

На правах рукописи

Зыков Александр Владимирович

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМОГО  
ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА  
С БОЛЬШИМ ВРАЩАЮЩИМСЯ СОЛНЕЧНЫМ  
ПАРУСОМ**

Специальность 01.02.01 – Теоретическая механика

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена в Открытом акционерном обществе  
«Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва»

**Научный руководитель:** Платонов Валерий Николаевич,  
доктор технических наук

**Научный консультант:** Тимаков Сергей Николаевич,  
кандидат технических наук

**Официальные оппоненты:** Мельников Виталий Михайлович,  
доктор технических наук, профессор, главный  
научный сотрудник Центрального научно-  
исследовательского института машиностроения  
(ФГУП ЦНИИмаш)

Косенко Иван Иванович,  
доктор физико-математических наук, профессор  
кафедры теоретической механики Московского  
авиационного института (ФГБОУ ВПО МАИ)

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное  
учреждение науки «Институт проблем механики  
имени А.Ю. Ишлинского Российской академии  
наук»

Защита состоится 22 декабря 2015 года в 11<sup>00</sup> часов на заседании  
диссертационного совета Д 002.024.01, созданного на базе Института  
прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, расположенного по адресу:  
125047, Москва, Миусская пл., 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМ им. М.В. Келдыша  
РАН и на сайте диссертационного совета <http://keldysh.ru/council/1/>.

Автореферат разослан \_\_ октября 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук

Т.А. Полилова

# Общая характеристика работы

## **Актуальность работы**

Создание в космосе конструкций площадью несколько тысяч квадратных метров и управление положением их в пространстве является сложной научно-технической задачей, не имеющей аналогов в космической технике и требующей для своего эффективного решения нетрадиционных подходов.

Сочетание космических условий, таких как глубокий вакуум, невесомость, поток солнечного излучения, с принципами формирования поверхности за счет центробежных сил открывает новые возможности создания космических крупногабаритных солнечных батарей, отражателей и солнечных парусов. Под формированием поверхности солнечного паруса понимается его раскрытие из уложенного состояния за счет центробежных сил и дальнейшее поддержание его формы.

В предлагаемой работе рассматривается новый класс космических аппаратов (КА) различного назначения, не требующих расхода рабочего тела (ракетного топлива) на коррекцию орбиты, угловые маневры и разгрузку накопленного кинетического момента. Такие КА используют бескаркасный вращающийся солнечный парус, растянутый центробежными силами инерции, в качестве исполнительного органа для передачи, как импульса, так и момента импульса объекту управления, используя для этого силы и моменты сил солнечного давления, а также гироскопические свойства вращающейся конструкции.

В настоящий момент ведутся работы по подготовке к проведению космического эксперимента ТЗ.МКС-КЭ.ККР/11.08 от 24.11.2008 г. «Раскрытие двух пленочных отражателей, формируемых центробежными силами на ТКК «Прогресс-М», регистрация микрочастиц, освещение Земли отраженным солнечным светом, управление гироскопической парой, ретрансляция радиоволн», а также принято решение Координационного научно-технического совета Федерального космического агентства от 26.11.2008 г. по введению космического эксперимента «Знамя-3» в долгосрочную программу научно-прикладных исследований и экспериментов, планируемых на Российском сегменте Международной космической станции (РС МКС).

Вопросами исследования солнечных парусов занимались Поляхова Е.Н., Гуляев В.И., Мельников В.М., Харлов Б.Н и многие другие.

**Цель данной работы** состоит в разработке математических моделей и алгоритмов управления угловым движением космической платформы с большим вращающимся солнечным парусом в различных динамических режимах.

В соответствии с поставленной целью в работе были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Разработка математической модели динамики вращающегося мембранного диска с центральной жесткой вставкой.
2. Нахождение стационарной формы мембранного диска при регулярной прецессии оси вращения паруса.

3. Исследование устойчивости найденной стационарной формы паруса.
4. Исследование динамики углового положения космической платформы с солнечным парусом в режимах гашения начальных угловых скоростей и программных разворотов.
5. Разработка математической модели выпуска солнечного паруса из уложенного состояния, в рамках которой парус представляется в виде четырех выпускаемых тросов.
6. Нахождение аналитического решения уравнения малых поперечных колебаний точечной массы на невесомом тросе в процессе выпуска из вращающегося центрального блока.
7. Разработка алгоритма раскрытия весоного троса из уложенного состояния, представленного в виде совокупности материальных точек, соединенных невесомыми нерастяжимыми нитями.
8. Сравнение способов выпуска весоного троса из вращающегося с постоянной угловой скоростью центрального барабана.

**Научная новизна** диссертационной работы заключается в следующем:

- Разработана математическая модель динамики вращающегося мембранного диска с центральной жесткой вставкой.
- Проведен анализ напряженно-деформированного состояния вращающегося пленочного диска, находящегося под нагрузкой гироскопического момента, возникающего при повороте оси вращения центральной жесткой вставки отражателя.
- Найдена стационарная форма мембранного диска, возникающая при регулярной прецессии оси вращения паруса, как прямым интегрированием неоднородного уравнения в частных производных, так и методом Фурье, путем разложения решения в ряд по собственным функциям.
- Доказана устойчивость найденной стационарной формы паруса прямым методом Ляпунова.
- Доказана асимптотическая устойчивость найденной стационарной формы паруса в случае конструкционного демпфирования согласно гипотезе Фойгта.
- Представлены результаты аналитических и численных исследований динамического поведения КА в режимах гашения начальных угловых скоростей и программных разворотов.
- Найдено аналитическое решение уравнения малых поперечных колебаний точечной массы на невесомом тросе в процессе выпуска из вращающегося центрального блока. Решение найдено для случая равномерного выпуска через функции Бесселя и для случая равномерно замедленного выпуска через гипергеометрические функции.
- Построена модель выпуска весоного троса, представленного в виде совокупности материальных точек, соединенных невесомыми нерастяжимыми нитями.

## **Теоретическая и практическая значимость**

Полученные в диссертации результаты применены к разработке систем управления движением КА с центробежными бескаркасными вращающимися конструкциями. Теоретические результаты имеют ярко выраженную практическую направленность. Доказанная устойчивость мембранного диска солнечного паруса, разработанные алгоритмы управления угловым движением КА и алгоритмы раскрытия вращающихся конструкций из уложенного состояния могут быть использованы при подготовке космических экспериментов по раскрытию как солнечных парусов, так и тросовых систем в существующих и разрабатываемых проектах.

Результаты исследования могут быть использованы для обучения студентов и аспирантов технических вузов, а также специалистов по ракетно-космической технике, занимающихся вопросами управления движением космических платформ с вращающимися солнечными парусами и разворачивания в космическом пространстве тросовых систем.

### **Выносимые на защиту результаты и положения:**

1. Вывод стационарной формы мембранного диска солнечного паруса при регулярной прецессии оси его вращения и доказательство её устойчивости.
2. Алгоритм управления угловым движением космической платформы с большим вращающимся солнечным парусом в режимах гашения начальных угловых скоростей и программных разворотов.
3. Способ укладки солнечного паруса в виде четырех геометрически симметричных тросов.
4. Аналитическое решение линеаризованной задачи выпуска невесомого троса с точечной массой на конце из цилиндрического контейнера, вращающегося с постоянной угловой скоростью.
5. Математическая модель выпуска весомого троса из вращающегося с постоянной угловой скоростью центрального барабана.

