного сфероида и ее производные

Уравнение поверхности сфероида (эллипсоида вращения) имеет известный канонический вид

$$\frac{\rho^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_3^2} = 1. \quad (7)$$

Для выражения силовой функции его притяжения на внешнюю точку мы воспользуемся формулами, приведенными в монографии Б.П. Кондратьева (Кондратьев, 2007). В случае *сжатого* сфероида его полуоси удовлетворяют условиям $a_1 = a_2 > a_3$, а силовая функция имеет вид

$$U(\rho, z, \lambda) = \frac{3\mu}{2\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \times \left\{ I(\lambda) - \frac{\rho^2}{2(a_1^2 - a_3^2)} \left[I(\lambda) - \frac{\sqrt{(a_1^2 - a_3^2)(a_3^2 + \lambda)}}{a_1^2 + \lambda} \right] - \frac{z^2}{a_1^2 - a_3^2} \left[\sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{a_3^2 + \lambda}} - I(\lambda) \right] \right\}. \quad (8)$$

Здесь μ — произведение гравитационной постоянной на массу однородного сфероида,

$$I(\lambda) = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{a_3^2 + \lambda}} \right). \quad (9)$$

В формулах (8), (9) λ — это наибольший положительный корень уравнения эллипсоида, софокусного эллипсоиду (7)

$$\frac{\rho^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{z^2}{a_3^2 + \lambda} = 1, \quad (10)$$

или
$$\lambda^2 + (a_1^2 + a_3^2 - \rho^2 - z^2)\lambda + a_1^2 a_3^2 - a_3^2 \rho^2 - a_1^2 z^2 = 0.$$

Очевидно, что λ зависит от координат ρ и z , а также от параметров a_1, a_3

$$\lambda = \frac{1}{2}(\kappa - a_1^2 - a_3^2), \quad \kappa = \rho^2 + z^2 + \sqrt{(\rho^2 + z^2)^2 + 2(a_1^2 - a_3^2)(z^2 - \rho^2) + (a_1^2 - a_3^2)^2}. \quad (11)$$

С введением упрощающих обозначений

$$s_1 = a_1^2 + \lambda = \frac{1}{2}(\kappa + b^2), \quad s_2 = a_3^2 + \lambda = \frac{1}{2}(\kappa - b^2), \quad b = \sqrt{a_1^2 - a_3^2}, \quad I(\lambda) = \arctg\left(\frac{b}{\sqrt{s_2}}\right) \quad (12)$$

уравнение (10) принимает вид

$$R(\rho, z, \lambda) = s_2 \rho^2 + s_1 z^2 - s_1 s_2 = 0, \quad (13)$$

а функция U определяется следующим выражением

$$U(\rho, z, \lambda(\rho, z)) = \frac{3\mu}{2b} \left[\left(1 + \frac{2z^2 - \rho^2}{2b^2} \right) I(\lambda) + \frac{\rho^2 \sqrt{s_2}}{2s_1 b} - \frac{z^2}{b \sqrt{s_2}} \right]. \quad (14)$$

Частные производные функции U по координатам, строго говоря, должны вычисляться дифференцированием по аргументам ρ и z , входящим в формулу (14) как явно, так и посредством $\lambda(\rho, z)$. Соответствующие особенности вычислений с использованием условия (13) описаны в **Приложении 1**. Частные производные *первого* порядка определяются относительно простыми формулами

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{3\mu\rho}{2b^3} \left[\frac{b\sqrt{s_2}}{s_1} - I(\lambda) \right], \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{3\mu z}{b^3} \left[I(\lambda) - \frac{b}{\sqrt{s_2}} \right]. \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что знак производной $\frac{\partial U}{\partial z}$ противоположен знаку z . Как следствие общего свойства движения в задаче Фату (Fatou P., 1931; Дубошин,

1964), это означает, что компонента ускорения $\frac{d^2z}{dt^2}$ постоянно направлена к основной (экваториальной) плоскости, а движение устойчиво относительно малых отклонений z от нуля.

В дальнейшем при анализе околоэкваториальных орбит и разделении движений на экваториальное и широтное будут также использоваться упрощенные выражения функции U и ее частных производных по ρ и z при $z \rightarrow 0$, непосредственно следующие из формул (14), (15)

$$U(\rho, 0) = \frac{3\mu}{2b} \left[\left(1 - \frac{\rho^2}{2b^2} \right) \operatorname{arctg}(\xi) + \frac{1}{2\xi} \right],$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \rho} \right|_{z=0} = \frac{3\mu\rho}{2b^3} \left[\frac{b^2}{\xi\rho^2} - \operatorname{arctg}(\xi) \right], \quad \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z \rightarrow 0} = \frac{3\mu z}{b^3} [\operatorname{arctg}(\xi) - \xi] \quad (16)$$

где $\xi = \frac{b}{\sqrt{\rho^2 - b^2}}$.

Для методической полноты мы приводим здесь формулы, которые могут быть использованы и в случае *вытянутого* сфероида, когда его полуоси удовлетворяют условиям $a_1 = a_2 < a_3$. Исходя из выражения силовой функции (Кондратьев, 2007)

$$U(\rho, z, \lambda) = \frac{3\mu}{4\sqrt{a_3^2 - a_1^2}} \times$$

$$\times \left\{ \bar{I}(\lambda) - \frac{\rho^2}{a_3^2 - a_1^2} \left[\frac{\sqrt{(a_3^2 - a_1^2)(a_3^2 + \lambda)}}{a_1^2 + \lambda} - \frac{1}{2} \bar{I}(\lambda) \right] - \frac{z^2}{a_3^2 - a_1^2} \left[\bar{I}(\lambda) - 2\sqrt{\frac{a_3^2 - a_1^2}{a_3^2 + \lambda}} \right] \right\}$$

и обозначений

$$\bar{b} = \sqrt{a_3^2 - a_1^2}, \quad \bar{I}(\lambda) = \ln \left(\frac{\sqrt{s_2 + \bar{b}}}{\sqrt{s_2 - \bar{b}}} \right),$$

аналоги формул (14) - (16) принимают вид

$$U(\rho, z, \lambda) = \frac{3\mu}{4\bar{b}} \left[\left(1 + \frac{\rho^2 - 2z^2}{2\bar{b}^2} \right) \bar{I}(\lambda) - \frac{\rho^2 \sqrt{s_2}}{s_1 \bar{b}} + \frac{2z^2}{\bar{b} \sqrt{s_2}} \right],$$

