ИПМ им.М.В.Келдыша РАН

Абрау-2020 • Труды конференции

Н.Н. Непейвода, И.Н. Григоревский,
Анд.В. Климов, Ю.А. Климов,
С.А. Романенко

Поразрядный параллелизм сложения действительных чисел за счет избыточности представления

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Непейвода Н.Н., Григоревский И.Н., Климов Анд.В., Климов Ю.А., Романенко С.А. Поразрядный параллелизм сложения действительных чисел за счет избыточности представления // Научный сервис в сети Интернет: труды XXII Всероссийской научной конференции (21-25 сентября 2020 г., онлайн). — М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2020. — С. 486-498.
https://doi.org/10.20948/abrau-2020-54
https://keldysh.ru/abrau/2020/theses/54.pdf

Видеозапись выступления

Размещена также презентация к докладу

Поразрядный параллелизм сложения действительных чисел за счет избыточности представления

Н.Н. Непейвода[1], И.Н. Григоревский[1],

Анд.В. Климов[1,2], Ю.А. Климов[1,2], С.А. Романенко[1,2]

[1] ИПС им. А.К. Айламазяна РАН, г. Переславль-Залесский
[2] ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва

Аннотация. Дано введение в тему и представлено состояние работ по проекту реализации высокоточной арифметики в системе счисления с перекрытием, обеспечивающей поразрядный параллелизм операций сложения и вычитания действительных чисел с ограниченным распространением переноса из разряда в разряд лишь на 1–2 разряда. Дана историческая справка о происхождения идей такой системы счисления в истории математики, восходящей к О.-Л. Коши (1840) и Л.Э.Я. Брауэру (1921). Продемонстрирована поразрядно-параллельная схема сложения с переносом лишь на один следующий разряд в системе с двумя дополнительными цифрами.

Ключевые слова: арифметика произвольной точности, длинная арифметика, поразрядный параллелизм, система счисления с перекрытием

Digit-wise parallelism of addition of real numbers due to redundancy of representation

N.N. Nepejvoda[1], I.N. Grigorevsky[1],
And.V. Klimov[1,2], Yu.A. Klimov[1,2], S.A. Romanenko[1,2]

[1] Ailamazyan Program Systems Institute of RAS, Pereslavl-Zalessky
[2] Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow

Abstract. An introduction and the state of work of the project for the implementation of high-precision arithmetic in an overlaying numeration system, which provides digit-wise parallelism of operations of addition and subtraction of real numbers with restricted carry propagation only by 1–2 bits, is presented. The historical origins of ideas behind such numeration systems in the history of mathematics, dating back to O.-L. Cauchy (1840) and L.E.J. Brouwer (1921), are outlined. A draft of a digit-wise parallel addition circuit with carry propagation

only to the next digit in a numeration system with two additional digits is demonstrated.

Keywords: arbitrary-precision arithmetic, bignum arithmetic, digit-wise parallelism, overlaying numeration system

1. Введение

Постановка задачи. Современные задачи математического моделирования требуют увеличения точности вычисления и разрядности чисел, некоторые — до тысяч и более битов. Поразрядно-параллельная реализация операций над столь длинными числам сталкивается с проблемой переноса: в обычной схеме сложения столбиком перенос выполняется в худшем случае за время пропорциональное разрядности, в то время как интуитивно ожидается, что сложение может быть выполнено с поразрядным параллелизмом за один такт. Например, при сложении двух двоичных чисел на рис. 1 слева, дробная часть результата состоит из одних единиц; при замене младшего разряда второго числа с 0 на 1, происходит перенос вдоль всей мантиссы (рис. 1 справа). Существуют более сложные схемы переноса за логарифмическое время [8, глава 29], но на них приходится тратить площадь кристалла.

```
    0,1010101010101010101010101          0,1010101010101010101010101
  + 0,0101010101010101010101010        + 0,0101010101010101010101011
  = 0,1111111111111111111111111        = 1,0000000000000000000000000
```

Рис. 1. Сложение двух чисел, отличающихся единицей младшего разряда

Радикальным решением могла бы быть такая система счисления, в которой вообще отсутствуют переносы на неограниченное число разрядов. Однако, как на это обратил внимание Л.Э.Я. Брауэр еще сто лет тому назад [1], неограниченные переносы присутствуют в любой позиционной системе счисления, в которой число цифр совпадает с основанием системы.

Брауэра волновала фундаментальная математическая задача, которая у него возникла при разработке *интуиционистской математики*: как представлять действительные числа и другие (потенциально) бесконечные математические объекты таким образом, чтобы выполнялся *принцип непрерывности*? Его также называют *принципом конечной информации* [10, 12, 13, 14]:

> *Любая конечная часть результата должна выдаваться по некоторой конечной части аргумента(ов).*

Представление действительных чисел (потенциально) бесконечно в сторону младших разрядов. Конечная часть такого представления — это последовательность разрядов от самого старшего до некоторого младшего.

