

ПАО «Ракетно-космическая корпорация «Энергия»  
им. С. П. Королева»

На правах рукописи



Богданов Кирилл Андреевич

**Метод последовательного замыкания мод в задачах  
модального синтеза адаптивных систем управления  
движением космических объектов**

Специальность 01.02.01 – Теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук  
С. Н. Тимаков

Москва, 2018г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ВВЕДЕНИЕ.....                                                                                                              | 4  |
| 1. Актуальность работы.....                                                                                                | 4  |
| 2. Цель работы .....                                                                                                       | 10 |
| 3. Научная новизна.....                                                                                                    | 11 |
| 4. Основные положения, выносимые на защиту.....                                                                            | 12 |
| 5. Теоретическая и практическая ценность .....                                                                             | 13 |
| 6. Методы исследований .....                                                                                               | 14 |
| 7. Апробация.....                                                                                                          | 15 |
| 8. Структура и объем диссертации.....                                                                                      | 16 |
| ГЛАВА 1. АЛГОРИТМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ЗАМЫКАНИЯ<br>МОД ДВИЖЕНИЯ.....                                                         | 18 |
| 1.1 Общие положения теории построения адаптивных систем<br>управления с настраиваемой моделью.....                         | 18 |
| 1.2 Адаптивные алгоритмы управления с эталонной моделью ....                                                               | 31 |
| 1.3 Принцип последовательного замыкания мод движения. ....                                                                 | 35 |
| 1.4 Алгоритм последовательного замыкания. Построение<br>регулятора. 36                                                     |    |
| 1.5 Алгоритм последовательного замыкания. Построение<br>адаптивного наблюдателя. ....                                      | 41 |
| 1.6 Алгоритм последовательного замыкания. Некоторые<br>замечания. 45                                                       |    |
| 1.7 Сравнение точности размещения корней алгоритмом<br>последовательного замыкания и функцией <code>ascker()</code> . .... | 47 |
| 1.8 Выводы по главе 1. ....                                                                                                | 60 |

|                                                                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ГЛАВА 2. ЗАДАЧА ВЫВЕДЕНИЯ И УДЕРЖАНИЯ МКС В ПОЛОЖЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ. ....                                   | 61  |
| 2.1 Описание системы координат и вывод линеаризованных уравнений движения. ....                                        | 62  |
| 2.2 Описание объекта управления в пространстве состояний. ....                                                         | 68  |
| 2.3 Выбор эталонного полинома. Обобщенные полиномы Баттерворта. ....                                                   | 71  |
| 2.4 Синтез закона управления. Результаты математического моделирования. ....                                           | 77  |
| 2.5 Сравнение результатов, полученных методом последовательного замыкания и функцией place. ....                       | 89  |
| 2.6 Выводы по главе 2. ....                                                                                            | 94  |
| ГЛАВА 3. СИНТЕЗ АДАПТИВНОГО АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАТФОРМЫ С ВРАЩАЮЩИМСЯ СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ. .... | 96  |
| 3.1 Описание конструкции космической платформы с вращающимся солнечным парусом. ....                                   | 99  |
| 3.2 Вывод линеаризованных уравнения движения ....                                                                      | 102 |
| 3.3 Переход в пространство состояний. Описание адаптивного наблюдателя. ....                                           | 105 |
| 3.4 Модальный синтез системы управления. Поиск матрицы обратной связи и матрицы весовых коэффициентов. ....            | 111 |
| 3.5 Результаты численного моделирования. ....                                                                          | 116 |
| 3.6 Выводы по главе 3. ....                                                                                            | 121 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....                                                                                                       | 123 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....                                                                                                | 126 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Список работ, входящих в перечень ВАК. ....                                                              | 131 |

# ВВЕДЕНИЕ

## **1. Актуальность работы**

Одним из актуальных направлений разработки алгоритмов автономного управления движением летательных аппаратов, обеспечивающих повышение их эффективности, надежности, экономичности и долговечности в условиях параметрической неопределенности объекта управления и непредсказуемых изменений характеристик среды, является адаптивный подход. Суть этого подхода заключается в одновременном самообучении объекта управления, автономном изучении среды его функционирования и управлении им, то есть в приведении объекта к надлежащему функционированию по информации, сформированной в процессе самообучения. При этом нужно особо подчеркнуть, что процессы изучения (обучения) и управления протекают параллельно в режиме реального времени, а сам алгоритм адаптации является звеном контура регулирования. Далее по тексту под термином объект управления понимаются как одиночный объект управления, так и группировка (стая, рой) однотипных объектов (агентов стаи) управления.

С точки зрения современной теории управления изучение объекта сводится к решению задач идентификации [1,2]. Под идентификацией объекта управления в данной работе понимается автономное определение параметров объекта при одновременной оценке его вектора состояния. Параметрами являются коэффициенты матричных передаточных функций, дифференциальных или конечно-разностных уравнений, описывающих динамическое поведение как одиночного объекта, так и группировки однотипных объектов, а также среду их функционирования, а компонентами вектора состояния – переменные этих уравнений.

Согласно принятой в настоящее время терминологии, различают два класса адаптивных систем. Первый класс известен под названием

адаптивных систем с настраиваемыми моделями. Он характеризуется тем, что настройке (идентификации), как правило, подлежат коэффициенты матричных передаточных функций и уравнений, описывающих бортовую модель динамического поведения объекта управления, как в замкнутом, так и в разомкнутом состоянии и применяется для управления объектами при неполном составе измерений с целью получения оценок полного вектора состояния объекта. Далее, в соответствии с заданным алгоритмом управления по этим оценкам формируется управляющий сигнал на исполнительные органы для целенаправленного приведения объекта управления к требуемому состоянию. Второй класс – под названием адаптивных систем с эталонными моделями применяется для настройки коэффициентов уравнений описывающих собственно систему управления. В ответ на непредсказуемые изменения параметров окружающей среды, в частности среды полета летательного аппарата, контур адаптации, ориентируясь на выходные переменные функционирующей на борту эталонной модели, подстраивает коэффициенты обратной связи и другие параметры системы управления, минимизируя рассогласование между динамическим поведением реального объекта управления и его бортовой эталонной моделью, несмотря на факторы противодействующие такому поведению объекта управления.

Такое разделение адаптивных систем управления на классы сложилось исторически. В настоящей работе при проектировании систем управления движением КА применяются одновременно как алгоритмы с настраиваемыми бортовыми моделями, так и с эталонными. Настройка (идентификация параметров) этих бортовых моделей основана на применении в режиме реального времени метода градиентного спуска.

Описанный выше подход к построению адаптивной системы управления, а именно настройка бортовой модели при одновременном приведении объекта к требуемому режиму функционирования, может быть практически реализован в рамках теории модального синтеза адаптивного

наблюдателя и регулятора для многомерной многосвязной – Multi-input Multi-output (MIMO) динамической системы. На этом пути возникает задача расчета компонент матриц весовых коэффициентов, обеспечивающих асимптотическую сходимость оцениваемых величин к их фактическим значениям при одновременном расчете матриц коэффициентов обратной связи многомерной следящей системы для MIMO динамических систем большой размерности.

В настоящее время разработка аналитических и численных методов модального управления динамическими Multi-input Multi-output системами большой размерности является одной из быстро развивающихся областей прикладной теории управления, о чем свидетельствует бурный, не ослабевающий поток публикаций по этой тематике [3,4,5,6,7,8,9]. Интерес к проблеме модального размещения корней замыкаемой системы управления и вычислению компонент матриц обратной связи, а также компонент матриц весовых коэффициентов не ослабевает уже на протяжении нескольких десятилетий. Практическая значимость модального подхода для разработки алгоритмов управления сложными системами общеизвестна. Она обусловлена: стремительным развитием космических и информационных технологий, появлением крупногабаритных и сложных конструкций космического базирования, таких, например, как Международная космическая станция (МКС), проектированием космических буксиров, спутниковых группировок и их формаций. Возросший интерес специалистов к автономному управлению полетом группировок беспилотных аппаратов сухопутного, морского, авиационного и космического базирования придает новый стимул в направлении создания конструктивных алгоритмов для решения проблем синтеза систем управления MIMO динамическими системами.

К настоящему времени существует достаточно большое количество методов и алгоритмов, которые позволяют осуществлять поиск матрицы

обратной связи для модального синтеза систем управления SISO и MIMO систем. Далеко не полный список алгоритмов модального синтеза включает следующие методы: Ackermann (Аккерманн) [10], Mayne – Murdoch (Мейн – Мардох) [11], Maki – Van de Vegte (Маки – Ван де Вейт) [12], Barnett (Барнетт) [13], Gourinshankar – Ramar (Гоуришанкар – Ремеер) [14], Klein – Moore (Клейн – Мур) [15], Porter – D’Azzo (Портер – Д’Аццо) [16], Wonham (Уонем) [17], Moore (Мур) [18], Flamm (Флемм) [19], Fahmy – O’Reilly (Феми и О’Рейли) [20], Varga (Варга) [21], Kautsky – Nichols – Van Dooren (Каутский – Никольс – Ван Доорен) [22]. Среди современных отечественных разработок в области алгоритмов модального синтеза многомерных многосвязных систем можно выделить метод точного размещения полюсов, разрабатываемый В.Н. Рябченко, М.Ш. Мисрихановым, Н.В. Зубовым основанный на принципе модальной декомпозиции сложной динамической системы [23].

Отдельно необходимо выделить алгоритм, разработанный J.W.Sunkel и L.S. Shieh и представленный в работе «Optimal Momentum Management Controller for the Space Station» [24]. Авторы сводят задачу поиска матрицы обратной связи к итерационному алгоритму, на каждом шаге которого решаются матричные уравнения Рикатти, которые получаются в результате надлежащего варьирования весовых матриц в квадратичном функционале Калмана (он же квадратичный функционал метода взвешенных наименьших квадратов) с целью последовательного «перемещения» корней замыкаемой системы в заданную область комплексной плоскости. На каждом шаге итерационного процесса весь набор корней замыкаемой динамической системы «сдвигается» ближе к оптимальному расположению, обеспечивая системе требуемые динамические свойства. Работа данного алгоритма демонстрируется на примере построения системы управления ориентацией космической станции с использованием инерционных (силовых гироскопов) исполнительных органов (Momentum Management). В ходе данной итерационной процедуры решается задача не модального построения

регулятора, а задача построения в некотором смысле оптимального регулятора. При построении обратной связи при помощи данного алгоритма задается не эталонное расположение корней характеристического полинома, а только область где корни замкнутой системы должны находиться, а так же критерий оптимальности, который в конечном итоге и определяет коэффициенты обратной связи.

Некоторые из вышеперечисленных алгоритмов реализованы в виде встроенных функций в программной среде MATLAB. Для систем с одним каналом управления (single-input) задача модального синтеза решается при помощи функции `acker()` основанная на формуле Аккермана [10]. Для модального синтеза multi-input систем в библиотеках MATLAB существует функция `place()`, в основу которой положен алгоритм, описанный в [22]. Обе функции получают на вход информацию об объекте управления (матрицу эволюции динамической системы или матрицу переходных состояний для дискретных систем, а также матрицы измерений и управляющих воздействий). Кроме того задается вектор с коэффициентами эталонного характеристического полинома. На выходе численные процедуры выдают матрицу обратной связи, такую, чтобы замкнутая с ее помощью система управления имела такой же набор корней, какой был у эталонного полинома, поданного на вход.

