

Перколяционно-клеточный автомат как динамическая система: энтропийный подход

В.А. Шведовский¹

¹ МГУ им. М.В.Ломоносова факультет ВМиК

Аннотация. Показано построение двумерного клеточного автомата с перколяцией на замкнутой ориентированной поверхности рода ноль и выше вместе с результатами вычислительных на нём экспериментов; даны 1) теорема о конечности его вполне положительной топологической энтропии и 2) примеры автоматных прогнозов электоральных выборов в регионах России. Их сопоставимость с реальными данными свидетельствует в пользу гипотезы о детерминированности выборов распространённостью и укоренённостью ценностных ориентаций в региональных социумах вместе с анаморфозным отображением в них конфигурации электората.

Ключевые слова: клеточный автомат, перколяция, анаморфоза, топологическая энтропия, ценностная ориентация, прогноз, индекс укоренённости кодов.

Cellular automaton with percolation as a dynamic system: entropy approach

V.A. Shvedovskiy¹

¹ MSU M. V. Lomonosov, faculty of computational mathematics and Cybernetics

Annotation. The construction of a two-dimensional cellular automaton with percolation on a closed oriented surface of genus zero and higher is shown together with the results of computational experiments on it; 1) a sketch of the proof of the theorem about its completely positive topological entropy and 2) examples of automatic forecasts of electoral elections in the regions of Russia are given. Their comparability with real data supports the hypothesis that elections are determined by the prevalence and rootedness of value orientations in regional societies, along with anamorphic representation of the configuration of the electorate in them..

Keywords: cellular automaton, percolation, anamorphosis, topological entropy, value orientation, forecast, index of embeddedness of codes.

1. Мотивация обращения к клеточным автоматам.

«Гибридная война», имея целью смену неуютного режима противника, допускает широкий спектр инструментов воздействия: от так называемой «мягкой силы» до ввода оккупационных войск. Своё место в этом спектре занимают информационно- психологические атаки через Интернет. Их ключевым объектом в сегодняшнем российском социуме является общественное мнение в отношении власти. Они сеют сомнения в её легитимности, готовят это мнение, как и международное, в свою пользу.

Поэтому критически важно знать его динамику. В работе моделируется этот процесс, опираясь на многомесячные данные (ВЦИОМ, ФОМ, Центр Левады и т.п.). Примером не точечной модели взято отношение населения к своему Президенту в виде решётчатой динамической системы- р.д.с. (с учётом пространственных координат) взаимодействующих факторов *pro&contra*, включающих информационное противоборство. *Фундаментальной проблемой здесь является приемлемая точность прогноза*, в которой обучающая последовательность опирается не на ряд предвыборных дней, как у Гэллага - с погрешностью менее 2-3%, а на множество предваряющих месяцев и с погрешностью на порядок хуже. Поставленная задача решалась на запрограммированном муровском клеточном автомате с перколяцией. Вычислительные эксперименты - ВЭ на нём показали, что его работа вполне может быть рассмотрена как действие эргодического автоморфизма р.д.с. [2]. Однако, как показано ещё Рохлиным В.А. и Синаем Я.Г. [7, 11] его энтропия зачастую равна 0 или ∞ , и иногда конечна и вполне положительна.

Поэтому кроме прикладной задачи, в данной НИР имелся и теоретический мотив: *обоснование конечности вполне положительной топологической энтропии [2, 4, 6, 7] у р.д.с., изучение влияния на неё рода двумерной поверхности (степени связности социума) и расчёта её значений, определяющих погрешность этого инструмента прогнозирования.*

Другие подходы в рамках данной тематики включают в себя модель информационного противоборства в социуме [14] и модель выбора позиций индивидами при информационном противоборстве [15, 16].

2. Описание клеточного автомата с перколяцией и работа с ним.

Прогнозирование взвешенного отношения российского социума к своему президенту опирается на две группы фактов – а) данные замеров социологическими службами (см. выше) доверия к нему различных социальных групп и б) результатов ВЭ с настроенными на эти данные клеточными автоматами, т.е. р.д.с. Клеточные автоматы (здесь ПКА – перколяционно-клеточные автоматы) представляют собой моделирование российского социума многоагентной средой взаимодействующих между собой клеток, разбитых на 4 множества (одного постоянного, т.е. неизменного по числу клеток и их координат, - «белого цвета» -

аполитичного контингента; 3-х переменных (во всех смыслах): **r** - «красного цвета» - традиционалистов, **v** - «синего цвета» - либеральной ориентации и **b** - «чёрного цвета» - с идеологической кашей в голове. При этом каждая цветная клетка, представляющая социальный субъект (индивид, группа и т.д.) имеет третье измерение, - глубину приверженности соответствующей ориентации [13], обозначенной вышеприведёнными цветами; для «чёрных клеток» характерна единичная глубина, т.е. это плод равновесия воздействия альтернативных позиций, но позиционный статус у них в том, что они не пропускают влияние разноцветных клеток - статус белых клеток - до тех пор, пока равновесие не сменится доминированием какого-то цвета с восстановлением его статуса .

