

Методы аппроксимации коэффициентов стохастического дифференциального уравнения и их применение для анализа внутригодовой и межгодовой изменчивости потоков тепла в Северной Атлантике

Тучкова Н.П.¹, Беляев К.П.^{1,2}, Михайлов Г.М.¹, Ромашина К.А.³
Новикова А.В.³

¹*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН*

²*Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН*

³*Севастопольское отделение МГУ им. М. В. Ломоносова*

Аннотация. Для анализа потоков тепла использованы данные наблюдений за 1979-2018 гг. в районе Северной Атлантики. Пространственно-временная изменчивость полного потока тепла моделировалась стохастическим диффузионным процессом. Коэффициенты стохастического дифференциального уравнения, представляющего стохастический процесс, были статистически оценены методами непараметрической статистики. Ранее существование и единственность решения в сильном смысле стохастического дифференциального уравнения, порожденного построенным диффузионным процессом, были доказаны при выполнении условий Колмогорова. В настоящей работе коэффициенты уравнения аппроксимировались по времени тригонометрическими полиномами, амплитуды и фазы которых зависели от значений потока. По заданному ряду длиной 40 лет с 1979 по 2018 г. были построены пространственные карты и временные кривые, результаты показаны для 1999 г., как примеры, а также изучались среднемесячные данные потоков тепла с 1979 по 2022 гг. Численные расчеты на суперкомпьютере «Ломоносов-2» МГУ имени М.В. Ломоносова.

Ключевые слова: анализ временных рядов, климатический сезонный ход, максимальные и минимальные значения тепловых потоков и температуры внутри климатического года, аппроксимация коэффициентов стохастического дифференциального уравнения.

Methods for approximating the coefficients of a stochastic differential equation and their application to the analysis of intra-annual variability of heat fluxes in the North Atlantic

N.P. Tuchkova^{1*}[0000-0001-5357-9640], K.P. Belyaev^{1,2**}[0000-0003-2111-2709],
G.M. Mikhaylov^{1***}[0000-0002-4535-7180], Romashina K.A.^{****}, Novikova K.A.^{*****}

¹ *Dorodnicyn Computing Center FRC CSC of RAS*

² *Shirshov Institute of Oceanology of RAS*

³ *Sevastopol Branch of Lomonosov Moscow State University,*

* natalia_tuchkova@mail.ru, ** kosbel55@gmail.com, *** gmickail@ccas.ru,

**** zemlyaksu@gmail.com, ***** novikovaav1@my.msu.ru

Abstract. To analyze heat fluxes, observational data for 1979-2018 were used in the North Atlantic. The spatiotemporal variability of the total heat flux was modeled by a stochastic diffusion process. The coefficients of the stochastic differential equation representing the stochastic process were statistically estimated using nonparametric statistics methods. Previously, the existence and uniqueness of a solution in the strong sense of the stochastic differential equation generated by the constructed diffusion process was proven using the Kolmogorov's criterion. In this work, the coefficients of the equation were approximated in time by trigonometric polynomials, the amplitudes and phases of which depended on the flow values. Using a given series of 40 years in length from 1979 to 2018, spatial maps and time curves were constructed, the results are shown for 1999 as examples, and also studied average monthly heat flow data from 1979 to 2022. Numerical calculations realized on the Lomonosov-2 supercomputer of the Lomonosov Moscow State University

Keywords: time series analysis, climatic seasonal cycle, maximum and minimum heat fluxes and temperature values within a climatic year,

1. Введение

Изучение процессов теплообмена и распределения потоков тепла в океанах имеет важное значение для понимания климатических изменений на Земле. Северная Атлантика играет существенную роль в регулировании климата наших широт, как существенный компонент глобальной климатической системы.

Одним из ключевых инструментов для анализа распределения тепла в океанах является *вероятностный анализ*. В работе методами математического моделирования проводится статистический анализ данных наблюдений тепловых потоков в Северной Атлантике.

История вопроса непосредственно связана с развитием информационных технологий и научных сервисов в сети интернет.

Начиная с середины 20-го столетия, когда стали развиваться базы данных метеорологических наблюдений, возникла проблема статистической оценки накопленных климатических характеристик. Это было время создания первых моделей океана и атмосферы, а также совместных моделей, которые, в частности, показали тенденции к росту температуры океана, и как следствие, возможное потепление климата.

В 1988 году была создана Межправительственная группа экспертов по изменению климата (МГИК), с историей этой организации и ее отчетами можно ознакомиться в многочисленных открытых источниках. Один из выводов этой группы заключался в необходимости привлечения как можно большего числа специалистов, способных выполнять численной моделирование климата, чтобы получить достаточное количество сценариев (ансамблевое моделирование), и далее оценить их вероятность. С этой целью международное научное сообщество открыло разработки моделей, а службы мониторинга открыли базы наблюдений для научного (некоммерческого) использования. Каждый профильный научный коллектив, таким образом, получил возможность участвовать в исследованиях по изменению климата при наличии вычислительных мощностей, а МГИК делать выводы на основании этих исследований. Разработанные модели и данные наблюдений выложены с соответствующим сервисом на сайтах в интернет, обеспечивая возможность их использования научным сообществом.

В работе приведены результаты статистического анализа случайных процессов на основе данных NAAD (<https://naad.ocean.ru/>), полученных в рамках международного эксперимента для региона Северной Атлантики, играющего критическую роль мезомасштабной динамики во взаимодействии океана и воздуха[1].

Предложенные в работе методы включают в себя анализ случайных процессов, заданных стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) или уравнением Ито, аппроксимацию данных наблюдений и решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) для описания эволюции вероятностного распределения тепла в океане.