У данных функций существует ряд недостатков. Проблема функции `acker()`, основанной на формуле Аккермана, состоит в ее применимости только для систем с одним входным сигналом (single-input систем), более того, при росте размерности точность размещения корней замкнутой системы резко падает, что связано с операцией возведения матрицы системы в  $n$ -ую степень. Недостатками функции `place()` можно назвать также низкую точность при модальном синтезе систем управления большой размерности, а так же ряд ограничений, связанных с размещением и кратностью корней замкнутой системы. Вычислительные погрешности в размещении корней методом модального управления могут привести к несоответствию



замкнутой системы тем критериям качества, которые задавались при ее проектировании, а в худшем случае могут привести к потере устойчивости замыкаемой системы. Все вышеупомянутые недостатки приводят к необходимости поиска новых численных и аналитических алгоритмов модального синтеза, что доказывает актуальность темы данной диссертации.

Для преодоления недостатков существующих методов решения задачи модального управления, в работе представлен новый численный алгоритм модального синтеза динамических систем, основанный на принципе последовательного перемещения как пар комплексно сопряженных корней, так и одиночных с действительными значениями. Предлагаемый метод замыкания, использующий принцип последовательного замыкания системы, позволяет применять процедуры матричных преобразований к выделяемым матричным блокам размерности не более  $2 \times 2$ . При таком подходе, в силу ортогональности модального разложения, вычислительная погрешность численных преобразований матриц почти не накапливается с увеличением размерности. В результате матрицы обратной связи и матрицы весовых коэффициентов достаточно точно переводят корни характеристического полинома в желаемое место в левой полуплоскости  $s$ -плоскости для континуальных систем, либо во внутреннюю область единичной окружности  $z$ -плоскости для дискретных систем. Представленный в данной работе алгоритм позволяет работать как с single-input single-output (SISO), так и с MIMO системами больших размерностей, без существенной потери точности в размещении корней замыкаемой системы, не накладывая какие-либо ограничения на расположение и кратность корней (собственных чисел) замкнутой системы на комплексной плоскости. Более того, все матричные операции, лежащие в основе описываемого в работе алгоритма проводятся над полем действительных чисел, что принципиально не может привести к появлению мнимой (imaginary) составляющей вычислительной погрешности.

## **2. Цель работы**

Главной целью диссертационной работы является разработка численного алгоритма модального синтеза управления ММО динамическими системами (первая глава). Данный алгоритм должен иметь возможность осуществлять поиск как матрицы обратной связи для модального синтеза регулятора, так и матрицы весовых коэффициентов и одновременно весовых коэффициентов в методе градиентного спуска для модального синтеза адаптивного наблюдателя динамических систем большой размерности. Необходимо отметить, что размерность расширенного вектора состояния, в состав которого включаются компоненты, описывающие идентифицируемые параметры динамической системы (после ее линеаризации) может существенно увеличиваться.

Помимо разработки самого алгоритма целью работы является его тестирование и демонстрация работоспособности на примере некоторых задач из области управления движением космических аппаратов.

Первой задачей является построение алгоритма управления ориентацией МКС, в режиме поиска и поддержания равновесной орбитальной ориентации (вторая глава). На примере решения поставленной в этой главе задачи продемонстрирована конкурентоспособность разрабатываемого алгоритма модального синтеза по сравнению с альтернативными алгоритмами, реализованными в виде функций в среде MATLAB.

Второй задачей является разработка адаптивного алгоритма управления движением космической платформы с вращающимся солнечным парусом (третья глава). В сформулированной в этой главе задаче решается проблема построения закона управления ориентацией космического аппарата с двойным вращением при неполном составе измерений и при наличии параметрической неопределенности. С помощью предложенного в работе метода осуществляется как синтез регулятора обратной связи по

оценкам компонент расширенного вектора состояния, так и построение наблюдателя, формирующего эти оценки. При этом обеспечивается как асимптотическая сходимость оценок всех компонент расширенного вектора состояния, включая идентифицируемые параметры (конкретно – приведенный коэффициент жесткости подвеса мембранного диска), так и асимптотическая устойчивость динамического поведения в целом.

### **3. Научная новизна**

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Разработан новый алгоритм модального синтеза ММО систем, основанный на принципе последовательного замыкания мод движения динамической системы [25,26]. Суть метода последовательного замыкания заключается в итерационной процедуре переноса как одиночных действительных, так и комплексно сопряженных пар собственных чисел незамкнутой системы в желаемое положение согласно эталонному полиному. На каждой итерации представляемого алгоритма осуществляется поиск «элементарной» матрицы обратной связи, которая передвигает или «замыкает» одну пару корней (собственных чисел) в желаемое положение. Такой подход позволяет осуществлять синтез обратной связи с минимальными вычислительными погрешностями, благодаря чему численная ошибка почти не накапливается с увеличением размерности системы. Результирующая матрица обратной связи, ровно как, и результирующая матрица весовых коэффициентов в задаче построения адаптивного наблюдателя, находятся путем композиции найденных на каждом шаге "элементарных" матриц, последовательно перемещающих пару комплексно сопряженных корней в желаемые места, тем самым замыкая соответствующую моду движения.

2. Введено понятие обобщенного полинома Баттерворта, которое расширяет класс эталонных полиномов и придает замыкаемой системе требуемые свойства по критериям запаса устойчивости и колебательности. Класс введенных обобщенных эталонных полиномов включает в себя как классические полиномы Баттерворта, так и биномы Ньютона.

3. Проведено тестирование разработанного алгоритма на примере задачи поиска и удержания МКС в положении динамического равновесия. На основе полученных результатов представлены результаты сравнения разработанного алгоритма с аналогами, реализованными в виде функций в программной среде MATLAB, которые демонстрируют преимущества предлагаемого в данной работе метода.

4. Разработан адаптивный алгоритм управления ориентацией платформы с вращающимся солнечным парусом при одновременном активном демпфировании упругих колебаний вращающегося мембранного диска. Получены численные значения матриц обратной связи и весовых коэффициентов, обеспечивающих устойчивость угловому положению космической платформы, а так же сходимость оценок неизвестных параметров динамической системы и неизмеряемых напрямую переменных движения к их фактическим значениям.

#### **4. Основные положения, выносимые на защиту**

1. Алгоритм последовательного замыкания мод движения для ММО систем. Аналитические выражения для расчета матриц обратной связи на каждой итерации в предложенном алгоритме. Вариации алгоритма последовательного замыкания – для модального синтеза single-input и для модального синтеза multi-input систем.

2. Результаты тестирования алгоритма последовательного замыкания на примере решения задачи поиска положения динамического равновесия МКС, обусловленного равенством нулю суперпозиции гравитационного, аэродинамического и гироскопического моментов и удержания ее в этом положении. Расчет компонент матрицы обратной связи для системы управления ориентацией МКС по каналам крен-рысканье и по каналу тангажа при учете неопределенности аэродинамического момента (в рамках предложенного алгоритма вектор аэродинамического момента **идентифицируется по первичной информации** с измерительных каналов от силовых гироскопов).

3. Адаптивный алгоритм управления движением космической платформы с вращающимся солнечным парусом. Расчеты компонент матрицы обратной связи и матрицы весовых коэффициентов, обеспечивающих, как **активное демпфирование** упругих колебаний вращающегося мембранного диска с центральной жесткой вставкой, так и приведение платформы в заданную ориентацию.

## **5. Теоретическая и практическая ценность**

Представленный в первой главе алгоритм последовательного замыкания мод движения может быть применен для синтеза законов управления, в том числе адаптивных законов управления для многомерных многосвязных динамических систем. Достоинством данного метода является высокая точность в размещении корней замкнутой системы, а так же отсутствие ограничений на их кратность. Это дает возможность использовать данный алгоритм для синтеза регуляторов для систем больших размерностей, обеспечивая нужный характер переходному процессу. Возможные сценарии применения алгоритма последовательного замыкания включают в себя задачи построения законов управления взаимным положением аппаратов (агентов стаи) в спутниковой формации, построение адаптивных систем

управления ориентаций крупногабаритными космическими объектами, таких как МКС, с учетом упругости их конструкции и другие.

Адаптивный алгоритм управления угловым положением космической платформы с вращающимся солнечным парусом, представленный в третьей главе, который был получен с использованием метода последовательного замыкания, отрывает широкий спектр возможностей по созданию алгоритмов управления ориентацией крупногабаритных КА без расхода рабочего тела и имеющих параметрическую неопределенность.

Основные результаты, полученные в диссертации, включены в лекционные курсы "Динамическая фильтрация" и "Управление крупногабаритными космическими конструкциями", читаемые студентам МФТИ на базовой кафедре "Аэрофизическая механика и управление движением" ФАКИ МФТИ.

## **6. Методы исследований**

При разработке численного алгоритма модального синтеза multi-input multi-output систем применялись элементы матричного анализа, линейной алгебры, вычислительной математики. Во второй и третьей главе при построении алгоритма управления угловым движением космической платформы с вращающимся солнечным парусом применялись методы теории адаптивного управления, теории модального синтеза линейных регуляторов.

Для тестирования полученного в первой главе численного алгоритма модального синтеза, адаптивного алгоритма управления ориентацией КА с солнечным парусом использовались методы математического моделирования. Моделирование проводилось в среде программирования MATLAB. В ходе математического моделирования применялись конечно-разностные методы численного интегрирования, в том числе явная схема Эйлера, а так же метод Рунге-Кутты.

## **7. Апробация**

Результаты, представленные в работе, методы и алгоритмы докладывались, обсуждались и получили одобрение специалистов на следующих конференциях и научных семинарах:

- 1) 56 – я научная конференция МФТИ, Московская область, г. Долгопрудный, МФТИ, 25.11.2013 - 30.11.2013 г.
- 2) XXXVIII АКАДЕМИЧЕСКИЕ ЧТЕНИЯ ПО КОСМОНАВТИКЕ («Королевские чтения»), Москва, МГТУ им. Баумана, январь 2014 г.
- 3) КОНФЕРЕНЦИЯ «УПРАВЛЕНИЕ В МОРСКИХ И АЭРОКОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ» (УМАС – 2014), Санкт – Петербург, Государственный научный центр Российской Федерации ОАО «ЦНИИ «Электроприбор», 07.10.2014 – 09.10.2014.
- 4) Семинар им. В.А. Егорова по механике космического полета, Москва, Главное здание МГУ, 22.10.2014.
- 5) XX научно-техническая конференция молодых ученых и специалистов, г. Королев, ПАО «РКК Энергия», 10.11.2014 – 14.11.2014
- 6) Семинар им. В.А. Егорова по механике космического полета, Москва, Главное здание МГУ, 23.09.2015.
- 7) 58 – я научная конференция МФТИ, Московская область, г. Долгопрудный, МФТИ, 23.11.2015 - 28.11.2015 г.
- 8) XL АКАДЕМИЧЕСКИЕ ЧТЕНИЯ ПО КОСМОНАВТИКЕ («Королевские чтения»), Москва, МГТУ им. Баумана, январь 2016 г.
- 9) Семинар им. В.А. Егорова по механике космического полета, Москва, Главное здание МГУ, 30.03.2016.
- 10) Конференция «Орбита Молодежи» и перспективы развития российской космонавтики, г. Самара, СГАУ им. С.П. Королева, 8-9 сентября 2016 г.
- 11) КОНФЕРЕНЦИЯ «УПРАВЛЕНИЕ В МОРСКИХ И АЭРОКОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ» (УМАС – 2016), Санкт –

Петербург, Государственный научный центр Российской Федерации  
ОАО «ЦНИИ «Электроприбор», 04.10.2016 – 06.10.2016.

