



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 52 за 2025 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.Г. Чурбанов

**Расчет потоков с пористыми
вставками в инерционном
режиме течения**

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Чурбанов А.Г. Расчет потоков с пористыми вставками в инерционном режиме течения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 52. 28 с. EDN: [CDTKDD](https://doi.org/10.26907/2071-2898.2025.52)
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-52>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

А.Г. Чурбанов

**Расчет потоков с пористыми
вставками в инерционном
режиме течения**

Москва — 2025

Чурбанов А.Г.

Расчет потоков с пористыми вставками в инерционном режиме течения

Данная работа посвящена расчетам течений несжимаемой жидкости в системах, состоящих из чистой жидкости и насыщенного пористого тела. Используемая математическая модель основана на осредненных по объему уравнениях Навье–Стокса. Алгоритм расчета этой модели реализован на основе открытой вычислительной платформы FEniCS. Рассматриваемое здесь модельное пористое тело представляет собой квадратный массив круговых цилиндров. Расчеты проведены в широком диапазоне значений числа Рейнольдса, включающем как ползуший, так и инерционный режимы течения. Получена оценка числа Рейнольдса, при котором в расчетах происходит переход из ползущего режима течения в инерционный.

Ключевые слова: пористая среда, осредненные по объему уравнения Навье–Стокса, платформа FEniCS, инерционный режим течения

Alexander Georgievich Churbanov

Prediction of flows with porous inserts in the inertial flow regime

This work deals with predicting flows of an incompressible fluid in systems consisting of a clear fluid and fluid-saturated porous body. The mathematical model used in calculations is based on the volume-averaged Navier–Stokes equations. To implement this model numerically, the open computational platform FEniCS is used. The model porous body considered here is a square array of circular cylinders. Calculations were carried out in a wide range of the Reynolds number including both the creeping flow regime and inertial one. An estimate is obtained for the Reynolds number that indicates a transition from the creeping flow regime to the inertial one.

Key words: porous body, volume-averaged Navier–Stokes equations, the FEnCS platform, inertial flow regime

1. Введение

Течения жидкостей в областях, содержащих включения, которые можно описывать с помощью различных моделей пористой среды, очень широко распространены. Они встречаются как в типичных природных явлениях, так и во многих технологических процессах. Важные прикладные задачи, связанные с такими течениями, возникают при исследовании различных геофизических процессов и систем [1]. Это гидрология подземных вод, инженерные системы для добычи нефти и газа, дренаж и ирригация почвы и т.д. Кроме того, такие течения с пористыми вставками часто встречаются в различных технических устройствах [2, 3]. Это различные теплообменники, устройства для накопления тепловой энергии, топливные элементы в ядерной энергетике, системы для сушки пористых материалов и многие другие аппараты. Наконец, достаточно новой областью исследования таких течений являются различные биологические системы и биотехнологические процессы [4]. Сюда входят такие жизненно важные системы человеческого организма, как респираторная система, система циркуляции крови, включая процессы ее очищения в печени, а также различные процессы из области современной биотехнологии и биомедицины.

Данная работа посвящена численному исследованию течений в областях с пористыми вставками в широком диапазоне числа Рейнольдса, включая инерционный режим течения в пористом теле. Для этого используется математическая модель, относящаяся к классу «one-domain approach» [5, 6]. В этом подходе используется единая система уравнений для всей рассматриваемой области, включающей в себя чистую жидкость и насыщенное пористое тело. Она обобщает результаты многих исследований, из которых наиболее известной является работа [7]. Подробный анализ развития этой модели путем расширения учитываемых в ней физических эффектов приведен в фундаментальной работе [8]. Уравнения этой макроскопической модели получены из микроскопических уравнений (уравнений Навье–Стокса) методом осреднения по репрезентативному элементарному объему пористой среды [9].

В качестве ориентира для анализа получаемых численных результатов выбраны экспериментальные данные из широко известной экспериментальной работы [10], подробное обсуждение которой приведено в [11]. В ней выделены четыре различных режима течения, различающиеся по диапазону значений числа Рейнольдса, определяемому по соответствующим параметрам течения в порах. В этом исследовании в расчетах получены стационарные течения, соответствующие режиму течения Дарси и инерционному режиму потока (режиму Форхгеймера). Для их описания в используемой математической модели применялся квадратичный закон фильтрации, записанный в форме закона Форхгеймера.

В макроскопические уравнения, используемые в наших расчетах, входят эффективные свойства пористой среды, требующие определения. Для того

чтобы выбор их значений был обоснованным и согласованным между собой, в данной работе рассматривается модельное пористое тело, представляющее собой квадратный массив круговых цилиндров. Для такой структуры пористого тела в работах [15, 17] получены корреляции, обобщающие как известные расчетные и экспериментальные данные других авторов, так и собственные численные и экспериментальные результаты. С их помощью по значению пористости легко определяются проницаемость и коэффициент Форхгеймера. Более того, для такой периодической структуры пористого тела легко оценить значения числа Рейнольдса, которое характеризует режим течения именно в пористом теле, а не в потоке чистой жидкости. Как правило, в расчетах течения в каналах, содержащих пористые вставки, используются числа Рейнольдса, которые определяются по параметрам течения именно в канале, а не по параметрам течения в пористой среде.

В настоящее время существует достаточно широкий набор задач, используемых в качестве верификационных тестов при исследовании течений в системах, состоящих из насыщенного пористого тела и чистой жидкости [19–22]. В них, как правило, исследуются очень медленные потоки со значениями числа Рейнольдса не выше 1. Соответственно, в рассчитываемых уравнениях рассматривается только член сопротивления Дарси. В тех редких случаях, когда в уравнениях используется нелинейный закон сопротивления, его традиционно записывают в виде уравнения Эргуна [8, 12], справедливого лишь для гранулированных сред. При этом число Рейнольдса, используемое в расчетах, определяется по параметрам свободного потока в канале, а не по параметрам течения в пористом теле. Это не позволяет достаточно просто и однозначно определить, какой режим течения сформируется в рассматриваемом пористом теле.

В данной работе в качестве новой задачи выбрана известная задача о течении в плоском канале с пористой пробкой из [25], модифицированная по аналогии с задачей фильтрации № 2 из современных работ [29, 30]. А именно: рассматривается течение в плоском канале с поворотом. В нашей постановке задачи пористая пробка – это модельное пористое тело, представляющее собой квадратный массив круговых цилиндров. Он расположен в центральной части поворота канала. Такая модификация преследует следующие существенные цели. В такой усложненной геометрии поток натекает на интерфейс между чистой жидкостью и пористым телом не по нормали, а под произвольным углом, меняющимся при росте числа Рейнольдса. Это устраняет основной недостаток стандартного теста [25]. Далее, для такой структуры пористого тела, используя корреляции из [15, 17], по значению пористости легко определяются проницаемость и коэффициент Форхгеймера. И наконец, для такого модельного пористого тела легко получить значения числа Рейнольдса, характеризующего свойства течения именно в пористом теле, а не в свободном потоке. При этом сохраняется постановка граничных условий из [25], которая является более

реалистичной и традиционной для расчета течений в каналах, чем использованная в [29, 30].

Для такой геометрии канала проведены расчеты течения несжимаемой жидкости в широком диапазоне значений числа Рейнольдса. Был рассмотрен как ползущий режим течения, так и инерционный режим потока. На основе этих расчетов проанализированы особенности течения в пористой пробке и показаны изменения, возникающие в нем с ростом числа Рейнольдса. Получена оценка числа Рейнольдса, при котором в расчетах происходит переход из ползущего режима течения в инерционный. Она достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными из [10, 11].

2. Осредненные по объему уравнения Навье–Стокса

Течения вязкой несжимаемой жидкости в системе, состоящей из свободного потока и пористых вставок, описываются макроскопическими уравнениями, которые получаются в результате осреднения микроскопических уравнений Навье–Стокса по представительному элементарному объему для пористой среды [9]. Эти уравнения справедливы во всей расчетной области, состоящей из двух подобластей: чистой жидкости и насыщенного пористого тела. В пористом теле уравнение импульса представляет собой уравнение Дарси–Бринкмана–Форхгеймера [8], учитывающее наличие твердых стенок и инерционных эффектов. Оно содержит члены сопротивления Дарси и Форхгеймера и имеет особое определение эффективной вязкости $\mu_{eff} = \mu / \varepsilon$. В области свободной жидкости мы получаем уравнения Навье–Стокса, записанные с использованием осредненных переменных. Это позволяет сформулировать общую систему уравнений, записанную в единых переменных для двух подобластей с различными свойствами. При этом никакие дополнительные искусственные граничные условия на интерфейсе, разделяющем подобласти, не ставятся.

Нестационарные осредненные по объему уравнения сохранения импульса и неразрывности для изотропной пористой среды [7, 8] можно записать в следующем виде:

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_D}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}_D \otimes \mathbf{u}_D \right) \right] = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla(\varepsilon p) + \nabla \cdot \left(\frac{2}{\varepsilon} \mu \mathbf{D}(\mathbf{u}_D) \right) + \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\mathbf{F} = \begin{cases} -\frac{\mu}{K} \mathbf{u}_D - \frac{\rho C_F}{\sqrt{K}} |\mathbf{u}_D| \mathbf{u}_D & \text{– пористое тело,} \\ 0 & \text{– свободный поток,} \end{cases} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_D = 0. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{D}(\mathbf{u}_D) = 0,5(\nabla\mathbf{u}_D + \nabla\mathbf{u}_D^T)$ есть тензор скоростей деформации. Вектор \mathbf{u}_D есть скорость Дарси, получаемая осреднением по представительному элементарному объему, включающему в себя как твердую матрицу, так и жидкую фазу. Другие распространенные в литературе названия этой величины – filtration velocity, seepage velocity, superficial velocity, and volumetric flux density (см. работу [8]). Осредненное давление p (intrinsic pressure) получается осреднением только по жидкой фазе. Далее, здесь ρ и μ есть плотность жидкости и ее динамическая вязкость соответственно. Свойства пористой среды описывают следующие параметры: ε – пористость, K – проницаемость и CF – безразмерный коэффициент сопротивления, зависящий от структуры пористого тела, именуемый далее везде как коэффициент Форхгеймера. Скорость Дарси \mathbf{u}_D связана со скоростью жидкости \mathbf{u} , осредненной по объему, содержащему только жидкость, через соотношение Дюпюи–Форхгеймера [8] $\mathbf{u}_D = \varepsilon\mathbf{u}$.