С помощью методов математического моделирования проведен вероятностный анализ распределения потоков тепла в Северной Атлантике за период с 1979 по 2022 годы. Результаты исследования позволили установить закономерности распределения потоков тепла в изучаемом регионе за рассматриваемый период времени.

Полученные статистические оценки могут быть полезными для дальнейшего исследования и моделирования климатических процессов в Северной Атлантике и мировом океане, а также выработки стратегий контроля и защиты окружающей среды.

2. Задачи и методы

2.1. Математическая модель

Изменение потоков моделировалось с помощью стохастического дифференциального уравнения (уравнения Ито) [2-6]

$$dX = a(t, X)dt + b(t, X)dW, \quad (1)$$

где:

$X(t)$ - поток тепла в момент времени t ;

$dX = X(t + dt) - X(t)$ - изменчивость (инкремент) потока тепла за время $dt = t + dt - t$ в фиксированной точке;

$a(t, X), b(t, X)$ — коэффициенты сноса и диффузии, зависящие от времени t и от значений процесса $X(t)$;

dW - стандартное обозначение гауссова белого шума с нулевым средним и единичной дисперсией, не зависящего от процесса $X(t)$.

В работе [2] использовались данные по потокам тепла, заданные в узлах одноградусной сетки с временным разрешением 6 часов с 1 января 1979 г. до 31 декабря 2022 г. Потоки явного и скрытого тепла, соответственно, рассчитывались по формулам:

$$Q_h = c_p \rho C_T (T_w - T_a) V, \quad (2)$$

$$Q_e = L \rho C_e (Q_s - Q) V. \quad (3)$$

По формулам (2) и (3) потоки тепла рассчитываются с использованием параметров на границе раздела океана и атмосферы:

- температуры воды и воздуха T_w, T_a ;
- модуля скорости ветра V ;
- удельной влажности приводного воздуха Q ;
- максимальной для данной величины температуры поверхности океана насыщенной удельной влажности над поверхностью воды Q_s .

В качестве коэффициентов пропорциональности в соотношениях (2) и (3) служат:

- коэффициенты обмена теплом C_T (число Шмидта) и обмена влагой C_e (число Дальтона);
- удельная теплота испарения L ;
- удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении c_p и его плотность ρ .

В нашем исследовании значения потоков Q_h, Q_e считались уже известными, дополнительного расчета по формулам (2) и (3) не требовалось.

В работе представлены моделирование процессов изменчивости потоков тепла в Северной Атлантике и расчеты коэффициентов сноса и диффузии на каждый момент времени по формулам (3) и приводятся только карты потока на середину каждого месяца.

Введем следующие величины:

$P(y | x) = P(X(t + dt) = y | X(t) = x)$ - условная вероятность, если y, x дискретны;

$p(y | x)dx = p(X(t + dt) = y | x < X(t) = x + dx)$ - условная плотность вероятности (производная Радона-Никодима), если процесс $X(t)$ рассматривается, как непрерывный.

Для определенности будем рассматривать процесс как непрерывный с условной плотностью вероятности $p(y | x)$. Чтобы отличать сам процесс $X(t)$ от его значений, последние будем обозначать маленькими буквами. Для определения коэффициентов $a(t, x), b(t, x)$ используются следующие формулы [7]:

$$a(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x) p(y | x) dy, \quad (4)$$

$$b^2(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x)^2 p(y | x) dy. \quad (5)$$

Для определения коэффициентов $a(t, x), b(t, x)$ по формулам (4) и (5) необходимо реализовать алгоритм, подробно описанный в [1].

Интервал значений $X(t)$ от $X_{min}(t) = X_{min}$ до $X_{max}(t) = X_{max}$ разбивается точками $X_i = X_{min} + i * \frac{X_{max} - X_{min}}{L}$, $i = 0, \dots, L$ на L подинтервалов $[X_i, X_{i+1}]$. При этом фиксируются все точки области, где выполняется условие $X_i < X(t) = x < X_{i+1}$.

Далее, считается количество точек сетки, попавших в этот интервал, и пусть таких точек будет m (необходимо так выбрать интервалы, чтобы m для любого $X_i < X(t) = x < X_{i+1}$ было больше 0). Далее, переходя на шаг $t + dt$, выполняем аналогичное разбиение интервала значений $X(t)$ на подинтервалы $[Y_i, Y_{i+1}]$ и выбираем среди фиксированных на предыдущем шаге точек те и только те точки, для которых выполняется условие $Y_i < X(t + dt) = y < Y_{i+1}$ для любого y , и пусть таких точек будет l .

Тогда $p(y/x) = l/m$. Далее по формулам (4) и (5) рассчитаются коэффициенты $a(t, x)$ и $b^2(t, x)$.

2.2. Параболическое уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова

Как было указано в предыдущем параграфе, изменчивость случайного процесса представляется в виде (1). Выражение (1) понимается в интегральном смысле, то есть

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \int_t^{t+\Delta t} a(u, X) du + \int_t^{t+\Delta t} b(u, X) [W(u + du) - W(u)].$$

Коэффициенты $a(t, x)$ и $b^2(t, x)$ рассчитаны по формулам (4) и (5). Как следствие, можно написать уравнение для расчета вероятностей значений потока в заданный (климатический) момент времени в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial(a(t,x)p)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(b^2(t,x)p)}{\partial x^2}, \quad (6)$$

где $p(t, x)$ - искомая плотность вероятности в момент t значения потока x , остальные обозначения приведены выше.

