



Л.Р. Шакирова, М.В. Фалилеева,
А.В. Кириллович, Е.К. Липачев,
О.А. Невзорова, В.Н. Невзоров

**Образовательная математическая
онтология OntoMathEdu: структура и
отношения**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Шакирова Л.Р., Фалилеева М.В., Кириллович А.В., Липачев Е.К., Невзорова О.А., Невзоров В.Н. Образовательная математическая онтология OntoMathEdu: структура и отношения // Научный сервис в сети Интернет: труды XXI Всероссийской научной конференции (23-28 сентября 2019 г., г. Новороссийск). — М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2019. — С. 653-661. — URL: <http://keldysh.ru/abrau/2019/theses/84.pdf> doi:[10.20948/abrau-2019-84](https://doi.org/10.20948/abrau-2019-84)

Размещена также [презентация к докладу](#)

Образовательная математическая онтология OntoMath^{Edu}: структура и отношения

Л.Р. Шакирова¹, М.В. Фалилеева¹, А.В. Кириллович², Е.К. Липачев^{1,2},
О.А. Невзорова^{2,3}, В.Н. Невзоров⁴

¹ *Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского
(Приволжского) федерального университета*

² *Высшая школа информационных технологий и информационных систем
Казанского (Приволжского) федерального университета*

³ *Институт прикладной семиотики Академии Наук Республики Татарстан*

⁴ *Казанский национальный исследовательский технический университет им.
А.Н. Туполева, Казань*

Аннотация. Представлена онтология математического знания OntoMath^{Edu}, разрабатываемая с целью использования в образовательном процессе. Эта онтология предназначена для решения таких задач, как семантическая разметка математических учебников, автоматическая рекомендация учебных материалов в соответствии с индивидуальным профилем обучаемого, автоматическая генерация тестовых заданий для проверки знаний. Описаны иерархии типов, материализованных отношений, ролей и точек зрения. Приведены отношения между концептами онтологии.

Ключевые слова: онтология, математическое образование, OntoMath^{Edu}, планиметрия.

OntoMath^{Edu} – Educational Mathematical Ontology: Structure and Relationships

L.R. Shakirova¹, M.V. Falileeva¹, A.V. Kirillovich², E.K. Lipachev^{1,2},
O.A. Nevzorova^{2,3}, V.N. Nevzorov⁴

¹ *N. I. Lobachevskii Institute of Mathematics and Mechanics Kazan (Volga Region)
Federal University*

² *The Higher Institute of Information Technology and Intelligent Systems Kazan
(Volga Region) Federal University*

³ *Institute of Applied Semiotics of Tatarstan Academy of Sciences*

⁴ *Kazan National Research Technical University n.a. A.N. Tupolev*

Abstract. We present the OntoMathEdu ontology of mathematical knowledge. We are developing this ontology for use in the educational process. This ontology is intended for solving such tasks as semantic markup of mathematical textbooks, automatic recommendation of training materials in accordance with the individual profile of the student, automatic generation of test tasks for knowledge testing. We describe the type hierarchy, the materialized relationships, the roles and points of view. We also present the relations between ontology concepts.

Keywords: ontology, mathematical education, OntoMath^{Edu}, Plane Geometry.

Введение

Онтологический подход в обучении позволяет развивать способности обучающегося самостоятельно находить, осознавать и осваивать необходимую информацию, устанавливая взаимосвязи между понятиями. Данный подход способствует формированию целостного представления об изучаемой дисциплине; умению грамотно анализировать и использовать информацию. Онтология может стать основой для построения структуры цифровой образовательной среды. Онтологическая база знаний позволяет естественно реализовать персональные образовательные траектории [1]. В Казанском федеральном университете для решения вышеназванных проблем создана образовательная математическая онтология OntoMath^{Edu} [2-3]. Она формируется в качестве центрального компонента разрабатываемой цифровой образовательной платформы.

Существуют известные среды по созданию онтологий: Ontoligua, OntoEdit, OilEd, Protégé, Web-Deso. Проектирование онтологии OntoMath^{Edu} осуществляется с помощью открытого редактора онтологий Protégé (<https://protege.stanford.edu/>).

