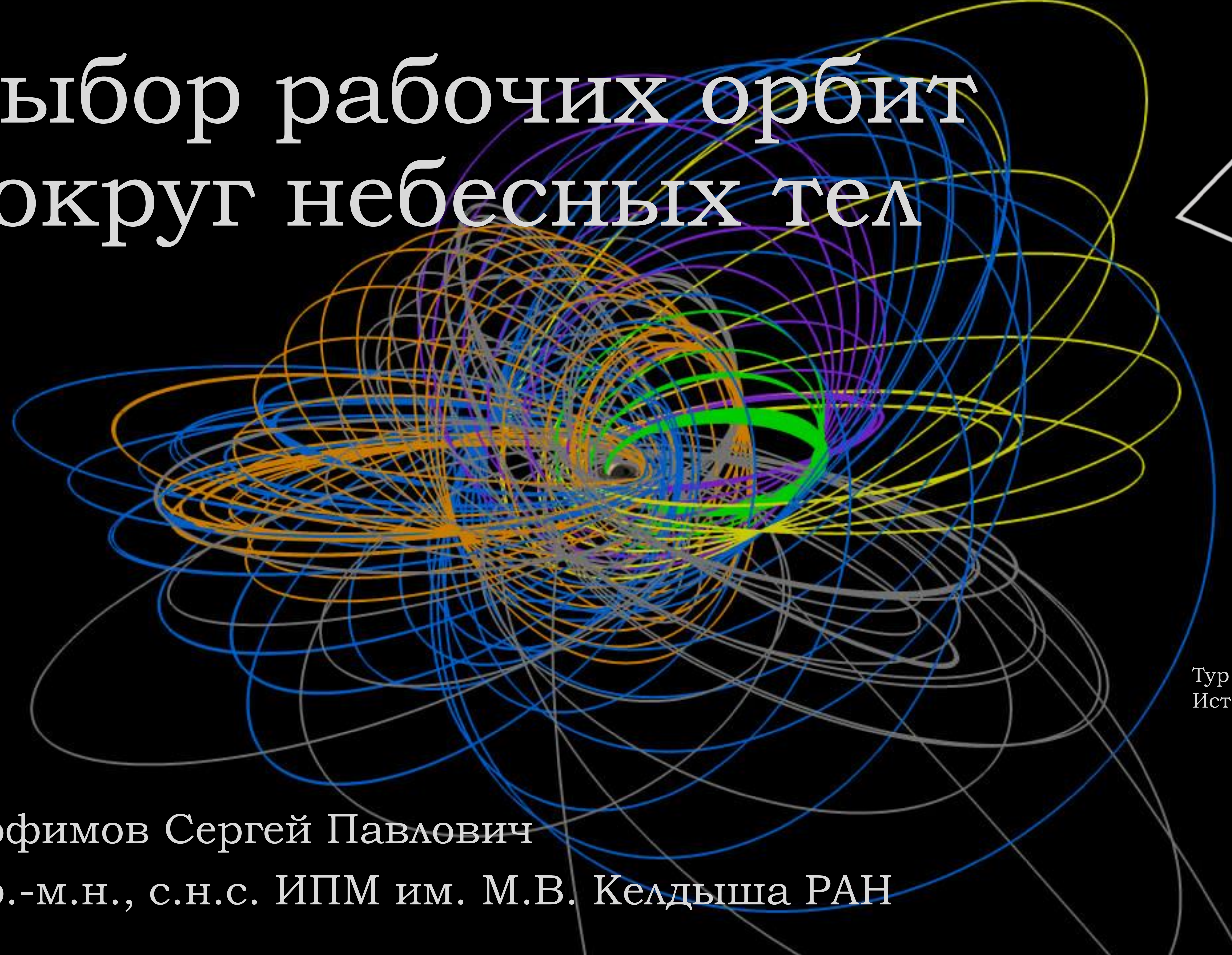
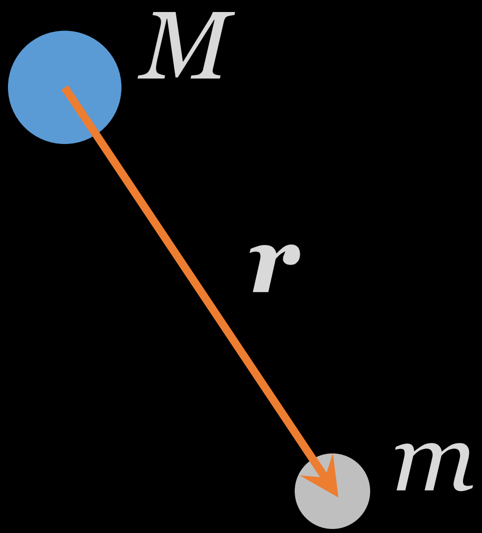
Выбор рабочих орбит вокруг небесных тел