Рабочее поле ПКА представляет двумерную регулярную решётку с Муровским типом межклеточного взаимодействия при $r=2$. Клетки «белого цвета», по существу, являются дефектами регулярности решётки, ибо они неизменны в ходе ВЭ и не пропускают через свои позиции никакого воздействия цветных клеток. Также сценарии предполагают моделирование воздействия СМИ на «жизнь клеток» через подключение к разным точкам решётки каналов соответствующего цвета с учётом их числового соотношения и характера распределённости на рабочем поле ПКА (РП ПКА).

3. Перколяционно-клеточный автомат как решёточная динамическая система.

Определение 1. Дискретная динамическая система $(F^n, B)_{n \in Z^+}$ называется решёточной динамической системой – р.д.с. и записывается:

$$(u(n+1))_j = F\left(\left\{\left(u(n)\right)_j\right\}^s\right), \text{ где}$$

$$\left\{\left(u(n)\right)_j\right\}^s = \left\{\left(u(n)\right)_i \mid |i-j| \leq s\right\}; (s \geq 1) \in Z^+, j \in Z^d, \text{ а}$$

$$F: (E^p)^{(2s+1)^d} \rightarrow E^p .$$

дифференцируемое отображение евклидова пространства в себя
 класса C^2 такое, что $|\partial F / \partial u_i| \leq M1, |\partial^2 F / \partial u_i \partial u_j| \leq M1$ для любого набора $\{u_0\}^s$.

Определение 2. Клеточный автомат – КА условимся считать заданным, если для р.д.с. выполнены следующие условия:

- 1) ПКА рассматривается как самодостаточная дискретная динамическая система, двумерное поле которой Z^2 подобно отображает отношения взаимодействия между единицами социума в его естественном социо-географическом поле.
- 2) Р.д.с. типа ПКА рассматривается как объект энтропийного подхода эргодической теории. Более того, выход ПКА на равновесное плато (см. Рис. 2 и 3) интерпретируется как наличие у него стационарного режима.
- 3) Локальные правила взаимодействия цветных клеток для $r=2$ содержат следующие выражения:

$$y_{i,j}^k(n+1) = f \left(\begin{array}{l} y_{i-2,j-2}(n)^k, y_{i-1,j-2}(n)^k, y_{i,j-2}(n)^k, y_{i+1,j-2}(n)^k, y_{i+2,j-2}(n)^k, \\ y_{i-2,j-1}(n)^k, y_{i-1,j-1}(n)^k, y_{i,j-1}(n)^k, y_{i+1,j-1}(n)^k, y_{i+2,j-1}(n)^k, \\ y_{i-2,j}(n)^k, y_{i-1,j}(n)^k, y_{i,j}(n)^k, y_{i+1,j}(n)^k, y_{i+2,j}(n)^k, \\ y_{i-2,j+1}(n)^k, y_{i-1,j+1}(n)^k, y_{i,j+1}(n)^k, y_{i+1,j+1}(n)^k, y_{i+2,j+1}(n)^k, \\ y_{i-2,j+2}(n)^k, y_{i-1,j+2}(n)^k, y_{i,j+2}(n)^k, y_{i+1,j+2}(n)^k, y_{i+2,j+2}(n)^k \end{array} \right) \quad (1)$$

$$k = \begin{cases} r & \text{if } \Delta^{r,v}(y_{p,q}^k) = (\sum_{i,j} y_{i,j}^r - \sum_{i,j} y_{i,j}^v) > 0 \\ b & \text{if } \Delta^{r,v}(y_{p,q}^k) = (\sum_{i,j} y_{i,j}^r - \sum_{i,j} y_{i,j}^v) = 0 \\ v & \text{if } \Delta^{r,v}(y_{p,q}^k) = (\sum_{i,j} y_{i,j}^r - \sum_{i,j} y_{i,j}^v) < 0 \end{cases} \quad (2)$$

где

$$y_{p,q}^k \in \left\{ \begin{array}{l} y_{i-2,j-2}(n)^k, y_{i-1,j-2}(n)^k, y_{i,j-2}(n)^k, y_{i+1,j-2}(n)^k, y_{i+2,j-2}(n)^k, \\ y_{i-2,j-1}(n)^k, y_{i-1,j-1}(n)^k, y_{i,j-1}(n)^k, y_{i+1,j-1}(n)^k, y_{i+2,j-1}(n)^k, \\ y_{i-2,j}(n)^k, y_{i-1,j}(n)^k, y_{i,j}(n)^k, y_{i+1,j}(n)^k, y_{i+2,j}(n)^k, \\ y_{i-2,j+1}(n)^k, y_{i-1,j+1}(n)^k, y_{i,j+1}(n)^k, y_{i+1,j+1}(n)^k, y_{i+2,j+1}(n)^k, \\ y_{i-2,j+2}(n)^k, y_{i-1,j+2}(n)^k, y_{i,j+2}(n)^k, y_{i+1,j+2}(n)^k, y_{i+2,j+2}(n)^k \end{array} \right\}$$

$$p \in \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}; q \in \{j-2, j-1, j, j+1, j+2\}; i, j \in \mathbb{Z}^2 \quad (3)$$