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{3\mu\rho}{4\bar{b}^3} \left[\bar{I}(\lambda) - \frac{2\bar{b}\sqrt{s_2}}{s_1} \right], \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{3\mu z}{2\bar{b}^3} \left[\frac{2\bar{b}}{\sqrt{s_2}} - \bar{I}(\lambda) \right].$$

$$U(\rho, 0) = \frac{3\mu}{4\bar{b}} \left[\left(1 + \frac{\rho^2}{2\bar{b}^2} \right) \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} - \frac{1}{\eta} \right],$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \rho} \right|_{z=0} = \frac{3\mu\rho}{4\bar{b}^3} \left[\ln \frac{1+\eta}{1-\eta} - \frac{2\bar{b}^2}{\eta\rho^2} \right], \quad \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z \rightarrow 0} = \frac{3\mu z}{2\bar{b}^3} \left[2\eta - \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} \right]$$

где $\eta = \frac{\bar{b}}{\sqrt{\rho^2 + \bar{b}^2}}$.

Можно показать, что знак производной $\frac{\partial U}{\partial z}$, так же как и в случае сжатого сфероида, противоположен знаку z и движение устойчиво относительно малых отклонений аппликаты.

3. Разделение движений и приближенное построение решения

3.1. Экваториальное движение

Следуя методу последовательных приближений, для построения решения при малых значениях z/ρ пренебрежем в первом и втором уравнениях (4) соответственно квадратом и кубом этого отношения. Рассмотрим вначале экваториальное движение, когда $z_0 = 0$, $\frac{dz_0}{dt} = 0$. В этом приближении изменение ρ , определяемое первым интегралом (5), происходит в центральном поле и находится обращением квадратуры

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}, \quad (17)$$

где
$$f(\rho) = U(\rho, 0) - \frac{c^2}{2\rho^2} + h, \quad (18)$$

причем для действительного движения должно быть выполнено условие

$$h \geq \frac{c^2}{2\rho^2} - U(\rho, 0). \quad (19)$$

В дальнейшем, не вводя существенных ограничений, будем считать, что

$$\rho_0 = \rho_{\min}, \quad \frac{d\rho_0}{dt} = 0, \quad \theta_0 = 0, \quad \frac{d\theta_0}{dt} = \frac{c}{\rho_0^2} \quad (20)$$

при $t = 0$.

Для нахождения зависимости $\rho(t)$ в случае его ограниченного (либрационного) изменения ($0 < \rho_{\min} < \rho < \rho_{\max}$) мы применяем разработанный ранее приближенный полуаналитический метод (Вашковьяк, 2018), вкратце описываемый ниже.

Постоянные c и h заданием экстремальных значений ρ_{\min}, ρ_{\max} однозначно определяются следующими формулами

$$c = \rho_{\min} \rho_{\max} \sqrt{\frac{2[U(\rho_{\min}, 0) - U(\rho_{\max}, 0)]}{\rho_{\max}^2 - \rho_{\min}^2}}, \quad h = \frac{\rho_{\min}^2 U(\rho_{\min}, 0) - \rho_{\max}^2 U(\rho_{\max}, 0)}{\rho_{\max}^2 - \rho_{\min}^2}. \quad (21)$$

В предположении, что ρ_{\min} и ρ_{\max} являются простыми нулями функции $f(\rho)$, она представима в виде

$$f(\rho) = g(\rho)(\rho - \rho_{\min})(\rho_{\max} - \rho), \quad (22)$$

причем два последних множителя, очевидно, отражают главное качественное свойство ограниченного движения. При этом функция $g(\rho)$ вычисляется по известному выражению (18) и заданным экстремальным значениям ρ_{\min}, ρ_{\max} как

$$g(\rho) = \frac{f(\rho)}{(\rho - \rho_{\min})(\rho_{\max} - \rho)}. \quad (23)$$

Далее для приведения интеграла (17) к эллиптическому виду применяется аппроксимация функции $g(\rho)$ квадратичным полиномом

$$P(\rho) = p_1\rho^2 + p_2\rho + p_3 = p_1(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2) \approx g(\rho). \quad (24)$$

Вычислительные детали аппроксимации и соответствующие графические зависимости вынесены в **Приложение 2**.

Таким образом, при фиксированных постоянных значениях c и h аналитическое решение для его построения требует предварительного вычисления коэффициентов аппроксимирующего полинома. Далее после замены $f(\rho)$ на $Q(\rho) = P(\rho)(\rho - \rho_{\min})(\rho_{\max} - \rho)$ в квадратуре (17) с помощью ее обращения находится зависимость $\rho(t)$, а затем вычислением интеграла (6) определяется и $\theta(t)$. Эти зависимости, содержащие эллиптические функции и интегралы, описаны в работе (Вашковьяк, 2018), а здесь будет приведен лишь их общий вид, когда дискриминант квадратного уравнения $P(\rho) = 0$ отрицателен, а корни ρ_1 и ρ_2 — комплексно-сопряженные (именно этот случай реализуется в рассматриваемых далее конкретных численных примерах).

Зависимость расстояния от времени определяется формулами

$$\rho(t) = \frac{\alpha + \beta \operatorname{cn} vt}{\gamma + \delta \operatorname{cn} vt}, \quad k^2 = \frac{(\rho_4 - \rho_3)^2 - \delta^2}{4pq}, \quad v = \sqrt{2p_1pq}, \quad (25)$$

где $\operatorname{cn} vt$ — эллиптический косинус Якоби с модулем k , а постоянные величины $\alpha, \beta, \gamma, \delta, p, q$ зависят от коэффициентов аппроксимирующего полинома $P(\rho)$ и двух действительных (заданных) корней ρ_{\min}, ρ_{\max} полинома $Q(\rho)$.

Зависимость $\rho(t)$ является периодической функцией времени с периодом

$$T_\rho = \frac{4}{\nu} \mathbf{K}(k), \quad (26)$$

где $\mathbf{K}(k)$ – полный эллиптический интеграл 1-го рода с модулем k .