Уравнение ФПК (6) решается при граничных условиях Зоммерфельда и при заданном начальном распределении вероятности. Аналитически эта задача, вообще говоря, не решается, но численно ее решение не представляет особых трудностей. Однако, для сильно осциллирующих коэффициентов численное решение этого уравнения приводит к значительным вычислительным ошибкам. Поэтому с целью уменьшения вычислительных ошибок имеет смысл сгладить сильно осциллирующие коэффициенты $a(t, x)$ и $b^2(t, x)$.

Далее в работе показано, как выполняется сглаживание коэффициентов и применение полученных аналитических выражений для решения основной задачи – вычисления *плотности вероятности стохастического процесса*.

2.3. Метод наименьших квадратов для аппроксимации коэффициентов

Аппроксимация коэффициента $a(t, x)$ находится в виде тригонометрической функции

$$\hat{a}(t, x) = A(x) \sin(\omega t) + B(x) \cos(\omega t) + C(x) . \quad (7)$$

Такая форма аппроксимирующей функции была выбрана потому, что исходные коэффициенты сноса (также и коэффициенты диффузии) имеют ярко выраженный внутригодовой цикл, где частота колебаний $\omega=2\pi/12$ (мес⁻¹). Следовательно, эта форма аппроксимации физически обоснована.

Параметры $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ определяются последовательно методом наименьших квадратов. Сначала определяются параметры $C(x)$, как среднее значение выборки

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N a(t, x) - C(x) = 0 , \quad (8)$$

где $N=364$ для межгодовой изменчивости и 518 для среднемесячной изменчивости, затем определяются коэффициенты $A(x)$ и $B(x)$. Этот алгоритм хорошо известен в практических приложениях и не нуждается в дополнительных обоснованиях. После того, как все амплитуды

определены по формуле (7), аппроксимация коэффициента $a(t,x)$ приводится к виду

$$\hat{a}(t,x) = A(x) \sin(\omega t + \phi(x)) + C(x). \quad (9)$$

Та же процедура применена для аппроксимации коэффициента диффузии $b(t,X)$

$$\hat{b}(t,x) = A(x) \sin(\omega t + \phi(x)) + C(x). \quad (10)$$

3. Результаты численных расчетов

Результаты численных расчетов для уравнений (9) и (10), где x – значение потока, представлены на иллюстрациях с пояснениями к ним. Серия иллюстраций (Рис. 1(а,б,в) - Рис. 4(а,б,в)) демонстрирует картину поведения исходных значений коэффициентов сноса и диффузии $a(t,x)$, $b^2(t,x)$ и сглаженных значений этих коэффициентов $\hat{a}(t,x)$, $\hat{b}(t,x)$. Были проведены расчеты за весь временной период, а для демонстрации выбраны характерные значения для минимальных, средних и максимальных значений потока.

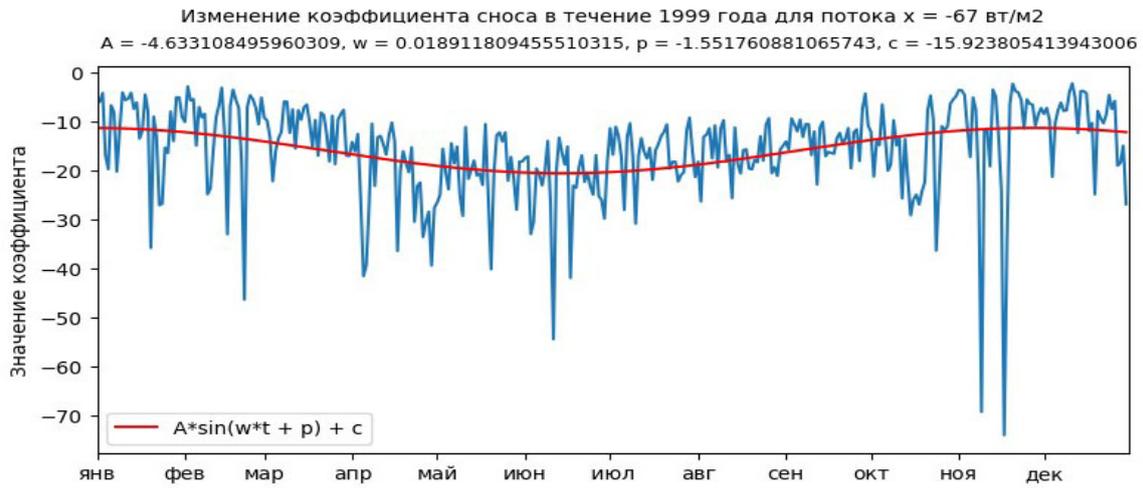
Серия иллюстраций Рис. 1(а,б,в) - Рис. 2(а,б,в) демонстрирует внутригодовую изменчивость для выбранного 1999 года, а серия иллюстраций Рис. 3(а,б,в) - Рис. 4(а,б,в) демонстрирует межгодовую среднемесячную изменчивость за 40 лет для минимальных, средних и максимальных значений потока соответственно.

На Рис. 1(а,б,в) - Рис. 2(а,б,в) видно, что аппроксимирующие кривые, показанные красным цветом, хорошо отражают внутригодовой сезонный ход.

На Рис. 3(а,б,в) показаны графики коэффициентов $a(t,X)$ и $\hat{a}(t,x)$, средние за месяц за 40 лет. Красным показаны сглаженные кривые $\hat{a}(t,x)$, построенные по формулам (9-10), где соответствующие амплитуды и фазы найдены методом наименьших квадратов. На рис. 3(а,б,в) показаны изменения коэффициентов $a(t,X)$ и $\hat{a}(t,x)$ во времени при значениях потоков X , равных X_{max} , X_{min} и среднему значению по области соответственно.