Данная онтология предназначена для решения следующих задач: (1) семантическая разметка математических учебников; (2) автоматическая рекомендация учебных материалов в соответствии с индивидуальным профилем учащегося; (3) автоматическая генерация тестовых заданий для проверки знаний. Кроме того, данная онтология рассматривается как основа для справочной базы знаний, ориентированной непосредственно на конечных пользователей.

1. Структура онтологии

Онтология OntoMath^{Edu} содержит следующие иерархии: типов; материализованных отношений; ролей; точек зрения. Концепты онтологии связаны отношениями и аксиомами [4].

Текущая версия онтологии содержит более 600 концептов, относящихся к курсу планиметрии 7-9 классов средней школы. Названия концептов и их определения даны на английском, русском и татарском языках [5-6].

1.1 Иерархия типов

Базовой иерархией онтологии является иерархия типов. Тип — это концепт, который является семантически жестким и онтологически независимым [4]. Например, такие концепты в онтологии OntoMath^{Edu} как «треугольник», «точка», «окружность» являются типами.

Верхний уровень иерархии типов следующий:

1. **Геометрическая фигура на плоскости.** Главный класс, включающий в себя все геометрические фигуры планиметрии. Например, «прямая», «многоугольник», «эллипс», «радикальный центр».
2. **Аксиома планиметрии.** Класс включает в себя все аксиомы планиметрии, в том числе аксиомы теории геометрических построений. Например, «аксиома принадлежности о единственности прямой, проходящей через две точки», «конструктивная аксиома о построении окружности данного радиуса с центром в данной точке».
3. **Теорема планиметрии.** Данный класс включает в себя все теоремы планиметрии. Например, «теорема о сумме углов треугольника», «теорема Пифагора».
4. **Планиметрическая задача.** Класс включает в себя известные задачи планиметрии. Например, «задача о построении биссектрисы угла циркулем и линейкой», «задача о спрямлении окружности», «задача Герона о нахождении наименьшей суммы расстояний от точек до прямой».
5. **Единица измерения.** Например, «сантиметр», «радиан», «квадратный метр».
6. **Инструмент построения и измерения.** Например, «транспортир», «астролябия», «рейсшина», «малка», «рейсмус».

1.2 Иерархия ролей

Роль — это концепт, который является семантически нежестким и онтологически зависимым [4]. Объект, относящийся к ролевому концепту, относится к этому концепту только в силу его отношения с другим объектом. Например, концепт «вершина треугольника» является ролью в отношении к некоторому треугольнику.

Класс «основной элемент геометрического преобразования» содержит подкласс «неподвижные элементы плоскости при преобразовании», в который входят и «ось симметрии», и «неподвижная окружность при инверсии», так же в этот класс входит и «коэффициент гомотетии».

1.3 Аксиомы

Онтология OntoMath^{Edu} содержит аксиомы классификации понятий. Например, она содержит аксиомы о том, что концепты «выпуклый многоугольник» и «невыпуклый многоугольник» являются непересекающимися и их объединение равняется понятию «многоугольник».

2. Образовательные уровни

Помимо универсальных утверждений о математических понятиях, онтология содержит утверждения, привязанные к отдельным точкам зрения. Точки зрения моделируются с использованием шаблона проектирования «Descriptions and Situations», и базируются на онтологии верхнего уровня DOLCE+DnS Ultralite [7-8].

В настоящее время разрабатываются следующие виды точек зрения:

1. **Определения.** С разных точек зрения одно и то же понятие может определяться различными способами. В том числе, с одной точки зрения одной системы определений некоторое понятие определяется через одно понятие, а с точки зрения другой – оно определяется через другое понятие.
2. **Образовательные уровни.** В онтологии предусмотрена уровневая дифференциация в представлении концептов для реализации принципа последовательности и преемственности в обучении понятиям.

В качестве примера рассмотрим представление в онтологии OntoMath^{Edu} геометрических понятий по теме «Треугольник» (см. табл. 1), изучаемых в 7-9 классах, в том числе в классах физико-математического профиля. Все понятия в онтологии расположены по алфавиту и содержат определения на трех языках.