Ведём глубину состояний каждой активной клетки – её «число жизней»

$Y_0 = \{1, \dots, p-1\}, p \geq 2$; для рассматриваемого ПКА $p = 10$.

$$\text{sgn}(Y_0) = \begin{cases} 1 & \text{if } r \\ 0 & \text{if } b \\ -1 & \text{if } v \end{cases}$$

$$\text{Положим } y_{i,j}^{r,v} = y_{i,j}^r \times \text{sgn}(Y_0), i, j \in \mathbb{Z}^2. \quad (4)$$

По случайному закону и с выбранной плотностью задаются координаты; $i, j \in \mathbb{Z}^2$ для белых клеток РП ПКА. Далее переходим к построению символических образов дискретной динамической системы.

4. Символический образ дискретной динамической системы типа ПКА.

Пусть $f: M \rightarrow M$ есть гомеоморфное отображение компакта M в себя, а $C = \{M(1), M(2), \dots, M(n)\}$ конечное покрытие замкнутым множеством компакта M . Множества $M(i)$ являются ячейками покрытия. Каждому номеру i поставим в соответствие подпокрытие $C(11)$ образа ячейки $M(11)$, состоящее из тех ячеек $M(12)$, которые его пересекают:

$$C(11) = \{M(12): M(12) \cap f(M(11)) \neq 0\}$$

Множество $C(11)$ определим образом ячейки $M(11)$:

$$c(11) = \{12: M(12) \cap f(M(11)) \neq 0\}$$

Определение. Пусть G есть орграф с n вершинами, у которых i -ая вершина соответствует клетке $M(11)$ как на Рис.1. Вершины 11 и 12 связаны дугой, если $M(12) \cap f(M(11)) \neq 0$. Тогда орграф G является *символическим образом отображения f* относительно покрытия $C [1, 5]$.

	3	4	5	6
	2	1	7	8
	12	11	10	9

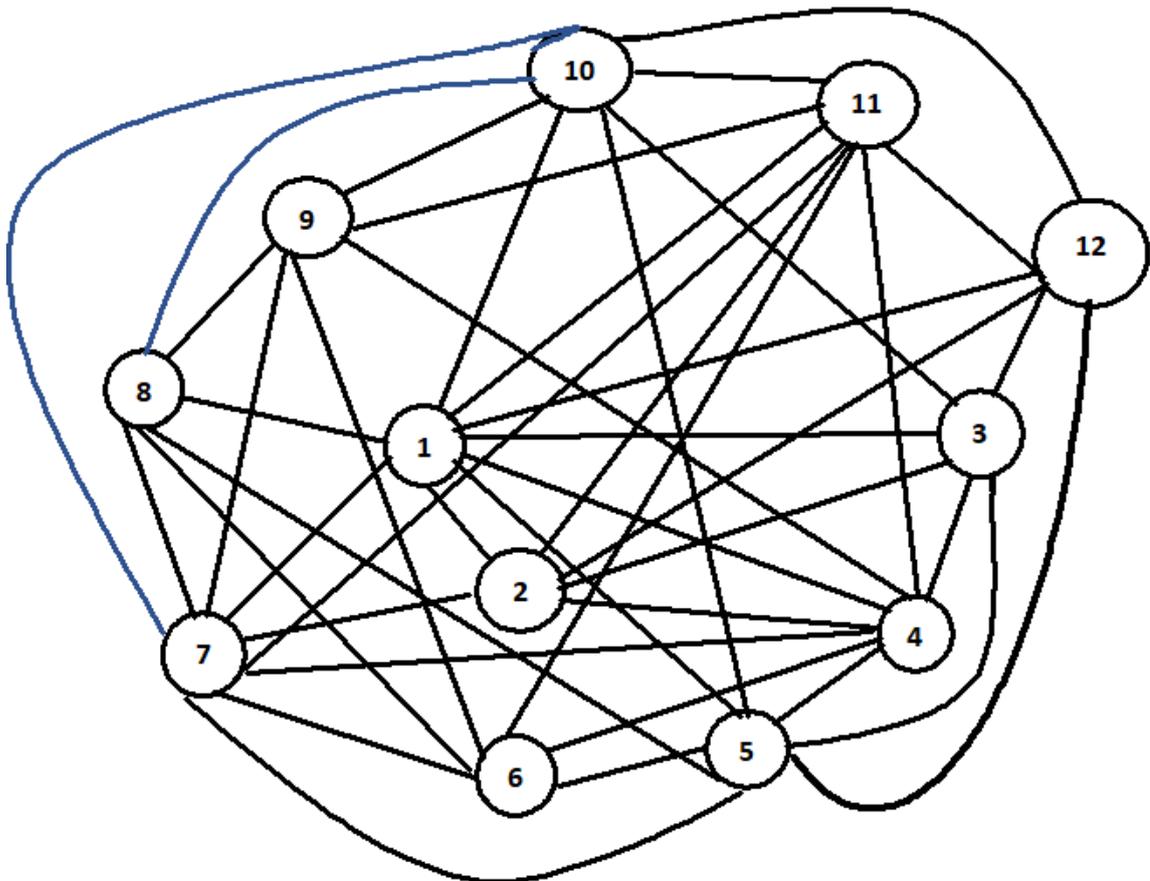


Рис.1. Пример построения графа G - символического образа части РП ПКА.