Тур Кассини
Источник: NASA/JPL

Трофимов Сергей Павлович
к.ф.-м.н., с.н.с. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Задача двух тел (two-body problem)



Уравнения относительного движения:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3}\boldsymbol{r}$$

$$m \ll M \;\Rightarrow\; \ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}$$

$\mu = GM$ – гравитационный параметр центрального тела

Первые интегралы задачи двух тел

Невозмущённая задача двух тел – интегрируемая

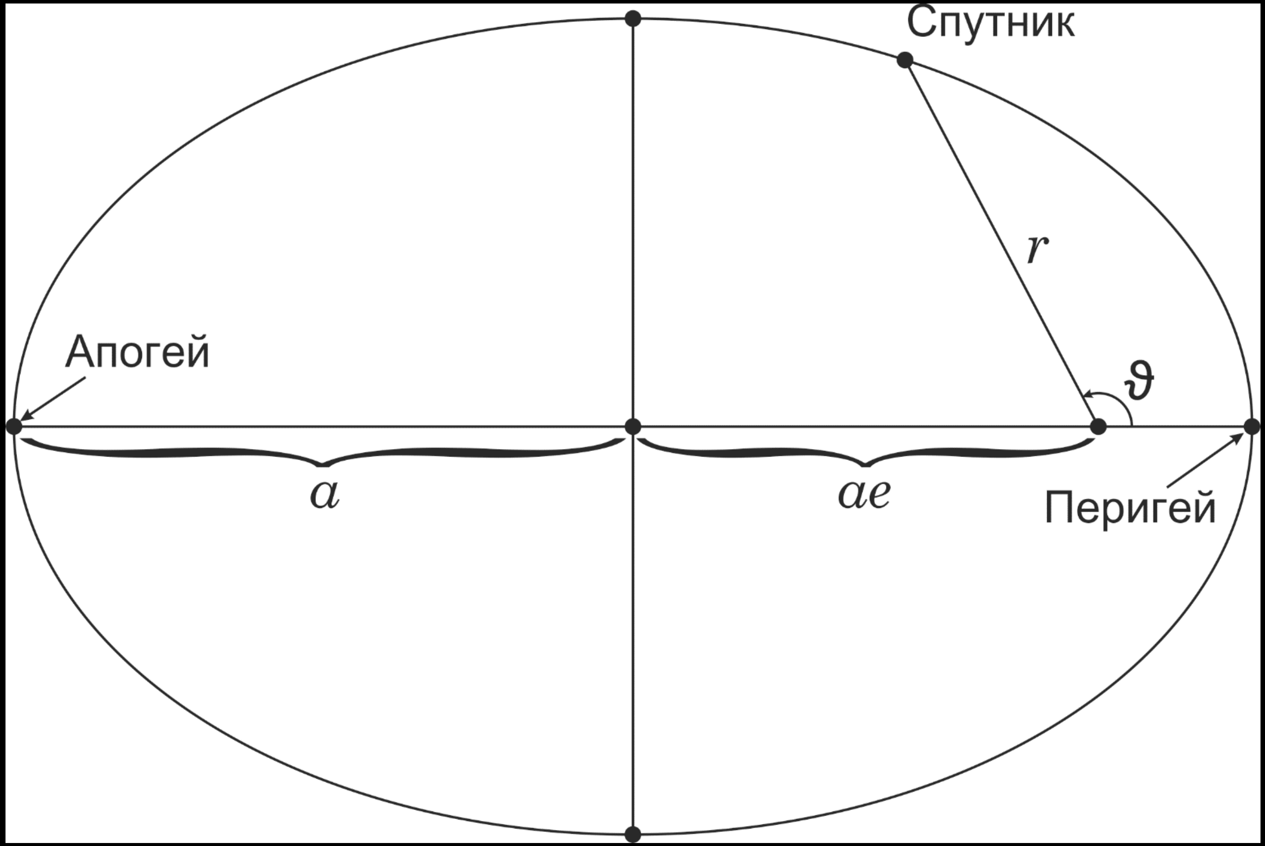
Решения – конические сечения: эллипс, парабола, гипербола

$$h = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$ интеграл энергии (скалярный)

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$ интеграл площадей (векторный)

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{c} - \frac{\mu}{r}\boldsymbol{r}$$ интеграл Лапласа (векторный)