12) ХLI АКАДЕМИЧЕСКИЕ ЧТЕНИЯ ПО КОСМОНАВТИКЕ  
(«Королевские чтения»), Москва, МГТУ им. Баумана, январь 2017 г.

13) Семинар им. В.А. Егорова по механике космического полета,  
Москва, Главное здание МГУ, 15.03.2017

14) ХLII АКАДЕМИЧЕСКИЕ ЧТЕНИЯ ПО КОСМОНАВТИКЕ  
(«Королевские чтения»), Москва, МГТУ им. Баумана, январь 2018 г.

Также результаты опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК (4 работы) и в одной монографии. Список работ, опубликованных в процессе работы над диссертацией, по ее теме, входящий в перечень ВАК представлен в приложении 1.

## **8. Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, приложения и списка использованных источников. Полный объем диссертации 131 страниц, включая 48 рисунков. Список использованных источников насчитывает 48 наименований.

Во **введении** обосновывается актуальность диссертационной работы, приводится краткий обзор и краткое содержание диссертации.

В **первой главе** приводится подробное описание алгоритма последовательного замыкания, проводится сравнение точности работы данного алгоритма с функцией `asker()`, реализованной в MATLAB.

**Вторая глава** посвящена решению задачи выведения и удержания международной космической станции в положении динамического равновесия. Для синтеза закона управления угловым положением станции используется алгоритм последовательного замыкания, представляемый в диссертации.

В **главе 3** решается задача построения адаптивного алгоритма управления движением космической платформы с вращающимся солнечным



парусом. В данной задаче помимо синтеза регулятора метод последовательного замыкания используется для построения адаптивного наблюдателя, обеспечивающего идентификацию неизвестных параметров объекта управления и оценку неизмеряемых компонент вектора состояния.

В заключении приводятся основные результаты, полученные в диссертации.

# ГЛАВА 1. АЛГОРИТМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ЗАМЫКАНИЯ МОД ДВИЖЕНИЯ

В данной главе представлен численный алгоритм модального синтеза, позволяющий получать как матрицы обратной связи, придающие устойчивость исследуемой динамической системе, так и матрицы весовых коэффициентов, обеспечивающие сходимость оценок компонент вектора состояния к их фактическим значениям.

Перед тем, как приступить к описанию **алгоритма последовательного замыкания**, необходимо дать некоторые общие сведения, касающиеся синтеза адаптивных систем с настраиваемыми и эталонными бортовыми моделями.

## **1.1 Общие положения теории построения адаптивных систем управления с настраиваемой моделью.**

Пусть объект в пространстве состояний описывается в обобщенном виде следующими соотношениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}, t), \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{x}$  –  $k$ -мерный вектор состояния, подлежащий оценке;  $\mathbf{u}$  –  $p$ -мерный вектор входных детерминированных воздействий (далее по тексту – *вектор*

управления считается известным);  $\mathbf{a}$  –  $q$ -мерный вектор параметров динамической системы, подлежащий идентификации,  $\mathbf{b}$   $r$ -мерный – вектор параметров исполнительных органов КА, подлежащий идентификации,  $\mathbf{V}$  –  $l$ -мерный вектор случайных внешних воздействий, включая шумы, обусловленные несовершенством изготовления исполнительных органов КА;  $\mathbf{f}_c$  – вектор-функция, описывающая во времени динамику КА, индекс  $c$  указывает на то, что функция  $\mathbf{f}_c$  непрерывная функция непрерывного времени.

Обобщенная модель измерений (наблюдений) датчиковой аппаратуры КА записывается в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, \mathbf{w}, t) \quad (1.2)$$

Здесь  $\mathbf{y}$  –  $m$ -мерный выходной вектор (далее по тексту – *вектор измерений*), формируемый в измерительных каналах чувствительных элементов КА (считается известным).  $\mathbf{c}$  –  $s$ -мерный вектор параметров датчиковой аппаратуры КА, подлежащий идентификации.  $\mathbf{w}$  –  $t$ -мерный вектор результирующего шума наблюдений в измерительных каналах датчиковой аппаратуры КА, возникающий из-за неизбежных дефектов изготовления приборов, перепадов температур, флуктуаций электрического тока (дробовой эффект) и множества других причин.  $\mathbf{g}$  – вектор-функция, описывающая математическую модель датчиковой аппаратуры. Далее по тексту соотношения между размерностями векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{w}$  оговариваются в каждом конкретном случае.

В дальнейшем объект управления и его бортовая модель будут описываться конечно-разностными уравнениями с дискретным временем. При этом период квантования по времени  $h=0.2$  с.

Дискретный аналог уравнений объекта управления (1.1), (1.2) в случае *детерминированного* описания имеют следующую конечно-разностную форму

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}_d(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n), \mathbf{a}(n), \mathbf{b}(n), n), \quad (1.3)$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n), \mathbf{c}(n), n) \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{f}_d$  – вектор-функция, дискретного времени  $t = n \cdot h$  где  $n = 0, 1, \dots$

Поскольку вектора параметров объекта управления  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ , в большинстве практических задач постоянны, то, как функции времени, они задаются уравнениями

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{0} \quad (1.5)$$

или в дискретном варианте

$$\mathbf{a}(n+1) = \mathbf{a}(n), \mathbf{b}(n+1) = \mathbf{b}(n), \mathbf{c}(n+1) = \mathbf{c}(n) \quad (1.6)$$

Очевидно, что бортовая модель объекта управления должна описываться теми же уравнениями, что и сам объект

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1) = \mathbf{f}_d(\hat{\mathbf{x}}(n), \mathbf{u}(n), \hat{\mathbf{a}}(n), \hat{\mathbf{b}}(n), n), \quad (1.7)$$

где  $\hat{\mathbf{x}}(n+1)$  – прогноз вектора состояния до коррекции по информации от датчиковой аппаратуры ( $\hat{\mathbf{x}}(n+1) \equiv \mathbf{x}(n+1|n)$  – априорная оценка на  $n$ -м такте);  $\hat{\mathbf{x}}(n) \equiv \mathbf{x}(n|n)$  – апостериорная оценка вектора состояния динамики КА в бортовой модели после коррекции на  $n$ -ом такте;  $\hat{\mathbf{a}}(n)$  – вектор идентифицируемых параметров в бортовой модели динамики КА;  $\hat{\mathbf{b}}(n)$  – вектор идентифицируемых параметров бортовой модели исполнительных органов КА. Бортовая модель должна быть скорректирована в соответствии с измерениями датчиковой аппаратуры, то есть содержать поправочный член, пропорциональный разности между фактическим вектором измерений  $\mathbf{y}(n)$  и его аналогом  $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}(n+1), \hat{\mathbf{c}}(n), n)$ , сформированным эмулятором измерителя (датчика), входящим в состав бортовой модели объекта управления:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(n) = \mathbf{y}(n) - \mathbf{g}[\hat{\mathbf{x}}(n+1), \hat{\mathbf{c}}(n), n]. \quad (1.8)$$

Здесь  $\hat{\mathbf{c}}(n)$  – вектор идентифицируемых параметров модели датчиковой аппаратуры;  $\boldsymbol{\varepsilon}(n)$  –  $m$ -мерный вектор, который далее по тексту именуется вектором *невязок* и характеризует  $m$ -мерную функцию (суперпозицию) ошибок в оценке компонент  $n$ -мерного вектора состояния  $\mathbf{X}$  и  $q+r+s$ - мерного вектора  $\mathbf{p} = [\mathbf{a}^T \quad \mathbf{b}^T \quad \mathbf{c}^T]^T$  параметров системы на  $n$ -ом такте.

В данной работе мера *близости* фактического поведения объекта управления и его бортовой модели определяется функционалом в виде квадратичной формы от вектора невязок

$$\begin{aligned} \Phi(n) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T(n) \mathbf{R}(n) \boldsymbol{\varepsilon}(n) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{y}(n) - \mathbf{g}[\hat{\mathbf{x}}(n+1), \hat{\mathbf{c}}(n), n] \right\}^T \mathbf{R}(n) \left\{ \mathbf{y}(n) - \mathbf{g}[\hat{\mathbf{x}}(n+1), \hat{\mathbf{c}}(n), n] \right\}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где  $\mathbf{R}$  – положительно определенная матрица весов измерений. Далее, если это отдельно не оговорено, будем полагать для краткости изложения и без особого ущемления общности  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$  – единичной матрицей соответствующей размерности.

Коррекция бортовой модели осуществляется методом градиентного спуска. Для оценок компонент вектора состояния:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(n+1) &= \hat{\mathbf{x}}(n+1) - \mathbf{W}_x \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{x}}(n)} \right) = \\ &= \mathbf{f}_d(\hat{\mathbf{x}}(n), \mathbf{u}(n), \hat{\mathbf{a}}(n), \hat{\mathbf{b}}(k), n) - \mathbf{W}_x \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{x}}(n)} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

и для оценок совокупности компонент параметров объекта управления:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{a}}(n+1) &= \hat{\mathbf{a}}(n) - \mathbf{W}_a \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{a}}(n)} \right); \\
\hat{\mathbf{b}}(n+1) &= \hat{\mathbf{b}}(n) - \mathbf{W}_b \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{b}}(n)} \right); \\
\hat{\mathbf{c}}(k+1) &= \hat{\mathbf{c}}(n) - \mathbf{W}_c \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{c}}(n)} \right),
\end{aligned} \tag{1.11}$$

где  $\mathbf{W}_x, \mathbf{W}_a, \mathbf{W}_b, \mathbf{W}_c$  – матрицы весовых коэффициентов соответствующих размерностей. Вид этих матриц определяет метод оценивания. В данной работе числовые значения компонент этих матриц вычисляются **методом последовательного замыкания** из соображений обеспечения асимптотической сходимости оцениваемых переменных и параметров системы к их фактическим значениям.

Градиенты, присутствующие в (1.10) и (1.11), берутся в силу уравнений движения (1.7), (1.8), запрограммированных в бортовом компьютере. Следуя правилам дифференцирования квадратичной формы и, далее, сложной векторной функции, имеем:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial \Phi(n)}{\partial \hat{\mathbf{x}}(n)} \right) &= - \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \hat{\mathbf{x}}(n+1)} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(n+1)}{\hat{\mathbf{x}}(n)} \right)^T \boldsymbol{\varepsilon}(n) = - \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \hat{\mathbf{x}}(n+1)} \frac{\partial \mathbf{f}_d}{\partial \hat{\mathbf{x}}(n)} \right)^T \boldsymbol{\varepsilon}(n); \\
\left( \frac{\partial \Phi(n)}{\partial \hat{\mathbf{a}}(n)} \right) &= - \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \hat{\mathbf{x}}(n+1)} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(n+1)}{\partial \mathbf{f}_d} \frac{\partial \mathbf{f}_d}{\partial \hat{\mathbf{a}}(n)} \right)^T \boldsymbol{\varepsilon}(n); \\
\left( \frac{\partial \Phi(n)}{\partial \hat{\mathbf{b}}(n)} \right) &= - \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \hat{\mathbf{x}}(n+1)} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(n+1)}{\partial \mathbf{f}_d} \frac{\partial \mathbf{f}_d}{\partial \hat{\mathbf{b}}(n)} \right)^T \boldsymbol{\varepsilon}(n); \\
\left( \frac{\partial \Phi(n)}{\partial \hat{\mathbf{c}}(n)} \right) &= - \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \hat{\mathbf{c}}(n)} \right)^T \boldsymbol{\varepsilon}(n),
\end{aligned}$$

где  $(\cdot)^T$  – операция транспонирования. Заметим, что в силу (1.7) и (1.8).