Арифметические операции, например сложение, чтобы удовлетворять требованиям интуиционистской математики, должны выдавать каждый фрагмент представления от старших разрядов, «потребив» некоторое конечное число разрядов аргументов. Однако, как мы видим на рис. 1, если операция сложения в двоичной системе выдает подряд единицы по старшим частям аргументов, мы не знаем не сбросит ли она их всех в ноль в какой-то будущий момент. Более того, как мы знаем с первого класса, сложение и умножение столбиком выполняются от младших разрядов к старшим, а Брауэру для действительных чисел нужны были другие алгоритмы операций — от старших разрядов к младшим, поскольку бесконечность в их предоставлении уходит в сторону младших разрядов.

Мы наблюдаем интересный феномен: с виду совершенно различные вопросы из противоположных на оси теория/практика областей математики: основания математики, с одной стороны, и поразрядное распараллеливание арифметических операций, с другой, — натолкнулись на похожие подводные камни. Это значит, что проблема достойна того, чтобы ею систематически заниматься, но при этом не нужно ожидать быстрых простых результатов.

Подходы к решению. Первое обнаруженное нами (благодаря А.Б. Шворину [15, 16]) решение, близкое к нашей работе, восходит к статье О.-Л. Коши 1840-го года [3]. Коши заметил, что в системе счисления с основанием 10, но с расширенным набором из 11 цифр от **−5** до **5**, переносы ограничены, что может облегчать вычисления и уменьшать ошибки.

Брауэр [1] для решения своей задачи — разработки арифметических операций, удовлетворяющих принципу непрерывности, — сконструировал систему счисления с основанием 2 с тремя цифрами. В такой системе появилась возможность последовательно получать старшие разряды результата, постепенно потребляя разряды слагаемых, удовлетворяя принципу непрерывности и конечной информации.

Дополнительные цифры приводят к избыточности представления, когда интервалы числовой оси, соответствующие цифрам, пересекаются, перекрываются. Поэтому такие системы называются *системами с перекрытием.* Именно благодаря такой избыточности и перекрытиям удается «гасить» неограниченное распространение переноса при сложении и достигать поразрядного параллелизма лишь с локальным взаимодействием соседних параллельных блоков. Коши и Брауэр использовали по одной дополнительной цифре сверх необходимых в данном основании. Можно добавлять и больше цифр, получая еще какие-либо преимущества (одно из которых мы покажем ниже на рис. 6).

Мы развиваем эти идеи классиков дальше с целью доведения систем счисления с избыточными цифрами до практики и схемотехнической реализации в аппаратуре.

Другие и близкие работы. С наступлением компьютерной эры и особенно в последние десятилетия разработка альтернативных представлений чисел стала очень популярной. Опубликовано множество работ, которые невозможно обозреть в краткой статье. Из свежих достижений отметим работы группы под руководством Christiane Frougny [4, 5], изучавшей необходимые условия для существования параллельного алгоритма сложения.

Другое направление с большой историей — модулярная арифметика на основе системы остаточных классов (СОК). Интересно, что в СССР в 1960-е годы в Зеленограде были разработаны компьютеры на модулярной арифметике для использования в системах ПРО [9]. По утверждению Б.М. Малашевича [9] ЭВМ «К-340А» была первой в мире, преодолевшей рубеж 1 млн оп/сек (на числах с фиксированной точкой в диапазоне $\pm 1.6 \cdot 10^{12}$), причем он полагает, что модулярная арифметика дала 7-кратный прирост производительности по сравнению с тем, что было достижимо на той аппаратуре. Из современных работ глубокие результаты получены группой под руководством В.С. Князькова [6, 7], решившей ряд теоретических проблем и разработавших алгоритмы и реализацию на графических сопроцессорах всех арифметических операций, включая деление. Отметим, что для деления потребовалась приближенная оценка промежуточных результатов, которая вычисляется с помощью интервальной арифметики. Арифметика, о которой речь в настоящей статье, является интервальной по существу. Это открывает возможность ее применения в модулярном делении.

С более подробной исторической справкой об этих и других близких работах можно ознакомиться во введении статьи [15].

Состояние работ и содержание статьи. За последние годы авторы вместе с коллегами проверили теоретическое исследование систем счисления с перекрытием, были изучены свойства, общие и частные случаи таких систем [11, 12, 13, 14, 15, 16]. В настоящее время ведется разработка схемотехнических решений на основе ПЛИС с дальнейшей целью провести экспериментальное исследование на ряде прикладных задач и оценить, оправдано ли применение таких систем.

