



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН

Абрау-2019 • Труды конференции



М.П. Галанин, Д.Л. Сорокин

**Численное решение задач с оператором смешанного типа в неограниченной области**

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки***

Галанин М.П., Сорокин Д.Л. Численное решение задач с оператором смешанного типа в неограниченной области // Научный сервис в сети Интернет: труды XXI Всероссийской научной конференции (23-28 сентября 2019 г., г. Новороссийск). — М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2019. — С. 230-233. — URL: <http://keldysh.ru/abrau/2019/theses/74.pdf>  
doi:[10.20948/abrau-2019-74](https://doi.org/10.20948/abrau-2019-74)

Размещена также [презентация к докладу](#)

# Численное решение задач с оператором смешанного типа в неограниченной области

М.П. Галанин<sup>1,2</sup>, Д.Л. Сорокин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИППМ им. М.В. Келдыша РАН, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4

<sup>2</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, г. Москва, 2-я Бауманская, д. 5, стр. 1

**Аннотация.** Проанализированы методы решения задач эллиптических уравнений, основанные на третьей формуле Грина. Предложены новые методы решения задачи с оператором смешанного типа в неограниченной области. На основе предложенных методов созданы программы для решения задач с оператором смешанного типа. Приведены результаты вычислительных экспериментов, показывающие корректность применения методов как к решению двумерных, так и трёхмерных задач.

**Ключевые слова:** неограниченная область, оператор смешанного типа, электродинамические ускорители рельсового типа, система уравнений Максвелла в квазистационарном приближении.

## Numerical Solution Tasks With Mixed Operator In Unlimited Area

M.P. Galanin<sup>1,2</sup>, D.L. Sorokin<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Keldysh Institute of Applied Mathematics (KIAM), Moscow, Russia

<sup>2</sup> Bauman Moscow State Technical University (BMSTU), Moscow, Russia

**Abstract.** Methods for solving problems of elliptic equations, based on the third Green formula, was analyzed. New methods for solving a problem with a mixed-type operator in an unbounded domain are proposed. On the basis of the proposed methods, programs for solving problems with a mixed type operator have been created. The results of computational experiments, showing the correctness of the application of methods to both solving two-dimensional and three-dimensional problems, are presented.

**Keywords:** unlimited area, mixed operator, electrodynamic accelerator, railgun, electromagnetic field, Maxwell's equations

При исследовании физических явлений часто возникает необходимость проводить моделирование в неограниченной области, например, при моделировании электростатического поля зарядов, решении задачи

теплопроводности и т.п. В случае, когда явление можно описать с помощью простейших линейных эллиптических операторов, проблема решена и описана, например, в [1, 2]. Постановка неотражающих граничных условий для волновых уравнений подробно рассмотрена в [3]. Однако для более широкого класса задач, для которых оператор задачи может иметь смешанный тип, но вне некоторой финитной области фундаментальное решение оператора известно и легко вычисляется, вышеупомянутые методы неприменимы.

В частности, задачи с операторами смешанного типа возникают при моделировании электромагнитного поля в электродинамических ускорителях рельсового типа. Процесс протекания тока в проводниках в этом случае может быть описан параболическим уравнением, а электромагнитное поле в диэлектрике — эллиптическим [4, 5].

Для решения задачи предлагается три метода решения: метод расширения области, метод задания интегральных граничных условий, трёхэтапный метод [6].

При решении задач с помощью сеточных численных методов точность решения определяется шагом сетки и точностью задания граничных условий. Если при решении задачи в конечной области на границе поставить те же граничные условия, что и на бесконечности в исходной задаче, то ошибка, определяемая заданием граничного условия, будет уменьшаться при увеличении размера расчётной области. В связи с этим для решения задач в неограниченной области можно использовать метод расширения области, т.е. можно найти такой размер расчётной области, что влияние искусственной границы будет меньше, чем погрешность численного метода.