В уравнении (1) члены сопротивления присутствуют только в пористом теле. При этом пористость ε в этом уравнении существенно меняет свое поведение на интерфейсе, отделяющем свободный поток от пористого тела. Она равна 1 везде в области свободного потока, тогда как в пористом теле она может иметь любые значения в диапазоне $0 < \varepsilon < 1$. Очевидно, что в области свободного потока уравнение (1) сводится к уравнению Навье–Стокса для осредненных переменных, тогда как в пористом теле получается уравнение Дарси–Бринкмана–Форхгеймера [8].

В случае вынужденной конвекции, используя для обезразмеривания характерные масштабы длины L и скорости U , уравнения (1)–(3) записываются для безразмерных величин (имеющим верхний индекс *) в следующем виде:

$$\frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_D^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u}_D^* \otimes \mathbf{u}_D^* \right) \right] = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla(\varepsilon p^*) + \nabla \cdot \left(\frac{2}{\varepsilon \text{Re}} \mathbf{D}(\mathbf{u}_D^*) \right) + \mathbf{F}^*, \quad (4)$$

$$\mathbf{F}^* = \begin{cases} -\frac{1}{\text{Re Da}} \mathbf{u}_D^* - \frac{CF}{\sqrt{\text{Da}}} |\mathbf{u}_D^*| \mathbf{u}_D^* & \text{– пористое тело,} \\ 0 & \text{– свободный поток,} \end{cases} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_D^* = 0. \quad (6)$$

В этих уравнениях $\text{Re} = \rho UL / \mu$ – это число Рейнольдса, $\text{Da} = K/L^2$ – число Дарси, а $\mathbf{u}_D^* = \mathbf{u}_D / U$ и $p^* = p / (\rho U^2)$ – это безразмерные искомые переменные, зависящие от безразмерных координат по пространству $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} / L$ и времени $t^* = t / (L / U)$.

3. Режимы течения в пористых средах

Процессы переноса в пористых средах являются достаточно сложными и зависящими от многих факторов. По этой причине невозможно сформулировать единый для всех случаев диапазон значений числа Рейнольдса, который бы достаточно точно и универсально определял особенности течения. Тем не менее существует общепризнанная зависимость, описывающая последовательные изменения в режимах течения при увеличении числа Рейнольдса. Она опирается на фундаментальную экспериментальную работу [10], в которой в широком диапазоне числа Рейнольдса $0,16 < Re_p < 700$ измерялись скорости протекания различных жидкостей сквозь гексагональные упаковки сфер и пучки стержней сложной структуры. Число Рейнольдса $Re_p = \rho \bar{u}_p \bar{d}_p / \mu$ здесь определяется по средней скорости потока в порах \bar{u}_p и среднему характерному линейному масштабу пор \bar{d}_p . Подробное обсуждение этой зависимости доступно, например, в работе [11].

В результате экспериментов было выделено следующие четыре различных режима течения [10, 11]:

- $Re_p < 1$ – режим течения Дарси,
- $1 - 10 < Re_p < 150$ – инерционный режим течения,
- $150 < Re_p < 300$ – нестационарный ламинарный режим течения,
- $Re_p > 300$ – нестационарный и хаотический режим.

Эти экспериментальные результаты служат для нас ориентиром при анализе результатов расчета течений в пористых средах в широком диапазоне значений числа Рейнольдса.

В данной работе для описания высокоскоростных режимов течения используется двучленный квадратичный закон фильтрации (уравнение (2)). Он записан в форме закона Форхгеймера, в который в качестве параметров входят проницаемость пористой среды K и коэффициент Форхгеймера CF . Значения этих двух параметров зависят от структуры пористой среды и в первую очередь от величины ее пористости.

Одной из наиболее известных альтернативных форм записи квадратичного закона сопротивления является уравнение Эргуна [8, 12]. Это эмпирическое соотношение было получено для упаковок из произвольно распределенных сфер и традиционно записывается в следующем виде:

$$-\nabla p = A \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 d^2} \mu \mathbf{u}_D + B \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3 d} \rho |\mathbf{u}_D| \mathbf{u}_D, \quad (7)$$

где d есть средний диаметр частиц, образующих твердую матрицу, а ε означает пористость. На основе большого набора экспериментальных данных были определены оптимальные значения входящих в него параметров, а именно:

$A = 150$ и $B = 1,75$. Следует отметить, что эти значения получены для случая вынужденной конвекции. Для случая свободной конвекции предлагается использовать другие значения параметров $A = 215$ и $B = 1,92$ [13]. Более того, существует значительное число работ, посвященных уточнению значений этих параметров в зависимости от формы и степени гладкости твердых частиц, значений пористости, а также других особенностей рассматриваемых течений (см, например, ссылки из обзорной работы [14]).

Для использования в уравнении (2) корреляций из уравнения Эргуна необходимо записать входящие в него линейный и квадратичный члены сопротивления в виде зависимостей от параметров K и C_F . В таком случае эти параметры приобретают следующий вид:

$$K = \frac{\varepsilon^3 d^2}{A(1 - \varepsilon)^2}, \quad C_F = \frac{B}{\sqrt{A\varepsilon^3}}, \quad (8)$$

где по-прежнему для случая вынужденной конвекции $A = 150$ и $B = 1,75$.

4. Инерционный режим течения в массивах цилиндров

Уравнение Эргуна широко используется для анализа течений в пористых материалах, состоящих из гранул. В то же время существует отдельный класс сконструированных пористых материалов, часто встречающихся в различных технических устройствах. Это волокнисто-пористые материалы, представляющие собой массивы цилиндров различной конфигурации. От гранулированных материалов они отличаются не только формой частиц, образующих твердую матрицу пористой среды, но и характерными значениями пористости ε . Если гранулированные материалы, как правило, имеют значения пористости в диапазоне 0,2–0,6, то для состоящих из волокон материалов характерные значения пористости обычно находятся в диапазоне 0,6–0,999 [15]. По этой причине существует значительное число работ, посвященных адаптации закона Форхгеймера для более точного описания течений в массивах цилиндров различной структуры. Подробный обзор известных экспериментальных, численных и теоретических данных, описывающих силы сопротивления при поперечном обтекании массивов цилиндров, доступен, например, в [14, 16].

В работе [15] подробно изучены особенности течения в волокнисто-пористых материалах в широком диапазоне значений пористости и числа Рейнольдса. В поровом пространстве, занятом жидкостью, численно решались уравнения Навье–Стокса с значениями входных параметров пористости ε и числа Рейнольдса Re_d в диапазоне $0,3 < \varepsilon < 0,95$ и $0,001 < Re_d < 200$ соответственно. Здесь число Рейнольдса определяется по диаметру цилиндров d и среднему значению скорости фильтрации u_D , то есть $Re_d = \rho \bar{u}_D d / \mu$. Таким образом, был исследован весь диапазон стационарных течений, включающий в себя как медленные течения (режим Дарси), так и инерционный режим. Для

различных (1D, 2D и 3D) структур, состоящих из круговых цилиндров, в результате расчетов были получены значения проницаемости K и коэффициента Форхгеймера C_F . Для валидации полученных в этой работе численных результатов использовались как известные расчетные и экспериментальные данные из других исследований, так и собственные результаты измерений для умеренных значений числа Рейнольдса в диапазоне $0,001 < Re_d < 15$. На основании полученных данных сформулированы аналитические соотношения, позволяющие определять коэффициент Форхгеймера C_F в указанных диапазонах значений ε и Re_d для всех рассмотренных типов волокнистых структур.

В частности, для 1D случая, в котором рассматривается имеющий квадратную структуру массив параллельных цилиндров одинакового диаметра, исследован распространенный случай поперечного их обтекания. В этом случае для определения коэффициента Форхгеймера C_F предложено использовать следующее соотношение:

$$C_F = (a + b\varepsilon)^{-1/c}, \quad (9)$$

где $a = -5,32$, $b = 18,42$ и $c = 0,532$.

При этом полученные в [15] результаты для C_F хорошо согласуются с расчетными данными других авторов, процитированных в этой работе. В то же время они существенно отличаются от результатов, получаемых с использованием корреляций, взятых из уравнения Эргуна, особенно при высоких значениях пористости.

