



А.М. Елизаров, А.В. Кириллович, Е.К.
Липачёв, О.А. Невзорова

**Новые компоненты онтологии
OntoMathPRO представления
математического знания**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Елизаров А.М., Кириллович А.В., Липачёв Е.К., Невзорова О.А. Новые компоненты онтологии OntoMathPRO представления математического знания // Научный сервис в сети Интернет: труды XXV Всероссийской научной конференции (18-21 сентября 2023 г., онлайн). — М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2023. — С. 141-151.

<https://doi.org/10.20948/abrau-2023-32>

<https://keldysh.ru/abrau/2023/theses/32.pdf>

Видеозапись выступления

Презентация к докладу

Новые компоненты онтологии OntoMath^{PRO} представления математического знания

А. М. Елизаров^{1,2,3}[0000-0003-2546-6897], А. В. Кириллович³[0000-0001-9680-449X],
Е. К. Липачёв^{1,2}[0000-0001-7789-2332], О. А. Невзорова⁴[0000-0001-8116-9446]

¹*Институт информационных технологий и интеллектуальных систем
Казанского федерального университета (КФУ)*

²*Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ*

³*Казанский филиал Межведомственного суперкомпьютерного центра
Российской академии наук*

⁴*Институт вычислительной математики и информационных технологий
КФУ*

Аннотация. Представлена новая версия онтологии профессионального математического знания OntoMath^{PRO}. Эта онтология спроектирована как концептуальная модель основных разделов математики. Текущая версия онтологии дополнена новыми разделами профессиональной математики. Разработана сеть пререквизитных отношений между классами онтологии, что расширило возможности создания приложений в области преподавания математики. В новой версии онтологии OntoMath^{PRO} введены материализованные отношения между концептами. Для этого концепты онтологии дополнительно разделены на типы и роли. Концепты-роли выступают в качестве аргументов материализованных отношений.

Одной из особенностей новой версии онтологии является включение многоязычных лексиконов для выражения математических концептов в текстах на естественном языке.

Указаны некоторые важные применения онтология OntoMath^{PRO} в различных областях знания.

Ключевые слова: концептуальная модель математики, математическая онтология, онтология OntoMath^{PRO}, материализованное отношение, предметная онтология, представление математического знания.

New components of the OntoMath^{PRO} ontology for representing math knowledge

A. M. Elizarov^{1,2,3}[0000-0003-2546-6897], A. V. Kirillovich³[0000-0001-9680-449X],
E. K. Lipachev^{1,2}[0000-0001-7789-2332], O. A. Nevzorova⁴[0000-0001-8116-9446]

*¹Institute of Information Technologies and Intelligent Systems
Kazan Federal University (KFU)*

²N.I. Lobachevskii Institute of Mathematics and Mechanics KFU

*³Kazan Branch of Joint Supercomputer Center of the Russian Academy
of Sciences, Kazan, Russia*

⁴Institute of Computational Mathematics and Information Technology KFU

Abstract. A new version of the ontology of professional mathematical knowledge OntoMath^{PRO} is presented. This ontology is a conceptual model of the main branches of mathematics. The new version of the ontology introduces materialized relationships between concepts. To do this, ontology concepts are additionally divided into types and roles. Concepts-roles act as arguments of materialized relations. Also, one of the features of the new version of the ontology is the inclusion of multilingual lexicons for expressing mathematical concepts in natural language texts. The introduction of prerequisite relationships between ontology classes has expanded the possibilities of creating educational mathematical applications. Some important applications of the OntoMath^{PRO} ontology in various fields of knowledge are indicated.

Keywords: conceptual model of mathematics, mathematical ontology, OntoMath^{PRO} ontology, materialized relation, subject ontology, representation of mathematical knowledge.

1. Введение

Проектирование и использование предметных онтологий являются одними из составляющих проекта создания единого цифрового пространства научных знаний (ЕЦПНЗ) (см., например, [1, 2]). Разработка математических онтологий направлена на формирование единого цифрового пространства математических знаний как подпространства ЕЦПНЗ (например, [3–5]). Применение предметных онтологий способствует также решению важной задачи построения рекомендательных систем как составных элементов информационных платформ поддержки и принятия решений (см., например, [5]). Использование онтологий в обучающих образовательных системах, в частности, для контроля математических знаний, – еще одна важная цель построения математических онтологий.