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(n+1)}{\partial \mathbf{f}_d} = \mathbf{I}_{k \times k}; \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{g}} = -\mathbf{I}_{m \times m},$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица соответствующей размерности.

Таким образом, обобщенные конечно-разностные уравнения бортовой модели с коррекцией от измерений, описывающие поведение оценок переменных и параметров объекта управления, приобретают вид:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(n+1) &= \mathbf{f}_d(\hat{\mathbf{x}}(n), \mathbf{u}(n), \hat{\mathbf{a}}(n), \hat{\mathbf{b}}(n), n) + \mathbf{W}_x \left( \frac{\partial \mathbf{f}_d}{\partial \hat{\mathbf{x}}(n)} \right)^T \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \hat{\mathbf{x}}(n+1)} \right)^T \cdot \\ &\cdot \left( \mathbf{y}(n) - \mathbf{g}[\hat{\mathbf{x}}(n+1), \hat{\mathbf{c}}(n), n] \right); \\ \hat{\mathbf{a}}(n+1) &= \hat{\mathbf{a}}(n) + \mathbf{W}_a \left( \frac{\partial \mathbf{f}_d}{\partial \hat{\mathbf{a}}(n)} \right)^T \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \hat{\mathbf{x}}(n+1)} \right)^T \left( \mathbf{y}(n) - \mathbf{g}[\hat{\mathbf{x}}(n+1), \hat{\mathbf{c}}(n), n] \right); \quad (1.12) \\ \hat{\mathbf{b}}(n+1) &= \hat{\mathbf{b}}(n) + \mathbf{W}_b \left( \frac{\partial \mathbf{f}_d}{\partial \hat{\mathbf{b}}(n)} \right)^T \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \hat{\mathbf{x}}(n+1)} \right)^T \left( \mathbf{y}(n) - \mathbf{g}[\hat{\mathbf{x}}(n+1), \hat{\mathbf{c}}(n), n] \right); \\ \hat{\mathbf{c}}(n+1) &= \hat{\mathbf{c}}(n) + \mathbf{W}_c \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \hat{\mathbf{c}}(n)} \right)^T \left( \mathbf{y}(n) - \mathbf{g}[\hat{\mathbf{x}}(n+1), \hat{\mathbf{c}}(n), n] \right). \end{aligned}$$

Полученные итерационные уравнения для одновременного оценивания вектора состояния и параметров объекта управления весьма общего вида, и с практической точки зрения они малоприспособны для синтеза бортового алгоритма, функционирующего в режиме реального времени, по двум причинам. Первая – для эффективного применения метода градиентного спуска необходимо, чтобы идентифицируемые параметры системы или в общем случае их нелинейные комбинации линейно зависели от измеряемых переменных. В этом случае функция штрафа относительно оценок компонент вектора состояния и оцениваемых параметров будет всегда *униmodalной* (выпуклой по идентифицируемым параметрам) [27], что гарантирует несмещенность и состоятельность оценок. Вторая – ввиду ограниченности вычислительной мощности бортового компьютера и требования формирования оценок в режиме реального времени, основной

акцент при реализации адаптивного управления должен быть сделан на простоту, надежность и устойчивость вычислительного процесса. Поэтому мы вынуждены сузить класс рассматриваемых функций  $\mathbf{f}_d$  и  $\mathbf{g}$  до линейно зависящих от компонент вектора состояния и параметров системы. С учетом вышесказанного совокупность уравнений (1.12) будет использоваться в линеаризованном виде в предположении близости оцениваемых компонент вектора состояния и идентифицируемых (настраиваемых) параметров бортовой модели к их фактическим значениям.

Далее по тексту будут рассматриваться функции  $\mathbf{f}_d$  и  $\mathbf{g}$  следующего вида:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_d(\hat{\mathbf{x}}(n), \mathbf{u}(n), \hat{\mathbf{a}}(n), \hat{\mathbf{b}}(n), n) &= \mathbf{A}(\hat{\mathbf{a}}(n)) \cdot \hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{B}(\hat{\mathbf{b}}(n)) \cdot \mathbf{u}(n) \\ \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}(n+1), \hat{\mathbf{c}}(n), n) &= \mathbf{C}(\hat{\mathbf{c}}(n)) \cdot (\mathbf{A}(\hat{\mathbf{a}}(n)) \cdot \hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{B}(\hat{\mathbf{b}}(n)) \cdot \mathbf{u}(n)).\end{aligned}$$

Матрицы  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  будут матрицами Якоби [28] при разложении функций  $\mathbf{f}_d$  и  $\mathbf{g}$  в ряд Тейлора в предположении близости оценок вектора состояния и параметров системы к их фактическим значениям [29]. Уравнения (1.12) в этом случае приобретают вид:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(n+1) &= \hat{\mathbf{A}}(n) \hat{\mathbf{x}}(n) + \hat{\mathbf{B}}(n) \mathbf{u}(n) + \mathbf{W}_x \hat{\mathbf{A}} \mathbf{C}^T \boldsymbol{\varepsilon}(n); \\ \hat{\mathbf{a}}(n+1) &= \hat{\mathbf{a}}(n) + \mathbf{W}_a \hat{\mathbf{A}} \mathbf{C}^T \boldsymbol{\varepsilon}(n); \\ \hat{\mathbf{b}}(n+1) &= \hat{\mathbf{b}}(n) + \mathbf{W}_b \hat{\mathbf{A}} \mathbf{C}^T \boldsymbol{\varepsilon}(n); \\ \hat{\mathbf{c}}(n+1) &= \hat{\mathbf{c}}(n) + \mathbf{W}_c \mathbf{C}^T \boldsymbol{\varepsilon}(n).\end{aligned}$$

Здесь важно отметить, что если даже динамика объекта *линейна*, его описание невозможно преобразовать к форме

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(n+1) \\ \mathbf{p}(n+1) \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n) \\ \mathbf{p}(n) \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{M}$  не зависит ни от  $\mathbf{x}$ , ни от  $\mathbf{p}$ . Таким образом, даже для линейного объекта, *линейно* зависящего от параметров, задача совместного оценивания



параметров и состояния *нелинейна* относительно расширенного вектора параметров и состояния  $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{p}^T \end{bmatrix}^T$ . Это означает, что все подходы к этой задаче должны быть типа метода настраиваемой модели, то есть иметь итеративный характер [1].

Критерий совместной наблюдаемости и параметрической идентифицируемости динамической системы в наиболее общем виде освещены в [30]. В данной работе выполнение условий полной совместной наблюдаемости и параметрической идентифицируемости проверяются с учетом специфики конкретной задачи.

Все представленные в работе адаптивные алгоритмы построены по следующим схемам. Для одновременной оценки вектора состояния и параметрической идентификации матрицы **A** используется схема, представленная на рис 1.1, для оценки вектора состояния и параметрической идентификации матриц **B** и **C** – схемы представлены на рис. 1.2 и 1.3. Задачи совместной оценки вектора состоя и параметрической идентификации одновременно всех трех матриц **A**, **B**, **C** в данной работе не рассматриваются. Вместо этого алгоритмы параметрической идентификации этих матриц переключается с одной схемы на другую в зависимости от конкретных условий каждой задачи. Например, в отсутствии управляющих воздействий, когда фазовая траектория находится внутри зоны нечувствительности релейной системы управления, нет необходимости в параметрической идентификации матрицы **B**, так как она принципиально не может быть идентифицирована.

