ВКЛАД М. Л. ЛИДОВА В ТЕОРИЮ ГАРАНТИРУЮЩЕГО ОЦЕНИВАНИЯ

Матасов А.И.

Лаборатория управления и навигации
механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова

E-mail: alexander.matasov@gmail.com

"СХЕМА БОРТИКОВ"

Л и д о в М. Л. "К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов". *Космические исследования,* 1964, Т. 2, № 5, С. 713-718.

- Работа была инициирована практическими потребностями
- Появились неквадратичные функционалы
- В задачах оценивания стали нужными линейное программирование и симплекс-метод

В том же 1964 году вышли знаменитые работы Н. Н. Красовского и П. Хьюбера:

К р а с о в с к и й Н. Н. "К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем". *Прикладная математика и механика,* 1964, Т. 28, № 1, С. 3-14.

H u b e r P. J. "Robust estimation of a location parameter". *Annals of Mathematical Statistics,* 1964, v. 35. pp. 73-101.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Измерения:

$$z_k = H_k q + \varrho_k, \qquad |\varrho_k| \leq \sigma_k, \qquad k = 1, \ldots, N,$$

где $z_k \in \mathbb{R}^1$ – измерения, $H_k \in \mathbb{R}^m$ – известные векторы, $q \in \mathbb{R}^m$ – неизвестный вектор параметров, $\varrho_k \in \mathbb{R}^1$ – ошибки измерений. Требуется оценить скалярную величину $l = a^T q$, где a –заданный вектор.

Линейные оцениватели для l вида:

$$\hat{l} = \sum_{k=1}^{N} \Phi_k z_k,$$

где Φ_k – некоторые весовые коэффициенты.

Весовые коэффициенты ищутся как решение минимаксной задачи:

$$\min_{\{\Phi_k\}} \max_{q \in \mathbb{R}^m, \{|\varrho_k| \leq \sigma_k\}} |\hat{l} - l|$$

Задача сводится к задаче математического программирования:

$$\min_{\{\Phi_k\}} \sum_{k=1}^{N} \sigma_k |\Phi_k| \qquad \text{при ограничениях} \qquad \sum_{k=1}^{N} H_k \Phi_k = a$$

- Дан конструктивный метод ее численного решения
- Оптимальный оцениватель содержит не более, чем m отличных от нуля компонент

Задача о "наихудшей корреляции":

$$\mathsf{M}\varrho_k = 0, \qquad \mathsf{M}\varrho_k^2 \le \sigma_k^2, \qquad \frac{|\mathsf{M}\varrho_k\varrho_s|}{(\mathsf{M}\varrho_k^2)^{\frac{1}{2}}\,(\mathsf{M}\varrho_s^2)^{\frac{1}{2}}} \le 1$$

Смешанные возмущения:
Л и д о в М. Л. Минимаксная задача оценивания параметров траектории в непрерывной постановке. *Космические исследования*, 1984. Т. 22, № 4.

$$\varrho(t) = \varrho_1(t) + \varrho_2(t), \qquad |\varrho_1(t)| \le \sigma(t), \qquad \mathsf{M}\varrho_2(t) = 0, \qquad \mathsf{M}\varrho_2(t)\varrho_2(s) = c\,\delta(t-s)$$

Слабое влияние белого шума: $c \to 0$
Л и д о в М. Л. О длительности сеансов наблюдений при слабом влиянии белого шума. *Космические исследования*, 1988, Т. 26, № 2.

Произвольные линейные ограничения на шум измерений: $|l_k^T\varrho_k| \le \lambda_k,\ k = 1, \ldots, N_1 > N$
Л и д о в М. Л., М а т а с о в А. И. Об одном обобщении задачи о "наихудшей корреляции". *Космические исследования*, 1989, Т. 27, № 3.

ОБОБЩЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ ИМПУЛЬСНАЯ КОРРЕКЦИЯ (ОЛИК)

Л и д о в М. Л. Математическая аналогия между некоторыми оптимальными задачами коррекции траектории и выбора состава измерений и алгоритмы их решения. *Космические исследования,* 1971, Т. 9, № 5.