Исследование структуры математического знания и возможности его представления в сетевом пространстве с помощью онтологий описано в [6]. Обзор семантических методов решения фундаментальных задач управления математическими знаниями содержится в [7]. В этой работе онтологии описаны как формализмы для представления математических знаний. Более широкий класс языков формализации в математике приведен в [8].

Важность проектов по применению семантических технологий в математике в соответствии с принципами Открытых связанных данных (Linked Open Data, LOD, <https://lod-cloud.net/>), в том числе, проекта создания онтологии OntoMath^{PRO}, отмечена в исследованиях по формированию машиночитаемой LOD-коллекции Mathematics Subject Classification [9].

Сегодня на основе OntoMath^{PRO} уже спроектированы семантические сервисы управления математическим знанием. Эти сервисы включены в цифровую экосистему OntoMath, в рамках которой разрабатываются программные инструменты формирования электронных математических коллекций, а также осуществляется взаимодействие этих инструментов (см., например, [10, 11]).

Отметим также, что первая версия онтологии профессионального математического знания OntoMath^{PRO} нашла применения в проектах построения других предметных онтологий, платформ научного поиска, а также систем оценки качества знаний [12–15].

В работе [12] представлена онтология, предназначенная для описания качества метаинформации данных в гетерогенных сенсорных сетях. В этой онтологии для моделирования математических элементов, участвующих в методах определения качества измерения данных, использованы концепты онтологии OntoMath^{PRO}.

Как терминологический источник математических объектов онтология OntoMath^{PRO} используется в проекте построения онтологии объектов научного знания [13]. Целью этой онтологии, обозначенной как SKOO – Simple Knowledge Object Ontology, является создание общей модели научных знаний с возможностью их визуализации.

В статье [14] предложен метод и разработано приложение для поиска в научных документах по отдельным элементам, таким как ключевые слова, предметная область и т. д. Модуль генерации списка терминов, связанных со словами, указанными в запросе, использует онтологию OntoMath^{PRO} в качестве терминологической базы.

Имеется ряд приложений онтологии OntoMath^{PRO} в организации математического образования. В частности, на основе этой онтологии разработаны образовательные сервисы с открытым доступом [11, 15]. В работе [16] предложена модель структурирования образовательных ресурсов и их автоматического оценивания с помощью текстового аннотирования. Для достижения этих целей используются методы обработки естественного языка и онтологические базы знаний, в частности, онтология OntoMath^{PRO}, элементы которой были переведены на итальянский язык.

Реализованные практические приложения онтологии OntoMath^{PRO} выявили ряд ограничений ее существующей версии и позволили сформировать цели дальнейшего развития. В новой версии онтологии

выполнена формализация ряда современных разделов математики, введены новые типы отношений между понятиями, в частности, такие, как пререквизиты, которые необходимы для создания образовательных сервисов. Также созданы средства представления материализованных отношений, включая разделение концептов на типы и роли. Это дает возможность перейти от представления математических объектов к представлению утверждений об этих объектах. Ниже представлены некоторые новые компоненты онтологии *OntoMath^{PRO}*.

2. Структура *OntoMath^{PRO}*

OntoMath^{PRO} относится к классу предметных онтологий. Она предназначена для классификации и систематизации понятий профессионального математического знания и охватывает ряд наиболее важных областей математики. Отметим, что *OntoMath^{PRO}* предоставлена в открытом доступе в репозитории GitHub (<https://github.com/CLLKazan/OntoMathPro/>). При проектировании онтологии *OntoMath^{PRO}* были использованы результаты по управлению математическими знаниями, полученные нами ранее, а также разработанные методы структурного и семантического анализа математических документов [17].