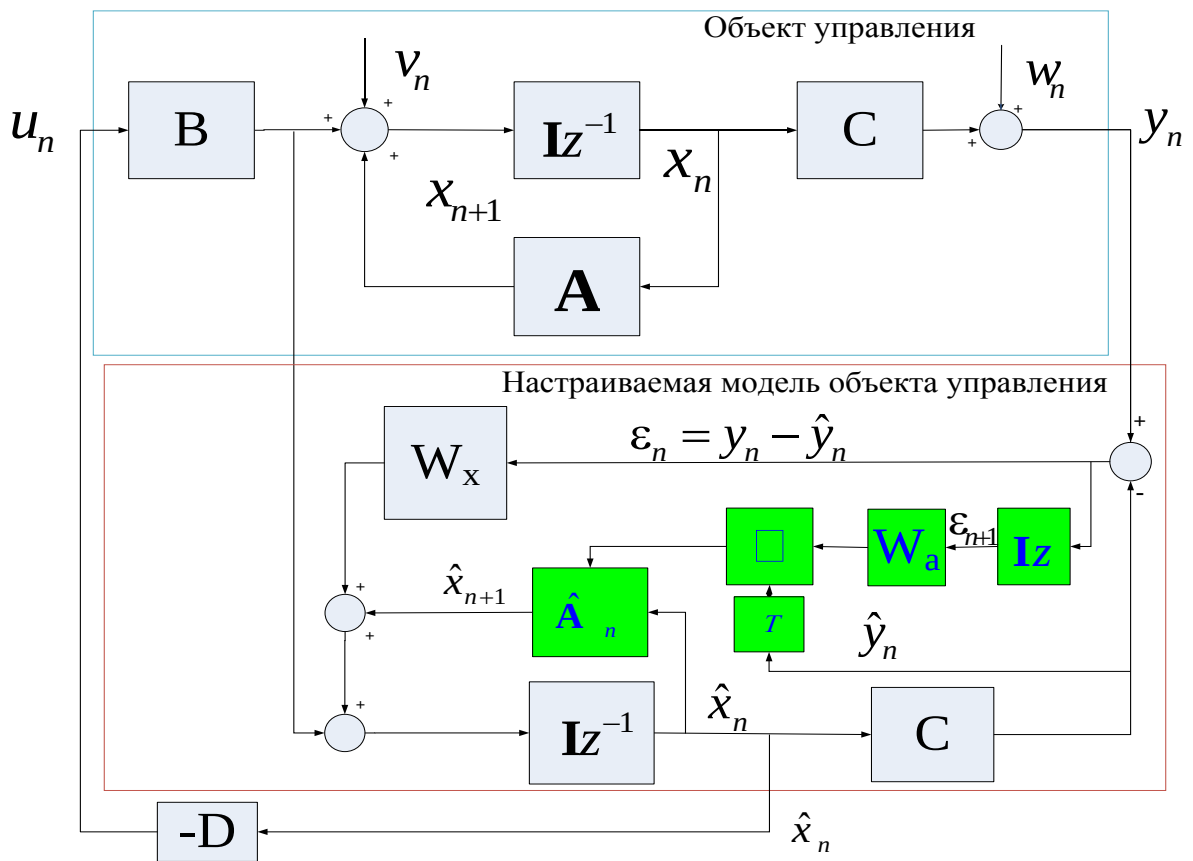


Рис.1.1

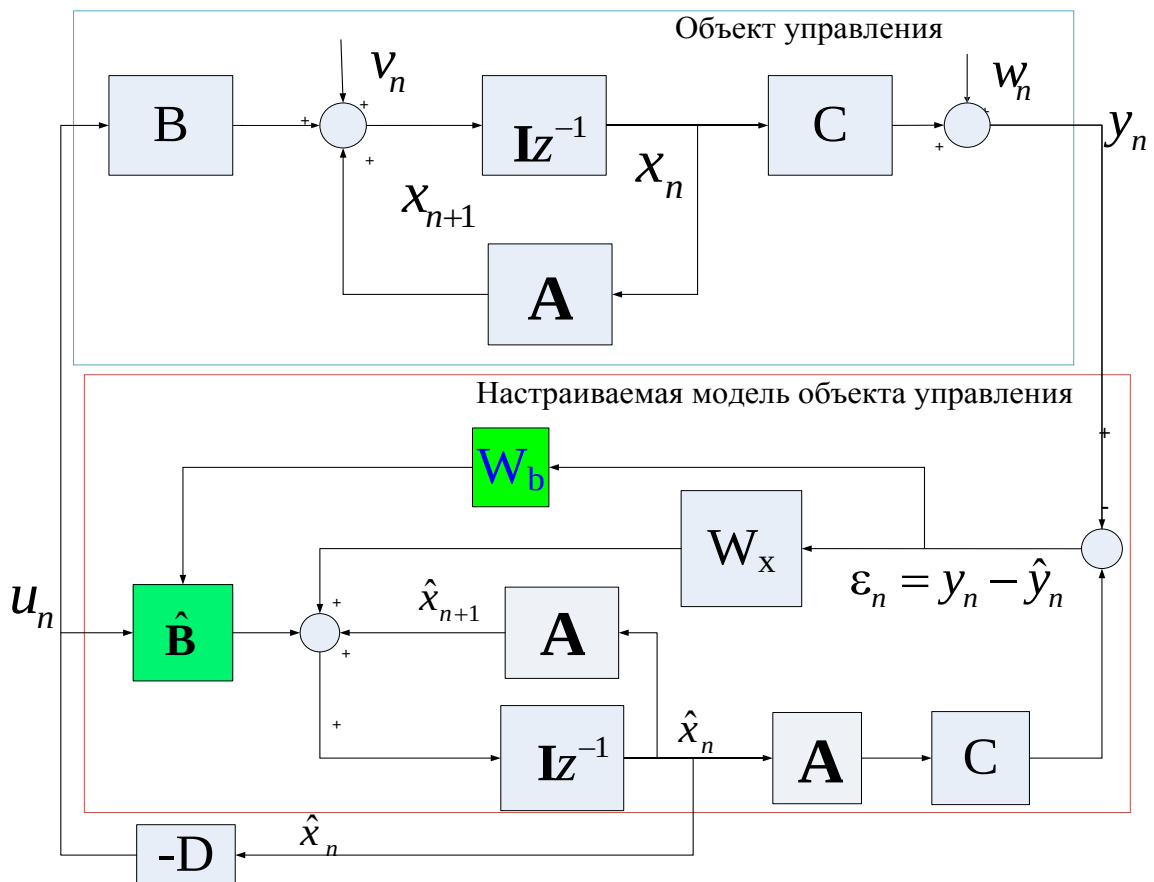


Рис.1.2

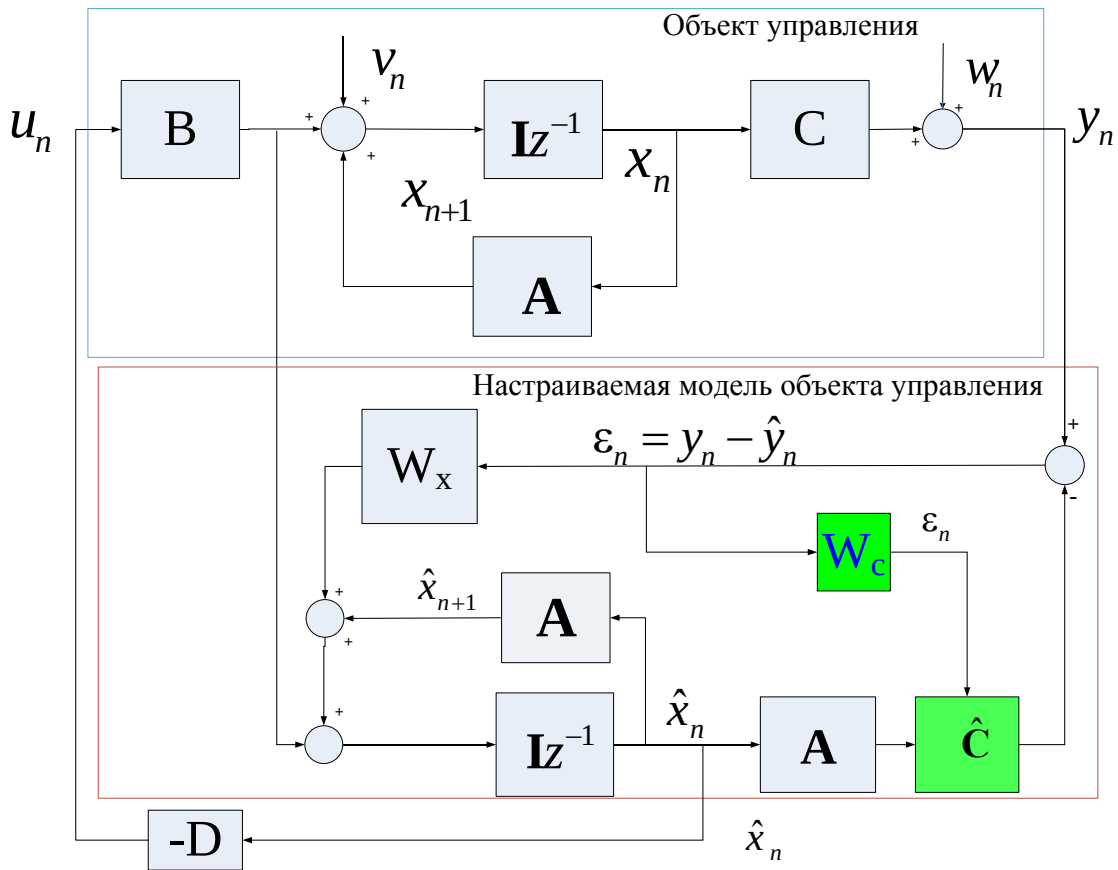


Рис.1.3.

Рассмотрим подробно схему оценки вектора состояния совместно с идентификацией компонент матрицы  $\mathbf{A}$  (рис.1.1) в предположении, что матрицы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  известны. Параметрическая идентификация матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  совместно с оценкой вектора состояния реализуются аналогично.

Объект управления описывается в пространстве состояний линеаризованными конечно-разностными уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{B}\mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n; \\ \mathbf{y}_n &= \mathbf{C}\mathbf{x}_n + \mathbf{w}_n, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $\mathbf{x}_n$  –  $k$ -мерный вектор состояния в пространстве состояний (физический смысл каждой компоненты вектора и размерность пространства состояний указаны в соответствующих главах при описании конкретной реализации алгоритма);  $n$  – номер такта бортового компьютера;  $\mathbf{A}$  – матрица переходных состояний (как правило, с постоянными компонентами);  $\mathbf{B}$  – матрица преобразования  $r$ -мерного вектора внешних воздействий  $\mathbf{u}_n$  в  $k$ -мерное

пространство состояний;  $V_n$  – гауссовский дискретный процесс типа белого шума [30 с. 532-535], включая шумы, исполнительных органов;  $y_n$  – m-мерный вектор измерений (m – суммарное количество измерительных каналов со всех датчиков первичной информации),  $C$  – матрица преобразования k-мерного вектора состояния в m-мерный вектор измерений  $y_n$ ;  $W_n$  – гауссовский дискретный процесс типа белого шума [30 с.532- 535] в измерительных каналах датчиковой аппаратуры.

Структура уравнений, запрограммированных в бортовой модели аналогична структуре линеаризованной модели объекта управления с точностью до численных значений параметров (коэффициентов уравнений). Поэтому часть коэффициентов уравнений бортовой модели подлежат идентификации одновременно с оценкой вектора состояния с помощью следующих уравнений:

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{A}_n \hat{x}_n + B u_n + W_x (y_n - C \hat{A}_n \hat{x}_n); \quad (1.14)$$

где  $\hat{x}_n$  – k-мерный вектор оцениваемых переменных.  $\hat{A}_n$  – матрица переходных состояний в бортовой модели, содержащая переменные (настраиваемые) компоненты,  $W$  – матрица весовых коэффициентов;  $\hat{y}_n$  – аналог m-мерного вектора измерений, который также формируется в бортовой модели и эмулирует показания датчиковой аппаратуры.

Для идентификации параметров используется итеративная процедура градиентного спуска, работающая в реальном масштабе времени

$$\hat{A}_{n+1} = \hat{A}_n - W_a \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{A}_n}, \quad (1.15)$$

при этом в качестве минимизируемого функционала используется квадратичная форма от невязок:

$$\Phi = \frac{1}{2} \epsilon_n^T \epsilon_n.$$

Невязки формируются как разность между фактическими сигналами, сформированными в измерительных каналах датчиков первичной информации и их аналогами, которые эмулируются бортовой моделью

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{y}_n - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{n+1}.$$

Метод градиентного спуска дает:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{A}}_n} = -\hat{\mathbf{x}}_n^T \mathbf{C}^T \boldsymbol{\varepsilon}_n;$$

производная по идентифицируемому параметру берется в силу уравнений движения:

$$\hat{\mathbf{A}}_{n+1} = \hat{\mathbf{A}}_n + \mathbf{W}_a \hat{\mathbf{x}}_n^T \mathbf{C}^T (\mathbf{y}_n - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{n+1}), \quad (1.16)$$

где  $\mathbf{W}_a$  – матрица весовых коэффициентов в методе градиентного спуска.

Обратная связь формируется по оценке вектора состояния

$$\mathbf{u}_n = -\mathbf{D}\hat{\mathbf{x}}_n \quad (1.17)$$

где  $\mathbf{D}$  – матрица коэффициентов обратной связи.

Анализ сходимости оценок, формируемых в бортовой модели, и анализ устойчивости управления по этим оценкам проводится отдельно в силу следующего [30, 31].

Совокупность уравнений (1.13) – (1.17) может быть преобразована к следующему виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D})\mathbf{x}_n + \mathbf{B}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{x}}_n; \\ \tilde{\mathbf{x}}_{n+1} &= (\mathbf{A} - \mathbf{W}_x \mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}_n + \tilde{\mathbf{A}}_n(\tilde{\mathbf{a}}_n)\hat{\mathbf{x}}_n; \\ \tilde{\mathbf{a}}_{n+1} &= \tilde{\mathbf{a}}_n + \mathbf{W}_a \hat{\mathbf{x}}_n^T \tilde{\mathbf{x}}_n. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Здесь  $\tilde{\mathbf{x}}_n = \mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n$  – погрешность в оценке вектора состояния;  $\tilde{\mathbf{a}}_n = \mathbf{a}_n - \hat{\mathbf{a}}_n$  – вектор невязок в оценке параметров, составленный из настраиваемых компонент матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}_n = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}_n$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{n+1} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D})\mathbf{x}_n + \mathbf{B}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{x}}_n; \\
\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} &= (\mathbf{A} - \mathbf{W}_x\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}_n + \hat{\mathbf{X}}_n\tilde{\mathbf{a}}_n; \\
\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} &= \tilde{\mathbf{a}}_n + \mathbf{W}_a\hat{\mathbf{x}}_n^T\tilde{\mathbf{x}}_n.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Здесь  $\tilde{\mathbf{A}}_n(\tilde{\mathbf{a}}_n)\hat{\mathbf{x}}$  представлено в виде произведения матрицы  $\hat{\mathbf{X}}_n$  размерности  $i \times i^2$  и вектора  $\tilde{\mathbf{a}}_n$  размерности  $i^2 \times 1$ :

$$\tilde{\mathbf{A}}_n\hat{\mathbf{x}}_n = [\tilde{\mathbf{a}}_1 \quad \tilde{\mathbf{a}}_2 \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{a}}_{i-1} \quad \tilde{\mathbf{a}}_i]_n \hat{\mathbf{x}}_n \equiv \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}' & \mathbf{0}_{1 \times i} & \mathbf{0}_{1 \times i} & \dots & \mathbf{0}_{1 \times i} \\ \mathbf{0}_{1 \times i} & \hat{\mathbf{x}}' & \mathbf{0}_{1 \times i} & \dots & \mathbf{0}_{1 \times i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{1 \times i} & \mathbf{0}_{1 \times i} & \mathbf{0}_{1 \times i} & \dots & \mathbf{0}_{1 \times i} \\ \mathbf{0}_{1 \times i} & \mathbf{0}_{1 \times i} & \mathbf{0}_{1 \times i} & \dots & \hat{\mathbf{x}}' \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1 \\ \tilde{\mathbf{a}}_2 \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{a}}_{i-1} \\ \tilde{\mathbf{a}}_i \end{bmatrix}_n = \hat{\mathbf{X}}_n\tilde{\mathbf{a}}_n$$