Кеплеров эллипс. Элементы орбиты



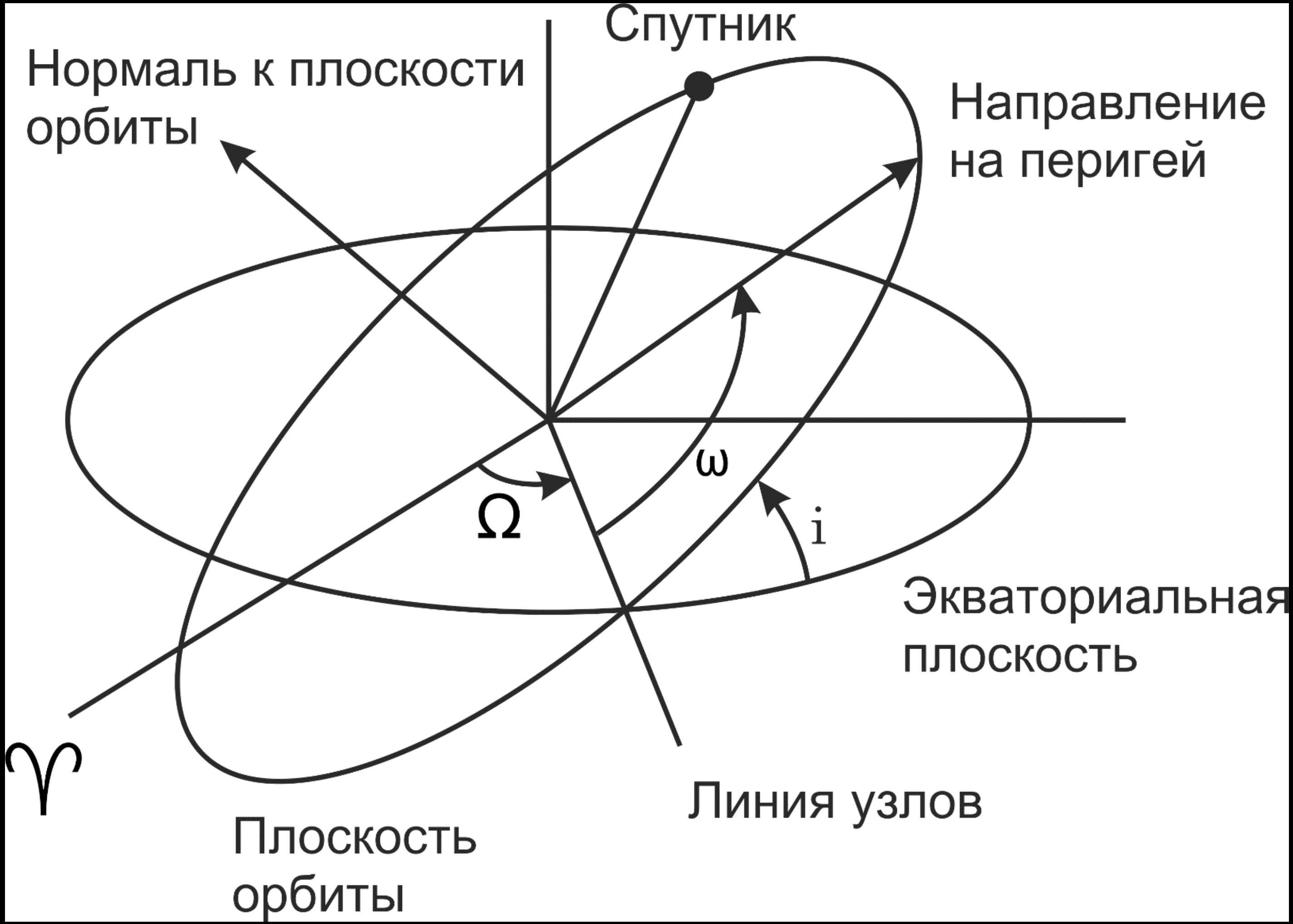
a – большая полуось (semimajor axis)

e – эксцентриситет (eccentricity)

Параметр орбиты (semilatus rectum):

$$p = a(1 - e^2)$$

Кеплеров эллипс. Элементы орбиты



Кеплеров эллипс. Элементы орбиты

Медленно меняющиеся параметры:

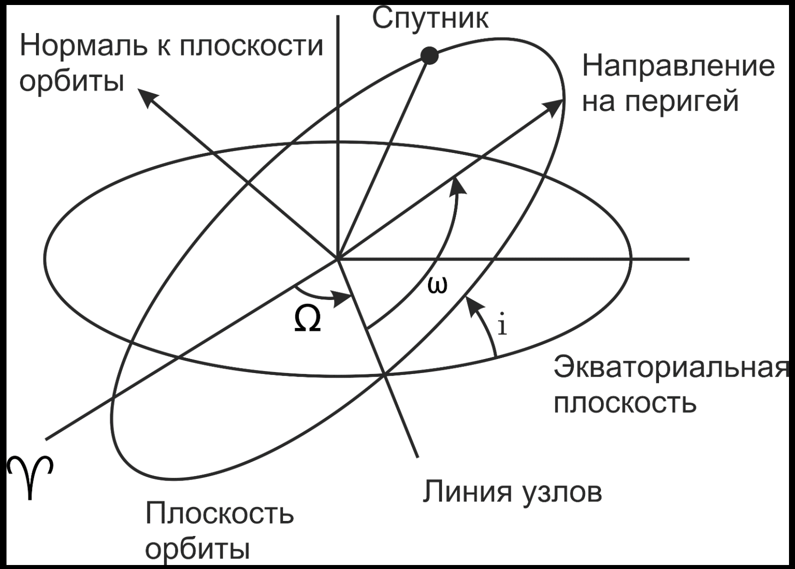
a – большая полуось

e – эксцентриситет

i – наклонение

Ω – долгота восходящего узла

ω – аргумент перицентра



Быстрая переменная:

ν – истинная аномалия

u – аргумент широты

Типы орбит: repeat ground track

Резонансность орбитального движения и вращения небесного тела – это необходимое и достаточное условие повторяемости подспутниковой трассы (замкнутости кривой на поверхности тела, образованной точками, над которыми пролетает КА)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$ – орбитальный период

$$T : T_b = m : n$$ – резонанс $m:n$

Типы орбит: body-synchronous

Синхронность – резонансность 1:1

Синхронная экваториальная орбита называется стационарной

Геостационарная орбита (GEO, ГСО) – круговая экваториальная орбита высотой 35.786 тыс. км (период 1 звёздные сутки = 23 ч 56 мин 4 с)

Орбитальные возмущения

Задача двух тел – самая простая модель орбитального движения в иерархии моделей небесной механики и астродинамики (динамики космического полёта)

Возмущения:

- нецентральность гравитационного потенциала
- гравитационное притяжение со стороны других тел
- световое давление
- сопротивление атмосферы
- релятивистские поправки

Гравитационный потенциал

Центральный гравитационный потенциал $U = \dfrac{GM}{r}$

Гравитационный потенциал произвольного тела:

$$U = \frac{GM}{r} - \frac{GM}{r}\left(\sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_{eq}}{r}\right)^n P_n(\sin\phi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{R_{eq}}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\phi)\left(C_{nk}\cos k\lambda + S_{nk}\sin k\lambda\right)\right)$$

широта

долгота

зональные гармоники

тессеральные гармоники

Вторая зональная гармоника J_2

Элементы орбиты перестают быть константами. Большая полуось, наклонение и эксцентриситет орбиты начинают осциллировать вокруг средних значений с относительной амплитудой порядка J_2.

Out-of-plane precession:

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_{eq}}{p}\right)^2 n \cos i$$

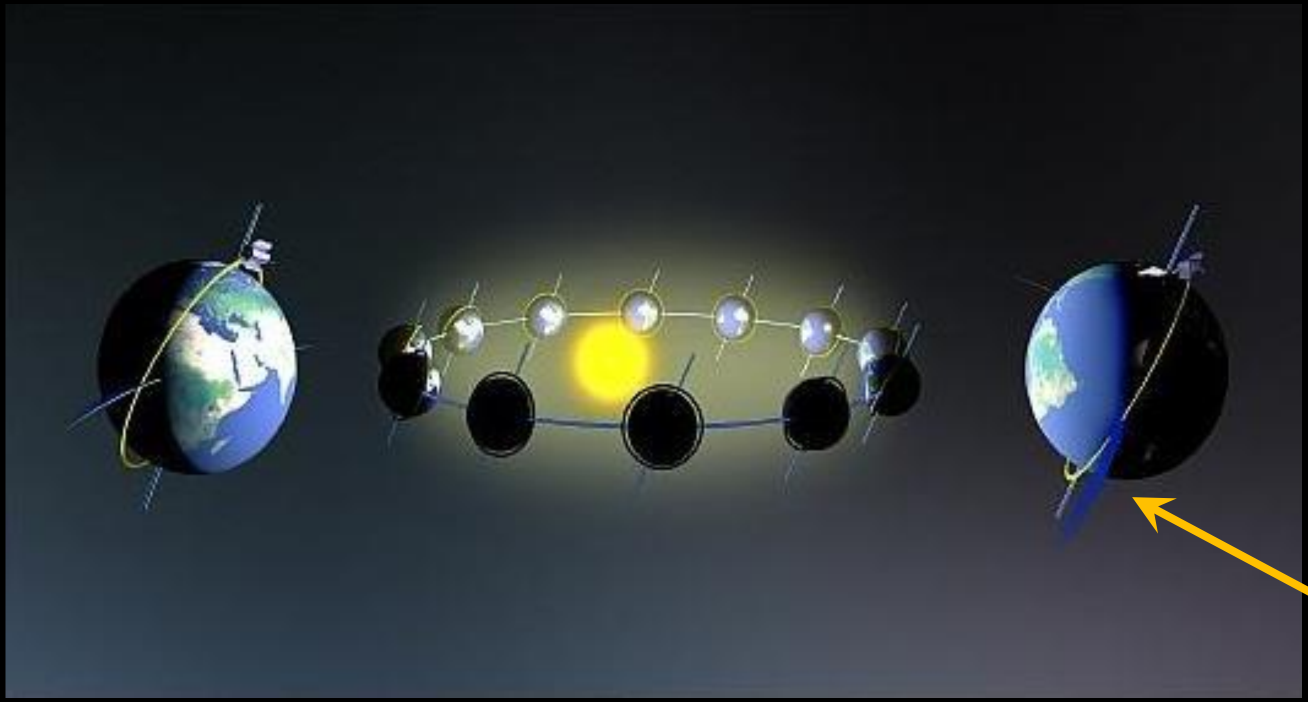
$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$ – среднее движение