Пусть даны матрицы $D_k \in \mathbb{R}^{m \times n_k}$, $k = 1, \ldots, N$ и вектор $a \in \mathbb{R}^m$.

$$\min_{\{w_k,\, \alpha_k\}} \sum_{k=1}^{N} w_k \qquad \text{при ограничениях}$$

$$\sum_{k=1}^{N} D_k \alpha_k w_k = a, \qquad w_k \geq 0, \qquad \alpha_k \in \mathbb{R}^{n_k}, \qquad \|\alpha_k\| = 1, \qquad k = 1, \ldots, N$$

Такая задача возникает при коррекции траектории космического аппарата при помощи реактивных двигателей.

- Невыпуклая задача, которая может быть решена модификацией симплекс-метода
- В задаче ОЛИК численный алгоритм имеет бесконечное число шагов из-за континуального характера допустимого множества

ОЦЕНКА НЕОПТИМАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ НА ТЕКУЩЕЙ ИТЕРАЦИИ

Каноническая задача линейного программирования:

$$\min_{\{x_k\}} \sum_{k=1}^{N} c_k x_k \qquad \text{при ограничениях} \qquad \sum_{k=1}^{N} A_k x_k = b, \qquad x_k \geq 0, \qquad k = 1, \ldots, N$$

Опорный базис:

$$A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^m \quad \text{– линейно-независимы и} \quad \sum_{k=1}^{m} A_k x_k = b, \qquad x_k \geq 0, \qquad k = 1, \ldots, m$$

Определим величины z_{rs}:

$$A_k = \sum_{s=1}^{m} A_s z_{ks}, \qquad k = 1, \ldots, N$$

и числа

$$r_k = \sum_{s=1}^{m} c_s z_{ks} - c_k, \qquad k = 1, \ldots, N, \qquad \text{и} \qquad r = \max_{k=1,\ldots,N} r_k$$

Если $r \leq 0$, то исходный опорный базис оптимален, а если $r > 0$, то – не оптимален.

ОЦЕНКА НЕОПТИМАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ НА ТЕКУЩЕЙ ИТЕРАЦИИ, II

Пусть на текущей итерации определен опорный базис $(A_1, \ldots, A_m)$ и текущее значение функционала L_T.
Введем оптимальный опорный базис $(A_{j_1}, \ldots, A_{j_m})$:

$$\sum_{s=1}^{m} A_{j_s} \tilde{x}_{j_s} = b, \qquad \tilde{x}_{j_s} \geq 0, \qquad s = 1, \ldots, m;$$

ему соответствует оптимальное значение функционала $\tilde{L}$.

Л и д о в М. Л. Минимаксные методы оценивания. М.: *Препринт № 71 за 2010 г. Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.*

Л е м м а. Справедлива оценка

$$L_T \leq \tilde{L} + r \sum_{s=1}^{m} \tilde{x}_{j_s}$$

Пусть $c_k > 0$ или, без потери общности, $c_k = 1$.

С л е д с т в и е. Справедлива оценка

$$L_T \leq \tilde{L}(1 + r)$$

ЗАДАЧА О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Задача о выборе оптимальной программы измерений (задача Элфвинга), то есть программы, минимизирующей затраты на измерения при гарантированной точности оценивания выбранного параметра, в простейшей постановке сводится к следующей невыпуклой задаче:

$$\min_{\{w_s\}} \sum_{s=1}^{N} w_s \qquad \text{при ограничениях} \qquad a^T \left(\sum_{s=1}^{N} w_s G_s \right)^{-1} a = \sigma^2, \qquad w_s \geq 0,$$

$$G_s \in \mathbb{R}^{m \times m}, \qquad a \in \mathbb{R}^m, \qquad s = 1, \ldots, N$$

- Решается при помощи ОЛИК
- Случай нескольких контролируемых параметров
- Ограничения на компоненты w_s

Достаточно полное изложение вышеперечисленных проблем с некоторыми обобщениями и поучительными комментариями представлено в препринте

Л и д о в М. Л. Минимаксные методы оценивания. М.: *Препринт № 71 за 2010 г. Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.*

ЗАДАЧА ОЦЕНИВАНИЯ С НЕМОДЕЛИРУЕМЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Л и д о в М. Л. Игровая задача оценивания с немоделируемыми ускорениями и алгоритм ее решения. *Космические исследования,* 1986. Т. 24, № 2.