В данной статье:

1. Дано введение в системы счисления с перекрытием и историческая справка.
2. Продемонстрирована поразрядно-параллельная схема сложения с переносом лишь на один следующий разряд в системе с двумя дополнительными цифрами. Насколько нам известно, наблюдение, что такая схема возможна, сделано нами впервые. В предшествующих работах чаще решалась задача уменьшения числа дополнительных цифр, что вызывало перенос на бóльшее число разрядов.

2. Системы с перекрытием

В качестве отправной точки построения систем с перекрытием рассмотрим привычную нам двоичную систему счисления. На рис. 2 изображен интервал $[0,1)$ числовой оси. Скобка от 0 до 1 вверху указывает диапазон чисел, представление которых начинается с $\mathbf{0}$. Поделим интервал пополам. Запись чисел из $[0,1/2)$ начинаются с **0.0**; в интервале $[1/2,1)$ — с **0.1**, что показано соответствующими скобками.

Перед тем, как перейти к системам с перекрытием, запасемся наблюдением, что представления в позиционной системе счисления, такие как **0**, **0.0**, **0.1**, можно считать изображением не одного действительно числа, стоящего в начале интервала, а самого интервала, и, имея в виду такую семантику, определять арифметические операции, отображающие интервалы в интервалы. При этом часто придется выдавать ответ в виде оценки сверху, обобщая результирующие интервалы до более широких, поскольку точные интервалы окажутся непредставимыми. В обычных позиционных системах счисления такая трактовка не используется. Однако в системах с перекрытием, наоборот, стандартная интерпретация как обозначение точного числа порождает определенные проблемы, а интервальная семантика операций удобна и понятна.

Теперь рассмотрим самую простую систему счисления с перекрытием, называемую нами «*три половинки*». Основание системы по-прежнему 2, то есть ее можно считать двоичной. Однако теперь у нас будут три цифры: кроме **0** и **1** еще одна дополнительная, которую изобразим как **½**. Эта цифра будет обозначать интервал $[1/4,3/4)$. Числа, а также более мелкие интервалы, входящие в него, получат еще одно изображение **0.½** в первых двух цифрах. Это интервал указан на рис. 3 скобкой под числовой осью. Заметим, что левая и правая половины этого интервала записываются с помощью трех цифр двумя способами, например, правая часть — в виде **0.10** и **0.½** (нижняя скобка на рис. 3).

Мы получили систему, в которой для изображения чисел и интервалов той же точности используется алфавит из бóльшего числа цифр, то есть с этой стороны имеем «убытки». Но именно эта избыточность позволяет «гасить» переносы, «поглощать» их дополнительными цифрами. Чтобы это увидеть, надо формально расписать таблицы операций сложения и вычитания. Некоторые из них приведены в статье [14]. Таблицы операций для систем с перекрытием составляются неоднозначно, и вариант можно выбирать из других соображений — эстетических или практических, схемотехнических.

Как известно из теории и практики обычных позиционных систем, симметричные системы с цифрами противоположного знака (как та, которую использовал Коши [3]), имеют определенные преимущества. Во-первых, отрицание числа реализуется тривиально, а алгоритм вычитания полностью аналогичен и симметричен сложению. Во-вторых, погрешность,

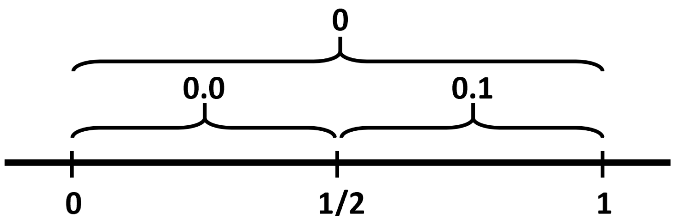

Рис. 2. Интервалы, соответствующие цифрам в обычной двоичной системе счисления

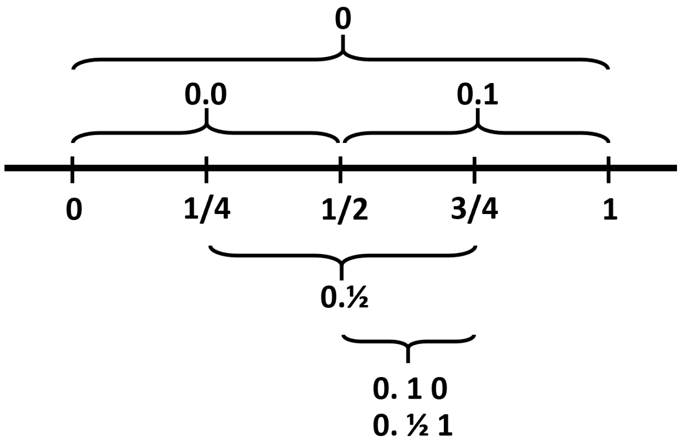

Рис. 3. Интервалы, соответствующие цифрам в системе счисления с основанием 2 и дополнительной цифрой ½