Для определения проницаемости K для данного случая поперечного обтекания массива цилиндров в предыдущей работе этих авторов [17] было предложено аналитическое соотношение, применимое во всем диапазоне значений пористости ε . Оно основано на экспериментальных данных из [17], а также данных, взятых из наиболее известных публикаций других авторов. Это соотношение записывается в виде зависимости безразмерной величины K/d^2 от доли объема твердого тела в пористой среде ϕ . Здесь d есть диаметр цилиндров, а $\phi = 1 - \varepsilon$. Для поперечного обтекания квадратного массива цилиндров эта формула имеет следующий вид:

$$K/d^2 = \frac{0,16}{\sqrt{1-\phi}} \left[\frac{\pi}{4\phi} - 3\sqrt{\frac{\pi}{4\phi}} + 3 - \sqrt{\frac{4\phi}{\pi}} \right]. \quad (10)$$

Следует отметить, что в работах этих авторов разработаны корреляции для определения проницаемости не только для поперечного обтекания [17], но и для случая продольного обтекания массива цилиндров [18]. Такой согласованный набор данных позволяет моделировать и более сложные конфигурации в массивах цилиндров.

5. Выбор задачи

К настоящему моменту сложился определенный набор стандартных верификационных тестов, используемых при анализе течений с пористыми вставками. Наиболее известные из них приведены, например, в работах [19, 20]. В них рассматриваются изотермические течения вязкой несжимаемой жидкости в плоских каналах или замкнутых кавернах с пористыми вставками различной конфигурации. Кроме того, весьма популярными задачами, используемыми для тестирования, являются двумерные задачи обтекания пористых цилиндров кругового или квадратного сечения. В недавних работах [21, 22], помимо стандартных, представлены и более современные тесты, собранные из работ различных авторов. При этом достоверность результатов расчета всех этих тестов обосновывается, вообще говоря, лишь правдоподобным с точки зрения физики поведением численного решения. В современных тестах достаточно часто проводится сравнение численных результатов расчета теста по макроскопической модели с расчетными данными, полученными прямым численным моделированием (Direct Numerical Simulation) течения в сложной геометрии конкретной твердой матрицы пористого тела. Это, несомненно, повышает уровень доверия к ним, но при этом остаются вопросы к алгоритмам осреднения получаемых DNS результатов [23], постановке граничных условий (зачастую откровенно искусственных и удобных лишь с точки зрения вычислений), отсутствию согласованности при выборе значений эффективных свойств пористого тела (проницаемости и коэффициента Форхгеймера) и т.д.

Общим существенным ограничением стандартных тестов является тот факт, что, как правило, в них рассматривается только режим течения Дарси, т.е. исследуются очень медленные потоки со значениями числа Рейнольдса не выше 1. В большинстве случаев квадратичный член сопротивления просто отсутствует в уравнениях модели, используемой в расчетах. В тех редких случаях, когда он присутствует в расчетах, его значение берется из уравнения Эргуна, разработанного для гранулированных сред, т.е. без учета конкретной структуры рассматриваемого пористого тела (например, массива цилиндров). Более того, в рассматриваемых случаях высокоскоростных течений число Рейнольдса, используемое в расчетах, определяется по параметрам свободного потока в канале, а не по параметрам течения в пористом теле. Поэтому практически невозможно однозначно определить, какой тип течения формируется в рассматриваемом пористом теле – режим течения Дарси или же инерционный режим, в котором определяющую роль играет нелинейный член сопротивления Форхгеймера.

Рассматриваемая здесь модель для расчета течений в системах, содержащих насыщенное пористое тело и свободных поток, и ее численная реализация уже использовалась и анализировалась в предыдущих исследованиях авторов данной работы. Так, в работе [24] представлены результаты расчета одного из широко известных и наиболее простых верификационных тестов, а именно течение в плоском канале с пористой

пробкой [25]. Для числа Рейнольдса $Re = 1$, определяемого по параметрам потока чистой жидкости, и стандартного значения коэффициента Форхгеймера SF , определяемого из уравнения Эргуна, получено очень хорошее совпадение результатов расчета с численными данными из [25] для различных значений числа Дарси. Далее, в работе [26] представлены валидационные расчеты существенно более сложной задачи, основанной на экспериментальных исследованиях. Было рассчитано течение через модельное пористое тело – массив круговых цилиндров, – расположенное на стенке плоского канала. Полученные в этой работе численные результаты показали хорошее совпадение с данными измерений для режима течения Дарси, взятыми из экспериментальных работ [27, 28].

Логичным продолжением этих работ является попытка численно исследовать течения из рассматриваемого класса задач в достаточно широком диапазоне значений числа Рейнольдса, включая инерционный режим течения. При этом карта смены режимов течения в зависимости Re_p , приведенная в [10, 11], является ориентиром при анализе режимов течения в конкретной структуре модельного пористого тела. В качестве новой задачи выбрана классическая задача о течении в канале с пористой пробкой из [25], модифицированная по аналогии с задачей фильтрации №2 из современных работ [29, 30]. Предлагается исследовать течение в плоском канале с поворотом. Модельное пористое тело представляет собой квадратный массив круговых цилиндров, расположенный в центральной части этого поворота. Такая модификация преследует несколько существенных целей. Во-первых, в такой геометрии поток натекает на интерфейс между чистой жидкостью и пористым телом не по нормали, а под произвольным углом, что устраняет главный недостаток теста [25]. Во-вторых, теперь рассматривается модельное пористое тело конкретной структуры. Это обеспечивает согласованный выбор значений эффективных свойств, входящих в макроскопическую модель пористого тела. А именно: значения проницаемости и коэффициента Форхгеймера теперь однозначно определяются по значениям пористости и диаметра цилиндров с использованием формул из [15, 17], которые обобщают известные экспериментальные, аналитические и численные данные различных авторов. И самое главное, для такого пористого тела легко оценить значения числа Рейнольдса, характеризующего особенности течения именно в пористом теле, а не в свободном потоке. При этом сохраняется постановка граничных условий из [25], более реалистичная и физически обоснованная для течений в каналах, чем использованная в [29, 30].

6. Численный метод

Численный алгоритм для решения уравнений (4)–(6) был реализован с использованием открытой вычислительной платформы FEniCS [31, 32], основанной на методе конечных элементов. Для аппроксимации уравнений

использовался непрерывный метод Галеркина с элементами Тэйлора–Худа $(P_2 - P_1)$. Получаемые нестационарные нелинейные дискретные уравнения на каждом слое по времени решались методом Ньютона. Стационарное решение получалось методом установление с заданной высокой точностью. В качестве начальных условий задавались нулевые значения давления и вектора скорости.

Для решения линейных алгебраических уравнений использовалась библиотека MUMPS [33]. Все расчетные сетки, состоящие из треугольников, были созданы с помощью сеточного генератора Gmsh [34].

В данных расчетах решение считалось стационарным при выполнении следующего критерия установления:

$$U_{\text{res}} \equiv \left\| \frac{1}{\varepsilon} \frac{\mathbf{u}_D^{n+1} - \mathbf{u}_D^n}{\tau} \right\| c_{\text{res}},$$

где U_{res} есть приближенная оценка невязки нелинейных стационарных уравнений (в норме \mathbf{L}^2), τ – шаг интегрирования по времени, а порог для получения стационарного решения равен $c_{\text{res}} = 10^{-7}$.

7. Результаты расчетов

7.1. Течение в плоском канале с пористой пробкой

Для верификации используемой здесь модели и ее численной реализации были проведены расчеты течения в плоском канале с пористой пробкой. Для этого широко известного теста доступны для сравнения численные результаты из работы [25]. В ней рассмотрен интересующий нас случай с высоким значением числа Рейнольдса $Re = 1\,000$, которое определяется общепринятым способом по высоте канала и средней скорости на входе в него. Остальные параметры задачи имели следующие значения: $\varepsilon = 0,7$, $C_F = 1,75\varepsilon / (150\varepsilon^5)^{1/2}$ и $Da = 10^{-2}$.

Геометрия задачи показана на рис. 1. На нем представлено поле значений пористости ε , которая равна 1 в чистой жидкости и 0,7 в пористой пробке соответственно.

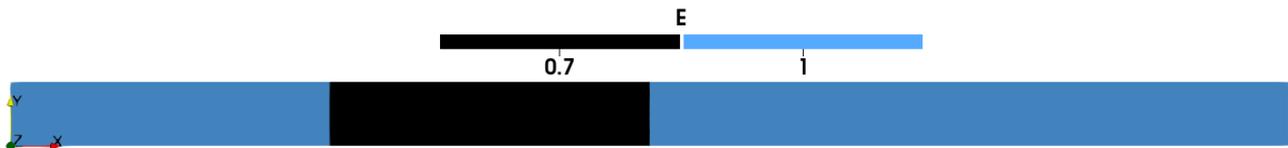


Рис. 1. Поле значений пористости ε

Рассматривается плоский канал высотой H , в котором на расстоянии $5H$ от входа расположена пробка из однородного пористого материала длиной $5H$. Участок канала после пробки в наших расчетах имел два разных значения: $50H$

(вариант 1) и $10H$ (вариант 2, представленный на рис. 1). Вариант 1 геометрии канала полностью соответствует постановке задачи из [25], в которой такой длинный участок выбирался, по-видимому, из известной оценки для длины участка стабилизации профиля скорости $L_{stab} = 0,04Re$. На таком длинном участке профиль скорости за пробкой полностью преобразуется в параболический вблизи выхода из канала. Это существенно упрощает постановку граничных условий для скорости на выходе из канала. Вариант 2 с укороченным участком был выбран для проверки точности используемых в нашем алгоритме расчете «открытых» условий на выходе из канала. Ожидаемое хорошее совпадение результатов этих двух вариантов позволило бы использовать в дальнейших аналогичных расчетах такой укороченный участок для существенного сокращения вычислительных затрат.

Расчеты проводились в прямоугольной области, содержащей пористое тело. Решались безразмерные уравнения (4)–(6), в которых $\mathbf{x}^* = (x, y)$ и $\mathbf{u}_D^* = (u_x, u_y)$. В качестве характерных масштабов для безразмеривания использовалась высота канала H и средняя скорость потока на его входе U , т.е. $Re = \rho UH / \mu$ и $Da = K/H^2$.