Движение объекта:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \qquad x(t) \in \mathbb{R}^m, \qquad u(t) \in \mathbb{R}^r, \qquad t \in [0, T]$$

$$\|u(t)\| \le \gamma(t), \qquad t \in [0, T] \qquad \big(|u_j(t)| \le \gamma_j(t),\ j = 1, \ldots, r\big)$$

Измерения:

$$z(t) = H(t)x(t) + \varrho(t), \qquad |\varrho(t)| \le \sigma(t) \qquad t \in [0, T]$$

Требуется оценить $l = a^T x(0)$, где $a \in \mathbb{R}^m$ – заданный вектор.

Оцениватели:

$$\hat{l} = \int_0^T \Phi(t) z(t)\, dt$$

Игровая задача:

$$\min_{\Phi(t)} \max_{x(0), u(t), \varrho(t)} |\hat{l} - l|$$

ЗАДАЧА ОЦЕНИВАНИЯ С НЕМОДЕЛИРУЕМЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ, II

Введем фундаментальную матрицу $X(t)$, $b(t) = X^{-1}(t)B(t) \in \mathbb{R}^{m\times r}$ и $h(t) = X^T(t)H(t)$.

Более простое представление:

$$z(t) = h^T(t)q + \xi(t), \qquad q = x(0),$$

где

$$\xi(t) = \varrho(t) + h^T(t)\int_0^t b(\tau)u(\tau)\,d\tau, \qquad |\varrho(t)| \le \sigma(t), \qquad \|u(t)\| \le \gamma(t)$$

Дискретные моменты измерений:

$$z_k = h_k^T q + \xi_k, \qquad h_k = h(t_k), \qquad \xi_k = \xi(t_k), \qquad k = 1,\dots,N$$

Вектор ошибок $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_N)^T$ задается множеством:

$$\mathcal{E} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, \xi_k = \varrho_k + h_k^T\int_0^{t_k} b(\tau)u(\tau)\,d\tau\right\}, \qquad k = 1,\dots,N,$$

$$|\varrho_k| \le \sigma_k = \sigma(t_k), \qquad \|u(\tau)\| \le \gamma(\tau)$$

Основная проблема:

$$\min_{\Phi}\max_{\xi\in\mathcal{E}}\ \Phi^T\xi \qquad \text{при ограничениях} \qquad \sum_{k=1}^N h_k\Phi_k = a$$

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

$$\min_{\Phi} \sum_{s=1}^{N} \left(\sigma_s |\Phi_s| + \int_{t_{s-1}}^{t_s} \gamma(\tau) \| b^T(\tau) \sum_{k=s}^{N} h_k \Phi_k \| \, d\tau \right) \quad \text{при ограничении} \quad \sum_{s=1}^{N} h_k \Phi_k = a$$

Разобъем интервалы $[t_{s-1}, t_s]$ точками $t_{sj} = t_{s-1} + \Delta_s j$, $\Delta_s = \frac{(t_s - t_{s-1})}{p_s}$, $j = 0, \ldots, p_s$:

$$\int_{t_{sj-1}}^{t_{sj}} \gamma(\tau) \| \cdot \| \, d\tau \approx \| b_{sj}^T \sum_{k=s}^{N} h_k \Phi_k \|, \qquad \text{где} \qquad b_{sj}^T = b^T(\tau_{sj}) \gamma(\tau_{sj}) \Delta_s, \qquad \tau_{sj} = (t_{s\,j-1} + t_{sj})/2$$