Для расчёта топологической энтропии важно знать $p(G)$ -количество графов G на РП ПКА в случае автомата Мура с $r=2$. Тогда, если сторона РП имеет длину n , а m - длина стороны прообраза G , то их число варьируется в зависимости от топологии РП, например, для K^2 , C^2 , T^2 :

$$p(G(K^2)) = (n - m + 1)^2, p(G(C^2)) = (n - m + 1) \times n, p(G(T^2)) = (n)^2 \quad (5)$$

где даны области K^2 - квадрата, C^2 - цилиндра с краем и T^2 - тора. В случае тора для последовательно увеличивающихся фрагментов РП ПКА, т.е. для графов G_m с растущим числом m посчитана Табл.1 зависимости λ_0 , т.е. максимального собственного значения матрицы смежности G_m от числа m .

Таблица 1. Расчёт значений максимального собственного значения матрицы смежности G_m от числа m , означающего размер стороны квадратного фрагмента РП ПКА, для которого строится граф G_m .

m	4	5	6	7	8
$\lambda_0(m)$	4.7	5.8	6.38	6.48	6.64

На Рис.1 показан квадрат «5X5» - фрагмент РП ПКА с плотностью d белых клеток, равной 0.52, т.е. около порога перколяции ~ 0.5 . Число вершин $|X|$ графа $G_m(X, U)$ в этом случае (одном из спектра графов [8]) равно 12.

Для определения сложности ПКА важно знать меру разнообразия порождаемых им траекторий. Для этого служит такой показатель как топологическая энтропия. Она позволяет оценить в случае предположения типа случайного процесса оценку погрешности прогноза.

5. Определение топологической энтропии как меры скорости роста разнообразия траекторий динамической системы.

Я.Г.Синай, представляя двумерный клеточный автомат в качестве динамической системы с дискретным временем (д.д.с.) как прямое произведение 2-х коммутирующих автоморфизмов T_1 и T_2 , привёл пример Ж.Тувено [7, с. 81] такой системы с конечной вполне положительной энтропией. С другой стороны, в работе [4, с.48] показано, что достаточным условием наличия бесконечной положительной энтропии у клеточного автомата является существование у него «космического корабля». В ходе ВЭ с введённым ПКА в данной НИР такой фигуры ни разу не возникало. Это позволяет выдвинуть гипотезу о наличии у этого ПКА конечной вполне положительной энтропии, которая в случае стационарного процесса оценивается сверху $\log \lambda_{\max}(A(G))$, где $A(G)$ – матрица смежности графа G [1]. Или более точно:

$$h_{top}(f) \leq \lim_{l \rightarrow +\infty} h(f, C_l) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} h(S(P_k)) = \quad (6)$$

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \log \lambda_0 (A(G)),$$

где f – отображение ПКА; C_1 – замкнутое покрытие, входящее в последовательность $\{C_l\}$; S – отображение из P_k на P_1 ; P_k – пространство допустимых путей на символическом образе – графе G_k ; $\lambda_0 = \lambda_{\max}$ – максимальное собственное число матрицы смежности $A(G)$.

6. Теоремы о вполне положительной конечной энтропии у динамической системы типа ПКА.

Теорема 1. Если конечный КА Мура с перколяцией на Z^2 - решётке как решёточная динамическая система на двумерной ориентированной компактной поверхности с дискретным временем имеет устойчивое стационарное состояние, то его топологическая энтропия конечна и вполне положительна.

Д-во. 1) Топологическая энтропия h_{top} ПКА согласно определению (3) рассчитывается на *конечном* множестве (*самодостаточность ПКА как д.д.с.*) $\{A(G)_m\}$ матриц смежности графа G_m – символического образа РП ПКА.

2) Каждая матрица смежности его графа G_m не только неотрицательна $A(G)_m \geq 0$, но и ограничена числом m , т.е. количеством вершин этого графа $|X| = \varphi(m, d)$, которое определяется только необходимой погрешностью отображения моделируемого региона при заданной плотности белых клеток.