### **Апробация результатов**

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих российских и международных семинарах и конференциях:

9-я международная конференция «Авиация и космонавтика – 2010» (16-18 ноября 2010 года, МАИ, Москва);

XIII, XV, XVI и XVII конференции молодых учёных «Навигация и управление движением» (15-17 марта 2011 года, 12-15 марта 2013 года, 11-14 марта 2014 года, 17-20 марта 2015 года, ЦНИИ «Электроприбор», Санкт-Петербург) [3, 11, 13, 16];

XIX и XX научно-технические конференции молодых ученых и специалистов (14-18 ноября 2011 года, 10-14 ноября 2014 года, РКК «Энергия», Королёв) [6, 18];

LIV, LV и LVI научные конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук» (25-26 ноября 2011 года, 19-25 ноября 2012 года, 25-30 ноября 2013 года, МФТИ, Долгопрудный) [5, 8, 14];

Международная научная конференция по механике «Шестые Поляховские чтения» (31 января – 3 февраля 2012 года, СПбГУ, Санкт-Петербург) [7];

Семинар по механике космического полета им. В.А. Егорова на механико-математическом факультете МГУ под руководством А.Ю. Белецкого (25 апреля 2012 года, 3 апреля 2013 года, 14 мая 2014 года, 19 ноября 2014 года, МГУ, Москва);

XXXVII и XXXIX Академические чтения по космонавтике «Актуальные проблемы Российской космонавтики» (27 января – 1 февраля 2013 года, 27-30 января 2015 года, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва) [10, 20];

64-ый Международный астронавтический конгресс (23-27 сентября 2013 года, Пекин, Китай) [12];

7-я Российская мультиконференция по проблемам управления «Управление в морских и аэрокосмических системах (УМАС-2014)» (7-9 октября 2014 года, ЦНИИ «Электроприбор», С-Петербург) [17];

Семинар кафедры теоретической механики МФТИ (21 ноября 2014 года, МФТИ, Долгопрудный);

Семинар по теории управления и динамике систем под руководством академика Ф.Л. Черноусько (25 декабря 2014 года, ИПМех РАН, Москва);

Международная научная конференция по механике «Седьмые Поляховские чтения» (2-6 февраля 2015 года, СПбГУ, Санкт-Петербург) [21];

Всероссийская молодежная научно-практическая конференция «Космодром «Восточный» и перспективы развития российской космонавтики» (5-6 июня 2015 года, Космодром «Восточный», Благовещенск) [22];

XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (20-24 августа 2015 года, КФУ, Казань) [23];

Расширенный семинар отдела № 5 «Механика космического полета и управление движением» Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Руководитель: проф. Ю.Ф. Голубев (17 сентября 2015, ИПМ, Москва).

### **Публикации**

Результаты работы изложены в 23 печатных работах, включая тезисы и доклады, сделанные на различных конференциях, 6 из которых [1, 2, 9, 12, 15, 19] в печатных изданиях, рекомендованных ВАК РФ.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка используемых источников и списка иллюстративного материала. Общий объем диссертации составляет 112 страниц и включает 45 рисунков. Список использованных источников насчитывает 65 наименований на 8 страницах.

## **Содержание работы по главам**

### **Введение**

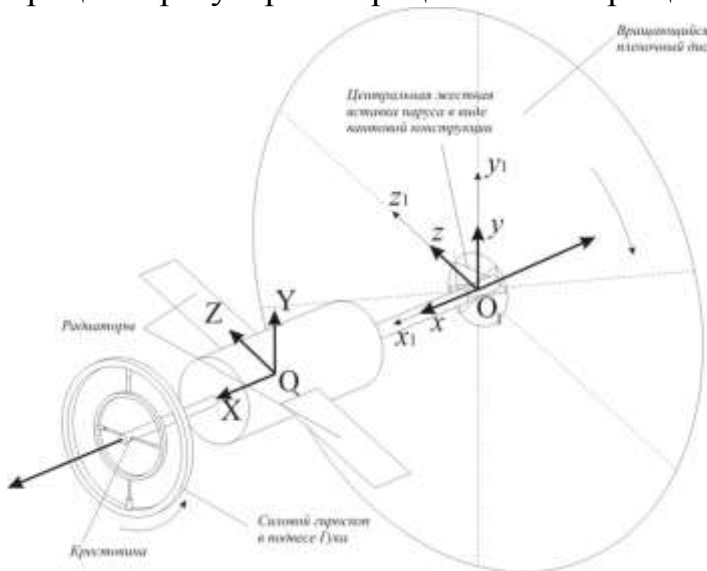
Обоснована актуальность диссертационной работы, приводится описание базовой конструкции как объекта управления, дается краткий обзор и краткое содержание диссертации.

## Глава 1. Решение задачи упругости вращающегося диска

В данной главе аналитически исследуется напряженно-деформированное состояние вращающегося пленочного диска, находящегося под нагрузкой центробежной силы и гироскопического момента, возникающего при повороте оси вращения центральной вставки отражателя в процессе выполнения угловых маневров [1, 9]. В разделе 1.1 приводится описание рабочей поверхности солнечного паруса, которая представляет собой в развернутом состоянии сплошной круглый пленочный диск радиусом  $R=50$  м, радиус центральной жесткой вставки  $a=5$  м, толщина пленки  $h=1,2 \cdot 10^{-5}$  м. Мембрана диска изготовлена из полиамидной пленки плотностью  $\rho=1,4 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Диск вращается с угловой скоростью  $\Omega=0,5$  рад/с, вследствие чего материал паруса находится в напряженно-деформированном состоянии.

Вводятся используемые системы координат: инерциальная  $O_1xyz$  и вращающаяся  $O_1x_1y_1z_1$ , связанная с недеформированным полотном паруса и вращающаяся вокруг оси  $O_1x$  с угловой скоростью  $\Omega$  (рис. 1). Считаем, что в начальный момент времени  $t=0$  оси  $O_1xyz$  и  $O_1x_1y_1z_1$  совпадают.

В разделе 1.2 находится стационарная форма паруса, возникающая в процессе регулярной прецессии оси вращения мембраны.



Пусть система координат  $O_1xyz$  медленно поворачивается с угловой скоростью  $\omega$ , например, вокруг оси  $O_1y$ . Тогда во вращающейся системе координат  $O_1x_1y_1z_1$ , жестко связанной с центральной вставкой, при этом оси  $O_1x$  и  $O_1x_1$  совпадают, уравнение поперечных колебаний мембраны будет иметь вид [2, 4]:

Рис. 1. Базовая конструкция и используемые системы координат

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \sigma_r r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\sigma_\varphi}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) = \rho r \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2\Omega\omega\rho r^2 \cos(\varphi + \Omega t), \quad (1)$$

где  $W(r, \varphi, t)$  – смещение элемента пленки в нормальном направлении к плоскости вращения паруса в зависимости от переменной  $r$  в радиальном направлении,  $\varphi$  – в тангенциальном направлении и времени  $t$ ;  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  – радиальное и тангенциальное напряжения мембранного диска. Предполагается, что касательное напряжение  $\sigma_{r\varphi} = 0$ .