На входе в канал (левая граница расчетной области) задан параболический профиль скорости $\mathbf{u}_D^* = [6y(1-y), 0]^T$. На выходе из канала (правая граница) используются модифицированные «do-nothing» условия с учетом пористости [35]. На всех стенках канала выполняются условия прилипания и непротекания.

Эта простая задача имеет понятный физический смысл. Параболический профиль продольной скорости, заданный на входе, в пористой пробке преобразуется в практически однородный профиль скорости, резко стремящийся к нулю у стенок канала. В свободном потоке после пробки расположен участок стабилизации потока, в котором происходит постепенная трансформация скорости вновь в параболический профиль.

Предварительные расчеты на различных сетках показали, что результаты расчета варианта 1 на сетке из 539 810 треугольных ячеек можно считать сеточно-независимыми для данной задачи. В этой сетке размеры ячеек вблизи стенок имели значение $h_{wall} \approx 1/90$, а в центре потока $h_{bulk} \approx 1/50$ соответственно. Сетка для укороченного варианта 2 получена обрезанием сетки для варианта 1 на безразмерном расстоянии 10 от задней кромки пробки и имеет всего 197 012 ячеек.

Рис. 2 демонстрирует полученное в расчете укороченного варианта 2 распределение продольной компоненты скорости u_x . Здесь хорошо видна описанная выше ее трансформация вдоль канала.

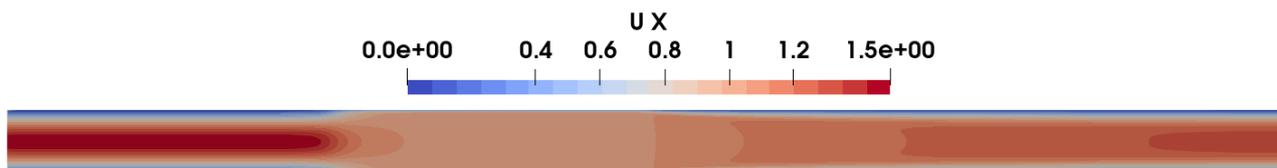


Рис. 2. Распределение продольной скорости u_x

На рис. 3 приведено сравнение рассчитанного профиля продольной компоненты скорости u_x вдоль продольной центральной линии канала $y = 0,5$ с результатами из [25].

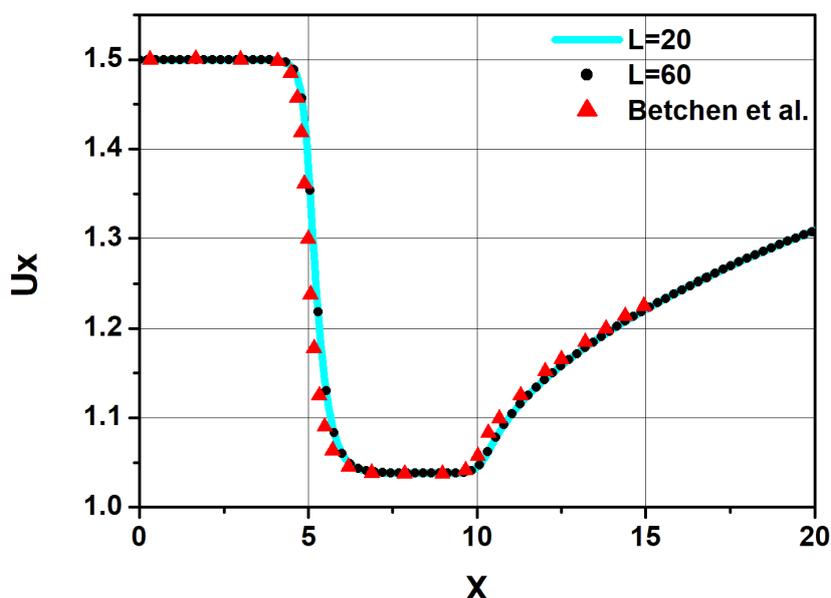


Рис. 3. Профиль скорости u_x вдоль центральной линии $y = 0,5$

Здесь сплошная голубая линия – это результаты расчета варианта 2 с укороченной длиной расчетной области $L = 20$. Далее, черные кружки – это результаты расчета варианта 1 с длиной расчетной области $L = 60$. И, наконец, красные треугольники представляют собой численные данные из [25] для сравнения.

Видно, что результаты расчетов обоих вариантов геометрии (1 и 2) получились практически идентичными. Это позволяет в расчетах аналогичных задач разумно применять достаточно короткие участки канала позади пористых вставок при использовании соответствующих граничных условий на выходе.

Далее, здесь наблюдается достаточно хорошее совпадение с численными результатами из [25]. Очевидно, что полное совпадение результатов, полученных разными численными алгоритмами, вряд ли возможно. В работе [36], содержащей подробный анализ данного теста, убедительно показано, что получаемые численные результаты существенно зависят от характеристик используемого алгоритма расчета. В первую очередь речь идет об аппроксимациях на линиях интерфейсов, которые в некоторых случаях могут

приводить к возникновению заметных нефизичных осцилляций в параметрах потока вблизи этих интерфейсов. Кроме того, здесь очень важен и выбор аппроксимаций для конвективных членов, которые играют доминирующую роль в течениях с высокими значениями числа Рейнольдса. Так что представленное здесь сравнение результатов с данными [25] выглядит вполне успешным.

7.2. Течение в канале с коленом, содержащим модельное пористое тело

В данном разделе численно исследуется течение в плоском канале с поворотом, содержащим модельное пористое тело. Геометрия канала показана на рис. 4 в виде поля значений пористости ε , равной 1 в чистой жидкости и 0,804 в пористом теле соответственно. Здесь же указана используемая система координат, расположенная на входе в канал.



Рис. 4. Геометрия канала с поворотом, содержащим пористое тело с $\varepsilon=0,804$

Высота канала до поворота и после него равна H . Входная прямая часть канала до начала поворота имеет длину $3H$, выходная прямая часть канала от конца поворота до выхода имеет длину $10H$. Сам поворот имеет размеры $2H \times 3H$, т.е. в 2 раза шире двух остальных участков канала. В центральной части поворота расположена прямоугольная пористая пробка размером $2H \times H$. Следует отметить, что выбор длины $10H$ для выходной прямой части канала основывается на опыте расчетов предыдущей задачи и позволяет существенно сократить вычислительные затраты без ущерба точности получаемых результатов.

Модельное пористое тело представляет собой квадратный массив, состоящий из 20×10 круговых цилиндров, показанный на рис. 5.

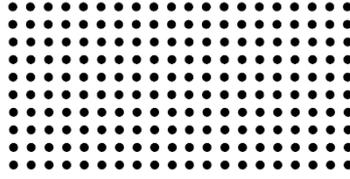


Рис. 5. Структура модельного пористого тела

Такое пористое тело с периодической структурой представляет собой объединение 20×10 одинаковых квадратных ячеек со стороной $l_c = H / 10$, содержащих в своем центре цилиндр заданного диаметра $d < l_c$. Для такой структуры модельного пористого тела легко определить долю объема твердой матрицы $\phi = \pi d^2 / (4l_c^2)$, одинаковую для всех ячеек. Таким образом, рассматривается однородное пористое тело, имеющее пористость $\varepsilon = 1 - \phi$, зависящую от диаметра цилиндров d . Значения коэффициента Форхгеймера и проницаемости для квадратного массива цилиндров в случае поперечного их обтекания определяются из уравнений (9) и (10) соответственно.

Для значения диаметра цилиндров $d = 0,5l_c \equiv 0,05H$ получаем $\phi = 0,196$ и, соответственно, $\varepsilon = 0,804$. Таким образом, здесь рассматривается характерный случай с высоким значением пористости. Для такого значения пористости из уравнения (9) получаем коэффициент Форхгеймера $C_F = 1,4557 \times 10^{-2}$. Из уравнения (10), соответственно, получаем величину $K / d^2 = 8,9618 \times 10^{-2}$. Как и в предыдущей задаче, обезразмеривание уравнений проводилось традиционным способом по ширине канала H и средней по входному сечению канала скорости потока U . Числа Рейнольдса и Дарси в этой задаче определялись как $Re = \rho U H / \mu$ и $Da = K / H^2$ соответственно. Следовательно, для выбранной структуры массива цилиндров число Дарси имело значение $Da = K / H^2 \equiv (K / d^2) \times (d^2 / H^2) \equiv (8,9618 \times 10^{-2}) \times (0,0025 H^2 / H^2) \equiv 2,2405 \times 10^{-4}$. Таким образом, все обсуждаемые далее расчеты проводились с постоянными значениями $C_F = 1,4557 \times 10^{-2}$ и $Da = 2,2405 \times 10^{-4}$, а число Рейнольдса варьировалось в интересующем нас диапазоне значений $1 < Re \leq 1000$.

Следует подчеркнуть, что информация о конкретной структуре пористого тела нужна лишь для согласованного выбора значений эффективных свойств пористого тела, входящих в используемую макроскопическую модель. Кроме того, она позволяет достаточно просто оценить число Рейнольдса в пористом теле, характеризующее течение именно в нем. Для этого здесь выбран интерстициальный вариант числа Рейнольдса $Re_i = \rho (U / \varepsilon) d / \mu$ [14, 37, 38], где U / ε есть средняя скорость течения в поровом пространстве, определяемая из средней по сечению канала скорости потока U , а d – это диаметр цилиндров. Такое определение наиболее близко к определяемому по параметрам пор числу Рейнольдса Re_p [10, 11], но привязано к рассматриваемой геометрии,

состоящей из цилиндров. Значение Re_i легко определяется из используемого в расчетах значения числа Рейнольдса $Re = \rho UH / \mu$ через следующее простое соотношение: $Re_i = \rho(U / \varepsilon)d / \mu \equiv \rho(U / 0,804) \times (0,05H) / \mu \equiv 0,0622 Re$.