Таблица 1. Последовательность представления геометрических понятий в онтологии по теме «Треугольник»

Класс	№	Подкласс
Треугольник	8	Вписанный треугольник
	8	Описанный треугольник
	П 9	Ортогональный треугольник
	7.1	Остроугольный треугольник
	7.3	Прямоугольный треугольник
	7.2	Равнобедренный треугольник
	7.2	Равносторонний треугольник
	П 8	Серединный треугольник
	П 9	Треугольник с вершинами в точках Эйлера
	7.1	Тупоугольный треугольник

Понятия под номерами 7.1, 7.2, 7.3 изучаются в 7 классе (цифры после точки указывают на последовательность изучения), под номером 8 – в восьмом классе общеобразовательной школы, П 8 и П 9 – в профильных восьмом и девятом классах соответственно. Так, понятия «тупоугольный треугольник» и «остроугольный треугольник» изучаются одновременно, позднее изучаются понятия «равнобедренный треугольник» и «равносторонний треугольник». Это означает возможность параллельного

изучения данных пар понятий, которые можно выстроить в любую последовательность. Более того, понятия с номером 7.1 лучше изучать вместе, сравнивая их свойства.

В соответствии с данным распределением последовательности изучения определений понятий продемонстрируем образовательные уровни, реализуемые в онтологии OntoMath^{Edu}. В таблице 2 представлен первый образовательный уровень представления определений понятий по теме «Треугольник» в 7 классе (базовый уровень).

Таблица 2. Первый образовательный уровень онтологии по представлению определений понятий

Этапы изучения	Понятия	
1	Треугольник	
2	Остроугольный треугольник	Тупоугольный треугольник
3	Равнобедренный треугольник	Равносторонний треугольник
4	Прямоугольный треугольник	

Понятия, изучаемые в 7-м и 8-м классах, представляют второй образовательный уровень онтологии. В 9 классе не содержится новых определений, связанных с понятием «треугольник». Понятия, изучаемые в 8-м и 9-м профильных математических классах, вместе с понятиями предыдущих уровней составляют третий образовательный уровень.

3. Отношения между концептами онтологии

Онтология содержит следующие отношения [9]:

1. **«Целое-часть»** – данное отношение указывает, из каких элементов состоит геометрическая фигура. Например, «многоугольник» (целое) имеет части: «сторона многоугольника», «угол многоугольника», «вершина многоугольника».
2. **«Определяется»** связано с элементами, которые определяют, но не являются частью самой фигуры. Например, окружность определяется центром окружности и ее радиусом.
3. **Онтологическая зависимость** связывает ролевое понятие с понятием, от которого зависит данная роль. Например, «фокус эллипса» онтологически зависит от понятия «эллипс», а «хорда окружности» зависит от понятия «окружность».
4. **«Теорема-свойство»** показывает, какими свойствами, представленными в школьном курсе в виде теорем, обладает геометрическое понятие. Например, концепт «треугольник» связан отношением «теорема-свойство» с концептами: «соотношения между