Неоднородная добавка в правой части уравнения (1) соответствует кориолисовым силам, возникающим при равномерной прецессии оси вращения

солнечного паруса. Центробежными силами, возникающими из-за прецессии оси вращения паруса, пренебрегаем в силу малости угловой скорости  $\omega$ . Требуется найти решение вида  $W(r, \varphi, t) = R(r) \cos(\varphi + \Omega t)$ , удовлетворяющее граничным условиям  $W(a, \varphi, t) = 0$  и  $\sigma_r r \partial W / \partial r \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow R - 0$  в радиальном направлении и  $W(r, \varphi, t) = W(r, \varphi + 2\pi, t)$  – в тангенциальном.

Приводится два способа решения: методом вариации постоянной и методом Фурье. В первом случае общее решение уравнения (1), не имеющее логарифмической особенности при  $r = R$ , в системе координат  $O_1xyz$  записывается в виде:

$$W(r, \varphi) = -\frac{2\omega r}{(3 + \mu)A\Omega} \left[ (1 + A) \ln \frac{r^2 - AR^2}{a^2 - AR^2} - \ln \frac{r^2}{a^2} \right] \cos \varphi, \quad (2)$$

где  $A$  – коэффициент, зависящий от геометрических и плотностных характеристик мембранного диска,  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Видно, что решение (2) не зависит от времени, что и объясняет название «стационарная». Стационарная форма мембраны при регулярной прецессии в случае  $a/R = 0,1$ ;  $\mu = 0,4$ ;  $\omega = 0,5236 \cdot 10^{-3}$  рад/с;  $\Omega = 0,5$  рад/с и  $A = -0,0042$  представлена на рисунке 2.

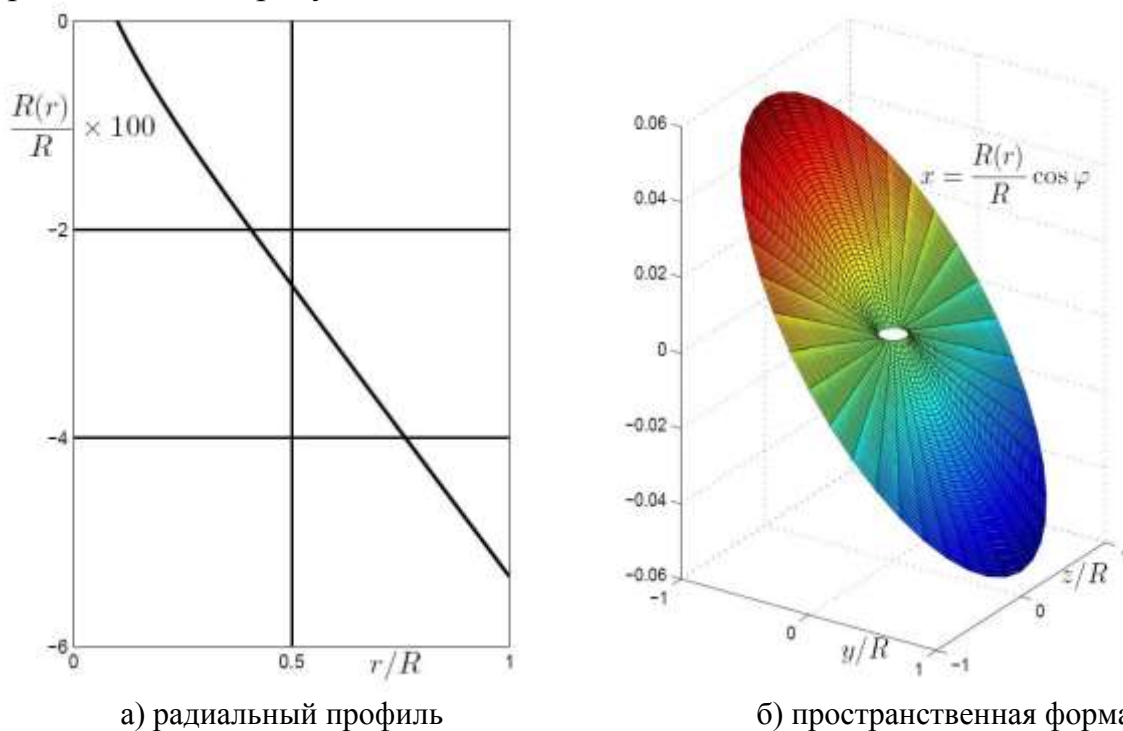


Рис. 2. Стационарная форма мембраны при регулярной прецессии

В разделе 1.3 проводится анализ устойчивости полученной стационарной формы поверхности мембранного диска при равномерной прецессии оси его вращения. Под устойчивостью стационарной формы понимается, что малые возмущения начальных условий стационарной формы приводят к малым отклонениям решения уравнения (1).

Для доказательства устойчивости применяется прямой метод Ляпунова. Необходимо отметить, что в данном случае метод Ляпунова применяется к системе с распределенными параметрами, описываемой уравнением движения (1). Поэтому в качестве аргументов функции Ляпунова выбираются



поперечные мембранные усилия, которые являются линейными комбинациями от угловых перемещений  $\partial W/\partial r$  и  $\partial W/r\partial\varphi$ , и скорости поперечных перемещений  $\partial W/\partial t$ . Эти переменные полностью описывают состояние любого элемента мембранного диска. Для каждого такого элемента строится положительно определенная квадратичная форма от перечисленных переменных и интегрируется по всей поверхности мембраны, таким образом, получается функцию Ляпунова в виде интеграла энергии:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_a^R \left[ \frac{\sigma_r}{\rho\Omega^2} \left( \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\partial W_{cmau}}{\partial r} \right)^2 + \frac{\sigma_\varphi}{\rho\Omega^2} \left( \frac{\partial W}{r\partial\varphi} - \frac{\partial W_{cmau}}{r\partial\varphi} \right)^2 + \frac{1}{\Omega^2} \left( \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\partial W_{cmau}}{\partial t} \right)^2 \right] r dr d\varphi$$

Функция Ляпунова, построенная таким образом, принимает нулевое значение при подстановке в нее стационарной формы (2). В соответствии с прямым методом Ляпунова, показывается, что полная производная функции Ляпунова по времени  $dV/dt$ , взятая в силу уравнения движения (1) равняется нулю. Таким образом, доказывается устойчивость стационарной формы паруса при равномерной прецессии оси его вращения.

Для доказательства асимптотической устойчивости применяется гипотеза Фойгта, согласно которой напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  зависят не только от деформаций  $\varepsilon$ , но и от скорости деформаций  $\partial\varepsilon/\partial t$ , то есть

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \varepsilon_r + \mu\varepsilon_\varphi + h \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\varphi) \right] = \frac{E}{1-\mu^2} \left( 1 + h \frac{\partial}{\partial t} \right) (\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\varphi),$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_r + h \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_r) \right] = \frac{E}{1-\mu^2} \left( 1 + h \frac{\partial}{\partial t} \right) (\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_r),$$

где  $h$  – коэффициент трения,  $E$  – модуль Юнга,  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

В этом случае уравнение для нахождения стационарной формы выглядит следующим образом:

$$\left( 1 + h \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \sigma_r r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\sigma_\varphi}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) \right] = \rho r \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2\Omega\omega\rho r^2 \cos(\varphi + \Omega t) \quad (3)$$

Общего решения уравнения (3) находится методом Фурье и показывается его асимптотическое стремление к частному решению – стационарной форме

$$W_p(r, \varphi) = -2\Omega\omega \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\sqrt{(\omega_k^2 - \Omega^2)^2 + (h\omega_k^2\Omega)^2}} \frac{R_k(r)}{\sqrt{l_k\pi}} \cos(\varphi - \Delta\varphi_k),$$

где  $R_k(r)\cos\varphi/\sqrt{l_k\pi}$  и  $R_k(r)\sin\varphi/\sqrt{l_k\pi}$  – собственные функции однородной задачи (1) с собственными значениями  $\omega_k^2$  (здесь  $1/\sqrt{l_k\pi}$  – нормировочные коэффициенты)<sup>1</sup>.