In-plane precession:

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_{eq}}{p}\right)^2 n \left(5\cos^2 i - 1\right)$$

Типы орбит: солнечно-синхронные

Плоскость орбиты поворачивается так, что сохраняет свою ориентацию относительно направления на Солнце



$\dot{\Omega} \approx +1$ градус/сутки

(360 градусов за ≈365 суток)

ССО различаются временем прохождения восходящего узла (RAAN time)

ССО типа «восход-закат» (RAAN time 18h или 6h)

Типы орбит: замороженные

Замороженные орбиты (frozen orbits) – орбиты, у которых эксцентриситет и аргумент перицентра почти постоянны в течение длительных интервалов времени

$\dot{\omega} = 0 \;\Rightarrow 5\cos^2 i - 1 = 0$

$i = 63.4^\circ,\; i = 116.6^\circ$ – критические наклонения

Обычно выбирают $\omega = 270^\circ$ или $\omega = 90^\circ$

(зависание над северным или южным полушарием)

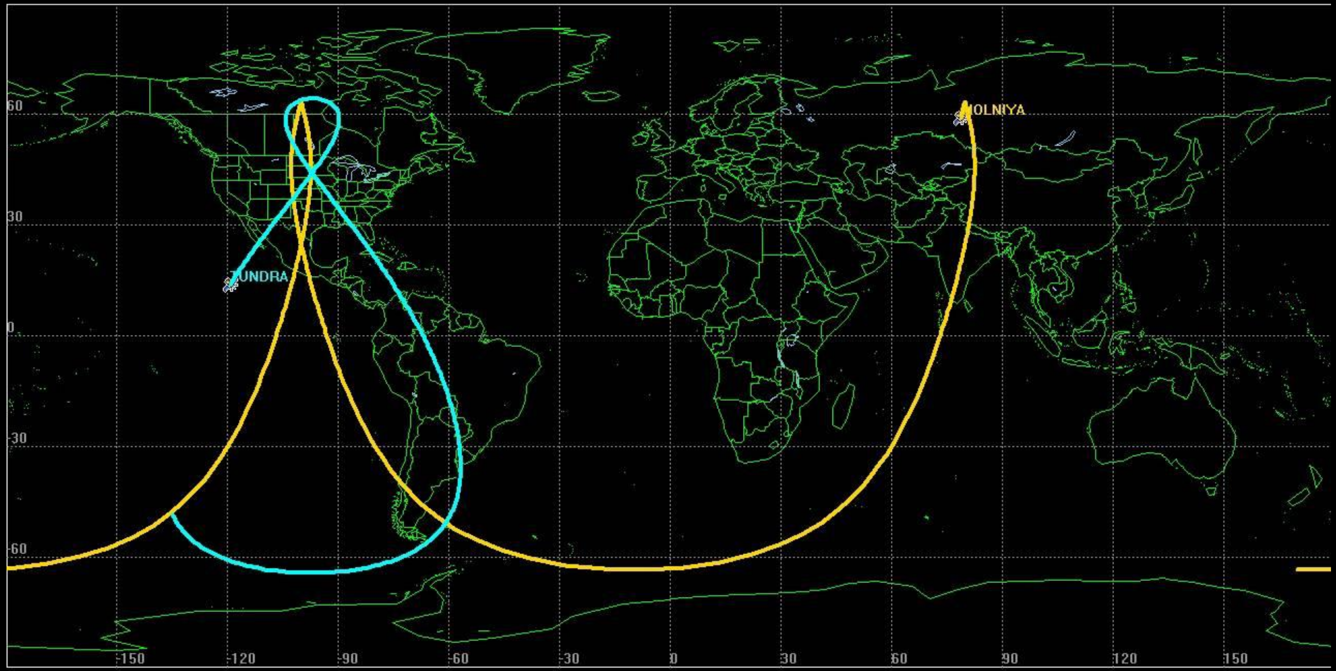
Орбита типа «Тундра»: 1:1, замороженная, $e = 0.24 \ldots 0.4$

Орбита типа «Молния»: 2:1, замороженная, $e = 0.74$

ССО или замороженные орбиты?