Первая версия онтологии разрабатывалась с целью моделирования математических сущностей профессиональной математики. Поэтому в этой версии онтология была организована в виде иерархии основных разделов математики (алгебра, геометрия, математическая логика, математический анализ, теория дифференциальных уравнений и ряд других) и элементов математического знания (метод, неравенство, операция, оценка, теорема, формула и т. д.). Названная версия онтологии представлена в [18] и к настоящему времени уже нашла применения в различных областях знания.

В новой версии *OntoMath^{PRO}* средства моделирования математических сущностей дополнены средствами моделирования математических утверждений – спроектированы иерархия материализованных отношений, мета-онтологический и лингвистический уровни. Теперь представление материализованных отношений используется для моделирования n -местных отношений между математическими объектами, выражаемых с помощью n -местных предикатов [19]. Средствами языка OWL такие отношения представлены в материализованном виде, т. е. в виде классов. Аргументы n -местных отношений описаны с помощью классов-ролей, экземпляры которых связаны с экземплярами материализованных отношений с помощью объектных свойств.

Как известно, в математике имеются базовые понятия, которые определяются аксиоматически, а также производные понятия, которые

определяются через базовые. Например, понятие «Алгебраическая структура» является базовым в алгебре, а понятие «Идеал» является производным по отношению к понятию «Алгебраическая структура» и определяется как подмножество элементов с определенными свойствами. Поэтому при проектировании новой версии онтологии OntoMath^{PRO} были введены понятия концептов-типов и концептов-ролей [20–22].

В метаонтологической модели тип определяется как концепт, который является семантически жестким и онтологически независимым, а роль – это концепт, который является семантически нежестким и онтологически зависимым. В онтологии понятия концептов-типов и концептов-ролей интерпретируются путем использования базовых понятий, соотносимых с типом, и производных понятий, соотносимых с ролью.

На Рис. 1 представлен пример ролевого концепта «Идеал» и показано отношение онтологической зависимости (dependsOn) между концептом-ролью «Идеал» и концептом-типом «Алгебраическая структура».