Далее, на Рис. 5(а,б) представлены пространственные карты для амплитуд из уравнения (7). На карте Северной Атлантики показывается положение амплитуд и фаз сглаженного процесса и дается их геофизическая интерпретация.

Особо отметим, что максимум построенных амплитуд хорошо согласуется с данными исследований известных районов Северной Атлантики.



(а)

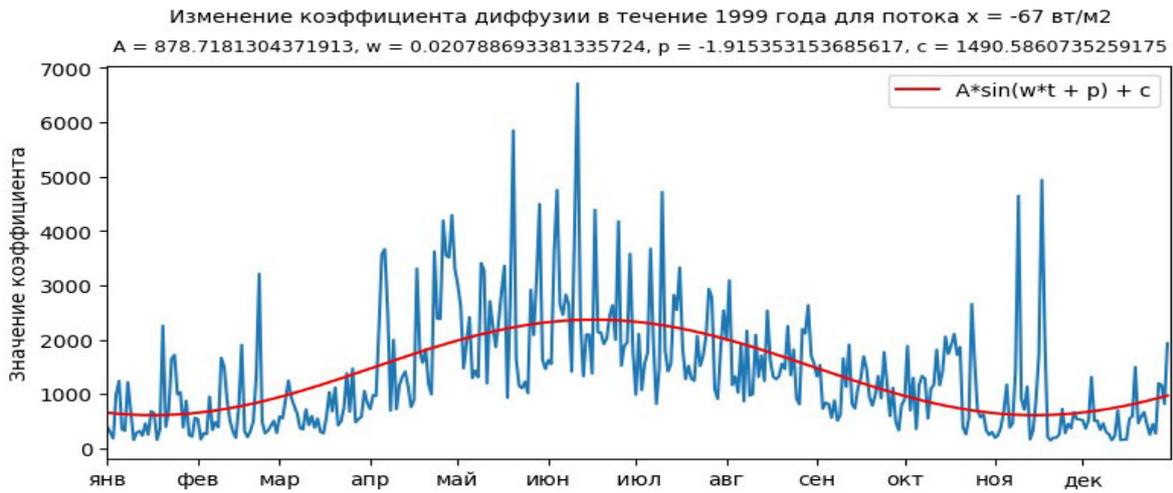


(б)



(в)

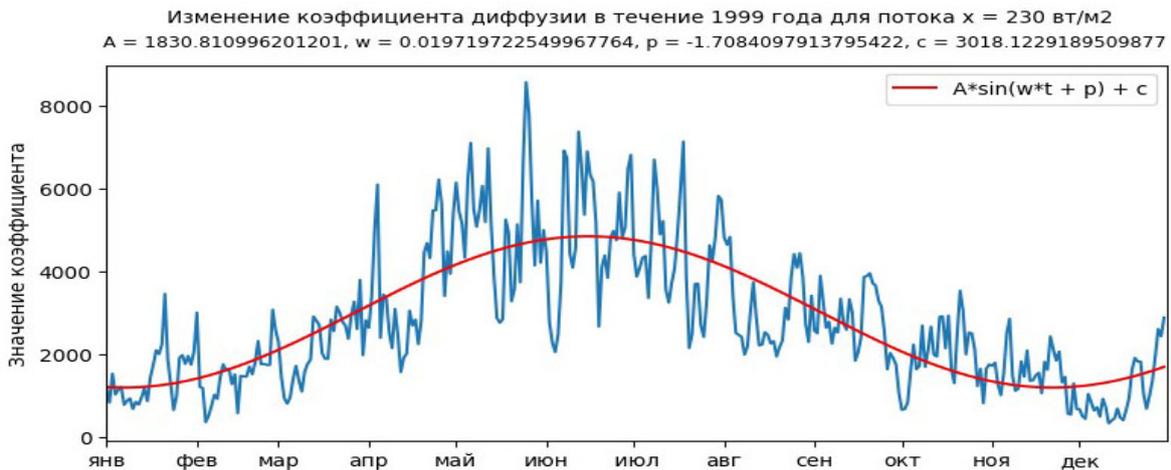
Рис. 1. Коэффициент сноса $a(t, x)$ и сглаженный коэффициент сноса $\hat{a}(t, x)$ (красные кривые) для 1999, а) $x = \min$; б) $x = \text{mean}$; в) $x = \max$.



(а)



(б)



(в)

Рис. 2. Коэффициент диффузии $b(t, x)$ и сглаженный коэффициент диффузии $\hat{b}(t, x)$ (красная линия) для 1999 а) $x = \min$; б) $x = \text{mean}$; в) $x = \max$.