Уравнения макроскопической модели решались в обезразмеренном виде (4)–(6), где $\mathbf{x}^* = (x, y)$ и $\mathbf{u}_D^* = (u_x, u_y)$. На входе в канал задавался параболический профиль скорости $\mathbf{u}_D^* = [6y(1-y), 0]^T$. На выходе из канала ставились модифицированные «do-nothing» условия с учетом пористости [36]. На стенках канала везде заданы условия прилипания и непротекания.

Во всех расчетах этой задачи сетки, состоящие из треугольных ячеек, строились таким образом, чтобы границы пористого тела представляли собой прямую линию, проходящую через узлы сетки. Предварительные расчеты на последовательности сгущающихся сеток показали, что результаты расчета на сетке из 443 506 ячеек можно считать сеточно независимыми для данной задачи во всем рассматриваемом диапазоне значений Re . В этой сетке размеры ячеек вблизи стенок канала имели значение $h_{wall} \approx 1/160$, а в ядре потока – $h_{bulk} \approx 1/60$.

Следует подчеркнуть, что никакого размазывания интерфейсов в данных расчетах не применялось. Используемое в работах [21, 22] сглаживание скачка свойств среды (пористости и проницаемости) имеет искусственный характер, не имеющий какого-либо теоретического или экспериментального обоснования. В данной работе упор делается на использование очень подробной сетки вблизи интерфейсов и применение аппроксимаций высокого порядка в численном алгоритме.

Нас интересовали три следующих диапазона значений интерстициального числа Рейнольдса: $Re_i < 1$, $1 < Re_i < 10$ и $Re_i > 10$, соответствующие стационарному ламинарному режиму течения в пористом теле [10, 11]. Были проведены расчеты со следующими значениями числа Рейнольдса: $Re = 2, 5, 7,5, 10, 15, 20, 50, 75, 100, 150, 200, 500, 750$ и 1000 . Соответствующие значения интерстициального числа Рейнольдса равнялись: $Re_i = 0,1244, 0,311, 0,4665, 0,622$ и $0,933$ для $Re_i < 1$, $Re_i = 1,244, 3,11, 4,665, 6,22$ и $9,33$ для диапазона $1 < Re_i < 10$, и, наконец, $Re_i = 12,44, 31,1, 46,55$ и $62,2$ для $Re_i > 10$. Для всех указанных значений числа Рейнольдса рассчитанное течение в канале получалось стационарным.

Существенным вопросом в исследовании различных режимов течения является формулировка критерия, по которому можно достаточно наглядно и в то же время вполне однозначно определить переход из одного режима течения в другой. Стандартным параметром для такого анализа является коэффициент трения f , относящийся к области пористого тела. В данном исследовании коэффициент трения вычислялся простейшим способом по двум точкам, расположенным на вертикальной линии $x = 4$, проходящей через середину

пористого тела. Он вычислялся по формуле $f = -\Delta p^*(x, y) / L_{pm}^* \equiv p^*(4, 0) - p^*(4, -1)$. Напомним, что безразмерная толщина пористой пробки равнялась $L_{pm}^* = 1$. Однако использовать этот параметр лучше не напрямую, а в несколько модифицированном виде.

В аналогичных исследованиях [14, 16] использовался более наглядный и удобный для анализа параметр, а именно модифицированный коэффициент трения $f_{mod} = f \times Re \equiv -(\Delta p / L_{pm}) \times H^2 / (\mu U)$. Для него справедливо следующее уравнение:

$$f_{mod} = \frac{0,5}{Da} + \gamma Re . \quad (11)$$

Это уравнение представляет собой обезразмеренный закон сопротивления Форхгеймера, в который подставлена оценка значения модуля безразмерной скорости. Таким образом, f_{mod} при малых значениях Re близок к константе, но с ростом числа Рейнольдса возникает существенное отклонение от нее. Здесь инерционный коэффициент γ определяется по параметрам пористого тела. В отличие от аналогичного уравнения из [14, 16], в первом члене уравнения (11), представляющем собой линейный закон сопротивления Дарси, вместо 1 стоит коэффициент 0,5. Для практически однородного однонаправленного поля скорости, которое формируется в рассматриваемом здесь однородном пористом теле, значение модуля безразмерной скорости $|\mathbf{u}_D^*| \approx 0,5$. Такая оценка является следствием особенностей рассматриваемой геометрии канала, в котором ширина пористого тела в 2 раза больше высоты канала, что приводит здесь к уменьшению средней скорости потока в 2 раза соответственно.

Для указанных выше значений числа Рейнольдса Re были проведены две серии расчетов. В первом случае решались уравнения (4)–(6), содержащие оба члена сопротивления в пористом теле – линейный и квадратичный. Во второй серии расчетов в уравнениях учитывался только член сопротивления Дарси. Сравнение полученных значений модифицированного коэффициента трения f_{mod} позволяет легко увидеть, когда возникает его отклонение от постоянного значения, свидетельствующее о переходе в инерционный режим течения.

Разумеется, можно было ограничиться расчетами лишь с законом сопротивления Форхгеймера и сравнивать результаты с теоретической константой $0,5/Da$. Однако такое сравнение справедливо лишь в одномерном случае, в котором нет каких-либо отклонений параметров течения в поперечном по отношению к потоку направлении. А они в двумерной постановке задачи возникают и могут оказаться существенными, что будет показано в представленных далее результатах.

Рис. 6 показывает изменение модифицированного коэффициента трения f_{mod} в зависимости от интерстициального числа Рейнольдса Re_i , однозначно определяемого из использованного в расчетах значения Re . Здесь представлены результаты расчетов для двух различных законов сопротивления – Форхгеймера и Дарси. Нас интересует вопрос, когда возникают существенные различия в значениях f_{mod} для этих двух законов.

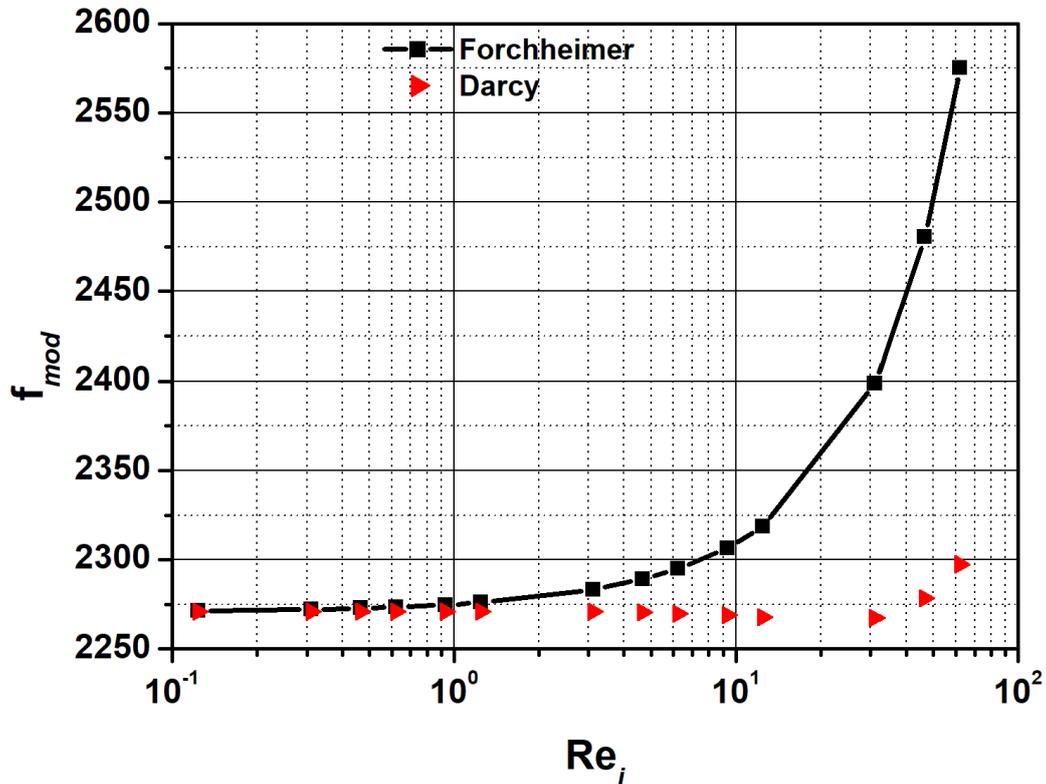


Рис. 6. Зависимость f_{mod} от Re_i для двух разных законов сопротивления

Для значений $Re_i < 1$ модифицированный коэффициент трения f_{mod} практически одинаков для обоих законов сопротивления и образует горизонтальную линию со значением $0,5/Da$. Это говорит о пренебрежительно малом вкладе инерционного члена в этом диапазоне значений рассматриваемого числа Рейнольдса. В интервале $1 < Re_i < 10$ при значении $Re_i = 3,11$ закон Форхгеймера впервые демонстрирует заметное отклонение от линейного закона Дарси. Наконец, при $Re_i > 10$ происходит резкий рост f_{mod} для закона Форхгеймера, что характерно для развитого инерционного режима течения.

Далее приводятся результаты расчетов только с законом сопротивления Форхгеймера, который является основной целью данного исследования.