3) Согласно т. Перрона-Фробениуса все максимальные собственные значения λ_0 этих матриц не только вещественны, но и ограничены неравенствами: \min число $\neq 0$ элементов в строках $A(G)_m \leq \lambda_0 \leq \max$ число $\neq 0$ элементов в строках $A(G)_m$. Например, в Табл.1 для $m = 4$ и собственнoгo значения λ_0 : $2 \leq \lambda_0 = 4.7 \leq 6$

4) Из этого следует, что λ_0 не только вполне положительна, но и конечна.

5) Из доказанного свойства и определения (3) вытекает $0 < h_{\text{top}} < \infty$, ч.т.д.

Теорема 2. Существует пороговое значение плотности «белых клеток» на РП ПКА, выше которого оценка h_{top} ПКА конечна и вполне положительна как бы высокая точность её определения не была назначена.

Из теории перколяции [8, с.15-18]) известно, что выше порогового значения для плотности «белых клеток» существуют только кластеры проводимости с конечным числом «цветных клеток».

1. Из доказанной Теоремы 1 для таких кластеров конечного числа 1 всегда справедливо вытекает $0 < h_{\text{top}} < \infty$.
2. Задание как угодно высокой точности, в силу свойства масштабной инвариантности (скейлинга) приведённые в пункте 1 неравенства не изменяются.

Теорема Кригера:

Пусть T эргодический автоморфизм, $h(T) < \infty$.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное образующее разбиение ξ такое, что $H(\xi) \leq h(T) + \varepsilon$. Если $h(T) < \ln k \leq h(T) + 1$ при некотором целом k , то существует образующее разбиение из k элементов.

Эта теорема показывает, что всякий эргодический автоморфизм с конечной энтропией можно реализовать как стационарный случайный процесс с дискретным временем и конечным числом состояний [11, p.51].

Это означает возможность расчёта оценки итоговой погрешности прогноза и корректной длины ветви прогноза [5]. В ниже приведённой формуле для гауссовского стационарного процесса σ – дисперсия, а h – энтропийная оценка.

$$\sigma = 2^{h-\frac{1}{2}} / \sqrt{e \times \pi} \quad (7)$$

7. О зависимости времени релаксации ПКА от рода двумерной поверхности для Z^2 - решётки и плотности белых клеток .

В ходе ВЭ с ПКА был установлен эмпирический факт (см. Табл.2.) о взаимозаменяемости при определённых условиях плотности белых клеток и рода поверхности для Z^2 - решётки.

		Percentage of blocking nodes (white cells) of the lattice					
		d(%) :	10	20	30	40	70
The genus of the surface – Number of handles -p	0 (sphere)		129/47	122/47	122/50	122/50	111/50
	3 (“pretzel”)		143/45	147/50	126/50	121/50	113/50
	5		145/46	147/47	132/49	125/50	105/50
	7		144/42	136/47	125/50	124/50	110/50

Табл. 2. Зависимость времени релаксации ПКА к состоянию равновесия от плотности белых клеток d и топологического рода p двумерной поверхности рабочего поля ПКА.

Для двух последних строк (это переход от топологического рода 5 к 7) выделена область плотности «белых клеток» - диапазон (20-70%), где этот эффект взаимозаменяемости наблюдается.

8. Результаты прикладных применений ПКА.

На ПКА был осуществлён пробный, но удачный, прогноз результатов выбора Президента РФ в 2018 г. (Рис.3.). При этом неявка отображалась «белыми клетками». Для старта автомата взяты данные Левада-центра (2018 г.) о наличии в социуме России адептов pro&contra режима [13].

На Рис.6-7 уже изображено само РП ПКА в состоянии стационарного равновесия. Здесь уже учитывалось анаморфозное распределение населения в Томской области. Под анаморфозным отображением двумерной области размещения населения понимается следующее. В результате его действия площади изображаемых территорий станут пропорциональными соответствующим им величинам закладываемого в основу анаморфозы показателя.