$$(j = 1, \ldots, p_s)$$

Введем величины $d_{sjk} = b_{sj}^T h_k \in \mathbb{R}^r$, $v_k = |\Phi_k|$, $\alpha_k = \operatorname{sign} \Phi_k$ и v_{sj}, β_{sj} такие, что

$$\sum_{k=s}^{N} d_{sjk} \Phi_k = -v_{sj} \beta_{sj}, \qquad v_{sj} \geq 0, \qquad \beta_{sj} \in \mathbb{R}^r, \qquad \| \beta_{sj} \| = 1$$

Сведение к проблеме ОЛИК:

$$\min_{\{v_k, v_{sj}, \alpha_k, \beta_{sj}\}} \sum_{k=1}^{N} \sigma_k v_k + \sum_{s=1}^{N} \sum_{j=1}^{p_s} v_{sj} \qquad \text{при ограничениях}$$

$$\sum_{k=1}^{N} h_k \alpha_k v_k = a, \qquad \sum_{k=s}^{N} d_{sjk} \alpha_k v_k + v_{sj} \beta_{sj} = 0, \qquad j = 1, \ldots, p_s, \qquad s = 1, \ldots, N,$$

$$v_k \geq 0, \qquad v_{sj} \geq 0, \qquad \alpha_k \in \mathbb{R}^1, \qquad |\alpha_k| = 1, \qquad \beta_{sj} \in \mathbb{R}^r, \qquad \| \beta_{sj} \| = 1$$

СВЕДЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ОБОБЩЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Л и д о в М. Л., Б а к у м а Л. Н. Экспериментальная проверка эффективности нового алгоритма для задачи оценивания с немоделируемыми возмущениями. *Космические исследования,* 1991, Т. 29, № 1.

Двойственная проблема:

$$\max_{\{\overset{k}{\xi}, \alpha_k, w_s\}} \left(-\sum_{s=1}^{m} a_s w_s \right) \qquad \text{при ограничениях}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \overset{k}{\xi}\, \alpha_k + \sum_{s=1}^{m} \overset{s}{H}\, w_s = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1, \qquad \alpha_k \geq 0, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

где

$$\overset{k}{\xi} \in \mathbb{R}^N, \qquad \overset{k}{\xi} \in \mathcal{E}, \qquad \alpha_k \in \mathbb{R}_+, \qquad k = 1, \ldots, n, \qquad w_s \in \mathbb{R}^1, \qquad s = 1, \ldots, m,$$

$$H^T = (h_1, \ldots, h_N)\,, \qquad H = \left(\overset{1}{H}, \ldots, \overset{m}{H} \right), \qquad a = (a_1, \ldots, a_m)^T$$

РАБОТЫ ОБЗОРНОГО И ОБОБЩАЮЩЕГО ХАРАКТЕРА

Л и д о в М. Л., Б а х ш и я н Б. Ц., М а т а с о в А. И. Об одном направлении в проблеме гарантирующего оценивания. *Космические исследования,* 1991, Т. 29, № 5.

Л и д о в М. Л. К задаче гарантирующего оценивания. *Космические исследования,* 1991, Т. 29, № 6.

Л и д о в М. Л. Опыт численного решения задач оценивания и стохастического управления в гарантирующей постановке. *Известия РАН. Сер. Техническая кибернетика,* 1993, № 4.

Л и д о в М. Л. *Минимаксные методы оценивания.* М.: Препринт № 71 за 2010 г. Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.

Работы М. Л. Лидова оказали огромное влияние на теорию гарантирующего оценивания и на приложения этой теории, в особенности в аэрокосмической области.

Несмотря на прошествие немалых лет, они не потеряли своей значимости.

Впрочем, это относится и ко всему научному наследию выдающегося ученого – Лауреата Ленинской премии Михаила Львовича Лидова.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л и д о в М. Л. К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов. *Космические исследования,* 1964, Т. 2, № 5.