Рис. 7 наглядно демонстрирует изменения в поле скорости течения в области поворота канала, возникающие с ростом числа Рейнольдса Re_i . Здесь рассмотрены три характерные значения Re_i , а именно 0,311, 3,11 и 31,1, взятые из трех различных рассматриваемых диапазонов числа Рейнольдса.

На этом рисунке приведены профили компонент скорости вдоль вертикальной линии $x = 4$, полученные для указанных трех значений Re_i . Рис. 7а) демонстрирует профили u_x , а на рис. 7б) приведены профили u_y .

Легко увидеть, что в области пористой пробки для значений Re_i , равных 0,311 и 3,11, скорость u_x практически равна нулю, тогда как скорость u_y имеет постоянное значение, очень близкое к -0,5. Таким образом, в обоих случаях наблюдается практически однородное поле вектора скорости потока, направленного строго сверху вниз. В случае $Re_i = 31,1$ наблюдается существенное отклонение от этих значений для обеих компонент скорости. Это свидетельствует о возникновении заметной неоднородности потока во всем пористом теле.

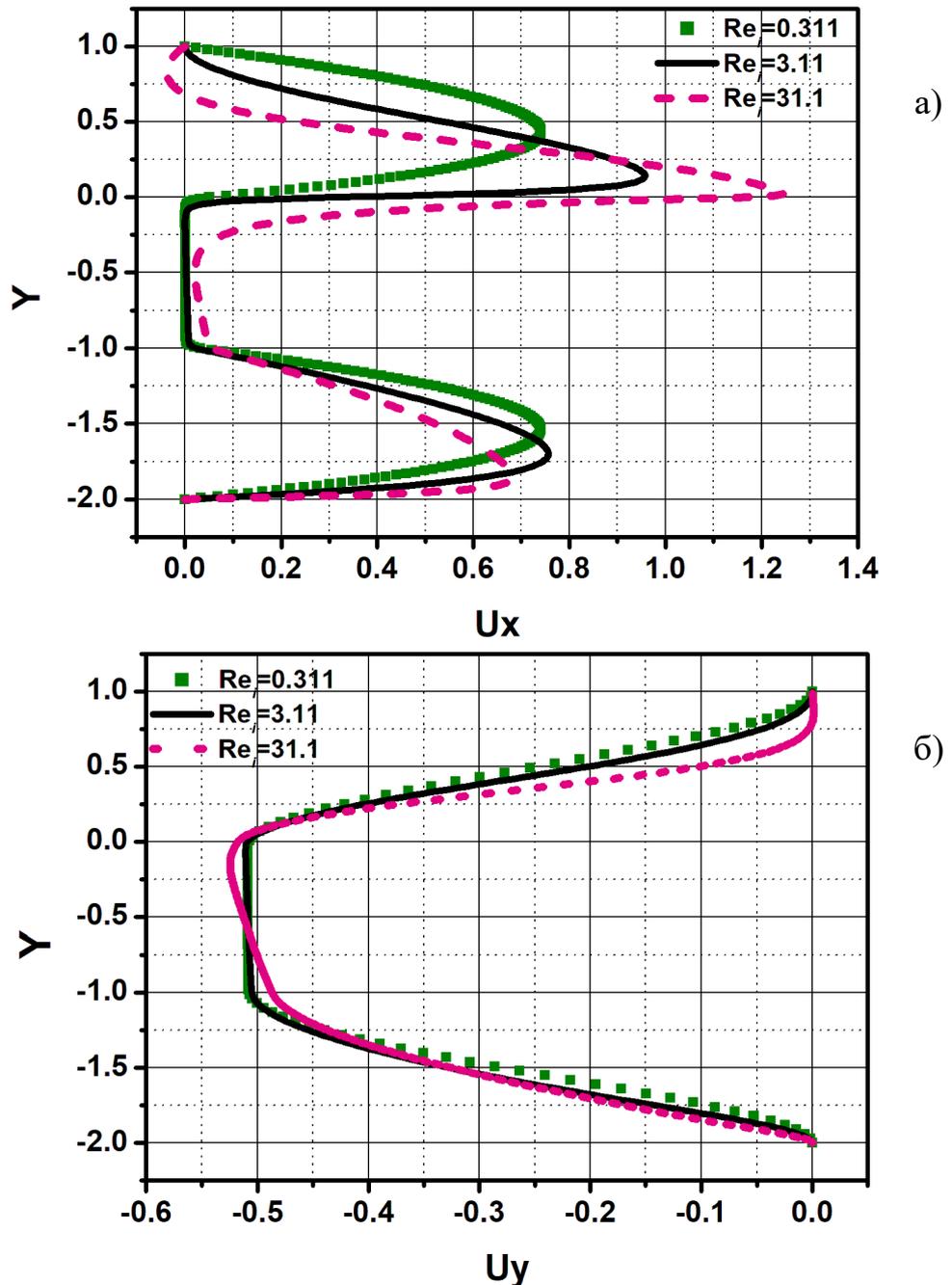


Рис. 7. Профили компонент скорости вдоль вертикальной линии $x = 4$ для трех разных значений Re_i : а) u_x , б) u_y

На следующих трех рисунках приведены распределение давления и линии тока, окрашенные по значению модуля скорости, полученные в расчетах для этих трех значений Re_i . Для большей наглядности здесь показан лишь основной участок канала с коленом, заканчивающийся на расстоянии 10 от входа. Отрезанный участок канала длиной 5, примыкающий к выходу из него, не представляет интереса при анализе особенностей течения в пористой пробке.

На рис. 8 приведены полученные в расчете с $Re_i = 0,311$ распределение давления (а) и линии тока (б).

При таком низком значении Re_i поле давления ожидаемо демонстрирует линейное падение по y в пористом теле. В то же время градиенты давления в областях с чистой жидкостью практически незаметны в силу их малости по сравнению со значением градиента в пористом теле. Параболический профиль скорости, заданный на входе, без искажений достигает поворота канала. В объеме пористой пробки он сразу же трансформируется в практически однородный профиль в объеме. Позади пробки он достаточно быстро стабилизируется и вновь становится параболическим на всем выходном участке канала.

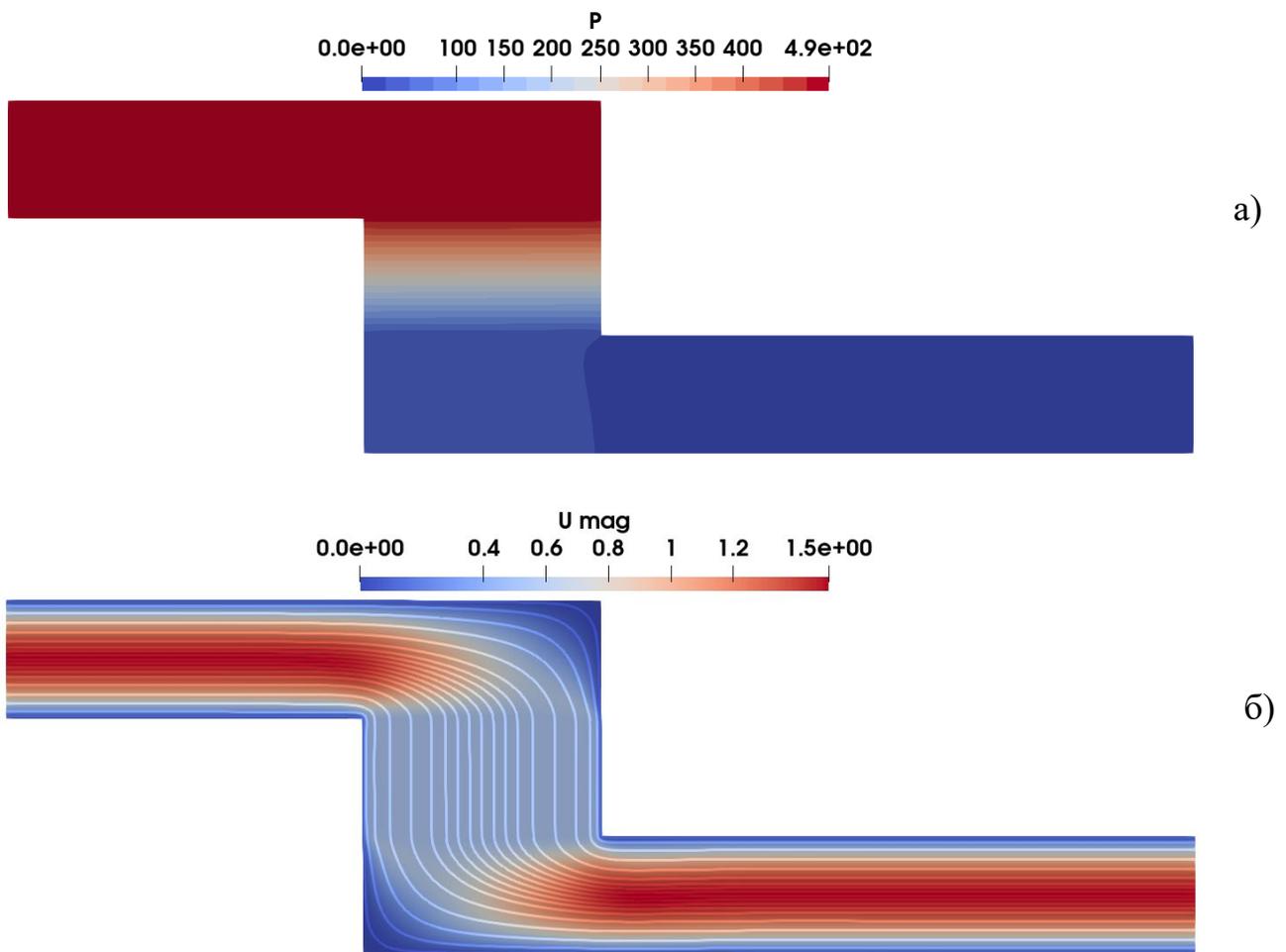


Рис. 8. Расчет с $Re_i = 0,311$ ($Re=5$): а) распределение давления, б) линии тока, окрашенные по значению модуля скорости

Рис. 9 показывает результаты расчета для $Re_i = 3,11$. Если распределение давления (рис. 9а) практически не меняет своей структуры, то поле течения (рис. 9б) демонстрирует существенные изменения по сравнению с предыдущим случаем. В правом верхнем углу поворота возникает заметная застойная зона, а основной поток натекает на пробку под более острым углом.