Таким образом, асимптотическая устойчивость доказана.

В разделе 1.4 обсуждаются результаты, полученные в первой главе.

<sup>1</sup>Легостаев В.П., Субботин А.В., Тимаков С.Н., Черемных Е.А. Собственные колебания вращающейся мембраны с центральной жесткой вставкой (применение функций Хойна) // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 224-238.

## Глава 2. Управление угловым движением космической платформы с солнечным парусом

В данной главе рассматриваются вопросы углового движения космической платформы с солнечным парусом. В разделе 2.1 приводится строгий вывод описания системы с распределенными параметрами, а именно вращающегося мембранного диска с центральной жесткой вставкой в виде набора гироскопов в упругих подвесах, каждый со своим приведенным моментом инерции и жесткостью подвеса. Из нормировки полученных мод движения на моменты инерции строго следует, что 99,9% массы мембраны паруса совершает колебания на первых двух гироскопически связанных кососимметричных модах движения. Это позволяет с большой степенью точности заменить описание динамического поведения объекта управления как системы с распределенными параметрами его описанием как КА с одним гироскопом в упругом подвесе в виде вращающегося мембранного диска и управляющим силовым гироскопом в подвесе Гука с равным по величине и противоположно направленным кинетическим моментом.

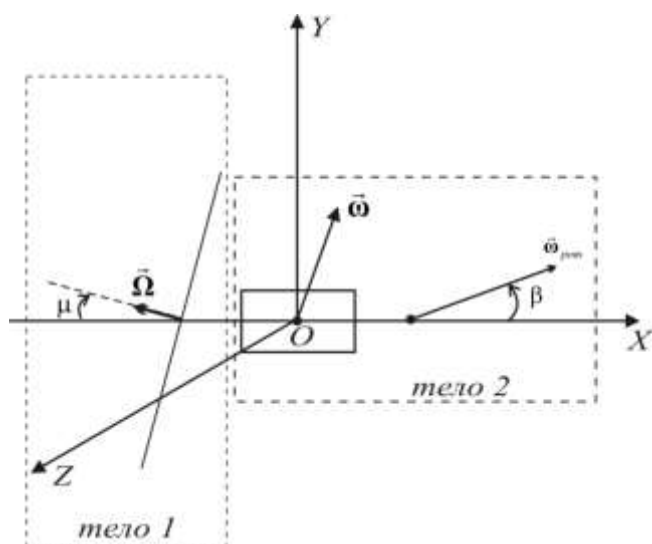


Рис. 3 Динамическая схема объекта управления в системе координат  $OXYZ$

Для вывода уравнений движения космической платформы в разделе 2.2 вводится дополнительная система координат  $OXYZ$ , связанная с осями чувствительности датчиковой аппаратуры. Рассматривается угловое движение объекта управления вокруг поперечных осей аппарата  $Oy$  и  $Oz$ , предполагая, что вокруг продольной оси  $Ox$  система управления с достаточной степенью точности удерживает аппарат. На рисунке 3 представлен объект управления в виде двух тел, каждое из которых рассматривается по отдельности:

тело 1 – солнечный парус и тело 2 – приборный отсек вместе с силовым гироскопом. Здесь  $\omega$  – угловая скорость вращения аппарата,  $\Omega$  – относительная угловая скорость вращения паруса,  $\vec{\omega}_{rot}$  – относительная угловая скорость вращения ротора силового гироскопа,  $\mu$  – угол отклонения плоскости вращения мембранного диска,  $\beta$  – угол отклонения ротора силового гироскопа в подвесе Гука. На основании вывода, приведенного в разделе 2.1, кинетические моменты для тела 1 и тела 2 записываются, как  $\mathbf{h}_1 = \mathbf{M}\mathbf{J}_1(\Omega + \mathbf{M}^T\omega)$  и  $\mathbf{h}_2 = \mathbf{J}_2\omega + \mathbf{B}\mathbf{H}$ , где  $\mathbf{M}$  – матрица малого поворота,  $\mathbf{J}_1$  – приведенный момент инерции паруса,  $\mathbf{J}_2$  – момент инерции КА,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  – кинетический момент и матрица направляющих косинусов малых угловых отклонений ротора силового гироскопа в подвесе Гука соответственно [9, 15].

После линеаризации с точностью до второго порядка малости получаем кинетический момент паруса:

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} -A\Omega + A\dot{\mu}_x + A\dot{\phi}_x \\ -A\Omega\mu_z + C\dot{\mu}_y + C\dot{\phi}_y \\ A\Omega\mu_y + C\dot{\mu}_z + C\dot{\phi}_z \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} J_x\dot{\phi}_x + H \\ J_y\dot{\phi}_y + H\beta_z \\ J_z\dot{\phi}_z - H\beta_y \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $A$  и  $C$  – осевой и экваториальный моменты инерции паруса ( $A \approx 2C$ ).

Зная кинетические моменты каждого тела, применяя теорему об изменении кинетического момента ко всему объекту управления и отдельно к парусу, а также пренебрегая моментами сил солнечного давления, воздействующих на парус, получается система уравнений движения объекта управления вокруг осей  $Oy$  и  $Oz$ :

$$\begin{cases} -A\Omega\mu_z + C\dot{\mu}_y + (C + J_y)\dot{\phi}_y + H\beta_z = h_{y0} \\ A\Omega\mu_y + C\dot{\mu}_z + (C + J_z)\dot{\phi}_z - H\beta_y = h_{z0} \\ -A\Omega\dot{\mu}_z + C\ddot{\mu}_y + C\ddot{\phi}_y - A\Omega\dot{\phi}_z = -k^2C\mu_y \\ A\Omega\dot{\mu}_y + C\ddot{\mu}_z + C\ddot{\phi}_z + A\Omega\dot{\phi}_y = -k^2C\mu_z \end{cases}, \quad (5)$$

где  $k^2C$  – эффективный коэффициент жесткости,  $k^2 \approx 0,01 \text{ с}^{-2}$ .