Зависимость от времени полярного угла θ определяется путем нахождения интеграла в формуле (6). Подстановка в его подынтегральное выражение зависимости $\rho(\tau)$, согласно формулам (25), дает

$$\theta(t) = \frac{c}{\nu} \left(\frac{\delta}{\beta} \right)^2 \left[\nu t + 2sI_1(t) + s^2I_2(t) \right], \quad (27)$$

где

$$I_l(t) = \int_0^{\nu t} \frac{dw}{(b + c \operatorname{sn} w)^l}, \quad (l=1,2), \quad b = \frac{\alpha}{\beta}, \quad s = \frac{\gamma}{\delta} - b.$$

Интегралы I_l выражаются через тригонометрические функции и неполные эллиптические интегралы 1-го, 2-го, 3-го рода.

3.2. Широтное движение

При отличии величины $\frac{dz_0}{dt}$ от нуля в движении спутника будут присутствовать отклонения, связанные с изменением аппликаты z или широты $\varphi = \operatorname{arctg}(z/\rho)$. По аналогии с невозмущенным кеплеровским движением зададим начальные условия широтного движения в перицентре орбиты формулами

$$z_0 = 0, \quad \frac{dz_0}{dt} = V_0 \sin i_0, \quad V_0 = \sqrt{\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)}}, \quad a = \frac{1}{2}(\rho_{\max} + \rho_{\min}), \quad e = \frac{1}{2a}(\rho_{\max} - \rho_{\min}), \quad (28)$$

где начальное наклонение орбиты i_0 будем предполагать достаточно малой величиной порядка нескольких градусов и $|\varphi| \leq i_0$.

При малых значениях z изменение этой координаты определяется линейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + R(t)z = 0. \quad (29)$$

Здесь, согласно последней формуле (16) для производной $\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z \rightarrow 0}$, функция

$$R(t) = \frac{3\mu}{b^3} [\xi - \operatorname{arctg}(\xi)] \geq 0. \quad (30)$$

Она исходно зависит от расстояния ρ посредством ξ и фактически является функцией времени, поскольку в первом приближении $\rho(t)$ определяется периодической зависимостью (25), так что

$$R(t + T_\rho) = R(t), \quad (31)$$

а период этой функции дается формулой (26).

Дифференциальное уравнение (29), известное как уравнение Хилла, в векторной форме имеет вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}, \quad (32)$$

где

$$\mathbf{x} = \left(z, \frac{dz}{dt} \right)^T, \quad A(t + T_\rho) = A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -R(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

а верхний значок «т» означает транспонирование.

Согласно теории Ляпунова—Флоке (см., например, Якубович и Старжинский, 1972, гл. VII; Малкин, 1966, гл. V), решение дифференциального уравнения (32) с периодическими коэффициентами может быть получено путем вычисления фундаментальной матрицы (матрицанта) $X(t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X \quad (34)$$

при начальном условии $X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$, а также матрицы монодромии $M = X(T_\rho)$. При этом вектор $\mathbf{x}(t)$ находится по формуле

$$\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{x}_0, \quad (35)$$

где $\mathbf{x}_0 = \left(z_0, \frac{dz_0}{dt} \right)^T$ — вектор начальных данных. Матрицант $X(t)$ для произвольного момента времени $t > T_\rho$ определяется формулой

$$X(t > T_\rho) = X(0 \leq t \leq T_\rho)M^n, \quad n = \text{Entier}(t/T_\rho). \quad (36)$$

Таким образом, для построения широтного движения требуется нахождение матрицанта $X(t)$ лишь на ограниченном промежутке времени $[0 \leq t \leq T_\rho]$, что без существенных вычислительных затрат может быть выполнено численным методом с контролем равенства $\det X(t) \equiv 1$.

Свойства широтного движения существенно зависят от собственных чисел σ матрицы монодромии M (мультипликаторов), удовлетворяющих уравнению

$$\det(M - \sigma E_2) = 0, \quad (37)$$

и от характеристических показателей $\alpha = \frac{1}{T_\rho} \ln \sigma$. Общее решение уравнения

(32) представимо в виде произведений T_ρ -периодических функций на $\exp(\alpha t)$, а σ определяются простейшими формулами

$$\sigma_{1,2} = B \pm \sqrt{B^2 - 1}, \quad (38)$$

где $B = \frac{1}{2} \text{Tr} M$ — половина следа матрицы монодромии.

Если величина $B > 1$, то мультипликаторы и характеристические показатели положительны. В этом случае широтное движение описывается колебаниями периода T_p с экспоненциально возрастающей амплитудой, так что величина z выходит за пределы применимости линейного приближения (29).

Если $B < 1$, то комплексно сопряженные мультипликаторы лежат на единичной окружности $|\sigma_1| = |\sigma_2| = 1$, а характеристические показатели чисто мнимы. Широтное движение ограничено и описывается суперпозицией колебаний с ограниченными амплитудами и периодами T_p и $T_\alpha = 2\pi/\alpha$.

4. Методические примеры решения модельных задач

В данном разделе проводится сопоставление результатов, полученных двумя принципиально различными методами. Начальные параметры движения определяются формулами (20), (28), и этот полный набор начальных данных служит для расчета ограниченного движения вблизи экваториальной плоскости астероида как полуаналитическим методом, так и с помощью численного интегрирования уравнений (2) с контролем постоянства c и h вдоль решения. В качестве примеров рассматривается движение околоэкваториальных гипотетических спутников астероидов Цереры и Весты, которые предполагаются сжатыми сфероидами. В табл. 1 приведены их физические характеристики — гравитационные параметры μ , радиусы сфер Хилла R_H , геометрические размеры $D_1 \approx D_2 > D_3$, периоды осевого вращения T_{rot} , а также начальное наклонение орбит спутников и их апсидальные расстояния. В принятой модели сфероида предполагается, что $D_1 = D_2$ ($a_1 = a_2$) для обоих астероидов, а их осевые вращения происходят вокруг меньших полуосей a_3 . В качестве иллюстрации в конце **Приложения 1** приведен адрес сайта для просмотра анимации осевого вращения Весты.

Табл. 1.