- углами и сторонами треугольника», «неравенство треугольника», «теорема о сумме острых углов прямоугольного треугольника»; концепт «биссектриса треугольника» – с концептом «свойство биссектрисы угла треугольника» и т.п.
5. «**Теорема-признак**» связывает геометрическое понятие с его признаками, представленного теоремами. Например, концепт «ромб» связан отношением «теорема-признак» с концептом «признак ромба» и др.
 6. «**Находится по формуле**» связывает геометрические фигуры с их метрическими свойствами. Так концепт «площадь треугольника» связан с концептами: «нахождение площади треугольника по формуле Герона», «нахождение площади треугольника через высоту и основание», «нахождение площади треугольника по двум сторонам и углу между ними».
 7. «**Прямая – обратная теоремы**» связывает между собой прямые и обратные теоремы. Например, «признак параллелограмма по диагоналям» и «свойство диагоналей параллелограмма» связаны в онтологии данным отношением, так же как и «теорема Пифагора» и «признак прямоугольного треугольника (обратная теорема Пифагора)».
 8. **Материализованные отношения.** Для моделирования отношения между вписанной окружностью и треугольником, в который эта окружность вписана, онтология содержит класс «вписанная окружность треугольника», который представляет собой материализацию отношения (через, чаще всего, прямую номинализацию лексической единицы). Данный класс связан отношением «вписано» с классом «окружность» и отношением «описано» с классом «треугольник».
 9. **Набор дидактических отношений:** а) отношение «Изучается одновременно» связывает понятия, которые рекомендуется изучать совместно, например, понятия «отрезок» и «луч»; б) отношение «Изучается позже» (обратное отношение «Изучается раньше»), например, понятие «равнобедренный треугольник» изучается позже понятия «Остроугольный треугольник». Отношение «Изучается позже», как и его обратное отношение является транзитивным, поэтому по свойству транзитивности могут быть выстроены последовательности отношений «Изучается позже», которые и формируют некоторую последовательность понятий в обучении; в) отношение «понятие-уровень» определяет отнесенность понятия к образовательному уровню, например, понятие «треугольник» связано отношением «понятие-уровень» со значением 1.1, что интерпретируется как этап 1 первого образовательного уровня (см. табл. 2). Отношение «понятие-уровень» используется в качестве критерия включения для выстраивания обучающей последовательности понятий.

Заключение

В статье описана структура нового онтологического ресурса *OntoMath^{Edu}*, предназначенного для представления математических знаний по планиметрии для средней школы. Отличительной особенностью нового ресурса является набор отношений, связывающих концепты онтологии. Набор отношений отражает, с одной стороны, явные зависимости понятий в рассматриваемой области, а, с другой стороны, служат образовательным целям применения онтологии. Онтология *OntoMath^{Edu}*, несомненно, будет способствовать более глубокому пониманию взаимосвязей понятий предметной области и, тем самым, обеспечивать более качественное усвоение знаний школьного курса планиметрии.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 18-47-160007, а также за счет субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету на государственное задание в сфере научной деятельности, грант № 1.2368.2017.

Литература

1. Ольшевская А.В. Разработка предметных онтологий и систем управления дистанционным обучением во взаимодействии с социальными сетями. Дисс... канд.тех.наук, СПб, 2014. — 161 с.
2. Елизаров А.М., Кириллович А.В., Липачёв Е.К., Невзорова О.А., Шакирова Л.Р. Открытые связанные данные и онтологии в математическом образовании // Научный сервис в сети Интернет: труды XX Всероссийской научной конференции (17-22 сентября 2018 г., г. Новороссийск). — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018. — С. 186–196. doi: 10.20948/abrau-2018-56.
3. Невзорова О.А., Невзоров В.Н., Шакирова Л.Р., Фалилеева М.В. Исследование структуры онтологии *OntoMathEdu*: первые результаты // XV Международная конференция по компьютерной и когнитивной лингвистике TEL 2018 (31 октября - 3 ноября 2018 г., г. Казань, Россия). Т. 1. — Казань: Изд.-во АН РТ, 2018. — С. 240–250.
4. Guarino N., Welty C.A. A Formal ontology of properties // Dieng R., Corby O. (eds.) Proc. of the 12th European Workshop on Knowledge Acquisition, Modeling and Management (EKAW '00), Lecture Notes in Computer Science, 2000. — Vol. 1937. — Pp. 97–112.
5. Shakirova L., Falileeva M., Kirillovich A., Lipachev E. Problems and solutions in the design of formal taxonomy of concepts of geometry // INTED2019, Proceedings 13th International Technology, Education and Development Conference, March 11th-13th, 2019. Valencia, Spain, 2019. — Pp. 6793–6801.
6. Kirillovich A., Shakirova L., Falileeva M., Lipachev E. Towards an educational mathematical ontology // INTED2019, Proceedings 13th International