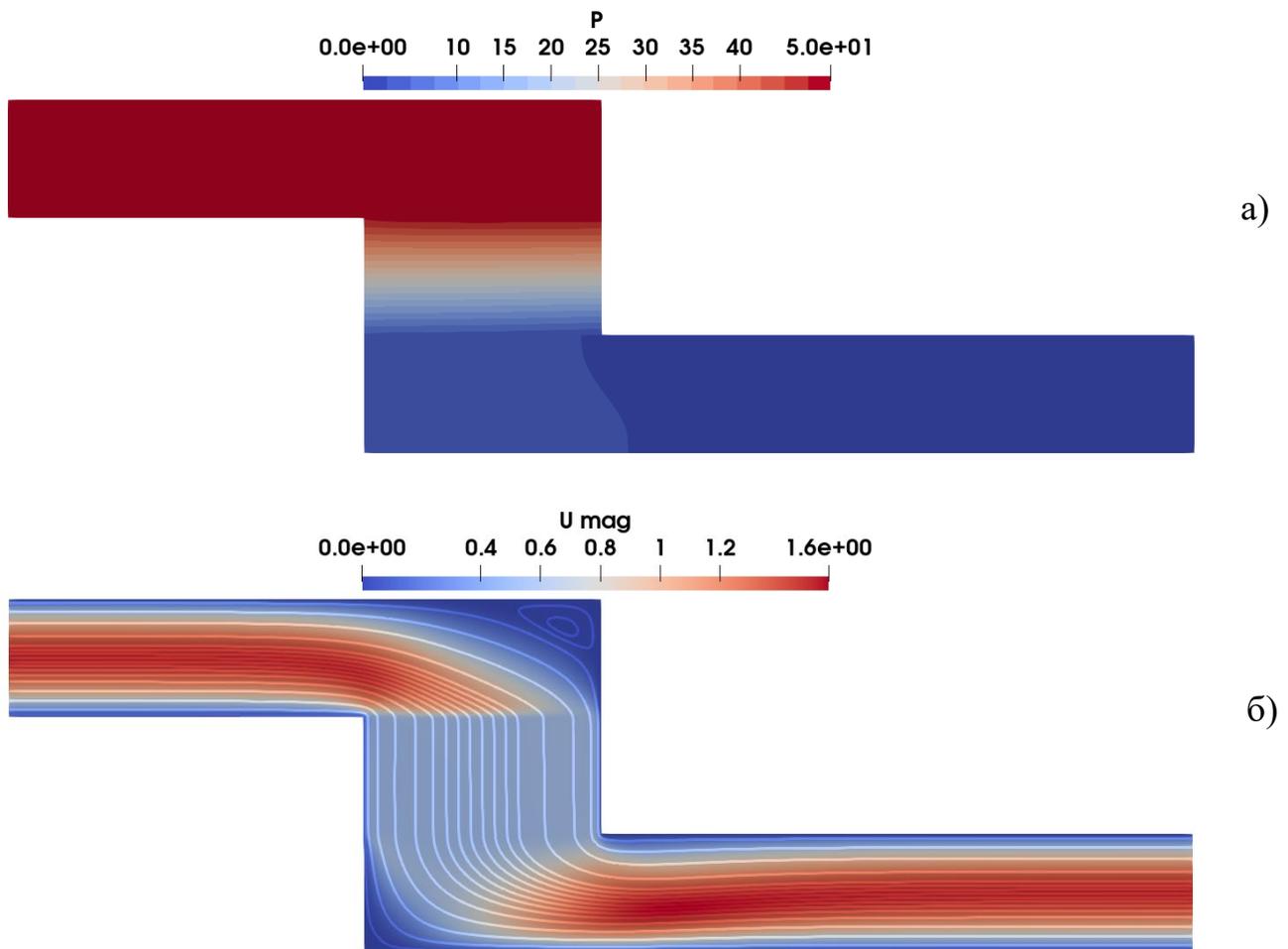


Рис. 9. Расчет с $Re_i = 3,11$ ($Re=50$): а) распределение давления, б) линии тока, окрашенные по значению модуля скорости

Результаты расчета с $Re_i = 31,1$ приведены на рис. 10. Здесь уже наблюдается заметное искажение поля давления как в пористом теле, так и в свободном потоке. Помимо заметного увеличения размеров застойной зоны в верхнем углу поворота, небольшая зона возвратного течения появляется и в нижнем левом углу поворота. Поле скорости в пористом теле заметно меняется вдоль горизонтальной координаты x . Такие существенные изменения в структуре потока приводят к тому, что профиль скорости уже не успевает стабилизироваться в параболический на выходе из расчетной области.

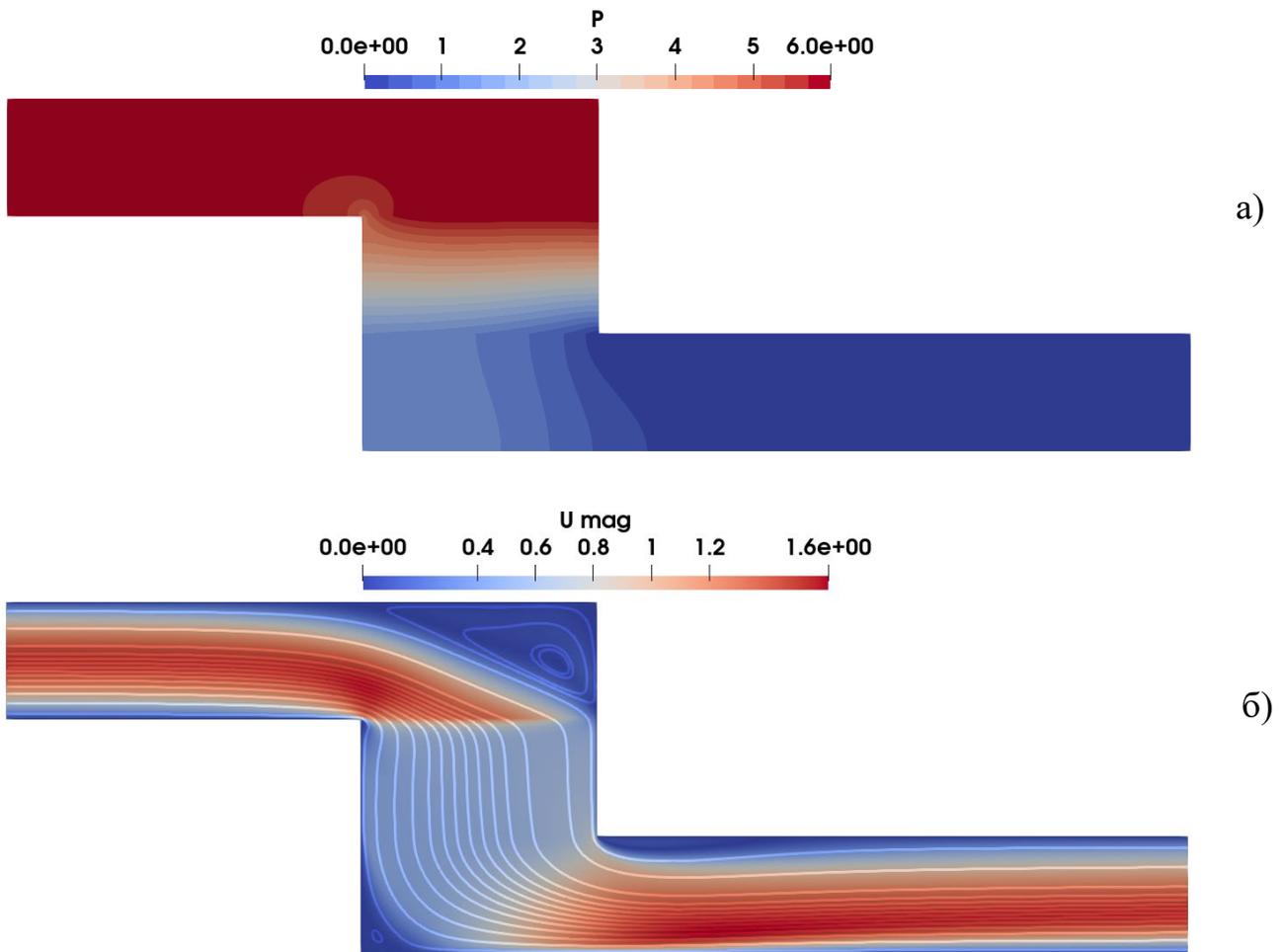


Рис. 10. Расчет с $Re_i = 31,1$ ($Re=500$): а) распределение давления, б) линии тока, окрашенные по значению модуля скорости

Разумеется, полученные в данных расчетах результаты не являются универсальными, и тем более они никак не заменят экспериментальные данные из [10, 11]. Они являются лишь практическим и достаточно наглядным подтверждением адекватности используемой здесь модели и ее численной реализации. Это позволяет достаточно обоснованно использовать ее для численного моделирования рассматриваемого класса течений в широком диапазоне значений числа Рейнольдса, включающем инерционный режим.