Метод расширения расчётной области прост в реализации, но имеет высокую вычислительную сложность [6]. Альтернативными методами являются методы, основанные на использовании формул Грина.

Первым из них является метод задания интегрального граничного условия [6]. Он основан на том, что вне некоторой финитной области действует оператор с известным фундаментальным решением и тривиальной правой частью, тогда решение на границе расчётной области определяется с помощью третьей Формулы Грина, т.е. с помощью интегрального соотношения. Таким образом решение задачи с помощью метода задания интегральных граничных условий требует решения системы уравнений с заполненными строками, соответствующими границе.

В [6] построен трёхэтапный метод решения. При использовании трёхэтапного метода необходимо решать две системы, но с разреженными строками, относящимися к граничным условиям. Результаты расчётов показывают, что при решении задач, сводящихся к решению линейных уравнений с сильно заполненными матрицами, метод неэффективен, однако для задач с разреженной матрицей системы трёхэтапный метод позволяет получить результат существенно быстрее, чем метод задания интегрального граничного условия.

На основе метода задания интегральных граничных условий и трёхэтапного метода построены и программно реализованы вычислительные алгоритмы для решения ряда задач в неограниченной области. Результаты вычислительных экспериментов подтверждают корректность методов. Также они свидетельствуют о том, что если порядок точности квадратурных формул, используемых при реализации методов, согласован с порядком разностной схемы, то порядок схемы сохраняется.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 18-01-00252, 18-31-20020.

### **Литература**

1. Tsynkov S.V. Numerical solution of problems on unbounded domains. A review // Appl. Math. 1998. V. 27. P. 465 – 532.
2. Галанин М.П., Низкая Т.В. Разработка и применение численного метода решения линейных эллиптических уравнений в неограниченной области // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005. № 2, 29 с.
3. Ильгамов М.А., Гильманов А.Н. Неотражающие условия на границах расчётной области. — М.: Физматлит. 2003. 240 с.
4. Галанин М.П., Попов Ю.П. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах: Математическое моделирование. М.: Наука. Физматлит, 1995. 320 с.
5. Галанин М.П., Лотоцкий А.П., Попов Ю.П., Храмцовский С.С. Численное моделирование пространственно трехмерных явлений при электромагнитном ускорении проводящих макротел // Математическое моделирование. 1999. Т. 11, № 8. С. 3 – 22.
6. Галанин М.П., Сорокин Д.Л. Разработка и применение численных методов решения задач в неограниченной области на основе третьей формулы Грина // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018. № 246, 24 с.

### **References**

1. Tsynkov S.V. Numerical solution of problems on unbounded domains. A review // Appl. Math. 1998. V. 27. P. 465 – 532.
2. Galanin M.P., Nizkaia T.V. Razrabotka i primenenie chislennogo metoda resheniia lineinykh ellipticheskikh uravnenii v neogranichennoi oblasti // Preprinty IPM im. M.V. Keldysha, 2005. № 2, 29 s.
3. Ilgamov M.A., Gilmanov A.N. Neotrazhaiushchie usloviia na granitsakh raschetnoi oblasti. — M.: Fizmatlit. 2003. 240 s.
4. Galanin M.P., Popov Iu.P. Kvazistatsionarnye elektromagnitnye polia v neodnorodnykh sredakh: Matematicheskoe modelirovanie. M.: Nauka. Fizmatlit, 1995. 320 s.
5. Galanin M.P., Lototskii A.P., Popov Iu.P., Khramtsovskii S.S. Chislennoe modelirovanie prostranstvenno trekhmernykh iavlenii pri elektromagnitnom

uskorenii provodiashchikh makrotel // Matematicheskoe modelirovanie. 1999. T. 11, № 8. S. 3 – 22.

6. Galanin M.P., Sorokin D.L. Razrabotka i primeneniye chislennykh metodov resheniya zadach v neogranichennoi oblasti na osnove tretei formuly Grina // Preprinty IPM im. M.V. Keldysha, 2018. № 246, 24 s.