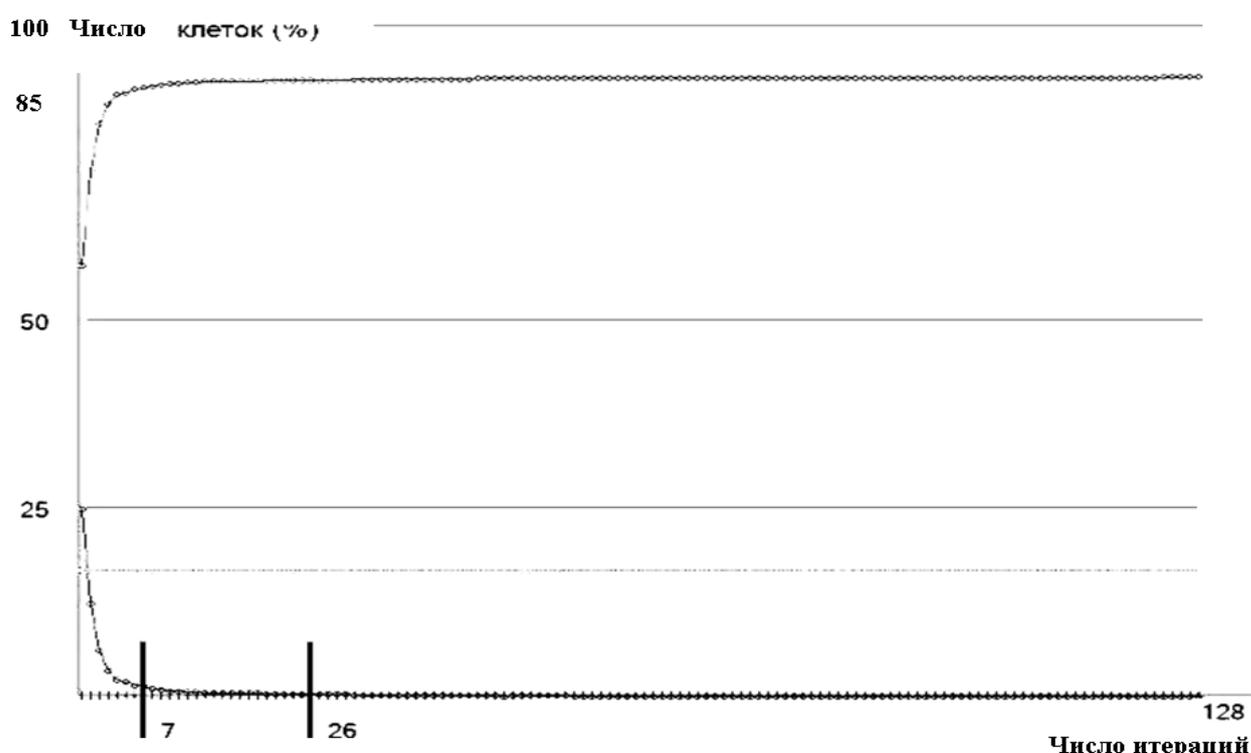


Рис. 2. Прогноз % голосов для президентских выборов (2018) – на основе данных Левады- центра.

От преобразований требуется максимально возможное сохранение площади. Они позволяют выравнивать в пространстве какие-либо плотности, взаимного расположения территориальных единиц и их формы. Сами по себе анаморфозы определяются как переход от картографического изображения, в основе которого - топографическая метрика земной поверхности, к другому изображению, в основе которого - метрика картографируемого явления.

Анаморфозы для Томской области строились ручным способом в соответствии с разработанными алгоритмами [12]. Исходим из изображения на карте РФ моделируемой социальной локальности – Рис.3.



Рис.3 Исходное картографическое изображение Томской области (номером 10 обозначен район со столицей области г. Томск).

В основе такого подхода лежит гипотеза, что несмотря на активное развитие интернета в России, - в сельской местности, малых и средних городах он ещё не настолько развит, чтобы преодолеть наследие прошлого «доверять больше межличностным отношениям близкого окружения, чем современным средствам связи» по принципу- «это не телефонный разговор». Томская область выбрана потому, что она лидер среди областей России по числу интернет- пользователей. Однако и в этой области имеется 5 из двадцати районов, где не обеспечена интернет -доступность самых востребованных услуг населения – МФЦ. И также следует помнить, что пользователей интернетом только посредством мобильных устройств в России – 13.2% (16+), на селе -16.4%, в городах (без Москвы) – 12.7% (Источник: Омнибус Gfk, 2017, вся Россия, 16+).

После анаморфозного преобразования, в основном сохраняющее топологию связей между районами области, распределение плотности активных социальных акторов в РП ПКА выглядит так, как на Рис.4.

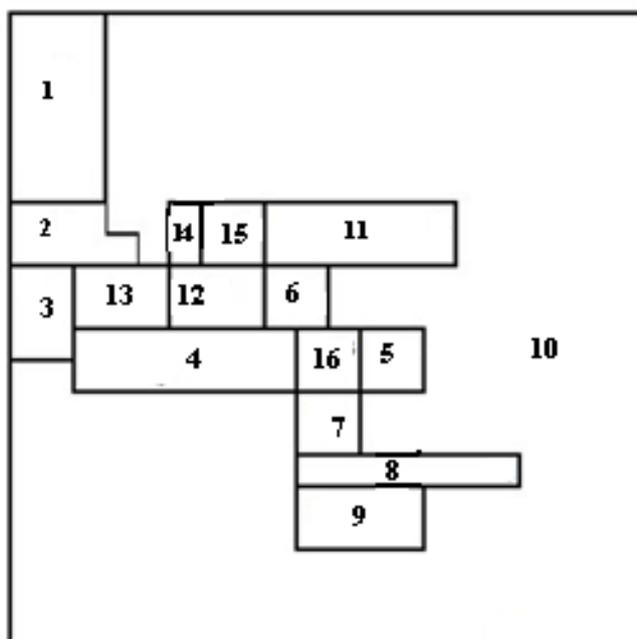


Рис.4. Контуры размещения социально-экономически активного населения Томской области с учётом сосредоточия производственных и образовательных предприятий - анаморфозное преобразование.