8. Заключение

В данной работе численно исследовано течение в плоском канале с поворотом, в середине которого расположена пористая пробка. Для моделирования такого течения в системе, состоящей из пористого тела и свободного потока, использовалась известная макроскопическая модель, основанная на единой системе уравнений для всей расчетной области. В такой геометрии канала поток натекает на интерфейс между чистой жидкостью и

пористым телом не по нормали, а под произвольным углом, зависящим от режима течения. В качестве пористой пробки рассматривается модельное пористое тело, представляющее собой квадратный массив круговых цилиндров. С одной стороны, это позволяет на основе известных опубликованных данных однозначно и согласованно определить по значению пористости значения эффективных свойств пористой среды (проницаемость и коэффициент Форхгеймера), входящие в макроскопическую модель. С другой стороны, для такой периодической структуры пористого тела легко оценить значения числа Рейнольдса, характеризующего течение именно в пористом теле, а не в потоке чистой жидкости. При этом были получены следующие результаты:

- Проведена верификация используемой модели и ее численной реализации на известной задаче о течении в плоском канале с пористой пробкой с числом Рейнольдса $Re = 1\ 000$ и нелинейным законом сопротивления. Сравнение показало очень хорошее совпадение полученных результатов с эталонными данными [25];
- Далее подробно исследована более сложная геометрия плоского канала, в которой канал имеет поворот, содержащий пористую пробку. Расчеты проведены в широком диапазоне числа Рейнольдса, включающем в себя как ползущий режим течения, так и инерционный режим потока. В качестве критерия для определения перехода в инерционный режим использовался модифицированный коэффициент трения f_{mod} , основанный на обезразмеренном законе Форхгеймера. Исследовалась его зависимость от интерстициального числа Рейнольдса Re_i ;
- Численные результаты показали, что при малых значениях $Re_i < 3$ коэффициент f_{mod} практически постоянен, что свидетельствует о режиме течения Дарси в данном диапазоне значений. В наших расчетах для значения $Re_i = 3,11$ коэффициент f_{mod} впервые демонстрирует заметное отклонение от линейного закона Дарси, что является индикатором перехода в инерционный режим течения;
- Для трех характерных значений числа Рейнольдса проведен подробный анализ особенностей распределения давления и картины течения в канале, показывающий изменения, возникающие с увеличением числа Рейнольдса.

Список литературы

1. Bear J., *Modeling Phenomena of Flow and Transport in Porous Media* (Springer Int. Publishing AG, Cham, Switzerland, 2018).
2. Bejan A., Dincer I., Lorente S., Miguel A.F., and Reis A.H., *Porous and Complex Flow Structures in Modern Technologies* (Springer Science + Business Media, New York, NY, 2004).

3. Das M.K., Mukherjee P.P., and Muralidhar K., *Modeling Transport Phenomena in Porous Media with Applications* (Springer Int. Publishing AG, Cham, Switzerland, 2018).
4. *Porous Media: Applications in Biological Systems and Biotechnology* (K. Vafai (ed.)) (CRC Press, Boca Raton, FL, 2011).
5. Goyeau B., Lhuillier D., Gobin D., and Velarde M.G., Momentum transport at a fluid–porous interface, *Int. J. Heat Mass Transfer* 46, 4071–4081 (2003).
6. Gobin D. and Goyeau B., Natural convection in partially porous media: a brief overview, *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow* 18, 465–490 (2008).
7. Hsu C.T. and Cheng P., Thermal dispersion in a porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer* 33, 1587–1597 (1990).
8. Nield D.A. and Bejan A., *Convection in Porous Media* (Springer Int. Publishing AG, Cham, Switzerland, 2017).
9. Whitaker S., *The Method of Volume Averaging* (Springer Science + Business Media, Dordrecht, the Netherlands, 1999).
10. Dybbs A. and Edwards R.V., A New Look at Porous Media Fluid Mechanics – Darcy to Turbulent, In: *Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media* (J. Bear and M.Y. Corapcioglu (eds.)), pp.199–256 (Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, the Netherlands, 1984).
11. Kaviany M., *Principles of Heat Transfer in Porous Media* (Springer, New York, NY, 2012).
12. Ergun S., Fluid flow through packed columns, *Chem. Eng. Prog.* 48, 89–94 (1952).
13. Su Y. and Davidson J.H., *Modeling Approaches to Natural Convection in Porous Media* (Springer, Cham, Switzerland, 2015).
14. Yazdchi K. and Luding S., Towards unified drag laws for inertial flow through fibrous materials, *Chem. Eng. J.* 207–208, 35–48 (2012).
15. Tamayol A., Wong K.W., and Bahrami M., Effects of microstructure on flow properties of fibrous porous media at moderate Reynolds number, *Phys. Rev. E* 85, 026318 (2012).
16. Khalifa Z., Pocher L., and Tilton N., Regimes of flow through cylinder arrays subject to steady pressure gradients, *Int. J. Heat Mass Transf.* 159, 120072 (2020).
17. Tamayol A. and Bahrami M., Transverse permeability of fibrous porous media, *Phys. Rev. E* 83, 046314 (2011).
18. Tamayol A. and Bahrami M., In-plane gas permeability of proton exchange membrane fuel cell gas diffusion layers, *J. Power Sources* 196, 3559–3564 (2011).
19. Bai H., Yu P., Winoto S.H., and Low H.T., Lattice Boltzmann method for flows in porous and homogeneous fluid domains coupled at the interface by stress jump, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 60, 691–708 (2009).

20. Chen H., Yu P., and Shu C., A unified immersed boundary-lattice Boltzmann flux solver (UIB-LBFS) for simulation of flows past porous bodies, *Phys. Fluids* 33, 083603 (2021).
21. Verma A. and Tomar G., A continuous one-domain framework for fluid flow in superposed clear and porous media, *J. Comput. Phys.* 495, 112554 (2023).
22. Aricò C., Helmig R., Puleo D., and Schneider M., A new numerical *mesoscopic scale* one-domain approach solver for free fluid/porous medium interaction, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 419, 116655 (2024).
23. Kuchibhotla V.N., Sahoo S.H., and Sudhakar Y., A method to extract macroscopic interface data from microscale rough/porous wall flow fields, *Phys. Fluids* 35, 102111 (2023).
24. Churbanov A.G., Churbanova N.G., and Trapeznikova M.A., Coupled prediction of flows in domains containing a porous medium and a free stream, *Mathematical Models and Computer Simulations* 15, 643–653 (2023).
25. Betchen L., Straatman A.G., and Thompson B.E. A nonequilibrium finite-volume model for conjugate fluid/porous/solid domains, *Numer. Heat Transfer, Part A* 49, 543–565 (2006).
26. Churbanov A.G., Validation prediction of an incompressible flow in a porous medium–free stream system, *Mathematical Models and Computer Simulations* 17, 63–75 (2025).
27. Arthur J.K., Velocity Measurements of Flow Through a Model Three-Dimensional Porous Medium with Varying Boundary Conditions (MSc Thesis, the University of Manitoba, Winnipeg, Manitoba, Canada, 2008).
28. Arthur J.K., Ruth D.W., and Tachie M.F., PIV measurements of flow through a model porous medium with varying boundary conditions, *J. Fluid Mech.* 629, 343–374 (2009).
29. Eggenweiler E. and Rybak I., Unsuitability of the Beavers–Joseph interface condition for filtration problems, *J. Fluid Mech.* 892, A10 (2020).
30. Rybak I., Schwarzmeier C., Eggenweiler E., and Råde U., Validation and calibration of coupled porous-medium and free-flow problems using pore-scale resolved models, *Comput. Geosci.* 25, 621–635 (2021).
31. FEniCS [Электронный ресурс]. URL: <https://fenicsproject.org/> (дата обращения: 01.05.2025).
32. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: The FEniCS Book* (A. Logg, K.-A. Mardal, and G. N. Wells (eds.)) (Springer-Verlag, Berlin, 2012).
33. MUMPS [Электронный ресурс]. URL: <http://mumps.enseeiht.fr/> (дата обращения: 01.05.2025).
34. Gmsh [Электронный ресурс]. URL: <https://gmsh.info/> (дата обращения: 01.05.2025).
35. John V., *Finite Element Methods for Incompressible Flow Problems*, (Springer, Cham, Switzerland, 2016).

36. De Groot Ch.T. and Straatman A.G., A finite-volume model for fluid flow and nonequilibrium heat transfer in conjugate fluid-porous domains using general unstructured grids, *Numer. Heat Transfer, Part B* 60, 252–277 (2011).
37. Seguin D., Montillet A., and Comiti J., Experimental characterisation of flow regimes in various porous media – I: Limit of laminar flow regime, *Chem. Eng. Sci.* 53, 3751–3761 (1998).
38. Kundu P., Kumar V., and Mishra I.M., Experimental and numerical investigation of fluid flow hydrodynamics in porous media: Characterization of pre-Darcy, Darcy and non-Darcy flow regimes, *Powder Technology* 303, 278–291 (2016).

Оглавление

1. Введение	3
2. Осредненные по объему уравнения Навье–Стокса	5
3. Режимы течения в пористых средах.....	7
4. Инерционный режим течения в массивах цилиндров.....	8
5. Выбор задачи	10
6. Численный метод.....	11
7. Результаты расчетов.....	12
7.1. Течение в плоском канале с пористой пробкой	12
7.2. Течение в канале с коленом, содержащим модельное пористое тело	15
8. Заключение.....	24
Список литературы.....	25