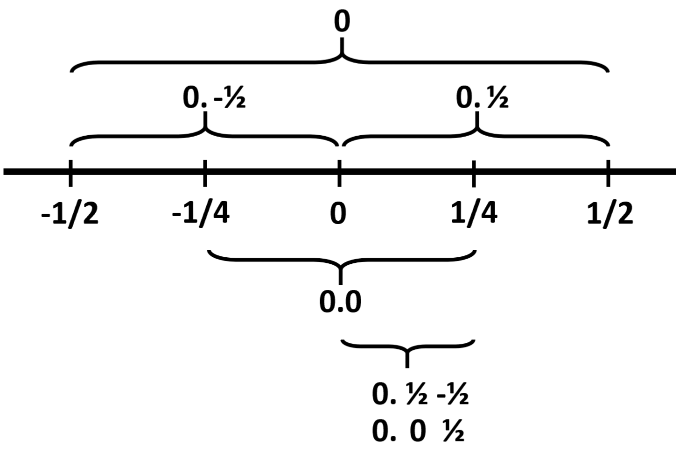

Рис. 4. Интервалы, соответствующие цифрам в *симметричной* системе счисления с основанием 2 и тремя цифрами **-½**, **0**, **½**

округления, а в нашем случае — интервалы, вычисляются симметрично, без смещения в какую-либо сторону.

Симметричность требует нечетного числа цифр и легко реализуется, например, в троичной системе счисления с цифрами **–1**, **0**, **1**, как было в