Полученная система уравнений дополняется законом управления вокруг осей  $Oy$  и  $Oz$ :  $\dot{\beta}_z = K_1\varphi_y + K_2\dot{\phi}_y + K_3\hat{\mu}_y$  и  $\dot{\beta}_y = -(K_1\varphi_z + K_2\dot{\phi}_z + K_3\hat{\mu}_z)$ , где  $\dot{\beta}_z$  и  $\dot{\beta}_y$  – угловые скорости прецессии ротора силового гироскопа вокруг соответствующих осей,  $K_1, K_2, K_3$  – коэффициенты усиления обратной связи по состоянию, численные значения которых находятся из условий асимптотической устойчивости замкнутой системы,  $\hat{\mu}_y, \hat{\mu}_z$  – оценки угловых скоростей колебаний мембранного диска паруса, получаемых с помощью адаптивного наблюдателя [1]. Адаптивный наблюдатель применяется в виду того, что переменные  $\dot{\mu}_y$  и  $\dot{\mu}_z$  не могут быть измерены датчиковой аппаратурой. При проведении моделирования предполагалось, что оценки полностью соответствуют их фактическим значениям ( $\hat{\mu}_y = \dot{\mu}_y$  и  $\hat{\mu}_z = \dot{\mu}_z$ ).

На основании системы уравнений (5) приводится пример стационарного движения при равномерной прецессии и приводится геометрическая интерпретация такого движения.

В разделе 2.3 приводится расчетная схема математического моделирования углового движения КА с солнечным парусом, блок-схема моделирования, построенная в программной среде MATLAB Simulink и параметры представленной модели. Результаты математического моделирования динамического поведения объекта управления приводятся для двух режимов: гашения начальных угловых скоростей 0,1 Град/с вокруг осей  $OY$  и  $OZ$  (рис. 4), и программного разворота вокруг оси  $OY$  на  $90^\circ$  (рис. 5). Для второго режима скорость разворота задавалась равной 0,06 Град/с.

В разделе 2.4 обсуждаются результаты второй главы.

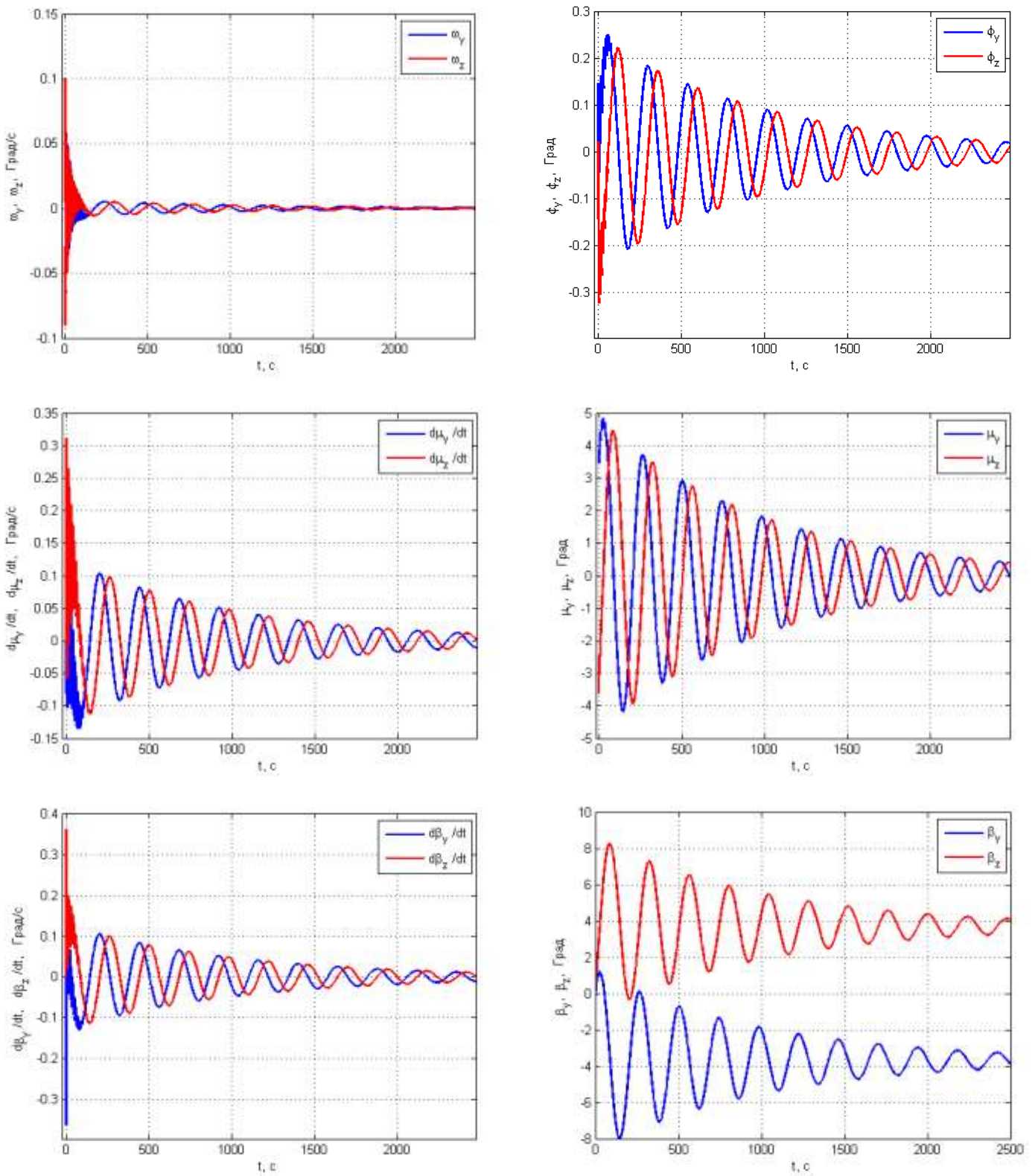


Рис. 4. Поведение компонент абсолютной угловой скорости и углов КА, угловой скорости и углового отклонения плоскости вращения солнечного паруса относительно связанного базиса, угловой скорости прецессии и углов отклонения ротора силового гироскопа относительно связанного базиса вокруг осей  $OY$  и  $OZ$  в режиме гашения