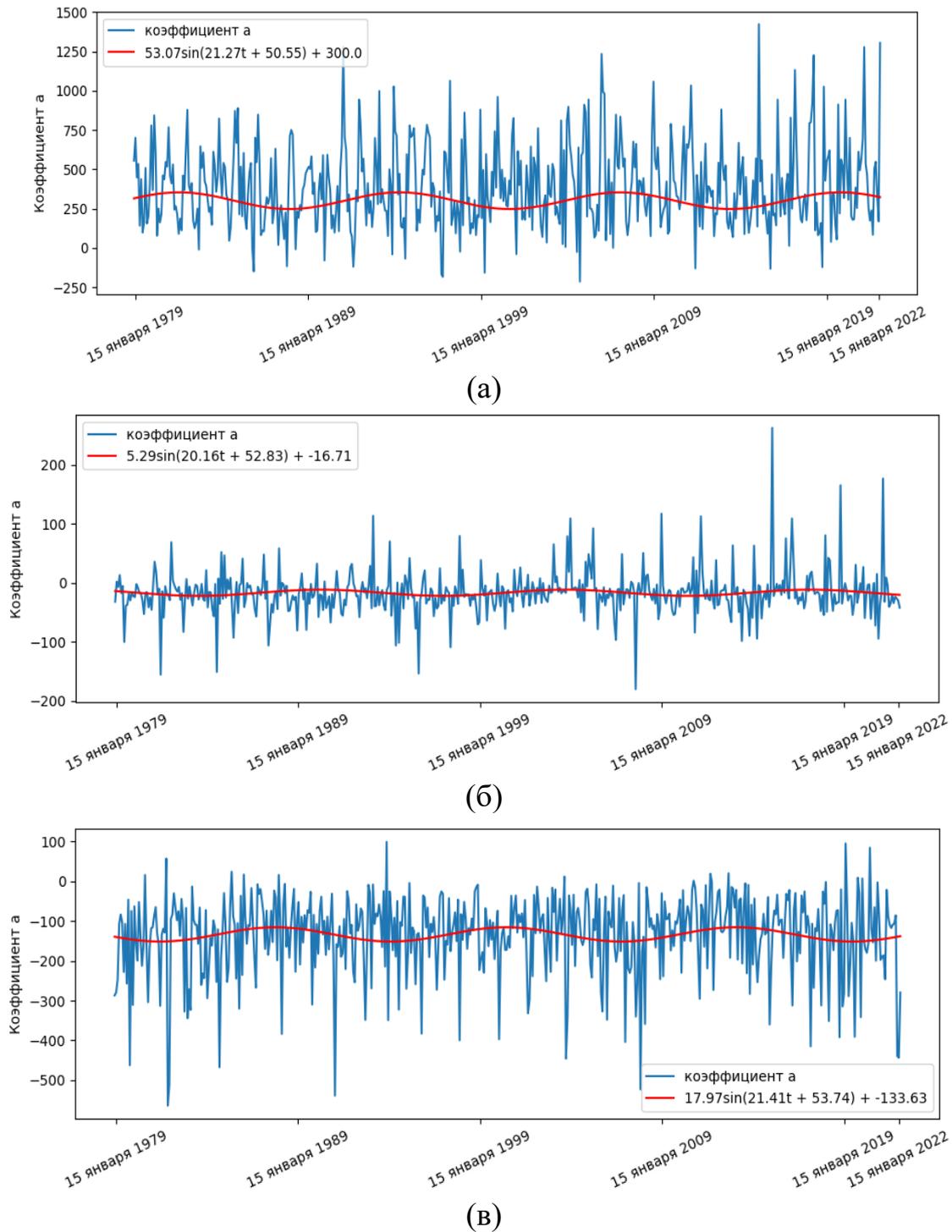
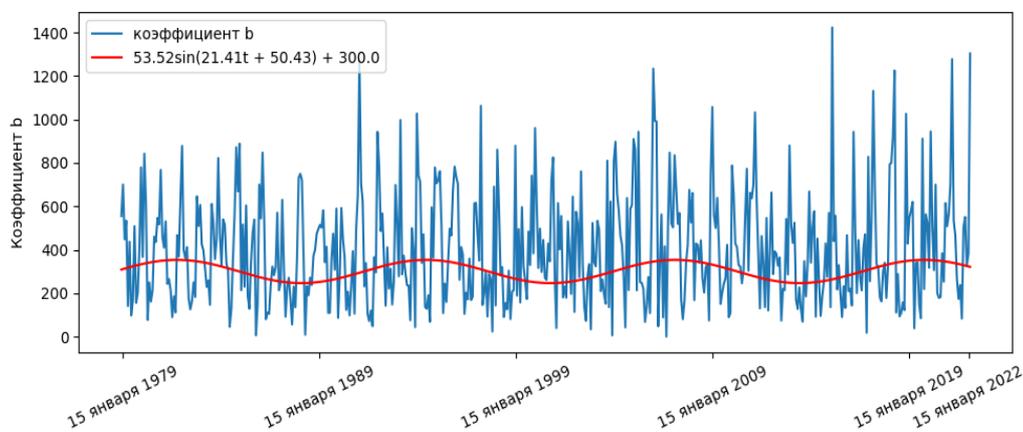


Рис. 3. Изменение во времени коэффициента сноса $a(t, X)$ (вт/м²сут) и сглаженного коэффициента $\hat{a}(t, x)$ (красные кривые) за 40 лет при а) $x = \max$; б) $x = \text{mean}$; в) $x = \min$.

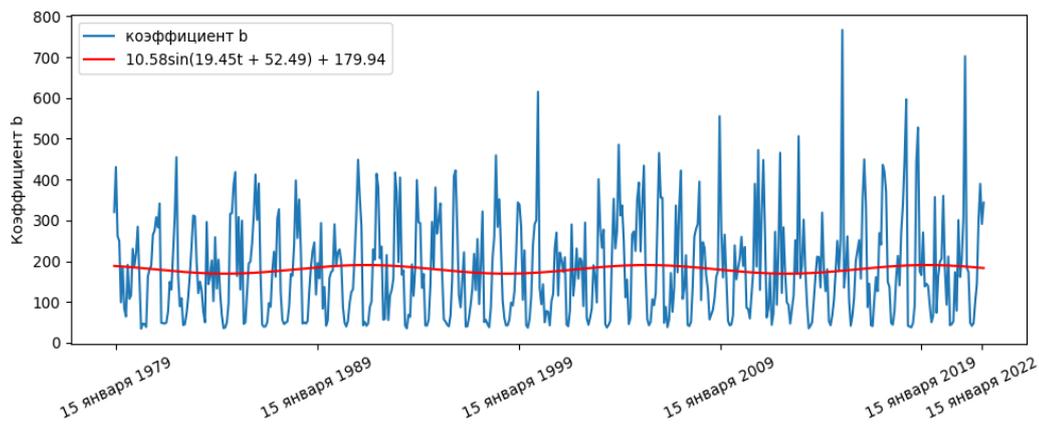
Графики Рис. 3 (а,б,в) имеют разумную физическую интерпретацию. Для минимума потока заметно преобладание «пиков» кривых вверх и достижение значения коэффициента сноса максимума. Для среднего значения потока «пики» смотрят вниз, коэффициент сноса достигает