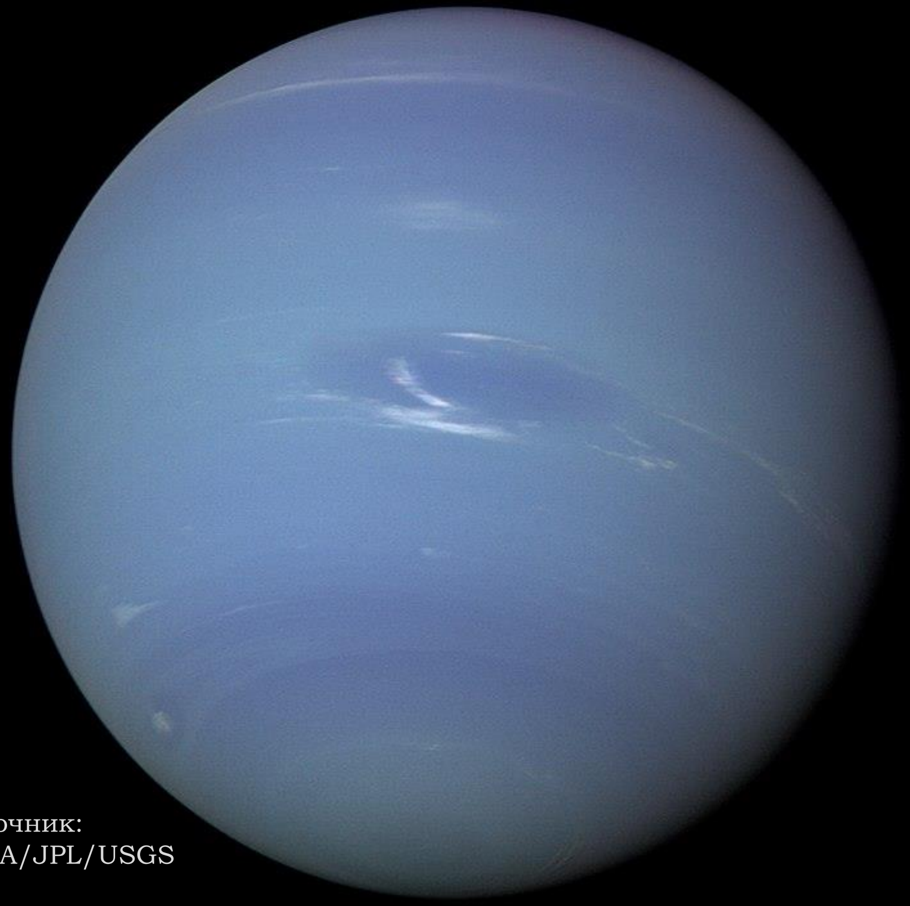
Над точками с одинаковой широтой:

- ССО имеют одинаковые условия освещённости
- замороженные орбиты пролетают на одинаковой высоте



Подспутниковые трассы орбит типа «Молния» (жёлтым) и типа «Тундра» (голубым)

А что там у Нептуна?



Расстояние до Земли

4305.9…4687.3 млн. км

Средний радиус R_{ψ}

24622 ± 19 км ($\approx 3.9\ R_{\oplus}$)