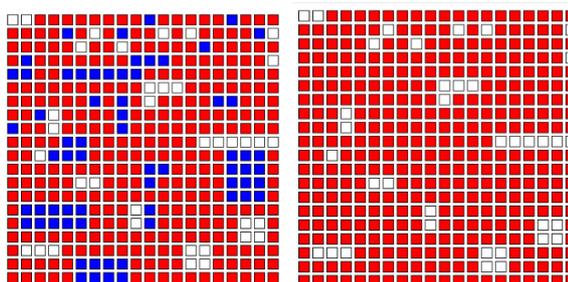


Рис.5. Стартовое (слева) и равновесное (справа) РП ПКА для социума Томской области при объявленной неявке в 10%.

Такая погрешность прогноза позволяет утверждать, что даже при пессимистичном линейном прогнозе, опираясь на скорость спада показателя одобрения деятельности президента после пенсионной реформы, к 2024 году, стартуя от 67% [13], и при неявке в 50-55% можно получить статистически различимый перевес голосов над оппозицией, если отошедшие от «традиционалистов» избиратели пополнят аполитичный, а не оппозиционный контингент.

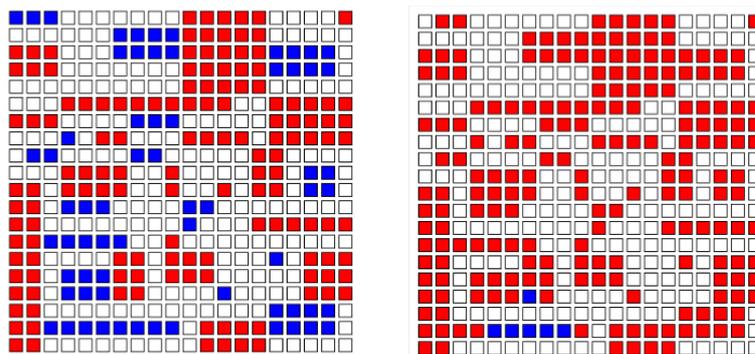


Рис.6. Стартовое (слева) и равновесное (справа) РП ПКА для социума Томской области при уточнённой неявке в 50%.

По итоговым данным ИК Томской и Новосибирской областей при неявке в 40- 41% «за» Путина В.В. проголосовал 71% явившихся избирателей [9], т.е. погрешность прогноза составила 20-24%, что на порядок слабее гэллаповской точности.

9. Выводы и заключение.

- Доказана теорема о вполне положительной конечной энтропии для перколяционно-клеточного автомата как р.д.с., находящейся в режиме около пороговой перколяции.
- Подтвердилась гипотеза о трёх основных факторах, определяющих прогноз: анаморфозная структура социума, распространённость и укоренённость в нём ценностных ориентаций.
- Адекватные прогнозы результатов выборов Президента в 2018 году как в целом по РФ, так и по ряду областей подтвердили работоспособность ПКА в качестве инструмента прогнозирования.
- Род поверхности ρ существенно влияет на процесс перколяции: с ростом рода, т.е. степени связности социума, увеличивается скорость процесса релаксации к локальному равновесию
- Уменьшение плотности d неактивных клеток решётки рабочего поля взаимозаменяемо с родом поверхности ρ .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 20-01-00229.

10. Литература

1. Ампилова Н.Б., Петренко Е.И. Об оценке энтропии символического образа динамической системы// Электр.. журн. Дифф. уравнения и процессы управления .- <http://www.Neva.Ru> / 2008.
2. Афраймович В.С. Решётчатые динамические системы. Учебное пособие / В.С.Афраймович, В.И.Некоркин, - Издательство Нижегородского гос. Ун.-т, - Н.Новгород, 1994.

3. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем . М.: «Факториал», 1999.
4. Лакштанов Е.Л., Лангваген |Е.С. Энтропия многомерных клеточных автоматов //Проблемы передачи информации, Т.42, Вып.1 2006.
5. Лоскутов А.Ю., Козлов А.А., Хаханов Ю.М. Энтропия и прогноз в теории динамических систем // Изв. Вузов «ПНД», т.17, № 4, 2009, с. 98-114.
6. Осипенко Г.С. и Ампилова Н.Б. Введение в символический анализ динамических систем: Учебное пособие. – СПб.: Изд.-во С.- Петерб. Ун-та, 2005.
7. Синай Я.Г. Современные проблемы эргодической теории. - М.: Физматлит. 1995.
8. Тарасевич Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы: Учебное пособие. М.: Едиториал УРСС, 2002.
9. Шведовский В.А. О вычислении социальных констант в моделировании эволюции архаичного социума // Пространство и человек, №4, М.: 2013.
10. [vibory-rf.ru>rezultaty...prezidenta-rossii-2018](http://vibory-rf.ru/rezultaty...prezidenta-rossii-2018)
11. Корнфельд И.П., Синай Я.Г. Энтропийная теория динамических систем. Глава 3. Общая эргодическая теория групп преобразований с инвариантной мерой. I. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ- 2, Редактор-консультант профессор Я.Г.Синай. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 2. (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М.,1985
12. С.М.Гусейн-Заде, В.С.Тикунов Анаморфозы: что это такое?. Эдиториал УРСС, Москва, 1999.
13. Шведовский В.А. К прогнозу уровня «доверия институтам власти» с позиций перколяционно-клеточных автоматов // Математическое моделирование и информатика социальных процессов: сборник трудов, выпуск № 21 / Гл. ред. А.П. Михайлов. — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2019 — 162 с.
14. Михайлов А.П., Маревцева Н.А. Модели информационной борьбы // Математическое моделирование. Т. 23. №10. С 19-32. 2011.
15. Петров А.П., Маслов А.И., Цаплин Н.А. Моделирование выбора позиций индивидами при информационном противоборстве в социуме // Математическое моделирование, 2015. Т.27, №12. С.137-148.
16. Петров А.П., Прончева О.Г. Моделирование выбора позиций индивидами при информационном противоборстве с двухкомпонентной повесткой // Математическое Моделирование, 2019. Т. 31. №7. С. 91-108.

