

ПРОГРАММА
вступительного экзамена в аспирантуру
по специальности 01.02.01

Математика

1. Непрерывные функции одной переменной и их свойства. Равномерная непрерывность. Равностепенная непрерывность семейства функций. Теорема Асколи-Арцела.
2. Функции многих переменных. Полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент. Теоремы об обратной и неявной функции.
3. Интеграл Римана и его свойства. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции. Приближенное вычисление определенных интегралов.
4. Кратные интегралы. Криволинейные и поверхностные интегралы. Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса.
5. Сходимость числовых рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные признаки сходимости. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
6. Ряды и последовательности функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов.
7. Собственные и несобственные интегралы зависящие от параметра. Равномерная сходимость по параметрам и ее признаки. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру.
8. Степенные ряды. Радиус сходимости. Теорема Коши-Адамара. Теорема Абеля. Свойства степенных рядов (почленное интегрирование и дифференцирование). Разложение элементарных функций в ряды.
9. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Конформные отображения.
10. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.
11. Ряд Лорана. Поллюс и существенно особая точка. Принцип аргумента и теорема Руше. Вычеты. Основная теорема о вычетах и ее применение.
12. Линейные преобразования. Квадратичные формы. Приведение их к каноническому виду линейными преобразованиями в комплексной и действительной областях.
13. Линейная зависимость и независимость векторов. Ранг матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений, теорема Кронекера-Капелли. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений.
14. Ортогональные преобразования в евклидовом пространстве и ортогональные матрицы. Свойства ортогональных матриц. Характеристический многочлен линейного преобразования векторного пространства. Собственные числа и собственные векторы. Свойства собственных чисел и векторов симметрических матриц.
15. Жорданова нормальная форма матриц и линейных операторов.
16. Принцип сжатых отображений в полных метрических пространствах и его применения. Итерационные методы решения уравнений $f(x) = 0$ (хорд, Ньютона).
17. Линейные операторы в нормированных пространствах, норма линейного оператора. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (методы простой итерации и Зейделя).
18. Гильбертово пространство. Линейные и билинейные функционалы в гильбертовом пространстве. Теорема Рисса об общем виде линейного функционала.
19. Резольвента и спектр линейного оператора. Линейные уравнения с вполне непрерывным оператором.
20. Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортогональной системе функций, неравенство Бесселя, сходимость ряда Фурье. Поточечная сходимость; достаточные условия

равномерной сходимости рядов Фурье по тригонометрической системе функций. Полнота системы тригонометрических функций.

21. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши систем уравнений первого порядка и уравнений n порядка. Зависимость от начальных данных и параметров.
22. Линейные дифференциальные уравнения и системы n порядка. Однородные уравнения. Линейная независимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Общее решение неоднородного уравнения.
23. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (однородные и неоднородные). Свойства и методы решения.
24. Устойчивость по Ляпунову решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема об устойчивости по первому приближению. Второй метод Ляпунова.
25. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнения Эйлера-Лагранжа. Вариационная задача с подвижными концами. Условия трансверсальности.
26. Классификация линейных уравнений с частными производными 2-го порядка. Характеристики линейных уравнений с двумя независимыми переменными. Примеры разных типов уравнений из механики сплошной среды и физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков И.В. Лекции по математическому анализу.
2. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Ч. 1-3.
3. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного.
4. Евграфов М.А. Аналитические функции.
5. Воеводин В.В. Линейная алгебра
6. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре.
7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.
9. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
10. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
11. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
12. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление.
13. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.

Механика

1. Инерциальные и неинерциальные системы отсчета. Понятие о силе. Законы Ньютона.
2. Кинематика точки. Криволинейные координаты.
3. Кинематика системы отсчета. Разложение движения на поступательное и движение с одной неподвижной точкой. Ортогональные преобразования, эйлеровы углы, кватернионы. Сложное движение.
4. Понятие о замкнутой динамической системе. Пространство состояний. Уравнения движения системы материальных точек.
5. Основные теоремы и законы сохранения механики. Теорема Кёнига. Работа силы. Силовые поля. Потенциальная энергия.
6. Динамика твердого тела. Тензор и эллипсоид инерции. Динамические уравнения Эйлера. Движение твердого тела с неподвижной точкой по инерции (случай Эйлера). Регулярная прецессия. Движение симметричного тела с неподвижной точкой (случай Лагранжа и случай Ковалевской). Теория гироскопа.
7. Механические связи и их классификация. Голономные системы. Число степеней свободы и обобщенные координаты. Уравнения Лагранжа для систем со связями. Обобщенные силы. Уравнения Лагранжа для движения в потенциальном поле.

8. Изменение полной энергии системы. Консервативные системы. Гироскопические силы. Диссипативные силы.
9. Устойчивость по Ляпунову положения равновесия. Асимптотическая устойчивость. Устойчивость линейных стационарных систем. Необходимые условия устойчивости. Критерии Рауса-Гурвица и Михайлова. Устойчивость и неустойчивость по линейному приближению. Критические случаи. Теорема об устойчивости консервативных систем. Второй метод Ляпунова в теории устойчивости. Асимптотическая устойчивость определенно-диссипативных систем.
10. Малые колебания линеаризованных консервативных систем вблизи устойчивого положения равновесия. Уравнение частот. Экстремальные свойства собственных частот. Теорема Релея. Главные (нормальные) координаты. Общее решение.
11. Реакция линейной стационарной системы на гармоническое воздействие. Частотные характеристики. Явление резонанса.
12. Обобщенные импульсы. Преобразования Лежандра. Канонические уравнения Гамильтона. Функция Гамильтона для консервативной системы.
13. Первые интегралы уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона. Теорема Якоби-Пуассона. Понижение порядка уравнений Гамильтона при наличии первых интегралов.
14. Действие по Гамильтону. Вариация действия по Гамильтону. Принцип Гамильтона.
15. Теорема Лиувилля об инвариантности фазового объема. Сохранение плотности статистического ансамбля. Классификация универсальных интегральных инвариантов. Теорема Ли Хуачжуна.
16. Канонические преобразования. Производящие функции. Правила преобразования гамильтонианов.
17. Уравнение Гамильтона – Якоби. Главная функция Гамильтона. Характеристическая функция Гамильтона. Фазовый поток гамильтоновых систем как однопараметрическое семейство канонических преобразований. Полный интеграл. Переменные действие – угол. Теорема Лиувилля об инвариантных торах. Случай разделения переменных. Метод Биркгофа нормализации гамильтоновых систем.
18. Ковариантность уравнений Лагранжа при одновременной замене координат и времени. Теорема Э. Нетер. Классические законы сохранения как следствие теоремы Э. Нетер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман М.А. Классическая механика - М.: Наука, 1974, 1980.
2. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. - М.: Физматлит, 2001.
3. Журавлёв В.Ф. Основы теоретической механики . 2-е изд. - М.: Физматлит, 2001.
4. Маркеев А.П. Теоретическая механика - М.: Наука, 1990.
5. Ярошевский В.А. Лекции по теоретической механике. М.: МФТИ, 2001.