Параметры астероидов и спутниковых орбит

Параметр	Церера	Веста
μ , км ³ сек ⁻²	62.6	17.8
R_H , км	223500	125500
$D_1 = 2a_1$, км	964.4	572.6
$D_2 = 2a_2$, км	964.2	557.2
$D_3 = 2a_3$, км	891.8	446.4
T_{rot} , час	9.074	5.342
i , град	3	3
ρ_{min} , км	800	400
ρ_{max} , км	1583.64	700.85

Минимальные расстояния спутников Цереры и Весты считаются заданными, а высоты перицентров составляют примерно 318 км и 114 км соответственно. Максимальные расстояния приняты такими, чтобы они соответствовали кеплеровским орбитам спутников с периодами обращения, равными T_{rot} , т.е. синхронным спутникам астероидов. Начальное малое наклонение спутниковых орбит принято равным 3° . Вычислительный временной интервал составляет 2 дня, или примерно от $5 \div 9$ орбитальных периодов обращения спутников.

Предварительно для каждого из примеров по методу наименьших квадратов произведена аппроксимация функции $g(\rho)$, определяемой формулой (23), квадратичным полиномом $P(\rho)$ на отрезке $\rho_{min} = \rho_3 \leq \rho \leq \rho_4 = \rho_{max}$, вычисление его дискриминанта D и корней ρ_1, ρ_2 .

Сравнительные результаты расчетов зависимостей от времени расстояния полярного угла и аппликаты для спутника Цереры показаны на рис. 1 – 3.

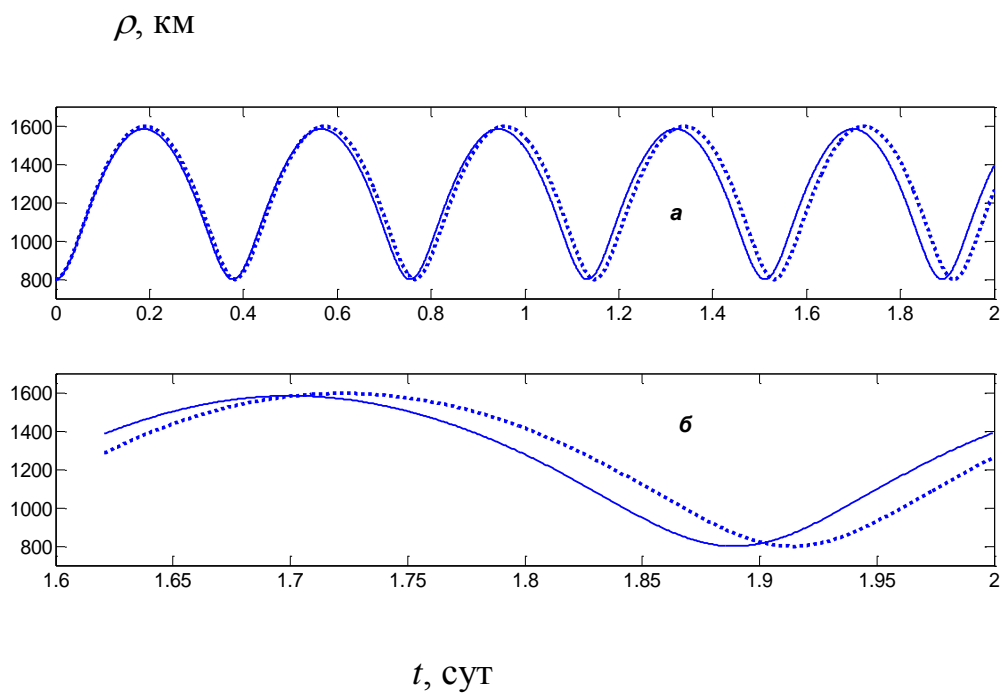


Рис. 1. Зависимости от времени расстояния ρ для спутника Цереры
(сплошные кривые – полуаналитическое решение,
пунктирные кривые – численное решение).

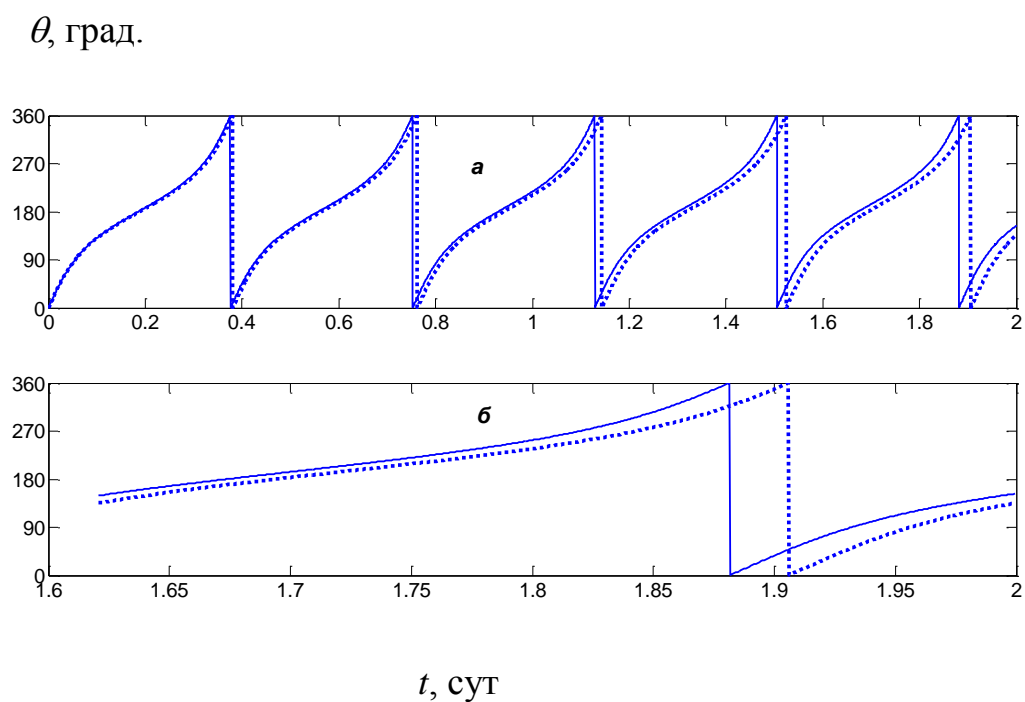


Рис. 2. То же самое, что и на рис. 1, но для полярного угла θ .