Размерность этого вектора не может превышать размерности вектора состояния системы, из-за ограничений, накладываемых условиями полной наблюдаемости и параметрической идентифицируемости [30], поэтому матрица  $\tilde{\mathbf{A}}_n$  содержит не менее  $k \times (k-1)$  нулей, а вектор невязок  $\tilde{\mathbf{a}}_n$  может иметь размерность не выше  $k$ . Представляя  $\tilde{\mathbf{A}}_n(\tilde{\mathbf{a}}_n)\hat{\mathbf{x}}_n$  в виде  $\hat{\mathbf{X}}_n\tilde{\mathbf{a}}_n$ , перепишем систему (1.19) в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n+1} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{n+1} \\ \tilde{\mathbf{a}}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D} & \mathbf{B}\mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{W}_x\mathbf{C} & \hat{\mathbf{X}}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_a\hat{\mathbf{x}}_n^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \tilde{\mathbf{x}}_n \\ \tilde{\mathbf{a}}_n \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

а ее характеристический полином

$$\begin{vmatrix} \mathbf{I}z - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}) & -\mathbf{B}\mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}z - (\mathbf{A} - \mathbf{W}_x\mathbf{C}) & -\hat{\mathbf{X}}_n \\ \mathbf{0} & -\mathbf{W}_a\hat{\mathbf{x}}_n^T & \mathbf{I}(z-1) \end{vmatrix} = |\mathbf{I}z - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D})| \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{I}z - (\mathbf{A} - \mathbf{W}_x\mathbf{C}) & \hat{\mathbf{X}}_n \\ \mathbf{W}_a\hat{\mathbf{x}}_n^T & \mathbf{I}(z-1) \end{vmatrix}.$$

Из вида характеристического полинома видно, что в квазистатическом приближении ( $\hat{\mathbf{x}}_n^T$  — медленно меняющаяся векторная переменная) расположение корней адаптивного наблюдателя не зависит от расположения корней замкнутой системы, в состав которой он включен. Поэтому

предварительный анализ асимптотической устойчивости замкнутой системы, использующей для управления оценку вектора состояния с выхода адаптивного наблюдателя (вместо фактического вектора состояния), можно проводить независимо от анализа асимптотической сходимости адаптивного наблюдателя. В данной работе сходимость итерационного процесса оценивания вектора состояния при одновременной параметрической идентификации матрицы  $A$  обеспечивается применением специально разработанным для этой цели **методом последовательного замыкания** мод движения многомерных и многосвязных (MIMO) систем. Детальное описание метода приведено далее по тексту в пунктах 1.3 – 1.6 этой главы.

## **1.2 Адаптивные алгоритмы управления с эталонной моделью**

В адаптивных алгоритмах с эталонной моделью в контур управления закладывается не модель объекта управления с настраиваемыми параметрами, а модель предписываемого эталонного динамического поведения объекта управления [1]. В этом случае цель адаптации совпадает с целью управления, то есть приведения объекта управления к надлежащему динамическому поведению, задаваемому эталонной моделью.

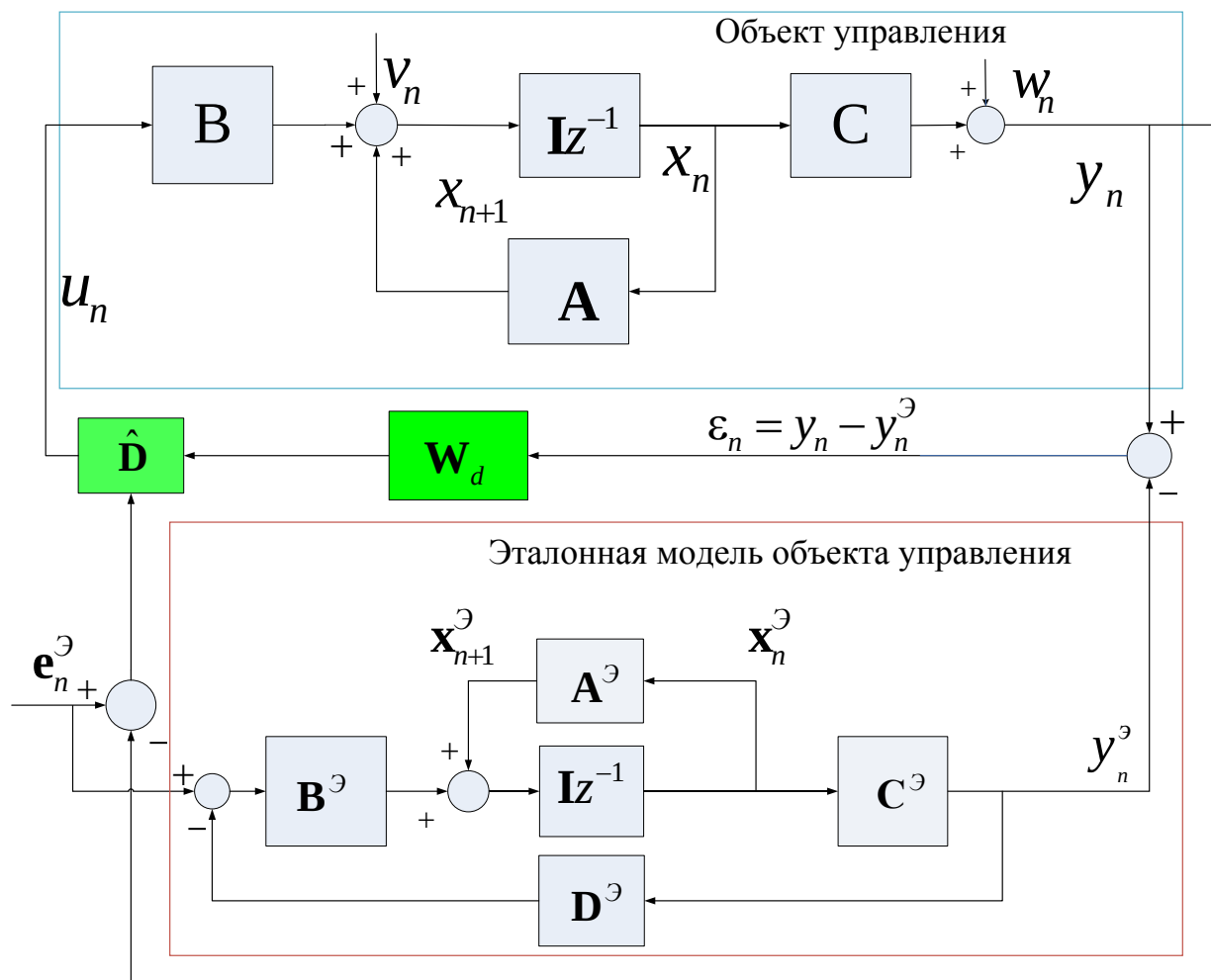


Рис. 1.4

На рисунке 1.4 объект управления представлен для определенности стандартной блок-схемой (см. описание к рисункам 1.1-1.3). Эталонная бортовая модель повторяет его структуру и жестко задает надлежащее, как правило, оптимальное динамическое поведение, которому должен следовать объект управления в зависимости от значения задаваемого входного сигнала  $\mathbf{e}_n^\vartheta$ . Безусловно, что характеристический полином передаточной матрицы эталонной модели от  $\mathbf{e}^\vartheta(z)$  к  $\mathbf{y}^\vartheta(z)$

$$\mathbf{y}^\vartheta(z) = \mathbf{C}^\vartheta (\mathbf{I}z - \mathbf{A}^\vartheta + \mathbf{B}^\vartheta \mathbf{D}^\vartheta \mathbf{C}^\vartheta)^{-1} \mathbf{B}^\vartheta \mathbf{e}^\vartheta(z) \quad (1.21)$$

должен быть гурвицевым, то есть его корни должны находиться внутри единичной окружности  $z$ -плоскости, где  $z$  – оператор сдвига;  $\mathbf{I}$  – единичная матрица соответствующей размерности. В противном случае эталонная



модель не сможет отслеживать желаемый входной сигнал  $\mathbf{e}_n^\vartheta$ , то есть вектор  $\mathbf{y}^\vartheta(z)$  не будет стремиться к вектору  $\mathbf{e}^\vartheta(z)$ . Далее для упрощения выкладок будем полагать, что  $\mathbf{C}^\vartheta = \mathbf{C} = \mathbf{I}$ . Это означает, что все компоненты вектора состояния  $\mathbf{x}_n^\vartheta$  могут быть измерены. Тогда уравнения эталонной бортовой модели в терминах пространства состояний принимают вид (см. рис. 1.25):

$$\mathbf{y}^\vartheta(z) = \mathbf{C}^\vartheta (\mathbf{I}z - \mathbf{A}^\vartheta + \mathbf{B}^\vartheta \mathbf{D}^\vartheta \mathbf{C}^\vartheta)^{-1} \mathbf{B}^\vartheta \mathbf{e}^\vartheta(z) \quad (1.22)$$

а уравнения объекта управления в отсутствии шумов –

$$\mathbf{y}_{n+1} = (\mathbf{A}_n - \mathbf{B}\mathbf{D}_n)\mathbf{y}_n + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}_n\boldsymbol{\varepsilon}_n + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}_n\mathbf{e}_n^\vartheta = \mathbf{A}_{n3}\mathbf{y}_n + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}_n\boldsymbol{\varepsilon}_n + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}_n\mathbf{e}_n^\vartheta, \quad (1.23)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{y}_n - \mathbf{y}_n^\vartheta$  – вектор ошибки адаптации. Вычитая (1.21) из (1.22) получим

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = (\mathbf{A}_3 + \tilde{\mathbf{A}}_n)\boldsymbol{\varepsilon}_n + \tilde{\mathbf{A}}_n\mathbf{y}_n^\vartheta + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}_n\boldsymbol{\varepsilon}_n + (\mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}_n - \mathbf{B}^\vartheta)\mathbf{e}_n^\vartheta,$$

где  $\tilde{\mathbf{A}}_n = \mathbf{A}_{n3} - \mathbf{A}_3^\vartheta$ . Пренебрегая величиной второго порядка малости  $\tilde{\mathbf{A}}_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$ , окончательно получаем

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = (\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}_n)\boldsymbol{\varepsilon}_n + \tilde{\mathbf{A}}_n\mathbf{y}_n^\vartheta + \tilde{\mathbf{D}}_n\mathbf{e}_n^\vartheta, \quad (1.24)$$

где  $\tilde{\mathbf{D}}_n = \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}_n - \mathbf{B}^\vartheta$ .