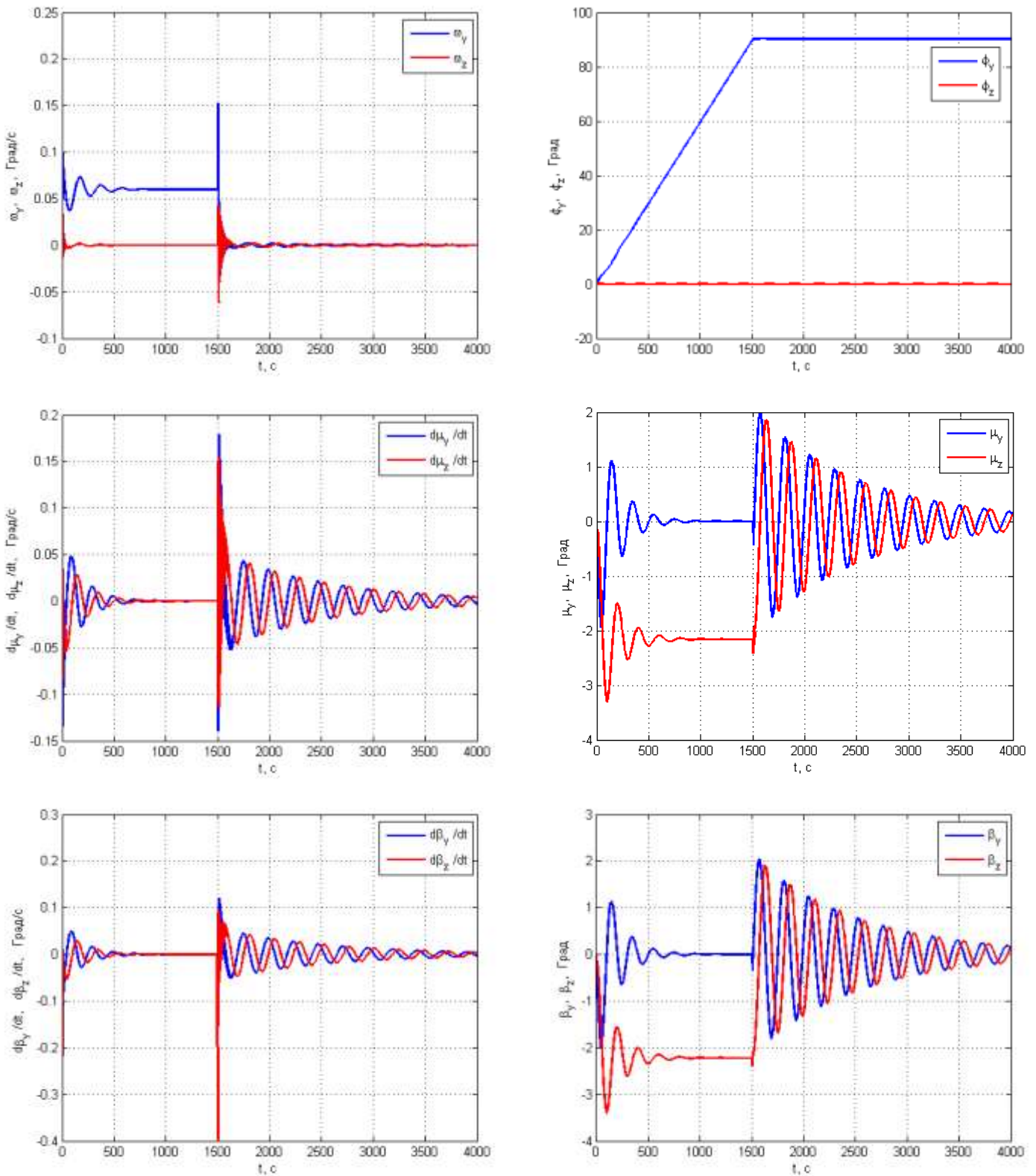


Рис. 5. Поведение компонент абсолютной угловой скорости и углов КА, угловой скорости и углового отклонения плоскости вращения солнечного паруса относительно связанного базиса, угловой скорости прецессии и углов отклонения ротора силового гироскопа относительно связанного базиса вокруг осей  $OY$  и  $OZ$  в режиме программного разворота

### Глава 3. Динамика вращающегося солнечного паруса в процессе его раскрытия

При исследовании управляемого движения космической платформы с солнечным парусом большую роль играет первоначальный этап раскрытия в рабочее состояние поверхности мембранного диска из уложенного состояния. В настоящее время имеется обзор технических решений конструирования космических платформ с центробежными бескаркасными крупногабаритными конструкциями, а также описание кинематической схемы эксперимента по выпуску полотна солнечного паруса. В настоящей главе рассматривается строгое математическое обоснование динамики процесса раскрытия вращающегося солнечного паруса из уложенного состояния [19].

В разделе 3.1 приводятся различные схемы укладки, их преимущества и недостатки. На основе проведенного анализа предлагается схема укладки солнечного паруса в виде четырех геометрически симметричных тросов. В предположении центральной симметрии конструкционного расположения тросов и их синхронного выпуска, а также обеспечении динамической симметрии процесса выпуска системой управления в разделе 3.2 рассматривается динамика выпуска одного троса с точечной массой на конце.

В системе координат  $Oxyz$ , вращающейся вместе с контейнером, находится аналитическое решение уравнения движения точечной массы  $m$ , выпускаемой на невесомом тросе из цилиндрического контейнера радиуса  $a$ , вращающегося вокруг неподвижной относительно инерциального пространства оси симметрии с угловой скоростью  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\Omega\dot{y} - \Omega^2 x &= -T/m \\ \ddot{y} + 2\Omega\dot{x} - \Omega^2 y &= -T\alpha/m \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\alpha$  – угол между тросом и осью  $Ox$ , проходящей через точку выпуска троса на ободе цилиндра,  $T$  – сила натяжения троса. Используя геометрические соотношения между переменными и пренебрегая нелинейными слагаемыми второго порядка малости, решение относительно переменной  $y$  (отклонение от радиального направления) находится для равномерного выпуска с постоянной скоростью  $V$ , выраженное через функцию Бесселя первого рода первого порядка  $J_1(z)$ :

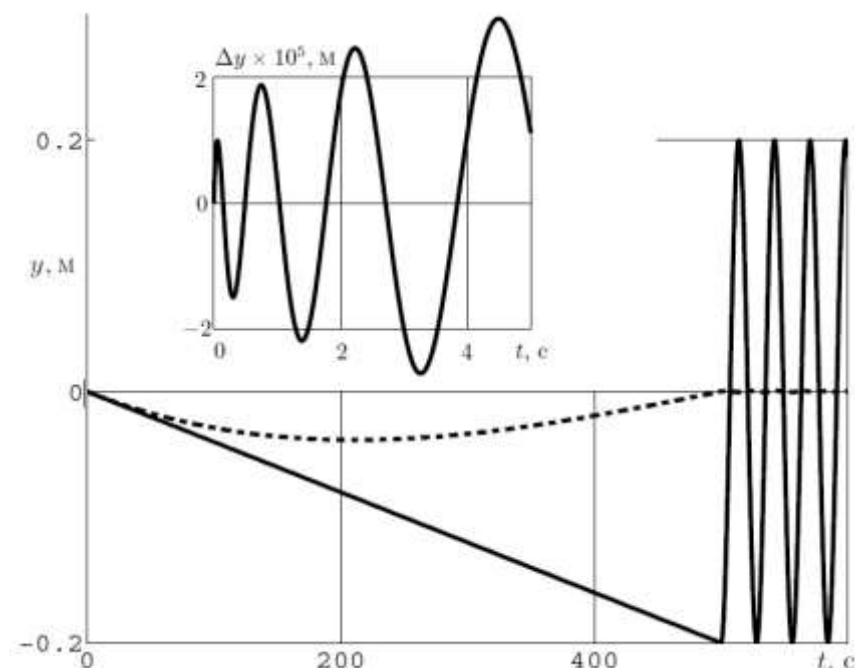
$$y = \frac{2V^2}{\Omega^2 a} \sqrt{\frac{Vt}{a}} J_1 \left( 2\Omega \sqrt{\frac{at}{V}} \right) - \frac{2V^2 t}{\Omega a} \quad (7)$$

Для случая равномерно замедленного выпуска с постоянным ускорением  $A$  и начальной скоростью  $V$ , решение находится через гипергеометрическую функцию  $F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, z)$  с параметрами  $\alpha = -1/2 + \sqrt{1/4 + k_1}$ ,  $\beta = -1/2 - \sqrt{1/4 + k_1}$ ,  $\gamma = 0$ ,  $k_1 = 2\Omega^2 a/A + 2$  в виде:

$$y = \frac{2V^2 \Omega t}{\Omega^2 a - 2A} \left[ F \left( \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + k_1}, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + k_1}, 2, \frac{At}{2V} \right) - \left( 1 - \frac{At}{2V} \right) \left( 1 - \frac{At}{V} \right) \right] \quad (8)$$

При достижении конечной длины выпускаемого троса  $l = R - a$ , где  $R$  — максимальная длина радиуса вращения точечной массы, поперечная

составляющая силы Кориолиса становится равной нулю, и начинаются колебания груза на конце троса, описываемые уравнением гармонического осциллятора с начальными условиями, определяемыми конечными данными каждого из решения для различных выпусков.