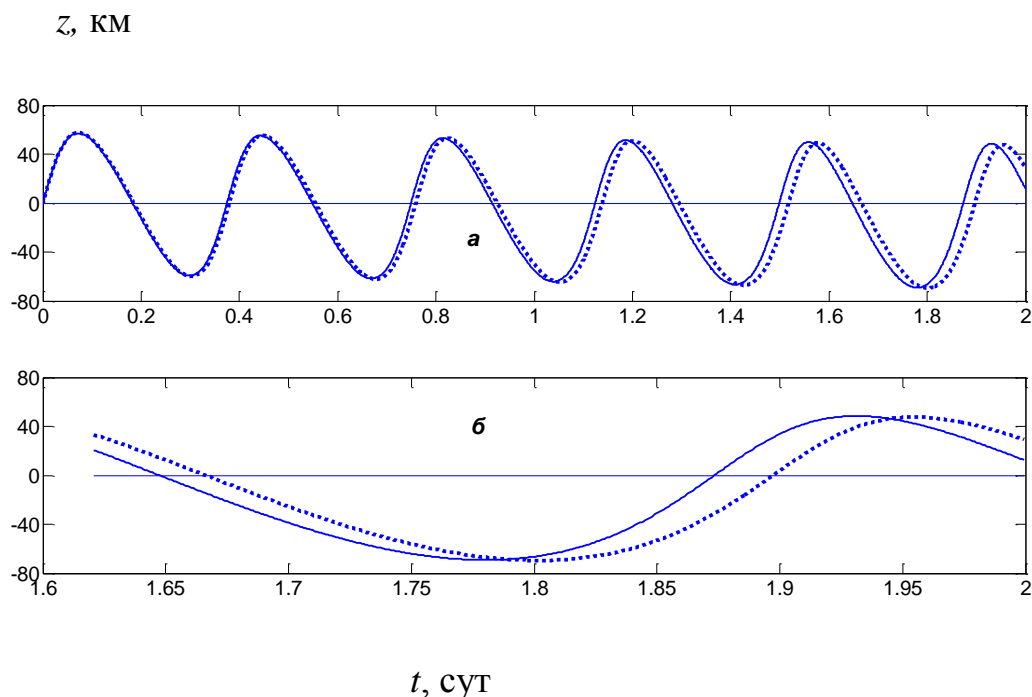


Рис. 3. То же самое, что и на рис. 1, но для аппликаты z .

На фрагментах «а» этих рисунков представлен интервал времени 2 дня, а на фрагментах «б» — существенно меньший интервал, соответствующий последнему обороту спутника. Именно фрагменты «б» позволяют получить наглядную количественную оценку методической погрешности предлагаемого приближенного решения, обусловленной аппроксимацией функции $g(\rho)$ (23) квадратичным полиномом $P(\rho)$ (24). На рис. 3а можно заметить слабое и кажущееся вековым изменение среднего и экстремальных значений z . В действительности это долгопериодическое изменение с периодом T_α , который здесь составляет примерно 22.5 дня и модулирует короткопериодическое изменение z с периодом $T_\rho \approx T_{rot} = 9.074$ часа.

Аналогичные зависимости для спутника Весты показаны рис. 4 – 6.

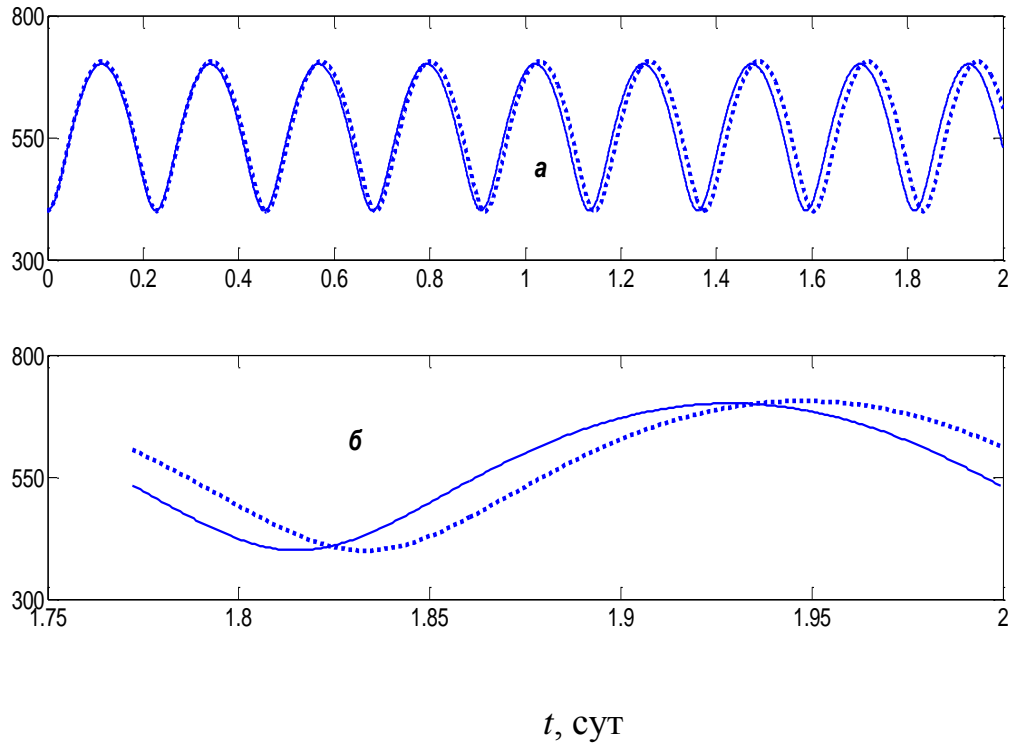
ρ , км

Рис. 4. То же самое, что и на рис. 1, но для спутника Весты.