минимума. Для максимума заметен разброс значений от 200 до -200 , где сами коэффициенты в среднем около нуля.

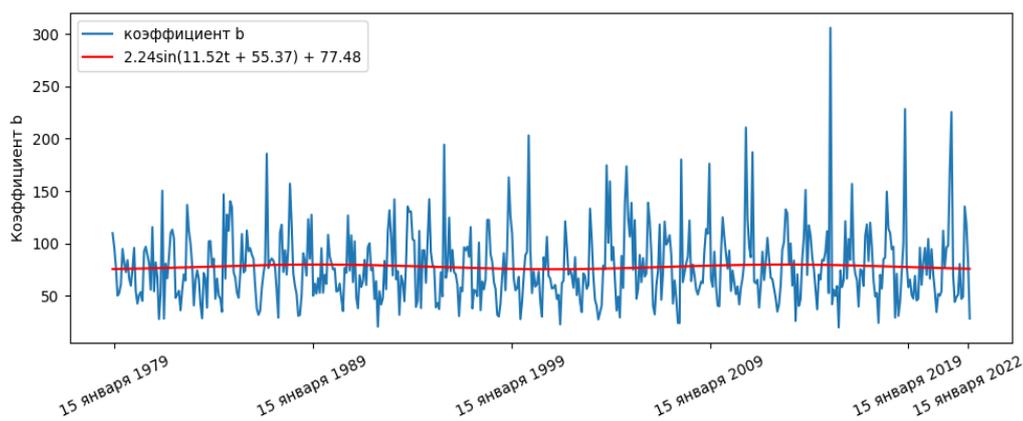
Аналогично выглядят графики коэффициента диффузии $b(t, X)$ и $\hat{b}(t, x)$ (см. Рис. 4 (а,б,в)).



(а)



(б)



(в)

Рис. 4. Изменение во времени коэффициента сноса $b(t, x)$ (вт/м²сут) и сглаженного коэффициента $\hat{b}(t, x)$ (красные кривые) за 40 лет, при а) $x = \max$; б) $x = \text{mean}$; в) $x = \min$.

По рассчитанным значениям амплитуды, фазы и сдвига в формулам (9)-(10) (как функций только пространственных переменных) были построены их карты. Для этого была использована готовая маска карты Северной Атлантики.

На Рис. 5(а) и 5(б) представлены амплитуды для межгодовой и среднемесячной изменчивости соответственно.

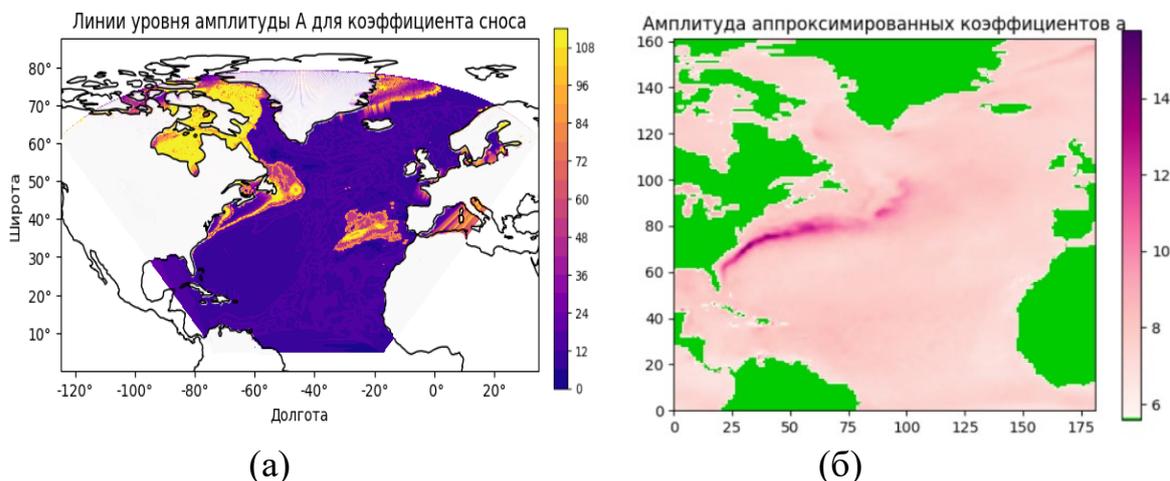


Рис. 5. Амплитуды: а) межгодовой и б) среднемесячной изменчивости.

Далее в этом разделе представлены результаты численного решения уравнения ФКП со сглаженным коэффициентом по формулам (1) и (2). Уравнение ФПК было записано как

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial(\hat{a}p)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\hat{b}p), \quad (11)$$

где:

$p(t, x)$ - искомая плотность вероятности теплового потока в момент t , если его значение равно x ;

\hat{a}, \hat{b} –коэффициенты аппроксимации, рассчитанные по формулам (9) и (10).