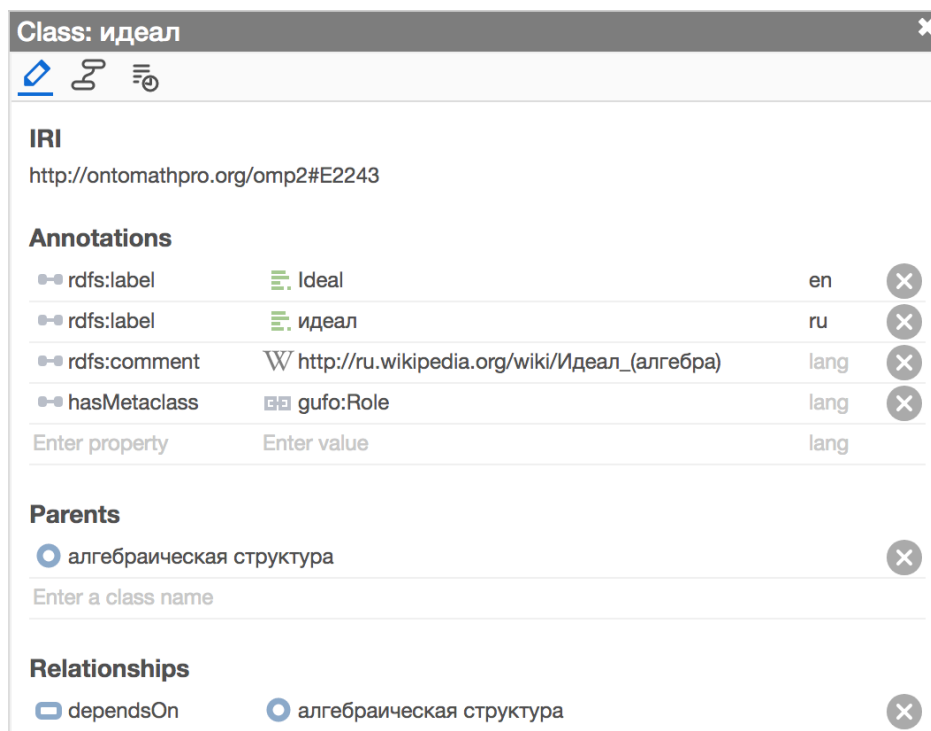


Рис. 1. Пример ролевого концепта «Идеал» в редакторе WebProtégé

Многоязычные лексиконы в новой версии онтологии представлены в виде наборов Лингвистических открытых связанных данных (Linguistic Linked Open Data, LLOD, <http://linguistic-lod.org/>) с помощью онтологий OntoLex/Lemon (<https://www.w3.org/community/ontolex/>; <https://www.w3.org/2016/05/ontolex/>), LexInfo (<https://lexinfo.net/>) и PreMOn (Predicate Model for Ontologies, <https://premon.fbk.eu/>).

Чтобы онтология $\text{OntoMath}^{\text{PRO}}$ могла быть использована в приложениях, связанных с образовательной деятельностью, таксономические отношения между концептами дополнены пререквизитными отношениями, которые отражают последовательность изучения концептов в учебных программах.

Классы в первой версии онтологии интерпретировались как именованные сущности. Теперь в новой версии предусмотрено выделение экземпляров.

В первой версии онтологии для различных предметных областей были построены соответствующие иерархии основных математических концептов; каждый концепт был снабжен лейблом на русском и английском языках. Основная задача применения онтологии на первом этапе заключалась в семантическом анализе математических документов и, прежде всего, в извлечении из текстов математических именованных сущностей. Для решения этой задачи достаточно использовать лейблы понятий и метрики оценки близости лейбла понятия и выделенного текстового фрагмента.

В дальнейшем, в связи с применением онтологии в новых приложениях возникла необходимость выделить и экземпляры понятий (классов). В частности, формализация ряда разделов математики как раз требует введения экземпляров понятий, а не только классов. В качестве примера можно привести классификацию конечных простых групп, где экземплярами класса «Конечная простая группа» являются конкретные группы. В новой версии $\text{OntoMath}^{\text{PRO}}$ дальнейшее пополнение онтологии экземплярами математических понятий производится постоянно.

Заключение

Представлены новые направления развития онтологии профессионального математического знания $\text{OntoMath}^{\text{PRO}}$. Выполнена формализация ряда современных разделов математики, введены новые типы отношений между понятиями, такие как пререквизиты, которые, в частности, необходимы для создания образовательных сервисов. Созданы средства представления материализованных отношений, включая разделение концептов на типы и роли.

Разработанные инструменты позволяют проектировать новые интеллектуальные сервисы управления математическим знанием и формировать единое цифровое пространство математических знаний на основе расширенных формализмов представления.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-11-00105).

Литература

1. *Каленов Н.Е., Сотников А.Н.* О структуре онтологии Единого цифрового пространства научных знаний // Научный сервис в сети Интернет: труды XXIV Всероссийской научной конференции (19–22 сентября 2022 г., онлайн). – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2022. – С. 203–221. <https://doi.org/10.20948/abrau-2022-23>. <https://keldysh.ru/abrau/2022/theses/23.pdf>
2. *Ataeva O., Kalenov N., Serebryakov V., Sotnikov A.* Informational Infrastructure of the Common Digital Space of Scientific Knowledge // CEUR Workshop Proceedings. 2021. V. 2990. P. 1–10. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2990/rpaper1.pdf>
3. *Атаева О.М., Серебряков В.А., Тучкова Н.П.* Опыт построения онтологии для предметной области на основе контента тематического журнала // Научный сервис в сети Интернет: труды XXIV Всероссийской научной конференции (19–22 сентября 2022 г., онлайн). – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2022. С. 52–68. <https://doi.org/10.20948/abrau-2022-35>. <https://keldysh.ru/abrau/2022/theses/35.pdf>
4. *Елизаров А.М., Кириллович А.В., Липачёв Е.К., Невзорова О.А.* Онтология математического знания OntoMathPRO // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 507. № 1. С. 29–35. <https://doi.org/10.31857/S2686954322700011>
5. *Elizarov A., Lipachev E.* Digital Libraries and the Common Digital Space of Mathematical Knowledge // CEUR Workshop Proceedings. 2021. V. 2990. P. 25–38. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2990/rpaper3.pdf>
6. *Lange Ch.* Ontologies and Languages for Representing Mathematical Knowledge on the Semantic Web // Semantic Web Journal. 2013. V. 4. No. 2. P. 119–158. <https://doi.org/10.3233/SW-2012-0059>
7. *Elizarov A., Kirillovich A., Lipachev E., Nevzorova O., Solovyev V., Zhiltsov N.* Mathematical Knowledge Representation: Semantic Models and Formalisms // Lobachevskii J. of Mathematics. 2014. V. 35. No. 4. P. 347–353. <https://doi.org/10.1134/S1995080214040143>
8. *Kaliszyk C., Rabe F.* A Survey of Languages for Formalizing Mathematics // In: Benzmüller C. and Miller B. (Eds.) CICM 2020 // Lecture Notes in Artificial Intelligence. 2020. V. 12236. P. 138–156. https://doi.org/10.1007/978-3-030-53518-6_9
9. *Arndt S., Ion P., Runnwerth M., Schubotz M., Teschke O.* 10 Years Later: The Mathematics Subject Classification and Linked Open Data // In: Kamareddine F., Sacerdoti Coen C. (Eds.) Intelligent Computer Mathematics. CICM 2021. Lecture Notes in Computer Science. 2021. V. 12833. P. 153–158. https://doi.org/10.1007/978-3-030-81097-9_12