Графическая иллюстрация «сшитых» решений уравнения выпуска и уравнения гармонических колебаний для равномерного и равномерно замедленного случаев выпуска при  $V = 0,01$  м/с,  $a = 1$  м,  $\Omega = 1/2$  рад/с,  $A = 2 \cdot 10^{-5}$  м/с<sup>2</sup> представлена на рисунке 6.

Рис. 6. Отклонение точечной массы на конце троса при равномерном выпуске (сплошная линия) и равномерно замедленном выпуске (пунктирная линия).

В разделе 3.3 находится квазистационарная форма троса, около

которой происходят колебания троса вследствие придаваемых в процессе выпуска возмущений, возникающая в результате действия силы Кориолиса, при постоянной скорости выпуска  $V$  и постоянной скорости вращения  $\Omega$  для весомого троса:  $U(x) = 2V/\Omega(1 - x/a)$ . Вывод квазистационарной формы троса с небольшими изменениями сохраняется для любого, не обязательно постоянного распределения массы по координате  $x$ .

Для проверки правильности аналитических решений в разделе 3.4 рассматривается приближенная дискретная математическая модель выпуска весомого троса. Трос представляется в виде совокупности материальных точек («шариков»), последовательно соединенных невесомыми нерастяжимыми нитями. Такая модель описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений и позволяет учесть массу троса и действие на трос сил инерции вследствие вращательного движения троса. Действующие на трос центробежные силы, силы Кориолиса и силы натяжения соединяющих цепь нитей считаются приложенными к шарикам и определяются их массами, положением в пространстве и скоростями.

В процессе разворачивания трос должен быть постоянно натянут. Самым сложным в этом отношении является начальный этап разворачивания. Ближайшему к центральному цилиндру шарикку придается постоянная относительно барабана скорость выпуска. После того как расстояние между ним и барабаном достигает определенного значения, данный шарик отпускается, и начинается выпуск новой массы. В момент отделения каждого

такого шарика от центрального цилиндра число шариков модели увеличивается на единицу.

Пусть  $P_1, P_2, \dots, P_N$  – материальные точки, образующие модель<sup>2</sup>. Точки  $P_i$  и  $P_{i+1}$  соединены невесомой нерастяжимой нитью длины  $l_i$ . Выпущенные шарики свободно движутся под действием центробежных сил и сил Кориолиса. Пренебрегая силой инерции от углового ускорения центрального барабана, система уравнений движения шариков в предположении, что все нити натянуты, записывается в виде:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{V}_1, & \dot{\mathbf{V}}_1 = \mathbf{a}_1 - T_1 \mathbf{e}_1 / m_1, \\ \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{V}_i, & \dot{\mathbf{V}}_i = \mathbf{a}_i + T_{i-1} \mathbf{e}_{i-1} / m_i - T_i \mathbf{e}_i / m_i, \quad i = 2, \dots, N-1 \\ \dot{\mathbf{r}}_N = \mathbf{V}_N, & \dot{\mathbf{V}}_N = \mathbf{a}_N + T_{N-1} \mathbf{e}_{N-1} / m_N \end{cases} \quad (9)$$

Здесь  $m_i$  и  $\mathbf{r}_i$  – массы и радиус-вектора шарика  $P_i$ ,  $T_i$  – силы натяжения нити между шариками  $P_i$  и  $P_{i+1}$ ,  $\mathbf{e}_i = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i+1}) / |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i+1}|$  – единичный вектор направления шарика  $P_i$  относительно шарика  $P_{i+1}$ ,  $\mathbf{a}_i = -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_i$  – суммарное центробежное и кориолисово ускорение.

Длины нитей поддерживаются постоянными, поэтому в процессе выпуска выполняются равенства  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i+1}| = l_i$ , выражающие условия нерастяжимости нитей. Эти соотношения позволяют найти силы натяжения  $T_i$  с помощью процедуры, применяемой при исключении реакций связей в уравнениях Лагранжа первого рода. Таким образом, получается замкнутая система уравнений относительно  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{V}_i$ , которая может быть проинтегрирована численно. На каждом шаге интегрирования проверяется выполнение неравенств  $T_i > 0$ , выражающие условия постоянного натяжения нитей.

В разделе 3.5 приводятся результаты моделирования численным интегрированием полученной выше системы обыкновенных дифференциальных уравнений, и дается сравнение с квазистационарной формой. Рассматриваются два способа выпуска тросовой системы: в радиальном направлении и в направлении квазистационарной формы, поясняющие особенности данного способа моделирования. Показывается, что во втором случае возмущения, возникающие на выпускаемом конце троса, имеют намного меньший порядок. Полученные результаты показывают важность выбора способа выпуска тросовой системы и подтверждают результаты аналитического решения, полученного в разделе 3.2.

В разделе 3.6 проводится моделирование выпуска троса с переменной скоростью. Для этого вводится условие переменности длины нити между шариком, закрепленным на центральном барабане, и шариком, связанным с ним нерастяжимой нитью. Получается аналогичная равномерному выпуску трехдиагональная система линейных алгебраических уравнений относительно  $T_i$  с модифицированными коэффициентами. Подробно описывается решение проблемы начала выпуска каждого нового шарика.

<sup>2</sup>Сазонов В.В. Математическое моделирование разворачивания тросовой системы с учетом массы троса // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2006. № 58. 36 с.



Графики выпуска единичной точечной массы на невесомом тросе на расстояние 2,5 м за 500 с, при равномерно замедленном способе выпуска, начиная со скорости  $V = 0,01$  м/с и заканчивая нулевой скоростью с теми же значениями  $a = 1$  м и  $\Omega = 1/2$  рад/с, полностью совпадают с соответствующими графиками, изображенными на рисунке 6.

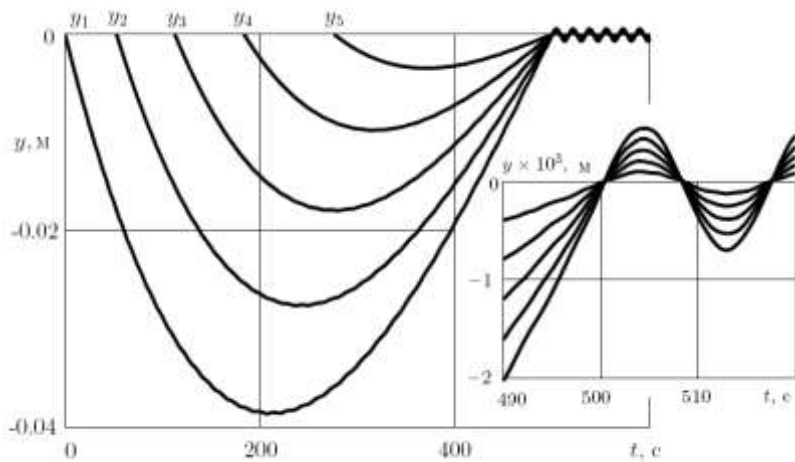


Рис. 7. Отклонения единичных точечных масс на тросе

Для того чтобы показать, что в случае весомого троса ситуация принципиально не меняется, приводятся результаты математического моделирования равномерно замедленного выпуска весомого троса длины 2,5 м с распределенными по нему шесть единичными массами, находящимися на расстоянии  $l_i = 0,5$  м друг от друга. На рисунке 7

изображены поперечные смещения первых пяти шариков.