- Technology, Education and Development Conference, March 11th-13th, 2019. Valencia, Spain, 2019. — Pp. 6823–6829.
7. Borgo S., Masolo C. Ontological Foundations of DOLCE // Poli R., Healy M., Kameas A. (eds.) Theory and Applications of Ontology: Computer Applications. — Dordrecht: Springer, 2010. — Pp. 279–295.
 8. Gangemi A., Mika P. Understanding the Semantic Web through Descriptions and Situations // Meersman R., Tari Z., Schmidt D.C. (eds.) On The Move to Meaningful Internet Systems 2003: CoopIS, DOA, and ODBASE. OTM 2003. Lecture Notes in Computer Science. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. — Vol. 2888. — Pp.689–706.
 9. Шакирова Л.Р., Фалилеева М.В., Кириллович А.В., Липачев Е.К. Проектирование образовательной математической онтологии: проблемы и методы решения на примере курса планиметрии // XV Международная конференция по компьютерной и когнитивной лингвистике TEL 2018 (31 октября - 3 ноября 2018 г., г. Казань, Россия). Т. 1. — Казань: Изд.-во АН РТ, 2018. — С. 393–405.

References

1. Ol'shevskaya A.V. Razrabotka predmetnyh ontologij i sistem upravleniya distancionnym obucheniem vo vzaimodejstvii s social'nymi setyami. Diss... kand.tekh.nauk, SPb, 2014. — 161 s.
2. Elizarov A.M., Kirillovich A.V., Lipachev E.K., Nevzorova O.A., Shakirova L.R. Open linked data and ontologies in mathematics education // CEUR Workshop Proceedings, 2018. — Vol. 2260. — Pp. 186–196.
3. Nevzorova O.A., Nevzorov V.N., SHakirova L.R., Falileeva M.V. Issledovanie struktury ontologii OntoMathEdu: pervye rezul'taty // XV Mezhdunarodnaya konferenciya po komp'yuternoj i kognitivnoj lingvistike TEL 2018 (31 oktyabrya - 3 noyabrya 2018 g., g. Kazan', Rossiya). Т. 1. — Kazan: Izd.-vo AN RT, 2018. — S. 240–250.
4. Guarino N., Welty C.A. A Formal ontology of properties // Dieng R., Corby O. (eds.) Proc. of the 12th European Workshop on Knowledge Acquisition, Modeling and Management (EKAW '00), Lecture Notes in Computer Science, 2000. — Vol. 1937. — P. 97–112.
5. Shakirova L., Falileeva M., Kirillovich A., Lipachev E. Problems and solutions in the design of formal taxonomy of concepts of geometry // INTED2019, Proceedings 13th International Technology, Education and Development Conference, March 11th-13th, 2019. Valencia, Spain, 2019. — Pp. 6793–6801.
6. Kirillovich A., Shakirova L., Falileeva M., Lipachev E. Towards an educational mathematical ontology // INTED2019, Proceedings 13th International Technology, Education and Development Conference, March 11th-13th, 2019. Valencia, Spain, 2019. — Pp. 6823–6829.

7. Borgo S., Masolo C. Ontological Foundations of DOLCE // Poli R., Healy M., Kameas A. (eds.) Theory and Applications of Ontology: Computer Applications. — Dordrecht: Springer, 2010. — P. 279–295.
8. Gangemi A., Mika P. Understanding the Semantic Web through Descriptions and Situations // Meersman R., Tari Z., Schmidt D.C. (eds.) On The Move to Meaningful Internet Systems 2003: CoopIS, DOA, and ODBASE. OTM 2003. Lecture Notes in Computer Science. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. — Vol. 2888. — P.689–706.
9. Shakirova L.R., Falileeva M.V., Kirillovich A.V., Lipachev E.K. Proektirovanie obrazovatel'noj matematicheskoy ontologii: problemy i metody resheniya na primere kursa planimetrii // XV Mezhdunarodnaya konferenciya po komp'yuternoj i kognitivnoj lingvistike TEL 2018 (31 oktyabrya – 3 noyabrya 2018 g., g. Kazan). T. 1. — Kazan: Izd.-vo AN RT, 2018. — S. 393–405.