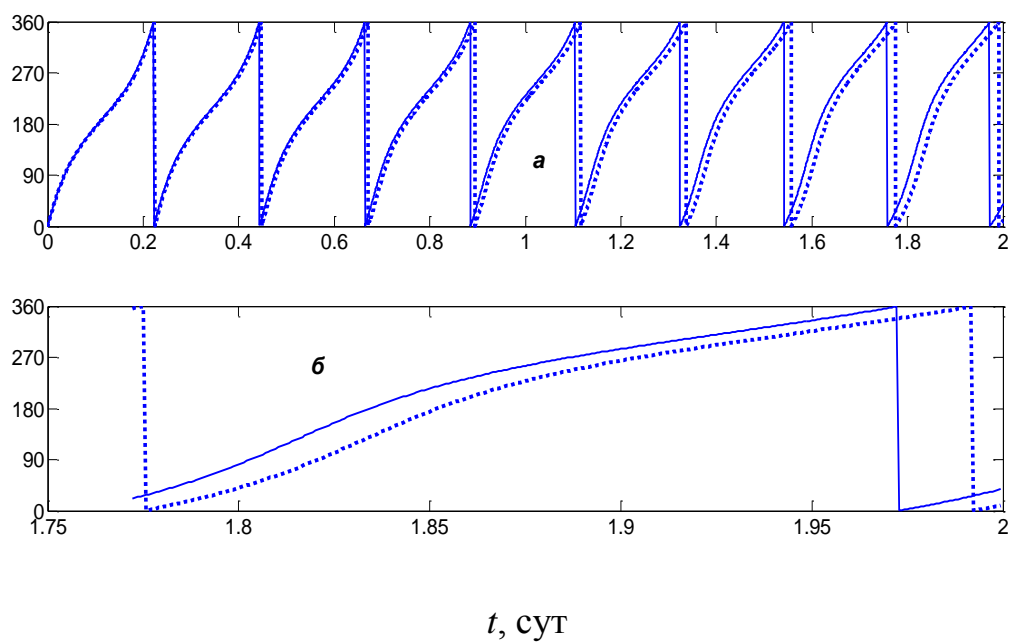
 θ , град.

Рис. 5. То же самое, что и на рис. 2, но для спутника Весты.

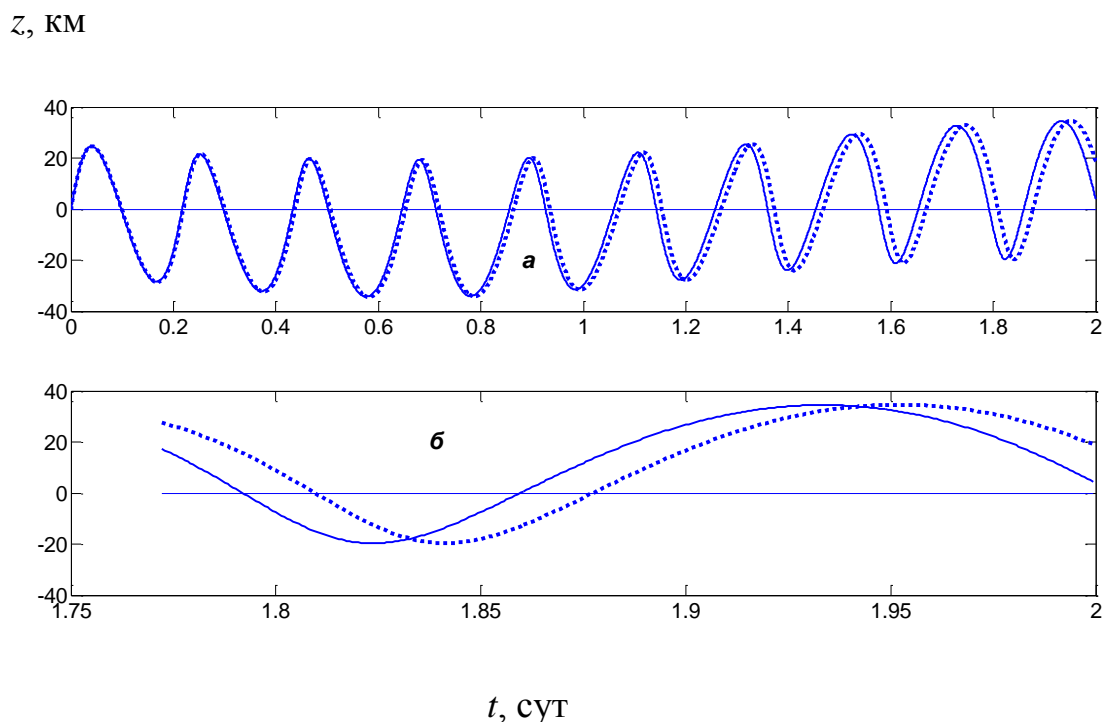


Рис. 6. То же самое, что и на рис. 3, но для спутника Весты.

На рис. 6а можно более отчетливо, чем на рис. 3а, заметить долгопериодическое изменение с периодом T_α , который здесь составляет примерно 2.6 дня и модулирует короткопериодическое изменение z с периодом $T_\rho \approx T_{rot} = 5.034$ часа.