Уравнение (11) решается при начальном условии $p(t, 0) = p_0(x)$ и граничных условиях $p(0, \pm\infty) = 0$. Для уравнения (11) была реализована неявная разностная схема второго порядка аппроксимации [7] со сглаженными по формулам (9), (10) коэффициентами.

На Рис. 6, 7 показаны результаты численного решения уравнения ФПК для внутригодовой и межгодовой среднемесячной изменчивости.

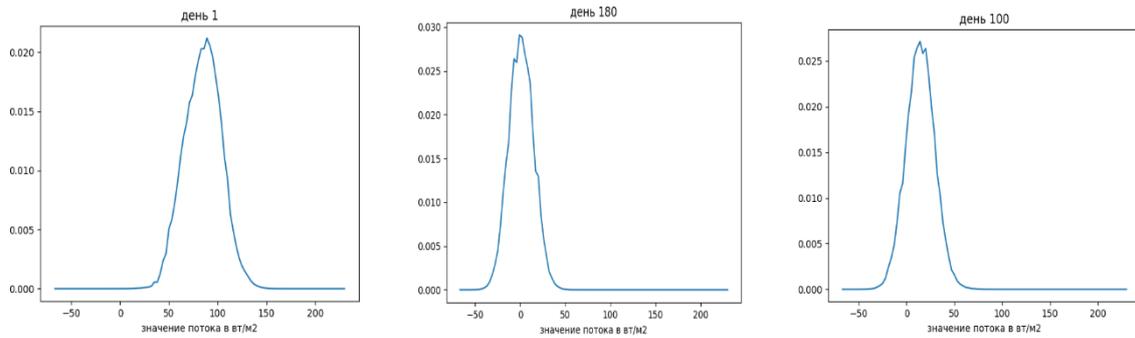


Рис. 6. Решение уравнения ФПК для аппроксимированных коэффициентов для внутригодовой (для 1999 г.) изменчивости.

На рис. 7 показаны результаты численного решения уравнения ФПК на 15 января 1979, 1989, 1999 годов для среднего значения потоков на соответствующую дату. Начальное условие задавалось по формуле

$$p(t,0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) - (\text{гауссова начальная плотность}),$$

где значение σ задавалось как разность между максимальным и минимальным значениями потока.

Из этих рисунков видно, что графики плотности в целом разумны, хорошо отражают динамику коэффициентов уравнения, их максимальное значение осциллирует от 0.18 до 0.01, и их среднее значение тоже осциллирует от 0 (в начале и в конце расчета) до 50 (месяцев) на середину расчетов.

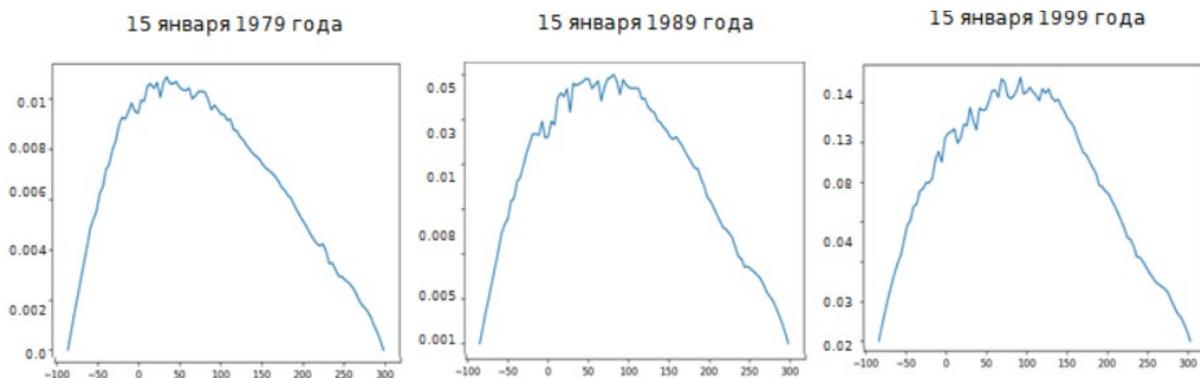


Рис. 7. Решение уравнения ФПК для аппроксимированных коэффициентов для межгодовой среднемесячной изменчивости.

Графики не симметричны и распределение решения уравнения ФПК сильно отличается от нормального. Пульсации кривых на графиках в их верхней части объясняются грубым пространственным разрешением сетки (один градус – около 100 км), на которой находятся коэффициенты

уравнения. Тем не менее, эти распределения физически разумны и могут использоваться для приложений при анализе климатических данных и для климатических прогнозов.

4. Заключение

Результаты исследования позволили установить количественные и качественные закономерности распределения потоков тепла в изучаемом регионе за рассматриваемый период времени. Они могут быть полезными для дальнейшего изучения климатических процессов в Северной Атлантике, а также для разработки стратегий управления ресурсами и защиты окружающей среды.

Проведенное в работе исследование напрямую не предназначено для прогнозов погоды и климата, однако полученные результаты дают оценки некоторых известных феноменов и паттернов. В частности, хорошо известные закономерности зон повышенного давления в области Северной Атлантики, так называемого *исландского минимума* и *азорского максимума* не просто получают подтверждение в проведенном исследовании, но и дают возможность количественно оценить физические характеристики в этих зонах и их изменчивость.

На практике результаты могут быть использованы для анализа больших объемов данных, характерных для климатических наблюдений. Тенденции перехода от использования совместных моделей «океан-атмосфера» к статистической оценке больших данных стали возможны благодаря новым технологиям накопления, хранения данных и их предоставления научному сообществу через интернет-коммуникации.