10. *Елизаров А.М., Кириллович А.В., Липачёв Е.К., Невзорова О.А.* Цифровая экосистема OntoMath: взаимодействие семантических сервисов и математических онтологий // Научный сервис в сети Интернет: труды XXIV Всероссийской научной конференции (19–22 сентября 2022 г., онлайн). М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2022. С. 167–178. <https://doi.org/10.20948/abrau-2022-40>. <https://keldysh.ru/abrau/2022/theses/40.pdf>
11. *Елизаров А.М., Кириллович А.В., Липачёв Е.К., Невзорова О.А.* Цифровая экосистема OntoMath как подход к построению пространства математических знаний // Электронные библиотеки. 2023. Т. 26. № 2. С. 154–202. <https://doi.org/10.26907/1562-5419-2023-26-2-154-202>
12. *Vedurmudi A.P., Neumann J., Gruber M., Eichstädt S.* Semantic Description of Quality of Data in Sensor Networks // *Sensors*. 2021. V. 21. 6462. <https://doi.org/10.3390/s21196462>. URL: <https://www.mdpi.com/1424-8220/21/19/6462>
13. *Daponte V., Falquet G.* Une ontologie pour la formalisation et la visualisation des connaissances scientifiques // 29es Journées Francophones d'Ingénierie des Connaissances, IC 2018, AFIA, Jul 2018, Nancy, France. P. 129–136. fhal-01839572f. URL: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01839572/document>
14. *Intarapaiboon P., Kesamoon C.* Applying Domain Knowledge and Academic Information to Enhance Unknown-item Search in OPAC // *Malaysian Journal of Library & Information Science*. 2019. V. 24, No. 1. P. 45–58. <https://doi.org/10.22452/mjlis.vol24no1.3>
15. *Невзорова О.А., Липачёв Е.К., Николаев К.С.* Семантические сервисы цифровой экосистемы OntoMath в задачах математического образования // Электронные библиотеки. 2023. Т. 26. № 4. С. 454–502.
16. *Di Caro L., Rabellino S., Fioravera M., Marchisio M.* A Model for Enriching Automatic Assessment Resources with Free-Text Annotations // 15th International Conference on Cognition and Exploratory Learning in Digital Age (CELDA 2018) October 21–23, 2018. Budapest, Hungary, 2018. P. 186–193.
17. *Елизаров А.М., Липачёв Е.К., Невзорова О.А., Соловьев В.Д.* Методы и средства семантического структурирования электронных математических документов // Доклады Академии наук. 2014. Т. 457. № 6. С. 642–645. <https://doi.org/10.7868/S0869565214240049>
18. *Nevzorova O., Zhiltsov N., Kirillovich A., Lipachev E.* OntoMathPRO Ontology: a Linked Data Hub for Mathematics // In: *Klinov P., Mouromstev D. (Eds.) KESW 2014. Communications in Computer and Information Science*. Springer, Cham, 2014. V. 468. P. 105–119. https://doi.org/10.1007/978-3-319-11716-4_9