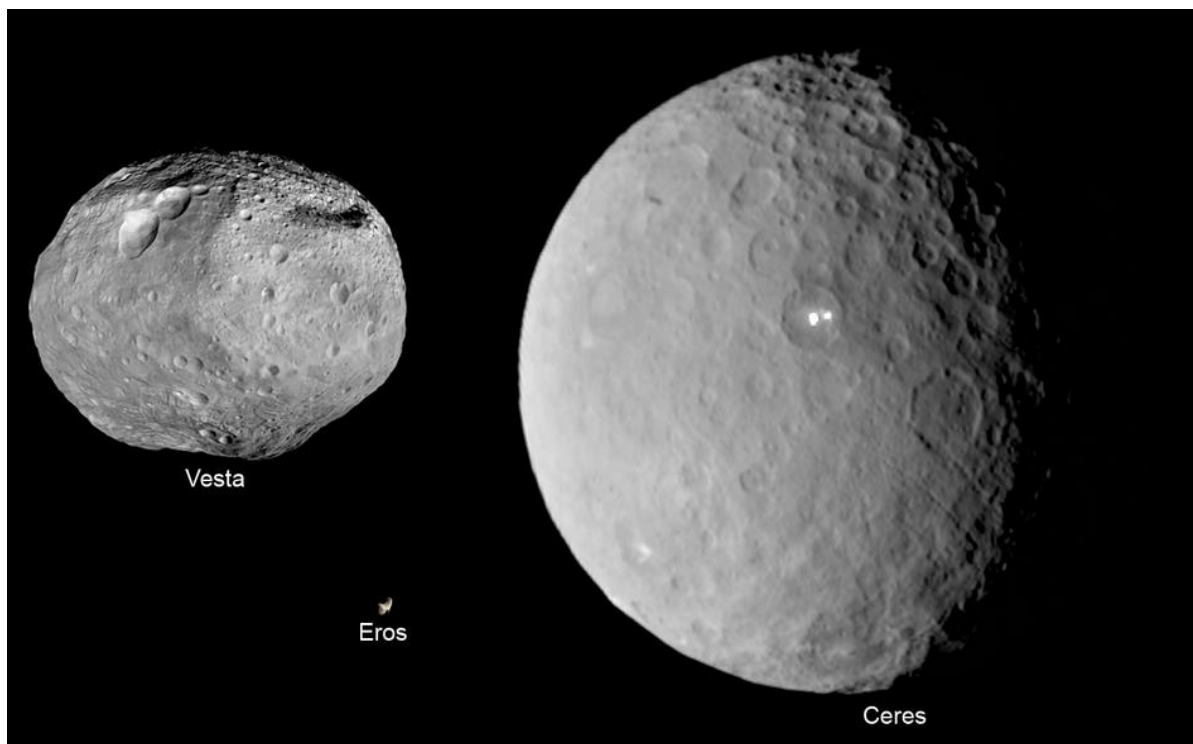
5. Заключительные замечания

В данной работе предложен полуаналитический метод и описаны его возможности для нахождения приближенного решения задачи о движении спутника вблизи экваториальной плоскости однородного сжатого сфероида в виде зависимостей координат от времени. При построении экваториального движения спутника для принятых динамических и геометрических характеристик сфероида использование метода, вообще говоря, предусматривает либо предварительное нахождение экстремальных (апсидальных) значений расстояния с помощью численного решения строгих уравнений, либо априорное задание этих параметров. Получение

аналитических зависимостей от времени расстояния и полярного угла выполняется с помощью разработанной ранее методики построения движения в центральном гравитационном поле. Для решения уравнения, описывающего широтное движение, требуется его численное интегрирование на относительно коротком интервале времени - периоде изменения расстояния в экваториальном движении. Продолжение этого решения для произвольного момента времени осуществляется с использованием матрицы монодромии.

На частных примерах орбит гипотетических спутников Цереры и Весты продемонстрировано качественное и приближенно количественное согласие результатов расчетов, выполненных предложенным методом и методом численного интегрирования уравнений движения в поле притяжения однородного сжатого сфероида.

В заключение ниже приводятся фотографии астероидов Веста и Церера в сравнении с астероидом Эрос.



https://www.universetoday.com/wp-content/uploads/2010/08/Eros_Vesta_and_Ceres_size_comparison.jpg

Приложение 1

При учете зависимости λ от ρ , z частные производные первого порядка функции U определяются следующими формулами

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{3\mu\rho}{2b^3} f_1(\rho, z, \lambda), \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{3\mu z}{b^3} f_2(\rho, z, \lambda),$$

где

$$f_1(\rho, z, \lambda) = \frac{b\sqrt{s_2}}{s_1} - I(\lambda) + \frac{b^3}{2s_1^2 s_2 \sqrt{s_2}} \left(1 + \frac{\rho^2 + z^2 - b^2}{S} \right) R(\rho, z, \lambda),$$

$$f_2(\rho, z, \lambda) = I(\lambda) - \frac{b}{\sqrt{s_2}} + \frac{b^3}{4s_1^2 s_2 \sqrt{s_2}} \left(1 + \frac{\rho^2 + z^2 + b^2}{S} \right) R(\rho, z, \lambda),$$

$$S = \sqrt{(\rho^2 - b^2)^2} = 2(\rho^2 + b^2)z^2 + z^4.$$

Однако на эллипсоиде (10) функция R обращается в нуль. Поэтому выражения для частных производных принимают упрощенный вид (15). С формальной точки зрения, это равносильно дифференцированию функции U без учета зависимости λ от координат, однако подобный формализм имеет место лишь при нахождении частных производных *первого* порядка.

Вместе с тем может возникнуть необходимость в вычислении производных второго (и более высокого) порядка, в частности, при решении уравнений в вариациях. Можно представить себе и возникшую необходимость контрольной проверки выполнения уравнения Лапласа, которому потенциал или силовая функция притяжения должны удовлетворять по самому их определению. В цилиндрических координатах это уравнение имеет вид

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

а для рассматриваемого осесимметричного потенциала

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Вышеприведенные формулы показывают, что для корректного вычисления лапласиана (даже при $R = 0$) необходимо нахождение производных функции R по всем ее переменным.

Приложение 2

Коэффициенты полинома $P(\rho)$ p_1, p_2, p_3 находятся способом наименьших квадратов на отрезке $\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}$, а корни ρ_1, ρ_2 определяются известными простейшими формулами

$$\rho_1 = 0.5(-p_2 + \sqrt{D}) / p_1, \quad \rho_2 = 0.5(-p_2 - \sqrt{D}) / p_1, \quad D = p_2^2 - 4p_1p_3,$$

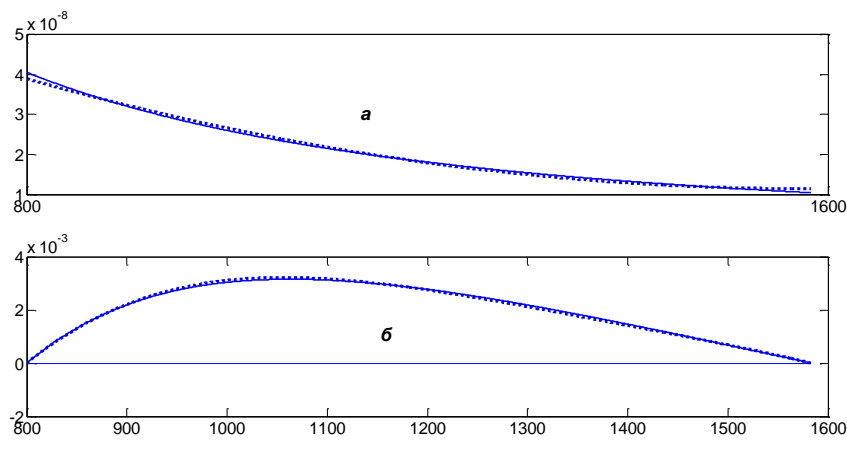
причем в реальном движении должно быть $P(\rho) > 0$. Полином четвертой степени $Q(\rho) = p_1(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_3)(\rho_4 - \rho) \approx f(\rho)$,

где $\rho_3 = \rho_{\min}, \quad \rho_4 = \rho_{\max},$

является аппроксимирующим для функции $f(\rho)$.