References

1. Ampilova N.B., Petrenko E.I. Ob otsenke entropii simvolicheskogo obraza dinamicheskoy sistemy/ / Elektr.. zhurn. Diff. uravneniya i protsessy upravleniya .- [http: //www. Neva. Ru](http://www.Neva.Ru) / 2008.

2. Afrajmovich V.S. Reshyotchatye dinamicheskie sistemy. Uchebnoe posobie / V.S.Afrajmovich, V.I.Nekorkin, - Izdatel'stvo Nizhegorodskogo gos. Un.-t, - N.Novgorod, 1994.
3. Katok A.B., Khasselblat B. Vvedeniye v sovremennuyu teoriyu dinamicheskikh sistem . M.: «Faktorial». 1999.
4. Lakshтанov E.L. Langvagen E.S. Entropiya mnogomernykh kletochnykh avtomatov //Problemy peredachi informatsii. T.42. Vyp.1 2006.
5. Loskutov A.Yu., Kozlov A.A. Khakhanov Yu.M. Entropiya i prognoz v teorii dinamicheskikh sistem // Izv. Vuzov «PND». t.17. № 4. 2009. s. 98-114.
6. Osipenko G.S. i Ampilova N.B. Vvedeniye v simvolicheskiy analiz dinamicheskikh sistem: Uchebnoye posobiye. - SPb.: Izd.-vo S.- Peterb. Un-ta. 2005.
7. Sinay Ya.G. Sovremennyye problemy ergodicheskoy teorii. - M.: Fizmatlit. 1995.
8. Tarasevich Yu.Yu. Perkolyaciya: teoriya, prilozheniya, algoritmy: Uchebnoe posobie. M.: Editorial URSS, 2002.
9. Shvedovsky V. A. On calculating social constants in modeling the evolution of archaic society // Space and man, no. 4, Moscow: 2013.
10. [vibory-rf.ru>rezultaty...prezidenta-rossii-2018](http://vibory-rf.ru/rezultaty...prezidenta-rossii-2018)
11. Kornfel'd I.P., Sinaj YA.G. Entropijnaya teoriya dinamicheskikh sistem. Glava 3. Obshchaya ergodicheskaya teoriya grupp preobrazovanij s invariantnoj meroy. I. DINAMICHESKIE SISTEMY- 2, Redaktor-konsul'tant professor YA.G.Sinaj. «Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya. Tom 2. (Itogi nauki i tekhn. VINITI AN SSSR)». M.,1985
12. S.M.Gusejn-Zade, V.S.Tikunov Anamorfozy: chto ehto takoe?. Ehditorial URSS, Moskva, 1999.
13. Shvedovskij V.A. K prognozu urovnya «doveriya institutam vlasti» s pozicij perkolyacionno-kletochnykh avtomatov . // Matematicheskoe modelirovanie i informatika social'nykh processov: sbornik trudov, vypusk № 21 / Gl. red. A.P. Mikhajlov. — M.: IPM im. M.V. Keldysha, 2019 — 162 s.
14. Mikhailov A. P., Marevtseva N. A. Models of information struggle // Math. Models Comput. Simul., Vol. 4, No. 3 (2012), P. 251–259.
15. Petrov A. P., Maslov A. I., Tsaplin N. A. Modeling Position Selection by Individuals during Information Warfare in Society // Mathematical Models and Computer Simulations, 2016, Vol. 8, No. 4, pp. 401–408.
16. A. P. Petrov, O. G. Proncheva. Modeling Position Selection by Individuals during Informational Warfare with a Two-Component Agenda // Mathematical Models and Computer Simulations, 2020, Vol. 12, No. 2, pp. 154–163.

Приношу благодарность студентам ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова С. Сухову и И. Панфёровой за проведённые эксперименты с ПКА.