Для синтеза алгоритма адаптации воспользуемся ранее описанным методом градиентного спуска с функцией штрафа (функционала)

$$\Phi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \boldsymbol{\varepsilon}_n \quad (1.25)$$

Целью адаптации в этом случае является минимизация функционала (1.25) при заданных нестационарных ограничениях в виде конечно разностных уравнений в форме (1.24). Находя выражения для градиентов  $\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\mathbf{A}}_n}$  и  $\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\mathbf{D}}_n}$  в силу уравнений (1.24) и подставляя их в стандартные соотношения алгоритма градиентного спуска, получаем

$$\tilde{\mathbf{A}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{A}}_n - W_d \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\mathbf{A}}_n} \right)^T \boldsymbol{\varepsilon}_n = \tilde{\mathbf{A}}_n - W_d \left( \mathbf{y}_n^\ominus \right)^T \boldsymbol{\varepsilon}_n \quad (1.26)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{D}}_n - W_d \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\mathbf{D}}_n} \right)^T \boldsymbol{\varepsilon}_n = \tilde{\mathbf{D}}_n - W_d \left( \mathbf{e}_n^\ominus \right)^T \boldsymbol{\varepsilon}_n \quad (1.27)$$

Совокупность уравнений (1.24), (1.26) и (1.27) определяет сходимость синтезируемого адаптивного алгоритма, то есть  $\tilde{\mathbf{A}}_n \rightarrow 0$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}_n \rightarrow 0$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_n \rightarrow 0$  и, как следствие,  $\mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{e}_n^\ominus$  при  $n \rightarrow \infty$ , если характеристический полином передаточной матрицы (1.21) Гурвицев. Необходимо отметить, что система уравнений

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} &= (\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}_n) \boldsymbol{\varepsilon}_n + \mathbf{Y}_n^\ominus \tilde{\mathbf{a}}_n + \mathbf{E}_n^\ominus \tilde{\mathbf{d}}_n; \\ \tilde{\mathbf{a}}_{n+1} &= \tilde{\mathbf{a}}_n - \mathbf{W}_d \left( \mathbf{y}_n^\ominus \right)^T \boldsymbol{\varepsilon}_n; \\ \tilde{\mathbf{d}}_{n+1} &= \tilde{\mathbf{d}}_n - \mathbf{W}_d \left( \mathbf{e}_n^\ominus \right)^T \boldsymbol{\varepsilon}_n, \end{aligned}$$

полученная из совокупности уравнений (1.24), (1.26) и (1.27) с помощью эквивалентных преобразований, аналогичных тем, которые были применены для преобразования уравнений (1.18) к виду (1.19), является системой линейных конечно разностных уравнений с переменными коэффициентами относительно расширенного вектора невязок  $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_n^T & \tilde{\mathbf{a}}_n^T & \tilde{\mathbf{d}}_n^T \end{bmatrix}^T$ . Поэтому, важно понимать, что при поиске числовых значений матриц весовых коэффициентов  $\mathbf{W}_d$ , обеспечивающих асимптотическую сходимость в алгоритмах градиентного спуска, принимается допущение о квазистатичности процессов адаптации. Это допущение касается и метода последовательных замыканий мод движения, описанного далее в пункте 1.3 этой главы.

### 1.3 Принцип последовательного замыкания мод движения.

Представляемый в данной главе численный алгоритм модального синтеза основан на **принципе последовательного замыкания**. Суть принципа заключается в итеративной процедуре, на каждом шаге которой осуществляется поиск обратной связи, необходимой для «перестановки» одной пары собственных чисел системы в желаемое положение. При этом найденная на одной из итераций обратная связь не влияет на остальные корни системы. Этого удастся добиться благодаря специфике матричных операций, проводимых на каждой итерации, о которых будет подробно изложено ниже. Наглядно суть описываемого в данной главе численного алгоритма представлена на рис. 1.5.

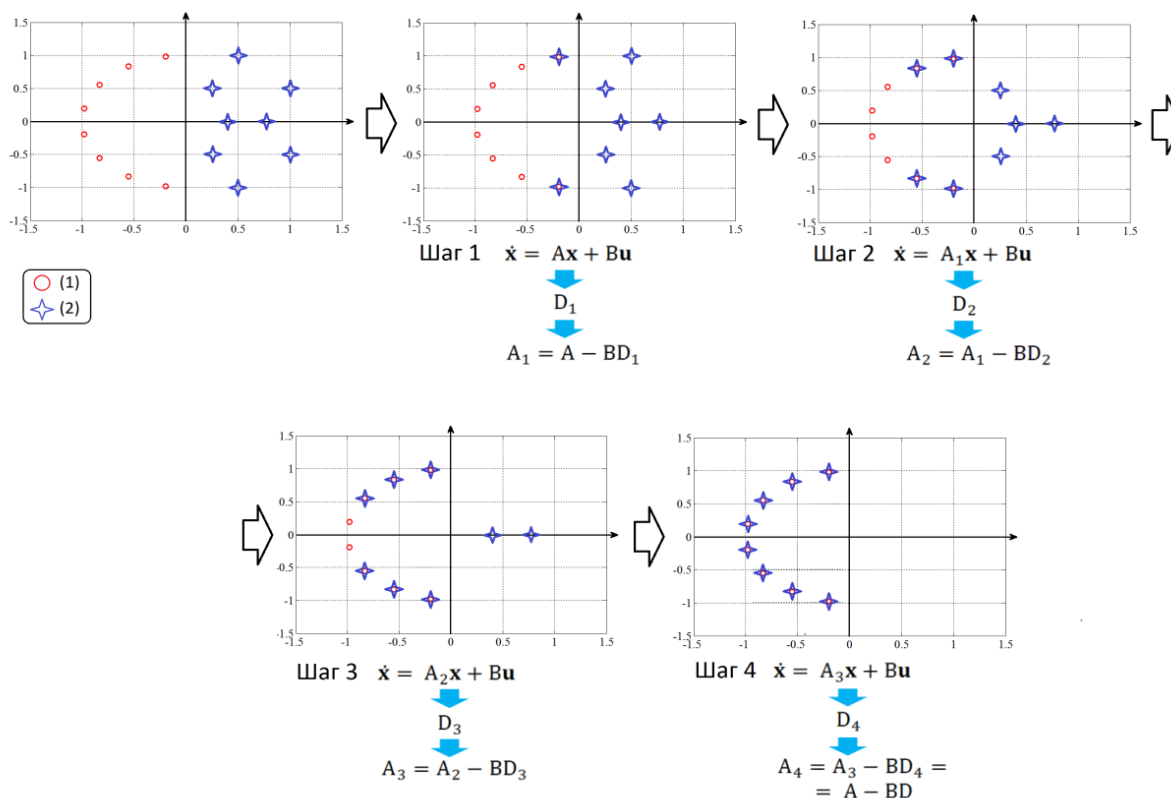


Рис. 1.5 Графическая иллюстрация «метода последовательного замыкания».

(1) – эталонное расположение корней замкнутой системы, (2) – расположение корней матрицы системы на  $i$ -ом шаге.

На рисунке выше представлена иллюстрация принципа работы численного алгоритма для четного количества компонент вектора состояния. В случае, когда размерность вектора состояния системы нечетная, на последней итерации алгоритма ищется обратная связь, необходимая для «перестановки» последнего непарного собственного числа.

Перейдем к подробному описанию и теоретическому обоснованию численного метода модального синтеза, представляемого в этой главе.

## **1.4 Алгоритм последовательного замыкания. Построение регулятора.**

Перейдем к описанию матричных процедур, необходимых для построения регулятора (обратной связи). Подробно опишем и обоснуем все матричные операции, которые стоят за поиском матрицы обратной связи на первой итерации алгоритма последовательного замыкания.

Расположение корней системы до введения обратной связи (незамкнутой системы) определяется собственными числами матрицы системы  $A$

$$eig(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

Зададим эталонное расположение корней замкнутой системы:

$$eig(A - BD) = \{\lambda_1^c, \lambda_2^c, \dots, \lambda_n^c\}.$$

Для обеспечения асимптотической устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все ее корни лежали в левой полуплоскости (или внутри единичной окружности, если система дискретная).

Предположим, что нам нужно найти такую матрицу обратной связи  $D_1$ , которая бы «передвинула» первую пару собственных чисел незамкнутой системы  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в желаемое положение, то есть такую матрицу, которая бы обеспечивала замкнутой с помощью нее системе следующий набор корней

$$eig(A - BD_1) = \{\lambda_1^c, \lambda_2^c, \lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_n\}.$$

В первую очередь найдем преобразование подобия  $\mathbf{T}_1$ , которое приводит исходную матрицу  $\mathbf{A}$  к диагональному виду или жордановой форме, в случае, когда к диагональному виду матрицу привести нельзя

$$\Lambda_1 = \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_1,$$

$$\text{где } \Lambda_1 = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} t_{1_1} & t_{1_2} & \dots & t_{1_n} \end{bmatrix}, \quad t_{1_i} - \text{собственные}$$

вектора матрицы  $\mathbf{A}$ .

Матрицу системы с одной «замкнутой» парой собственных чисел можно представить как

$$\mathbf{A}_1^c = \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{D}_1 = \mathbf{T}_1 \mathbf{X} \Lambda_1^c \mathbf{X}^{-1} \mathbf{T}_1^{-1},$$

$$\text{где } \Lambda_1^c = \text{diag}(\lambda_1^c, \lambda_2^c, \lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1^c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times (n-2)} \\ \mathbf{0}_{(n-2) \times 2} & \mathbf{I}_{(n-2) \times (n-2)} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{X}_{2 \times 2} \in R^{2 \times 2}$  - произвольная невырожденная матрица размера  $2 \times 2$ . Распишем выражение для матрицы  $\mathbf{A}_1$  используя полученные ранее соотношения:

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{X} \Lambda_1^c \mathbf{X}^{-1} \mathbf{T}_1^{-1} = \mathbf{T}_1 \Lambda \mathbf{T}_1^{-1} - \mathbf{B} \mathbf{D}_1.$$

Умножим слева полученное выражение на  $\mathbf{T}_1^{-1}$ :

$$\mathbf{X} \Lambda_1^c \mathbf{X}^{-1} \mathbf{T}_1^{-1} = \Lambda \mathbf{T}_1^{-1} - \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{B} \mathbf{D}_1.$$

Далее перенесем в правую часть все слагаемые, содержащие матрицы с собственными числами, в левой части оставим слагаемое, содержащее искомую матрицу  $\mathbf{D}_1$

$$\mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{B} \mathbf{D}_1 = (\Lambda - \mathbf{X} \Lambda_1^c \mathbf{X}^{-1}) \mathbf{T}_1^{-1}.$$

Выделим в полученном выражении матричные блоки, содержащие пару «передвигаемых» собственных чисел и пару «желаемых собственных» чисел и соответствующие им строки матрицы  $\mathbf{T}_1^{-1}$ :

$$\mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{D}_1 = (\Lambda_{2 \times 2} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{2 \times 2}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) \mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1},$$

где  $\Lambda_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$  - диагональная матрица, содержащая пару передвигаемых корней системы,  $\Lambda_{1_{2 \times 2}}^c = \begin{bmatrix} \lambda_1^c & 0 \\ 0 & \lambda_2^c \end{bmatrix}$  - диагональная матрица, содержащая первую пару желаемых корней,  $\mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1}$  - матрица содержащая две строки матрицы  $\mathbf{T}_1^{-1}$ , соответствующие передвигаемой паре корней.