На рис. 7 и 8 сплошными линиями показаны зависимости от расстояния ρ исходных функций $g(\rho)$ – фрагменты *а* и $f(\rho)$ – фрагменты *б*. Пунктирными кривыми на тех же фрагментах показаны аппроксимирующие функции $P(\rho)$ и $Q(\rho)$. Данные зависимости отвечают рассматриваемым в разделе 4 модельным примерам околоэкваториального движения гипотетических спутников Цереры и Весты — это соответственно рис. 7 и 8.

$g(\rho), P(\rho), \text{сек}^{-2};$
 $f(\rho), Q(\rho), \text{км}^2\text{сек}^{-2}$



$\rho, \text{км}$

Рис. 7. Зависимости от расстояния аппроксимируемых и аппроксимирующих функций (спутник Цереры):
 а) $g(\rho)$ – сплошная линия, $P(\rho)$ – пунктирная кривая;
 б) $f(\rho)$ – сплошная линия, $Q(\rho)$ – пунктирная кривая.

$g(\rho), P(\rho), \text{сек}^{-2};$
 $f(\rho), Q(\rho), \text{км}^2\text{сек}^{-2}$

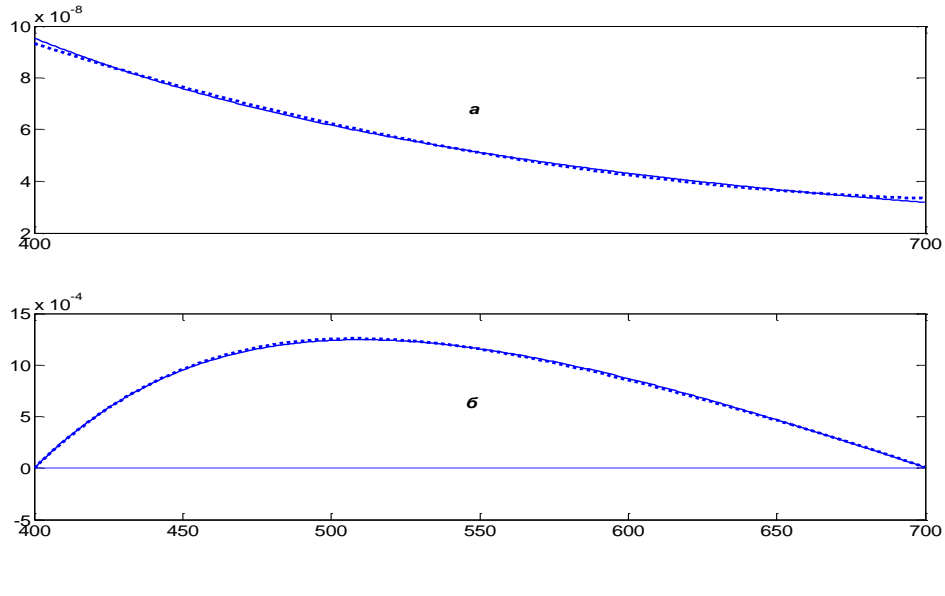


Рис. 8. То же самое, что и на рис. 7, но для спутника Весты.

В приведенных примерах использование аппроксимации функций $g(\rho)$ квадратичными полиномами достаточно эффективно и оправдано, в силу слабой нелинейности (более того – «неквадратичности») этих функций. Необходимо отметить, что подобная благоприятная ситуация может нарушаться для спутниковых орбит с высотами перицентров, малыми по сравнению со средними радиусами астероидов. При этом квадратичной аппроксимации будет явно недостаточно.

Библиографический список

Вашковьяк М.А. Метод построения ограниченного движения в центральном поле произвольного вида // Астрон. Вест. 2018. Т. 52. № 4. С. 364-376. DOI: 10.7868/S0320930X18040072. (*Vashkov'yak M. A. A Method for Construction of a Restricted Motion in an Arbitrary Central Field // Solar System Research. 2018. V. 52. No 4. P.359-370. DOI: 10.1134/S003809461804007X*)

Гуо П., Ивашкин В.В. Методы вычисления потенциала однородного трехосного эллипсоида и их применение к анализу динамики спутника астероида // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 94. 32 с.

doi: 10.20948/prepr-2018-94

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-94>

Дубошин Г.Н. Теория притяжения. М.: Физматлит. 1961. 288 с.

Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные. М.: Физматлит. 1964. 560 с.

Ивашкин В.В., Лан А. Построение траекторий космического аппарата для экспедиции Земля-астероид-Земля с учетом выбора орбит пребывания у астероида // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 90. 27 с.

doi: 10.20948/prepr-2018-90

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-90>

Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир. 2007. 511 с.

Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука. Физматлит. 1966. 530 с.

Якубович В.Я., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука. Физматлит. 1972. 718 с.

Konopliv A.S., Asmar S.W., Bills B.G., Mastrodemos N., Park R.S., Raymond C.A., Smith-D.E., Zuber M.T. The Dawn Gravity Investigation at Vesta and Ceres // *Space Sci. Rev.* 2011. V. 163. P. 461–486. DOI: 10.1007/s11214-011-9794-8.

Fatou P. Sur le mouvement d'un point materiel dans un champ de gravitation fixe (Memoire posthume) // *Acta Astronomica.* 1931. Ser. a. 2. C. 101.

Оглавление

1. Введение и постановка задачи.....	3
2. Силовая функция притяжения однородного сжатого сфероида и ее производные.....	5
3. Разделение движений и приближенное построение решения	8
3.1. Экваториальное движение	8
3.2. Широтное движение	11
4. Методические примеры решения модельных задач	14
5. Заключительные замечания	19
Приложение 1	21
Приложение 2	23
Библиографический список	25

Публикации по материалам препринта

М.А. Вашковьяк. Полуаналитический метод построения околоэкваториальных орбит гипотетических спутников астероидов почти сфероидальной формы. Это препринт Произведения, принятого для публикации в журнале «Астрономический вестник» @ 2019 г. М.А.Вашковьяк. (M.A. Vashkov'yak. Semi-analytical method for construction of near equatorial orbits of hypothetical satellites of asteroids with almost spheroidal form.

This is a preprint of the Work accepted for publication in “Solar System Research”

© Pleiades Publishing, Inc., 2019. URL: <http://pleiades.online/>