19. *Noy N., Rector A.* Defining N-ary Relations on the Semantic Web. W3C Working Group Note 12 April 2006. URL: <http://www.w3.org/TR/2006/NOTE-swbp-n-aryRelations-20060412/>
20. *Guizzardi G., Benevides A.B., Fonseca C.M., Almeida J.P.A., Sales T.P., Porello D.* UFO: Unified Foundational Ontology // *Applied Ontology*. 2022. V. 17. No. 1. P. 167–210. <https://doi.org/10.3233/AO-210256>
21. *Лукашевич Н.В., Добров Б.В.* Проектирование лингвистических онтологий для информационных систем в широких предметных областях // *Онтология проектирования*. 2015. Т. 5. № 1 (15). С. 47–69.
22. *Kirillovich A.V., Nevzorova O.A., Lipachev E.K.* OntoMathPRO 2.0 Ontology: Updates of Formal Model // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2022. V. 43. No. 12. P. 3504–3514. <https://doi.org/10.1134/S1995080222150136>. URL: <https://link.springer.com/article/10.1134/S1995080222150136>

References

1. *Kalenov N.E., Sotnikov A.N.* On the structure of the Common Digital Space of Scientific knowledge ontology // *Nauchnyj servis v seti Internet: trudy XXIV Vserossijskoj nauchnoj konferencii*. M.: IPM im. M.V. Keldysha, 2022. S. 203–221. <https://doi.org/10.20948/abrau-2022-23>. <https://keldysh.ru/abrau/2022/theses/23.pdf>
2. *Ataeva O., Kalenov N., Serebryakov V., Sotnikov A.* Informational Infrastructure of the Common Digital Space of Scientific Knowledge // *CEUR Workshop Proceedings*. 2021. V. 2990. P. 1–10.
3. *Ataeva O.M., Serebryakov V.A., Tuchkova N.P.* Experience in building an ontology for a subject area based on the content of a thematic journal // *Nauchnyj servis v seti Internet: trudy XXIV Vserossijskoj nauchnoj konferencii*. M.: IPM im. M.V. Keldysha, 2022. S. 52–68. <https://doi.org/10.20948/abrau-2022-35>
4. *Elizarov A.M., Kirillovich A.V., Lipachev E.K., Nevzorova O.A.* OntoMathPRO: An Ontology of Mathematical Knowledge // *Doklady Mathematics*. 2022. V. 106 (3). P. 29–35. <https://doi.org/10.1134/S1064562422700016>
5. *Elizarov A., Lipachev E.* Digital Libraries and the Common Digital Space of Mathematical Knowledge // *CEUR Workshop Proceedings*. 2021. V. 2990. P. 25–38. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2990/rpaper3.pdf>
6. *Lange Ch.* Ontologies and Languages for Representing Mathematical Knowledge on the Semantic Web // *Semantic Web Journal*. 2013. V. 4. No. 2. P. 119–158. <https://doi.org/10.3233/SW-2012-0059>
7. *Elizarov A., Kirillovich A., Lipachev E., Nevzorova O., Solovyev V., Zhiltsov N.* Mathematical Knowledge Representation: Semantic Models and Formalisms // *Lobachevskii J. of Mathematics*. 2014. V. 35. No. 4. P. 347–353. <https://doi.org/10.1134/S1995080214040143>