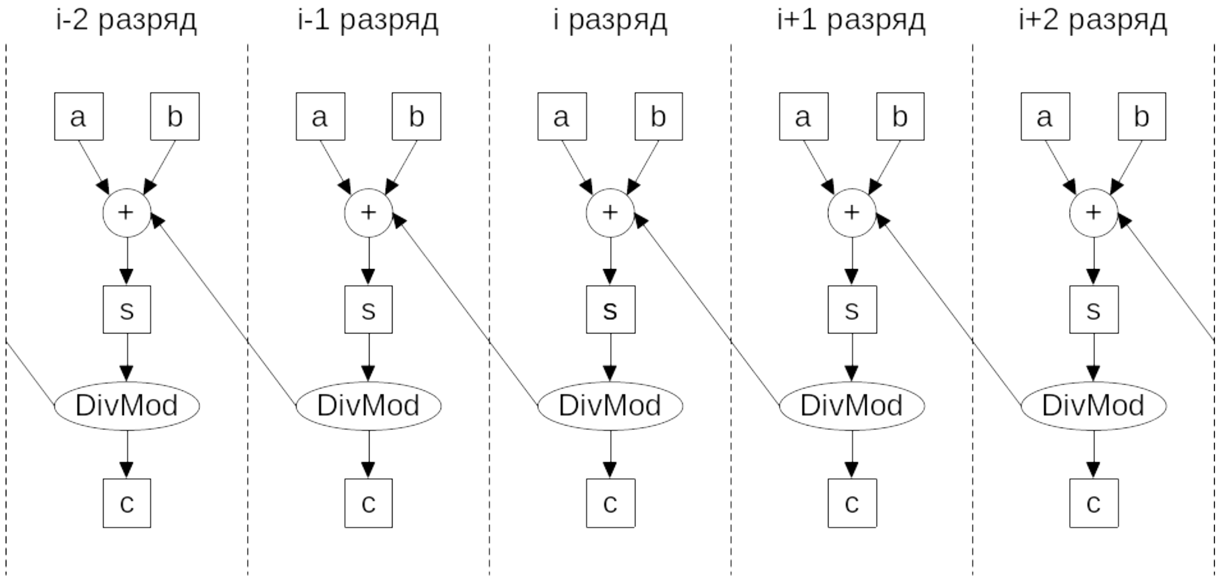

Рис. 5. Сложение в классической позиционной системе счисления

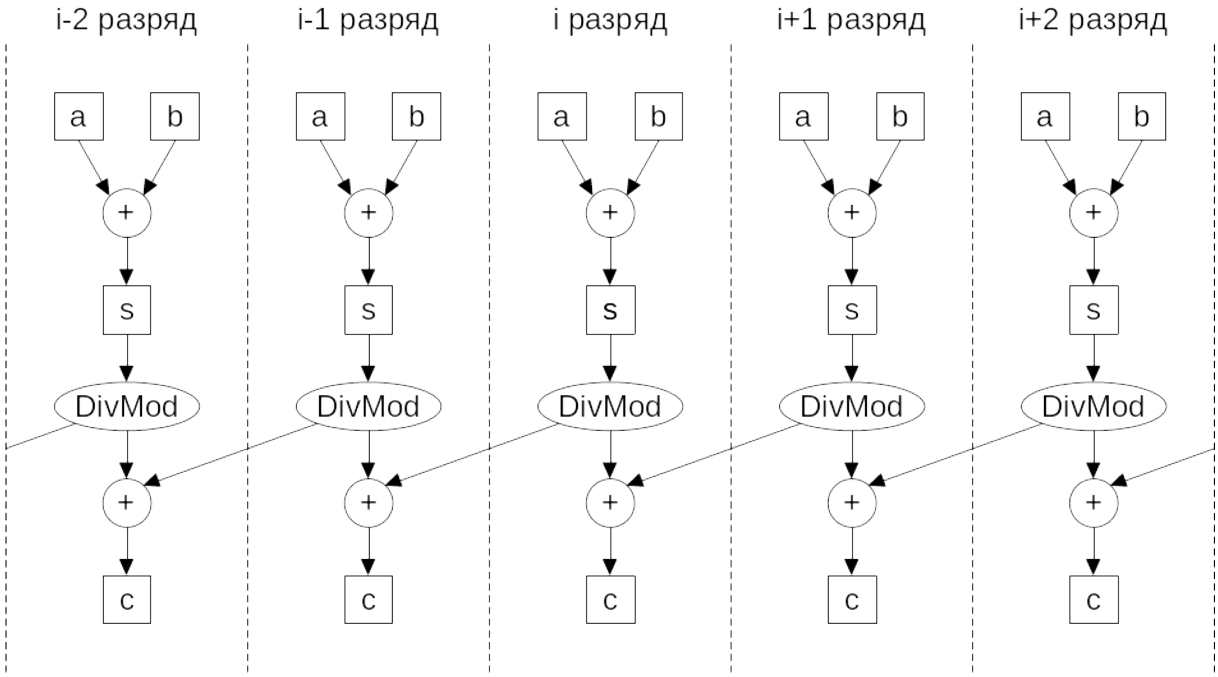

Рис. 6. Сложение в позиционной системе счисления с перекрытием
с двумя дополнительными цифрами

советской ЭВМ «Сетунь» [2]. Так выгодно поступить и в двоичной системе с перекрытием с тремя цифрами. На рис. 4 изображена система с цифрами **-½**, **0**, **½**. По сравнению с рис. 3 все надписи и обозначения сдвинуты на – ½.

3. Перенос в схемах сложения

Проиллюстрируем, как выглядят схемы сложения с переносом в классических системах счисления и в системах с перекрытием с «лишними» цифрами.

На рис. 5 изображена простейшая схема поразрядного сложения двух чисел. Входы a и b — это соответствующие цифры двух чисел. Слева старшие разряды, справа младшие. Разряды пронумерованы по возрастанию в сторону младших разрядов. Поскольку сумма s разрядов a и b может быть больше основания системы счисления, она разбивается на перенос и цифру операцией DivMod по модулю основания системы счисления.

На схеме хорошо виден путь потенциально неограниченного переноса справа налево: …+, s, DivMod, +, s, DivMod, +, s, DivMod…

Рис. 6 показывает, как изменяется аналогичная схема для системы сложения с перекрытием. Перенос также возникает, поскольку дополнительных цифр недостаточно, чтобы изображать суммы цифр s. Но оказывается, что для переноса «хватает места» в следующем старшем разряде или в двух старших. Здесь изображен более простой случай, когда перенос «поглощается» одним разрядом. Так бывает, когда система имеет основание не меньше 3 и содержит две дополнительных цифры.

Видно, что теперь нет длинных путей переноса, а есть лишь путь DivMod, +, c.

4. Заключение

В статье и докладе было дано введение в тему высокоточной арифметики с избыточным представлением чисел и понятие системы счисления с перекрытием, в которых возможен поразрядный параллелизм сложения и вычитания действительных чисел благодаря ограниченному переносу из разряда в разряд. Умножение и деление также ускоряются постольку, поскольку они используют параллельные сложение и вычитание. Было проиллюстрировано, как в некоторых случаях (при двух дополнительных цифрах) выглядит схема сложения с переносом лишь на 1 следующий разряд. Мы ведем разработку схемотехнических решений для реализации таких арифметических операций в ПЛИС (FPGA) с дальнейшей целью провести экспериментальное исследование эффекта и полезности такой арифметики на различных прикладных задачах.