В разделе 3.7 обсуждаются результаты третьей главы.

В заключении сформулированы

### Основные результаты работы

Вывод стационарной формы мембранного диска солнечного паруса при регулярной прецессии оси его вращения и доказательство её устойчивости позволяют реализовать угловые маневры КА с солнечным парусом без расхода рабочего тела.

Построенные и промоделированные алгоритмы управления угловым движением КА с большим вращающимся солнечным парусом в режимах гашения начальных угловых скоростей и программных разворотов доказывают правильность выбранных законов управления и параметров конструкции.

Представленный способ укладки солнечного паруса в виде четырех геометрически симметричных тросов, позволяет перейти к рассмотрению выпуска одного троса из вращающегося с постоянной угловой скоростью центрального барабана.

Аналитическое решение линеаризованной задачи выпуска невесомого троса с точечной массой на конце подтверждает правильность построенной математической модели весомого троса, которая может быть использована при проведении космических экспериментов по разворачиванию из уложенного состояния центробежных бескаркасных крупногабаритных космических конструкций.

## Публикации по теме диссертации

1. Черемных Е.А., Зыков А.В. Разработка алгоритмов управления и исследование динамического поведения спутника с большим вращающимся солнечным парусом // Труды МАИ. 2011. № 45. С. 25.
2. Легостаев В.П., Субботин А.В., Тимаков С.Н., Зыков А.В. Об устойчивости стационарной формы вращающейся кольцеобразной мембраны с регулярно прецессирующей центральной жесткой вставкой // Труды МФТИ. 2011. Т. 3. № 3 (11). С. 73-78.
3. Зыков А.В. Разработка алгоритмов управления космической платформы с большим вращающимся солнечным парусом // Гироскопия и навигация. 2011. № 2 (73). С. 111.
4. Легостаев В.П., Зыков А.В., Платонов В.Н., Субботин А.В., Сумароков А.В., Тимаков С.Н. Исследование динамики управляемого движения космического аппарата с большим вращающимся солнечным парусом // Научно-технический отчет РКК «Энергия» им. С.П. Королева. 2011. 154 с.
5. Зыков А.В. Разработка алгоритмов управления космической платформой с большим вращающимся солнечным парусом // Труды LIV научной конференции МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе». Аэрофизика и космические исследования. М.: МФТИ, 2011. С. 26-28.
6. Зыков А.В. Разработка алгоритмов управления космической платформой с большим вращающимся солнечным парусом // Материалы XIX научно-технической конференции молодых ученых и специалистов РКК «Энергия» им. С.П. Королева. 2012. С. 48-52.
7. Зыков А.В. Исследование управляемого движения космического аппарата с большим вращающимся солнечным парусом // Шестые Поляховские чтения: Тезисы докладов Международной научной конференции по механике. 2012. С. 87-88.
8. Зыков А.В. О возможности проведения разгрузки накопленного кинетического момента КА с большим вращающимся солнечным парусом с помощью сил солнечного давления // Труды LV научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». Аэрофизика и космические исследования. М.: МФТИ, 2012. Т. 1. С. 13-14.
9. Легостаев В.П., Субботин А.В., Тимаков С.Н., Зыков А.В. Исследование динамики управляемого углового движения космического аппарата с вращающимся солнечным парусом // Труды МФТИ. 2013. Т. 5. № 2 (18). С. 106-119.
10. Зыков А.В., Субботин А.В., Тимаков С.Н. Исследование динамики управляемого углового движения космического аппарата с вращающимся солнечным парусом // Актуальные проблемы Российской космонавтики: Труды XXXVII Академических чтений по космонавтике. 2013. С. 526-527.
11. Зыков А.В. Моделирование управляемого раскрытия большого вращающегося солнечного паруса // Гироскопия и навигация. 2013. № 2 (81). С. 156-157.

12. Zykov A.V. Control Algorithms Development for Space Platform with a Rotating Solar Sail // Proceedings of the International Astronautical Congress, Beijing, China. 2013. Paper IAC-13-C1.2.11. 5 p.
13. Зыков А.В. Моделирование управляемого раскрытия большого вращающегося солнечного паруса // Навигация и управление движением. Материалы XV конференции молодых ученых. 2013. С. 310-316.
14. Зыков А.В. Первоначальный этап раскрытия солнечного паруса // Труды LVI научной конференции МФТИ «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе». Аэрофизика и космические исследования. М.: МФТИ, 2013. Т. 1. С. 84-85.
15. Амелькин Н.И., Зыков А.В. О равновесиях и устойчивости спутника с системой двухстепенных силовых гироскопов в центральном гравитационном поле // Труды МФТИ. 2014. Т. 6. № 2 (22). С. 68-74.
16. Зыков А.В. Задача равномерно замедленного раскрытия весоного троса на орбите Земли // Гироскопия и навигация. 2014. № 2 (85). С. 111.
17. Зыков А.В., Субботин А.В., Тимаков С.Н. Динамика вращающейся тросовой системы в процессе управляемого выпуска // Управление в морских и аэрокосмических системах (УМАС-2014). 2014. С. 509-518.
18. Зыков А.В. Моделирование управляемого раскрытия солнечного паруса // Тезисы докладов XX научно-технической конференции молодых ученых и специалистов РКК «Энергия» им. С.П. Королева. 2014. С. 175-176.
19. Зыков А.В., Легостаев В.П., Субботин А.В., Сумароков А.В., Тимаков С.Н. Динамика вращающегося солнечного паруса в процессе его раскрытия // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 1. С. 48-60.
20. Зыков А.В., Субботин А.В., Тимаков С.Н. Управляемый выпуск троса из вращающегося барабана за счет центробежных сил инерции // Актуальные проблемы Российской космонавтики: Труды XXXIX Академических чтений по космонавтике. 2015. С. 414-415.
21. Зыков А.В. Управляемое раскрытие вращающегося солнечного паруса из уложенного состояния // Седьмые Поляховские чтения: Тезисы докладов Международной научной конференции по механике. 2015. С. 33.
22. Зыков А.В. Управляемое раскрытие большого вращающегося солнечного паруса // Всероссийская молодежная научно-практическая конференция «Космодром «Восточный» и перспективы развития российской космонавтики». Тезисы докладов. 2015. С. 75-76.
23. Зыков А.В., Субботин А.В. Моделирование раскрытия солнечного паруса из уложенного состояния // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. 2015. С. 1532-1534.

*Зыков Александр Владимирович*

**Исследование динамики управляемого движения космического аппарата  
с большим вращающимся солнечным парусом**

**Автореферат**

Подписано в печать 21.10.2015. Формат 60x84/16. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ 3517-15.

Открытое акционерное общество  
Ракетно-космическая корпорация «Энергия» им. С.П. Королёва  
141070, МО, г. Королёв, ул. Ленина, д. 4А