8. *Kaliszyk C., Rabe F.* A Survey of Languages for Formalizing Mathematics // *Lecture Notes in Artificial Intelligence*. 2020. V. 12236. P. 138–156. https://doi.org/10.1007/978-3-030-53518-6_9
9. *Arndt S., Ion P., Runnwerth M., Schubotz M., Teschke O.* 10 Years Later: The Mathematics Subject Classification and Linked Open Data // *Lecture Notes in Computer Science*. 2021. V. 12833. P. 153–158. https://doi.org/10.1007/978-3-030-81097-9_12
10. *Elizarov A.M., Kirillovich A.V., Lipachev E.K., Nevzorova O.A.* OntoMath Digital Ecosystem: Semantic Service and Mathematical Ontologies // *Nauchnyj servis v seti Internet: trudy XXIV Vserossijskoj nauchnoj konferencii*. M.: IPM im. M.V. Keldysha, 2022. S. 167–178. <https://doi.org/10.20948/abrau-2022-40>.
11. *Elizarov A.M., Kirillovich A.V., Lipachev E.K., Nevzorova O.A.* Digital Ecosystem OntoMath as an Approach to Building the Space of Mathematical Knowledge // *Russian Digital Libraries Journal*. 2023. V. 26. No. 2. P. 154–202. <https://doi.org/10.26907/1562-5419-2023-26-2-154-202>
12. *Vedurmudi A.P., Neumann J., Gruber M., Eichstädt S.* Semantic Description of Quality of Data in Sensor Networks // *Sensors*. 2021. V. 21. 6462. <https://doi.org/10.3390/s21196462>. URL: <https://www.mdpi.com/1424-8220/21/19/6462>
13. *Daponte V., Falquet G.* Une ontologie pour la formalisation et la visualisation des connaissances scientifiques // *29es Journées Francophones d'Ingénierie des Connaissances, IC 2018, AFIA, Jul. 2018, Nancy, France*. P. 129–136. fhal-01839572f. URL: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01839572/document>
14. *Intarapaiboon P., Kesamoon C.* Applying Domain Knowledge and Academic Information to Enhance Unknown-item Search in OPAC // *Malaysian Journal of Library & Information Science*, 2019. V. 24 (1). P. 45–58. <https://doi.org/10.22452/mjlis.vol24no1.3>
15. *Nevzorova O.A., Lipachev E.K., Nikolaev K.S.* Semantic Services of the OntoMath Digital Ecosystem in Problems of Mathematical Education // *Russian Digital Libraries Journal*. 2023. V. 26. No. 4. P. 454–502.
16. *Di Caro L., Rabellino S., Fioravera M., Marchisio M.* A Model for Enriching Automatic Assessment Resources with Free-Text Annotations // *15th International Conference on Cognition and Exploratory Learning in Digital Age (CELDA 2018) October 21–23, 2018. Budapest, Hungary, 2018*. P. 186–193.
17. *Elizarov A.M., Lipachev E.K., Nevzorova O.A., Solovyev V.D.* Methods and Means for Semantic Structuring of Electronic Mathematical Documents // *Doklady Mathematics*. 2014. V. 90. No. 1. P. 521–524. <https://doi.org/10.1134/S1064562414050275>

18. Nevzorova O., Zhiltsov N., Kirillovich A., Lipachev E. *OntoMathPRO Ontology: a Linked Data Hub for Mathematics* // *Communications in Computer and Information Science*. Springer, Cham, 2014. V. 468. P. 105–119. https://doi.org/10.1007/978-3-319-11716-4_9
19. Noy N., Rector A. *Defining N-ary Relations on the Semantic Web*. W3C Working Group Note 12 April 2006. URL: <http://www.w3.org/TR/2006/NOTE-swbp-n-aryRelations-20060412/>
20. Guizzardi G., Benevides A.B., Fonseca C.M., Almeida J.P.A., Sales T.P., Porello D. *UFO: Unified Foundational Ontology* // *Applied Ontology*. 2022. V. 17. No. 1. P. 167–210. <https://doi.org/10.3233/AO-210256>
21. Loukachevitch N.V., Dobrov B.V. *Developing linguistic ontologies in broad domains* // *Ontology of Designing*. 2015. V. 5. No. 1 (15). P. 47–69.
22. Kirillovich A.V., Nevzorova O.A., Lipachev E.K. *OntoMathPRO 2.0 Ontology: Updates of Formal Model* // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2022. V. 43. No. 12. P. 3504–3514. <https://doi.org/10.1134/S1995080222150136>. URL: <https://link.springer.com/article/10.1134/S1995080222150136>