Удивляет, что несмотря на достаточно длинную историю теоретического изучения подобных систем, нам неизвестно, чтобы они были доведены до удобной практической реализации и широкого тестирования на прикладных задачах. Возможно при всех попытках не достигалась желаемая эффективность и получались отрицательные результаты, которые в современной науке, к сожалению, не принято публиковать. С другой стороны, не исключено, что такая арифметика была неадекватна предыдущему уровню развития аппаратных средств.

Например, современный большой объем схем, загружаемых в ПЛИС, создает качественно новые возможности, чем имелись раньше. Понимая алгоритмические проблемы, еще требующие решения, и отдавая себе отчет в полезности лишь для ограниченного класса задач, мы, тем не менее, полагаем, что необходимо предоставить пользователям реализацию длинных чисел на основе систем с перекрытием (как и других представлений) в удобном для прикладных программистов виде для легкого экспериментирования с задачами, требующими высокой точности и интервальной арифметики.

Возможность для прикладных математиков непринужденного экспериментирования с новыми средствами — ключевой фактор их развития и доведения до широкой практики. Математики не задумываясь отвечают «да, давайте!» на вопрос, не хотите ли пересчитать вашу задачу с высокой точностью и узнать, на сколько погрешности округления влияют на результат, даже если потребуется оставить ее на (супер)компьютере на ночь вместо того, получить ответ в пределах часа на ноутбуке. Но как только вы им скажите, что для этого надо переписать их любимую программу на C/C++ или Фортране, заменив операции в арифметических выражениях на вызовы библиотечных функций, или перекодировать программу на другом языке типа Питона, в котором длинная арифметика сразу встроена в реализацию, следует другая реакция: «нет, не надо; лучше пойду подумаю». Новая высокоточная арифметика — будь она модулярной, с перекрытием или просто с длинным представлением в позиционной системе, будь она реализованной в центральном процессоре или в ускорителе типа GPGPU или ПЛИС — должна быть бесшовно интегрирована с популярными языками. Переход от программ с обычной арифметикой (на типах int, long, float и double) к программам с высокоточной арифметикой должен в простейшем случае осуществляться лишь заданием некоторых опций компилятору. Реализация таких средств не есть задача разработки новых представлений, алгоритмов и программ операций над числами (которым посвящена данная статья), а обычная задача системного программирования, требующая известных ресурсов. К сожалению, нам неизвестны такие системы. Их отсутствие является одним из возможных тормозов развития данного направления.

Помимо разнообразных математических задач, где длинная арифметика в сотни, тысячи и больше битов может помочь получить новую информацию от вычислительного эксперимента, укажем еще на два класса, где система счисления с перекрытием может быть выигрышна:

1. Арифметика в системах счисления с перекрытием по существу интервальная: конечный набор цифр имеет семантику интервала, к которому принадлежат все числа, начинающиеся с этого набора. Тем самым, она применима везде, где требуется интервальная арифметика для оценки точности вычислений. Такая арифметика имеет

принципиальный недостаток: интервалы слишком быстро «расползаются» и часто не дают никакой полезной информации. Поэтому интервальная арифметика должна использоваться совместно с длинными числами, чтобы было легко пересчитать с бóльшей разрядностью.

2. Операции в системах с перекрытием выполняются от старших разрядов к младшим. (Напомним, что именно ради этого ее использовал Л.Э.Я. Брауэр [1]). Благодаря этому, арифметические выражения могут быть реализованы конвейерными схемами для ПЛИС, «прокачивающими» длинные числа от старших разрядов к младшим. Это будет параллелизм другого типа: не одновременная обработка многих разрядов, о котором была речь выше, а последовательный, конвейерный. При этом появляется возможность контролировать точность динамически, «вытягивая» из вычислительной схемы столько цифр результата сколько нужно, «подкачивая» необходимое число цифр аргументов.

Это темы будущих исследований.

Благодарности. Авторы выражают признательность А.Б. Шворину за плодотворные обсуждения, идеи и комментарии по тематике статьи, а также Арк.В. Климову за содержательные советы по улучшению презентации и статьи.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российской Федерации в лице Минобрнауки России (идентификатор № RFMEFI61319X0092).