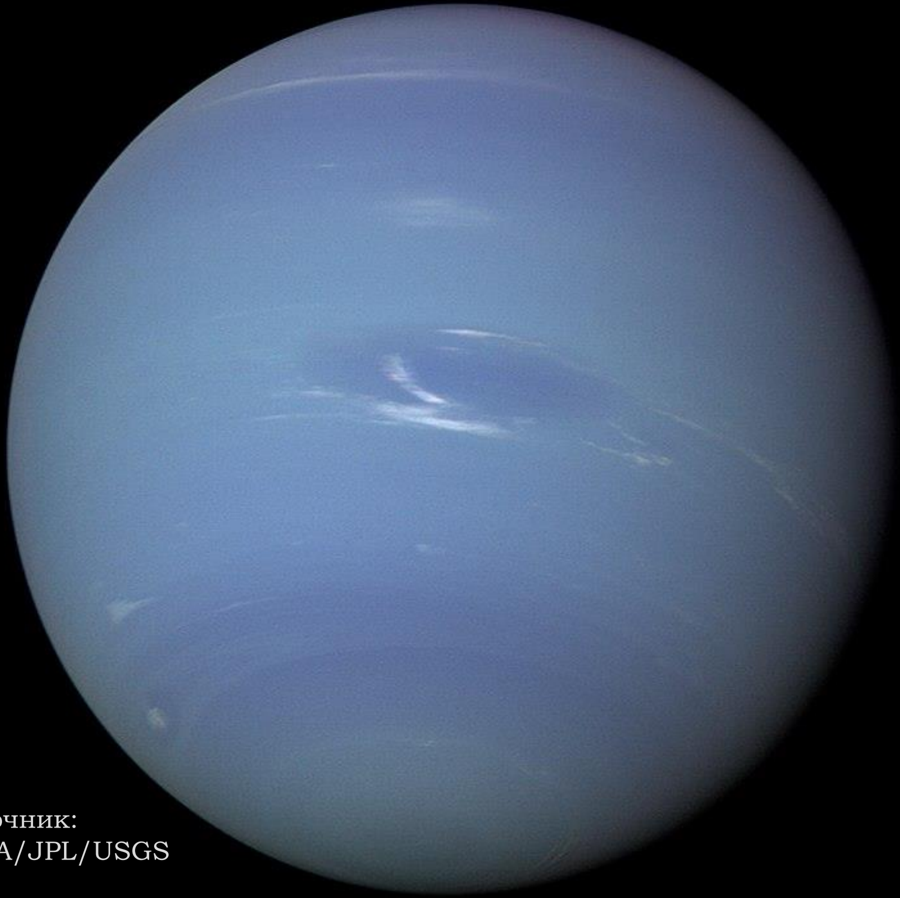
Гравитационный параметр GM_{ψ}

$6.8351 \cdot 10^6$ км^3/с^2

Масса M_{ψ}

$1.02 \cdot 10^{26}$ кг ($\approx 17.15\ M_{\oplus}$)

А что там у Нептуна?



Источник:
NASA/JPL/USGS

Сжатие $(R_{eq} - R_{pol})/R_{eq}$

0.0171 ± 0.0013

Вторая зональная гармоника J_2

$(3.5365 \pm 0.0045) \cdot 10^{-3}$

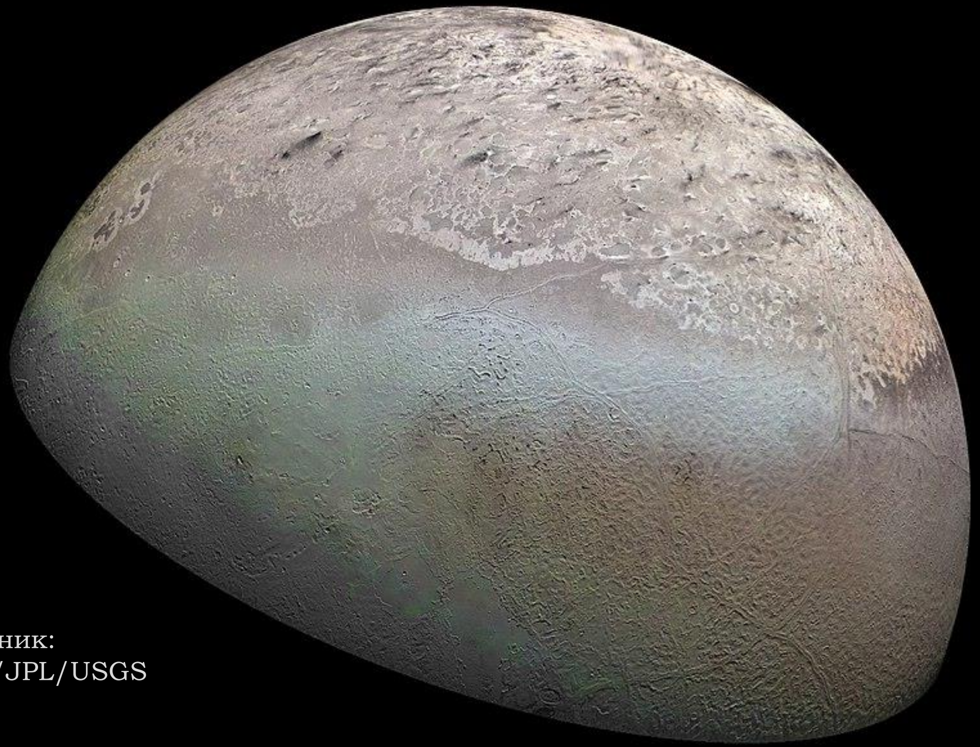
Период вращения

≈16 часов

Радиус стационарной орбиты

Посчитайте сами

А что там у Тритона?



Источник:
NASA/JPL/USGS

Расстояние до Нептуна

354759 км (почти идеально круговая орбита!)

Средний радиус $R_{♆}$

1353.4 км ($\approx 0.78\ R_{☾}$)

Масса $M_{♆}$

$2.14 \cdot 10^{22}$ кг ($\approx 0.29\ M_{☾}$)

В спин-орбитальном резонансе
(как и большинство массивных лун)

Параметры двигателя

$F_t = \dot{m}u$ – сила тяги двигателя

$\dot{m}$ – массовый расход рабочего тела

u – эффективная скорость истечения

$u = I_{sp} \cdot g_0$ $\qquad$ $g_0 = 9.80665$ м/с^2 – стандартное g

I_{sp} – удельный импульс (в секундах)

Типичный удельный импульс химических двигателей: $I_{sp} = 300 \ldots 350$ с

ΔV и формула Циолковского

$$\Delta V = \int_0^t a_t \, dt$$ – характеристическая скорость (дельта-в)

$$m = m_0 \cdot \exp\left(-\Delta V / u\right)$$ – формула Циолковского

Импульсная аппроксимация активных участков: двигатель включается на бесконечно малый интервал времени, в итоге скорость КА меняется скачком – прикладывается/сообщается импульс. Величина импульса скорости равна приращению характеристической скорости (потому и дельта-в).