[2] Л и д о в М. Л. Математическая аналогия между некоторыми оптимальными задачами коррекции траектории и выбора состава измерений и алгоритмы их решения. *Космические исследования,* 1971, Т. 9, № 5.

[3] Л и д о в М. Л., Т е с л е н к о Н. М. Оптимизация решения некоторых задач управления полетом космических аппаратов методом спуска по параметру. *В сб.: Математическое обеспечение космических экспериментов.* М.: Наука, 1978.

[4] Л и д о в М. Л. Минимаксная задача оценивания параметров траектории в непрерывной постановке. *Космические исследования,* 1984. Т. 22, № 4.

[5] Л и д о в М. Л. Эффективный алгоритм решения задачи о выборе оптимальной программы измерений с ограничениями на ошибки оценки нескольких параметров. *Космические исследования,* 1985. Т. 23, № 4.

[6] Л и д о в М. Л. Игровая задача оценивания с немоделируемыми ускорениями и алгоритм ее решения. *Космические исследования,* 1986, Т. 24, № 2.

[7] Л и д о в М. Л., Б а к у м а Л. Н. Определение оптимальной программы измерений с ограничениями на ошибки оценок трех параметров движения суточного спутника. *Космические исследования,* 1986, Т. 24, № 4.

[8] Л и д о в М. Л., Л я х о в а В. А. Численное решение минимаксной задачи оценивания параметров движения при наличии немоделируемых ускорений. *Космические исследования,* 1987, Т. 25, № 1.

[9] Л и д о в М. Л. Игровая задача оценивания параметров движения при наличии немоделируемых ускорений. *Механика и научно-технический прогресс.* М.: Наука, 1987, Т. 1.

[10] Л и д о в М. Л. Алгоритм оценивания параметров движения в задаче с немоделируемыми ускорениями. *Доклады АН СССР,* 1988, Т. 300, № 1.

[11] Л и д о в М. Л. О длительности сеансов наблюдений при слабом влиянии белого шума. *Космические исследования,* 1988, Т. 26, № 2.

[12] Л и д о в М. Л., Б а к у м а Л. Н. Применение алгоритма оптимальной коррекции для решения задач оценивания с немоделируемыми ускорениями. *Космические исследования,* 1988, Т. 26, № 3.

[13] Л и д о в М. Л., Ж и р н о в В. А. Решение задачи сближения с несколькими астероидами алгоритмом оптимальной коррекции. *Космические исследования,* 1988, Т. 26, № 4.

[14] Л и д о в М. Л. Оценивание параметров движения при действии немоделируемых ускорений. *Труды Математического института им. В. А. Стеклова.* М.: Наука, 1989, Т. 186.

[15] Л и д о в М. Л., М а т а с о в А. И. Об одном обобщении задачи о "наихудшей корреляции". *Космические исследования,* 1989, Т. 27, № 3.

[16] Л и д о в М. Л., Б а к у м а Л. Н. Экспериментальная проверка эффективности нового алгоритма для задачи оценивания с немоделируемыми возмущениями. *Космические исследования,* 1991, Т. 29, № 1.

[17] Л и д о в М. Л. О модификации симплекс-метода линейного программирования в случае вырождения. *Космические исследования,* 1991, Т. 29, № 4.

[18] Л и д о в М. Л., Б а х ш и я н Б. Ц., М а т а с о в А. И. Об одном направлении в проблеме гарантирующего оценивания. *Космические исследования,* 1991, Т. 29, № 5.

[19] Л и д о в М. Л. К задаче гарантирующего оценивания. *Космические исследования,* 1991, Т. 29, № 6.

[20] Л и д о в М. Л. Опыт численного решения задач оценивания и стохастического управления в гарантирующей постановке. *Известия РАН. Сер. Техническая кибернетика,* 1993, № 4.

[21] Л и д о в М. Л. *Минимаксные методы оценивания.* М.: Препринт № 71 за 2010 г. Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.