Литература

1. Brouwer L.E.J. Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung? (Does Every Real Number Have a Decimal Expansion?) // Mathematische Annalen. — 1921, 83(3–4). — P. 201–210. — DOI: 10.1007/BF01458382. — English translation in: Mancosu P. (ed.), From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s. — Oxford: Oxford University Press, 1998. — P. 28–35.
2. Brusentsov N.P., Alvarez J.R. Ternary Computers: The Setun and the Setun 70 // Perspectives on Soviet and Russian Computing. SoRuCom-2006. IFIP Advances in Information and Communication Technology. — Vol 357. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2011. — DOI: 10.1007/978-3-642-22816-2_10.
3. Cauchy A.-L. Sur les moyens d’éviter les erreurs dans les calculs numériques (On Ways to Avoid Errors in Numerical Calculations) // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. — 1840, tome XI. — P. 789–798. — Reprinted in: Cauchy A.-L. Œuvres complètes, série 1, tome 5. — 1885. — P. 431–442. — URL: http://sites.mathdoc.fr/cgi-bin/oeitem?id=OE_CAUCHY_1_5_431_1 .

4. Frougny Ch., Sakarovitch J. Number Representation and Finite Automata // Berthé V., Rigo M. (Eds.), Combinatorics, Automata and Number Theory (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 135). — Cambridge : Cambridge University Press, 2010. — P. 34–107. — DOI: 10.1017/CBO9780511777653.003 .
5. Frougny Ch., E. Pelantová E., Svobodová M. Parallel Addition in Non-Standard Numeration Systems // Theoretical Computer Science. — 2011, 412(41). — P. 5714–5727. — DOI: 10.1016/j.tcs.2011.06.028 .
6. Исупов К.С., Князьков В.С. Арифметика многократной точности на основе систем остаточных классов // Программные системы: теория и приложения. — 2016, 7:1(28). — С. 61–97. — DOI: 10.25209/2079-3316-2016-7-1-61-97 .
7. Исупов К.С., Князьков В.С. Матрично-векторное умножение многократной точности на графическом процессоре // Программные системы: теория и приложения. — 2020, 11:3(46). — С. 33–59. — DOI: 10.25209/2079-3316-2020-11-3-33-59 .
8. Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л. Алгоритмы: построение и анализ : Пер с англ. — М. : МЦНМО, 1999. — 960 с. — ISBN 5-900916-37-5. — URL: https://istina.msu.ru/publications/book/171753101/ .
9. Малашевич Б.М. Краткие основы и история создания отечественных модулярных ЭВМ. Истоки модулярной арифметики // Сборник трудов SoRuCom-2017. Четвертая Международная конференция Развитие вычислительной техники в России и странах бывшего СССР: история и перспективы». Зеленоград, 3–5 октября 2017 г. — М. : ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г.В. Плеханова», 2017. — С. 193–207. — URL: https://www.computer-museum.ru/books/SORUCOM_2017_1.pdf .
10. Непейвода Н.Н. Конструктивная математика: обзор достоинств, недостатков и уроков I // Логические исследования: ежегодник. — 2011, 17. — М.–СПб : 2011. — С. 191–239. — DOI: 10.21146/2074-1472-2011-17-0-191-239 .
11. Непейвода Н.Н. Аддитивные системы представления чисел: несколько замечаний // Программные системы: теория и приложения. — 2017, 8:4(35). — С. 101–115. — DOI: 10.25209/2079-3316-2017-8-4-101-115 .
12. Непейвода Н.Н., Григоревский И.Н., Лилитко Е.П. О представлении действительных чисел // Программные системы: теория и приложения. — 2014, 5:4(22). — С. 105–121. — URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2014_4_105-121.pdf .
13. Nepejvoda N.N., Grigorevsky I.N. Some Issues on Linear Numeration Systems // IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM). — 2019, 15(6), Series 4. — P. 47–50. — URL: http://www.iosrjournals.org/iosr-jm/papers/Vol15-issue6/Series-4/E1506044750.pdf .
14. Nepejvoda N.N., Grigorevsky I.N., Klimov And.V., Klimov Yu.A., Romanenko S.A. Computational Aspects of Various Number Representations

// Test Engineering and Management. — 2020, 83. — P. 28224–28231. — URL: http://www.testmagzine.biz/index.php/testmagzine/article/view/12901.
15. Шворин А.Б. Параллельное сложение вещественных чисел в системах счисления с перекрытием // Программные системы: теория и приложения. — 2015, 6:2(25). — С. 101–117. — DOI: 10.25209/2079-3316-2015-6-2-101-117 .
16. Shvorin A.B. Digit-Wise Parallel Addition of Real Numbers in Overlaying Numeration Systems // Asian Academic Research Journal. — 2016, 3(1). — URL: https://pat.keldysh.ru/~art/publications/2016-01-Shvorin-Parallel-Addition.pdf .