ΔV и изменение элементов орбиты

$$\boldsymbol{æ} = \boldsymbol{æ}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$$

орбитальные элементы выражаются через декартовы положение и скорость

$$\Delta \boldsymbol{æ} = \frac{\partial \boldsymbol{æ}}{\partial \boldsymbol{v}} \Delta \boldsymbol{v}$$

импульсы линейно связаны с изменением элементов орбиты

Характеристическая скорость – инструмент для разделения задачи маневрирования на динамическую и параметрическую части: оптимизировали траекторию по суммарной ΔV (сумме величин импульсов), потом рассчитали массовый расход

Модель сопряжённых конических сечений. Сфера влияния (SOI)

Сфера влияния небесного тела – условная граница области пространства, в которой можно считать, что КА движется лишь под действием силы гравитации этого тела. Известны несколько способов определения такой условной границы, из которых чаще используют концепцию сферы действия.

$$R_{SOI} = \left(\frac{m}{M}\right)^{2/5}$$

радиус сферы действия (в единицах расстояния между небесными телами)

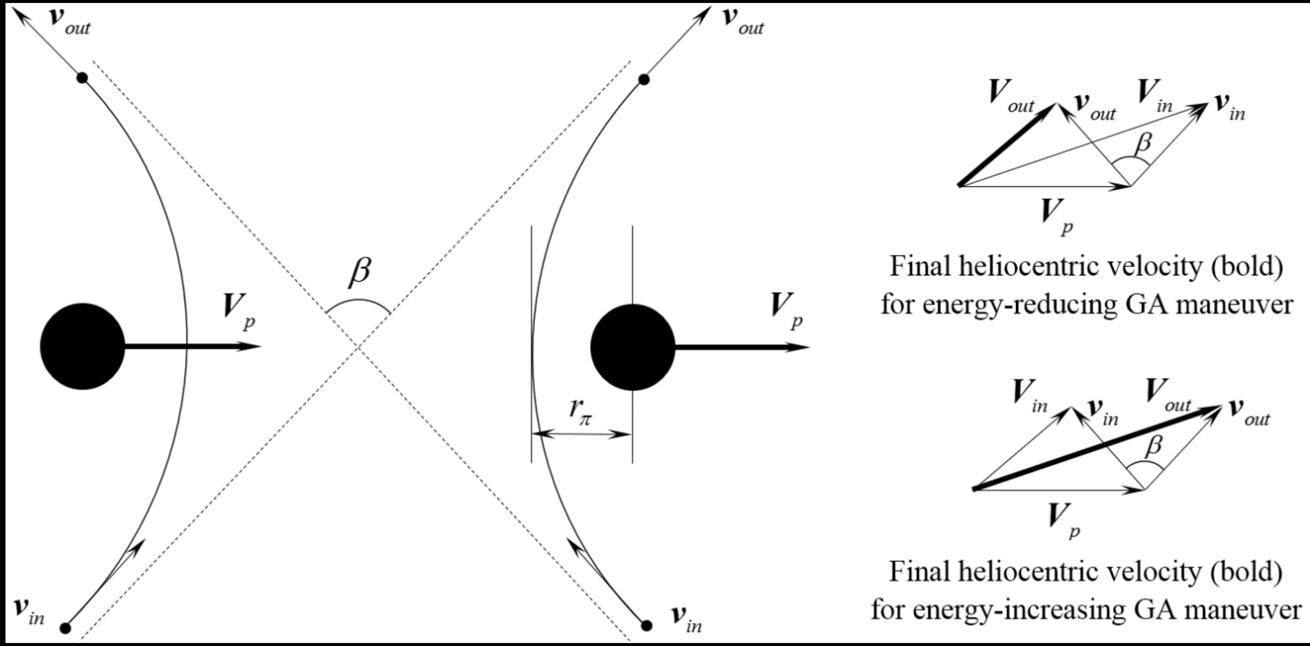
В системе Солнце-Нептун $R_{SOI} \approx 87\ \text{млн. км}$

Модель сопряжённых конических сечений. Гравитационный манёвр

В модели СКС задача проектирования траектории перелёта (тура) разделяется на внешнюю – сшить кеплеровы участки задачи двух тел Солнце-КА (планета-КА) в точках на орбитах планет (спутников планеты) – и внутреннюю – рассчитать параметры гиперболических траекторий пролёта планет (спутников планеты) внутри сфер влияния, обеспечивающие сшивку для внешней задачи.

Гравманёвр = импульс, сообщаемый небесным телом

Геометрия и функции ГМ



Угол поворота скорости

$$\beta = 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{1 + r_\pi v_\infty^2/\mu_p}\right)$$

Функции ГМ:

- разгон/торможение
- поворот

Величина импульса, сообщаемого планетой/спутником планеты:

$$|\Delta \boldsymbol{v}| = \frac{2v_\infty}{1 + r_\pi v_\infty^2/\mu_p}$$

Удачного тура!