Однако следует отметить, что проведенное исследование имеет свои ограничения, включая ограниченность доступных данных и предположения, лежащие в основе примененных моделей. Дальнейшие исследования в этой области могут включать расширение временного диапазона и улучшение методов анализа для получения более точных прогнозов и интерпретаций, например, исследование многомерных (взаимозависимых) величин и нахождение их совместных вероятностных распределений.

Таким образом, изучение вероятностного анализа распределения потоков тепла в Северной Атлантике представляет собой актуальную и наукоемкую задачу, решение которой вносит вклад в понимание и прогнозирование климатических изменений на планете.

Работа представлена в рамках выполнения темы НИР «Математические методы анализа данных и прогнозирования» ФИЦ ИУ РАН и частично поддержана грантом Российского научного фонда, номер проекта 22-11-00053.

Литература

1. Gavrikov A., Gulev S., Markina M., Tilinina N., Verezemskaya P., Barnier B., Dufour A., Zolina O., Zyulyaeva Y., Krinitskiy M., Okhlopkov I. and Sokov A. RAS-NAAD: 40-yr High-Resolution North Atlantic Atmospheric Hindcast for Multipurpose Applications (New Dataset for the Regional Mesoscale Studies in the Atmosphere and the Ocean) // *Journal of Applied Meteorology and Climatology*. 2020, vol. 59, issue 5, pp. 793–817. <https://doi.org/10.1175/JAMC-D-19-0190.1>
2. Gorshenin A., Osipova A., Belyaev K. Stochastic analysis of air–sea heat fluxes variability in the North Atlantic in 1979–2022 based on reanalysis data. // *Computers & Geosciences*. 2023, vol. 181, issue 10, 105461. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2023.105461>
3. Cayan D.R. Variability of latent and sensible heat fluxes estimated using bulk formulate. // *Atmosphere-Ocean*. 1992, vol. 30, issue 1, pp. 1–42. <https://doi.org/10.1080/07055900.1992.9649429>
4. Parfitt R., Czaja A., Kwon Y.-O. The impact of SST resolution change in the ERA Interim reanalysis on wintertime Gulf Stream frontal air-sea interaction. // *Geophysical Research Letters*. 2017, vol. 44, issue 7, pp. 3246–3254. <https://doi.org/10.1007/s00376-020-0072-0>
5. Belyaev K., Gorshenin A., Korolev V., Osipova A. Comparison of Statistical Approaches for Reconstructing Random Coefficients in the Problem of Stochastic Modeling of Air–Sea Heat Flux Increments. // *Mathematics*. 2024, vol. 12, issue 2, 228. <https://doi.org/10.3390/math12022288>
6. Simmons A., Hersbach H., Munoz-Sabater J., Nicolas J., Vamborg F., Berrisford P., de Rosnay P., Willett K., Woollen J. Low frequency variability and trends in surface air temperature and humidity from ERA5 and other datasets. // *ECMWF Technical Memoranda*. 2021, vol. 881. <https://doi.org/10.21957/ly5vbtbfd>
7. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М. Наука; 1977. 465 с.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. М. Наука; 1977. 656 с.

Литература

1. Gavrikov A., Gulev S., Markina M., Tilinina N., Verezemskaya P., Barnier B., Dufour A., Zolina O., Zyulyaeva Y., Krinitskiy M., Okhlopkov I. and Sokov A. RAS-NAAD: 40-yr High-Resolution North Atlantic Atmospheric Hindcast for Multipurpose Applications (New Dataset for the Regional Mesoscale Studies in the Atmosphere and the Ocean) // *Journal of Applied Meteorology and Climatology*. 2020, vol. 59, issue 5, pp. 793–817. <https://doi.org/10.1175/JAMC-D-19-0190.1>

2. Gorshenin A., Osipova A., Belyaev K. Stochastic analysis of air–sea heat fluxes variability in the North Atlantic in 1979–2022 based on reanalysis data. // *Computers & Geosciences*. 2023, vol. 181, issue 10, 105461. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2023.105461>
3. Cayan D.R. Variability of latent and sensible heat fluxes estimated using bulk formulate. // *Atmosphere-Ocean*. 1992, vol. 30, issue 1, pp. 1–42. <https://doi.org/10.1080/07055900.1992.9649429>
4. Parfitt R., Czaja A., Kwon Y.-O. The impact of SST resolution change in the ERA Interim reanalysis on wintertime Gulf Stream frontal air-sea interaction. // *Geophysical Research Letters*. 2017, vol. 44, issue 7, pp. 3246–3254. <https://doi.org/10.1007/s00376-020-0072-0>
5. Belyaev K., Gorshenin A., Korolev V., Osipova A. Comparison of Statistical Approaches for Reconstructing Random Coefficients in the Problem of Stochastic Modeling of Air–Sea Heat Flux Increments. // *Mathematics*. 2024, vol. 12, issue 2, 228. <https://doi.org/10.3390/math12022288>
6. Simmons A., Hersbach H., Munoz-Sabater J., Nicolas J., Vamborg F., Berrisford P., de Rosnay P., Willett K., Woollen J. Low frequency variability and trends in surface air temperature and humidity from ERA5 and other datasets. // *ECMWF Technical Memoranda*. 2021, vol. 881. <https://doi.org/10.21957/ly5vbtbfd>
7. Gihman I.I., Skorohod A.V. *Vvedenie v teoriyu sluchajnyh processov*. M.: Nauka. 1977. 465 p.
8. Samarskij A.A. *Teoriya raznostnyh skhem*. M.: Nauka. 1977. 656 p.