References

1. Brouwer L.E.J. Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung? (Does Every Real Number Have a Decimal Expansion?) // Mathematische Annalen. — 1921, 83(3–4). — P. 201–210. — DOI: 10.1007/BF01458382. — English translation in: Mancosu P. (ed.), From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s. — Oxford: Oxford University Press, 1998. — P. 28–35.
2. Brusentsov N.P., Alvarez J.R. Ternary Computers: The Setun and the Setun 70 // Perspectives on Soviet and Russian Computing. SoRuCom-2006. IFIP Advances in Information and Communication Technology. — Vol 357. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2011. — DOI: 10.1007/978-3-642-22816-2_10.
3. Cauchy A.-L. Sur les moyens d'éviter les erreurs dans les calculs numériques (On Ways to Avoid Errors in Numerical Calculations) // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. — 1840, tome XI. — P. 789–798. — Reprinted in: Cauchy A.-L. Œuvres complètes, série 1, tome 5. — 1885. — P. 431–442. — URL: http://sites.mathdoc.fr/cgi-bin/oeitem?id=OE_CAUCHY_1_5_431_1 .
4. Frougny Ch., Sakarovitch J. Number Representation and Finite Automata // Berthé V., Rigo M. (Eds.), Combinatorics, Automata and Number Theory (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 135). — Cambridge : Cambridge University Press, 2010. — P. 34–107. — DOI: 10.1017/CBO9780511777653.003 .
5. Frougny Ch., E. Pelantová E., Svobodová M. Parallel Addition in Non-Standard Numeration Systems // Theoretical Computer Science. — 2011, 412(41). — P. 5714–5727. — DOI: 10.1016/j.tcs.2011.06.028 .
6. Isupov K.S., Knyazkov V.S. Parallel Multiple-Precision Arithmetic Based on Residue Number System // Program Systems: Theory and Applications. — 2016, 7:1(28). — P. 61–97 — DOI: 10.25209/2079-3316-2016-7-1-61-97 .
7. Isupov K.S., Knyazkov V.S. Multiple-Precision Matrix-Vector Multiplication on Graphics Processing Units // Program Systems: Theory and Applications. — 2020, 11:3(46). — P. 33–59. — DOI: 10.25209/2079-3316-2020-11-3-33-59 .

8. Cormen Th.H., Leiserson Ch.E., Rivest R.L. Introduction to Algorithms. — Cambridge, MA : MIT Press, 1990. — 1048 pp. — Russian translation: M. : MCNMO, 1999. — 960 p. — ISBN 5-900916-37-5. — URL: https://istina.msu.ru/publications/book/171753101/ .
9. Malashevich B.M. Brief Fundamentals and History of the Creation of Domestic Modular Computers. The origins of modular arithmetic // Proceedings of the SoRuCom-2017. Forth International Conference «Computer Technology in Russia and in the Former Soviet Union». Zelenograd, October 3–5. — M. : 2017. — P. 193–207. — URL: https://www.computer-museum.ru/books/SORUCOM_2017_1.pdf .
10. Nepejvoda N.N. Constructive Mathematics: Overview of Advantages, Disadvantages and Lessons I // Logical Investigations: Almanac. — 2011, Vol. 17. — M.–SPb : 2011. — P. 191–239. — DOI: 10.21146/2074-1472-2011-17-0-191-239 .
11. Nepejvoda N.N. Additive Representations of Numbers: Some Remarks // Program Systems: Theory and Applications. — 2017, 8:4(35). — P. 101–115. — DOI: 10.25209/2079-3316-2017-8-4-101-115 .
12. Nepejvoda N.N., Grigorevsky I.N., Lilitko E.P. On Representation of Real Numbers // Program Systems: Theory and Applications. — 2014, 5:4(22). — P. 105–121. — URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2014_4_105-121.pdf .
13. Nepejvoda N.N., Grigorevsky I.N. Some Issues on Linear Numeration Systems // IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM). — 2019, 15(6), Series 4. — P. 47–50. — URL: http://www.iosrjournals.org/iosr-jm/papers/Vol15-issue6/Series-4/E1506044750.pdf .
14. Nepejvoda N.N., Grigorevsky I.N., Klimov And.V., Klimov Yu.A., Romanenko S.A. Computational Aspects of Various Number Representations // Test Engineering and Management. — 2020, 83. — P. 28224–28231. — URL: http://www.testmagzine.biz/index.php/testmagzine/article/view/12901.
15. Shvorin A.B. Parallel Addition of Real Numbers in Overlaying Numeration Systems // Program Systems: Theory and Applications. — 2015, 6:2(25). — P. 101–117. — DOI: 10.25209/2079-3316-2015-6-2-101-117 .
16. Shvorin A.B. Digit-Wise Parallel Addition of Real Numbers in Overlaying Numeration Systems // Asian Academic Research Journal. — 2016, 3(1). — URL: https://pat.keldysh.ru/~art/publications/2016-01-Shvorin-Parallel-Addition.pdf .