Для матрицы  $\mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{B}$  найдем ее псевдообратную матрицу Мура-Пенроуза, определяемую следующим выражением:

$$(\mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{B})^T \left( (\mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{B}) (\mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{B})^T \right)^{-1}.$$

Умножим полученное ранее выражение справа на  $(\mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{B})^{-1}$ , после чего получим итоговую формулу для вычисления матрицы обратной связи  $\mathbf{D}_1$  замыкающей первую моду движения, т.е. «переставляющую» первую пару корней незамкнутой системы  $(\lambda_1$  и  $\lambda_2)$  в желаемое положение  $(\lambda_1^c$  и  $\lambda_2^c)$

$$\mathbf{D}_1 = (\mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{B})^{-1} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) \mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1}. \quad (1.28)$$

Стоит сделать небольшое замечание, касающееся получившегося выражения (1.28). Данное выражение верно только в том случае, когда  $(\mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{B}) = \mathbf{I}_{2 \times 2}$ , что верно при ранге матрицы  $\mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{B}$  равном 2. Если же матрица управления  $\mathbf{B}$  будет единичным столбцом, то есть система управления будет иметь один управляющий канал (single-input), то выражение для расчета матрицы обратной связи  $\mathbf{D}_1$  будет неверным, так как в таком случае  $(\mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{B}) \neq \mathbf{I}_{2 \times 2}$ .

Покажем, что получившаяся формула (1.28) действительно «переносит» одну пару собственных чисел в желаемое положение. Подставим (1.28) в выражение для матрицы  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{D}_1$  с одной замкнутой модой и применим преобразование подобия  $\mathbf{T}_1$ , которое, как известно, не

меняет собственные числа преобразуемой матрицы (для удобства записи обозначим  $\mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{B}_1$ )

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_1 &= \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_1 = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{B}_1^T (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T)^{-1} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) \mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1}, \\
 \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{T}_1 &= \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}_1^T (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T)^{-1} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) \mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{T}_1 = \\
 &= \Lambda_1 - \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}_1^T (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T)^{-1} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) \mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{T}_1 = \\
 &= \begin{bmatrix} \Lambda_{1_{2 \times 2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{1_{(n-2) \times (n-2)}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \\ \mathbf{T}_{1_{(n-2) \times n}}^{-1} \end{bmatrix} \left[ \mathbf{B}\mathbf{B}_1^T (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T)^{-1} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) \mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1_{n \times 2}} & \mathbf{T}_{1_{(n-2) \times n}} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}_1^T (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T)^{-1} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) \mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{T}_{1_{n \times 2}} & \mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}_1^T (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T)^{-1} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) \mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{T}_{1_{(n-2) \times n}} \\ \mathbf{T}_{1_{(n-2) \times n}}^{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}_1^T (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T)^{-1} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) \mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{T}_{1_{n \times 2}} & \Lambda_{1_{(n-2) \times (n-2)}} - \mathbf{T}_{1_{(n-2) \times n}}^{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}_1^T (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T)^{-1} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) \mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{T}_{1_{(n-2) \times n}} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T)^{-1} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) \mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{T}_{1_{n \times 2}} & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T)^{-1} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) \mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{T}_{1_{(n-2) \times n}} \\ \mathbf{T}_{1_{(n-2) \times n}}^{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}_1^T (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T)^{-1} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) \mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{T}_{1_{n \times 2}} & \Lambda_{1_{(n-2) \times (n-2)}} - \mathbf{T}_{1_{(n-2) \times n}}^{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}_1^T (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T)^{-1} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) \mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{T}_{1_{(n-2) \times n}} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Учитывая ортогональность собственных векторов и соотношение  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{T}_{1_{2 \times n}}^{-1} \mathbf{B}$ ,

получаем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{T}_1 &= \begin{bmatrix} \Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T)^{-1} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{1_{(n-2) \times n}}^{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}_1^T (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T)^{-1} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) & \Lambda_{1_{(n-2) \times (n-2)}} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \Lambda_{1_{2 \times 2}} - (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{1_{(n-2) \times n}}^{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}_1^{-1} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) & \Lambda_{1_{(n-2) \times (n-2)}} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{1_{(n-2) \times n}}^{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}_1^{-1} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c) & \Lambda_{1_{(n-2) \times (n-2)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1} & \mathbf{0}_{2 \times n} \\ \mathbf{T}_{1_{(n-2) \times n}}^{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}_1^{-1} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) & \begin{matrix} \lambda_3 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_4 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \lambda_n \end{matrix} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили нижнюю треугольную матрицу, на диагонали которой лежат ее собственные числа. Нетрудно заметить, что набор собственных чисел полученной матрицы содержит одну пару «передвинутых» корней, и все остальные еще «не передвинутые» корни. Отсюда можно сделать вывод о том, что вышеописанные матричные процедуры позволяют найти необходимую обратную связь для переноса одной пары собственных чисел исследуемой системы в желаемое положение.

Выражение для матрицы обратной связи, «замыкающей» вторую пару собственных чисел системы выглядит аналогично формуле (1.28)

$$\mathbf{D}_2 = \left( \mathbf{T}_{2 \times n}^{-1} \mathbf{B} \right)^{-1} \left( \Lambda_{2 \times 2} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{2 \times 2}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1} \right) \mathbf{T}_{2 \times n}^{-1};$$

в данном случае  $\mathbf{T}_2^{-1}$  - матрица преобразования подобия, примененного уже к матрице  $\mathbf{A}_1^c = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_1$ , содержащей одну замкнутую пару корней ( $\Lambda_2 = \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{A}_k^c \mathbf{T}_2$ ), матрицы  $\Lambda_{2 \times 2}$  и  $\Lambda_{2 \times 2}^c$  - диагональные матрицы, содержащие вторую передвигаемую и вторую желаемую пару собственных чисел.

Таким образом, проведя несколько итераций, число которых равно количеству пар собственных чисел исследуемой системы мы получим матрицы обратных связей, каждая из которых «передвигает» одну из пар корней в желаемое положение. При размерности исследуемой системы  $n=2k$  итоговую матрицу замкнутой системы  $\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}$ , можно представить как

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D} = \mathbf{A}_{c(k-1)} - \mathbf{B}\mathbf{D}_k = \mathbf{A}_{c(k-2)} - \mathbf{B}\mathbf{D}_{k-1} - \mathbf{B}\mathbf{D}_k = \\ &= \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_1 - \mathbf{B}\mathbf{D}_2 - \dots - \mathbf{B}\mathbf{D}_k = \mathbf{A} - \mathbf{B}(\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \dots + \mathbf{D}_k) \end{aligned};$$

откуда можно сделать вывод, что результирующая матрица обратной связи равна сумме всех промежуточных матриц обратных связей  $\mathbf{D}_i$ , найденных на каждой итерации по формулам, аналогичным (1.28)

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^k \mathbf{D}_i.$$

В случае если размерность вектора состояния определяется нечетным числом, то в последней итерации алгоритма последовательного замыкания находится матрица обратной связи, «передвигающая» последний, непарный корень системы управления:

$$\mathbf{D}_k = \left( \mathbf{T}_{k_k}^{-1} \mathbf{B} \right)^{-1} \left( \lambda_k - \lambda_k^c \right) \cdot \mathbf{T}_{k_k}^{-1},$$

где  $\lambda_k$  и  $\lambda_k^c$  - последний непарный корень незамкнутой системы и последний непарный корень эталонного полинома соответственно,  $\mathbf{T}_{k_k}^{-1}$  -  $k$ -я строка матрицы  $\mathbf{T}_k^{-1}$ , где  $\mathbf{T}_k$  - матрица собственных векторов.



## **1.5 Алгоритм последовательного замыкания. Построение адаптивного наблюдателя.**

Теперь рассмотрим задачу построения матрицы весовых коэффициентов. Положим, что нам необходимо решить задачу модального синтеза для построения адаптивного наблюдателя. Рассмотрим уравнение в невязках

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{WC})\tilde{\mathbf{x}},$$

где  $\tilde{\mathbf{x}}$  - вектор невязок,  $\mathbf{A}$  - матрица системы,  $\mathbf{C}$  - матрица измерений. Матрица системы имеет следующий набор собственных чисел  $\text{eig}(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Необходимо найти значение матрицы весовых коэффициентов  $\mathbf{W}$ , которая бы обеспечивала матрице  $\mathbf{A} - \mathbf{WC}$  заданное наперед положение корней  $\{\lambda_1^c, \lambda_2^c, \dots, \lambda_n^c\}$ .

Сначала найдем матрицу  $\mathbf{W}_1$ , которая «переносит» первую пару собственных чисел матрицы системы  $\lambda_1, \lambda_2$  в желаемое положение  $(\lambda_1^c, \lambda_2^c)$ . Пусть  $\mathbf{A}_1^c = \mathbf{A} - \mathbf{W}_1\mathbf{C}$  - матрица частично – замкнутой системы с одной «передвинутой» парой собственных чисел ( $\text{eig}(\mathbf{A}_1^c) = \text{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{W}_1\mathbf{C}) = \{\lambda_1^c, \lambda_2^c, \lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_n\}$ ). Тогда матрицу  $\mathbf{A}_{c1}$  можно расписать следующим образом:

$$\mathbf{A}_1^c = \mathbf{T}_1^c \Lambda_1^c (\mathbf{T}_1^c)^{-1},$$

$$\text{где } \Lambda_1^c = \begin{bmatrix} \lambda_1^c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} - \text{диагональная матрица собственных чисел,}$$

$\mathbf{T}_{c1} = [t_{c1} \ t_{c2} \ t_{c3} \ \dots \ t_{cn}]$  - матрица собственных векторов матрицы  $\mathbf{A}_{c1}$ .

Аналогичным образом представим матрицу системы:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}_1 \Lambda_1 \mathbf{T}_1^{-1},$$

где  $\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$  - матрица собственных чисел,  $\mathbf{T}_1 = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_n]$  -

матрица собственных векторов матрицы системы  $\mathbf{A}$ .

Определим матрицу собственных векторов  $\mathbf{T}_{c1}$  частично-замкнутой системы с одной «передвинутой» парой собственных чисел как

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1^c &= [t_1^c \ t_2^c \ t_3^c \ \dots \ t_n^c] = \mathbf{T}_1 \mathbf{X}_1 = \\ &= [t_1 \ t_2 \ t_3 \ \dots \ t_n] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times (n-2)} \\ \mathbf{0}_{(n-2) \times 2} & \mathbf{I}_{(n-2) \times (n-2)} \end{bmatrix} = [t_1^c \ t_2^c \ t_3^c \ \dots \ t_n^c], \end{aligned}$$

где  $\mathbf{X}_{2 \times 2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  - произвольная невырожденная матрица.

Тогда выражение, определяющее матрицу  $\mathbf{A}_{c1}$  можно расписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1^c &= \mathbf{T}_1^c \Lambda_1^c (\mathbf{T}_1^c)^{-1} = \mathbf{T}_1 \mathbf{X}_1 \Lambda_1^c \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{T}_1^{-1} = \mathbf{T}_1 \Lambda_1 \mathbf{T}_1^{-1} - \mathbf{W}_1 \mathbf{C} \text{ или} \\ &\mathbf{T}_1 \mathbf{X}_1 \Lambda_{c1} \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{T}_1^{-1} = \mathbf{T}_1 \Lambda_1 \mathbf{T}_1^{-1} - \mathbf{W}_1 \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Выразим матрицу весовых коэффициентов.

В выражении (1.29) умножим справа правую и левую часть на  $\mathbf{T}_1$ :

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{X}_1 \Lambda_1^c \mathbf{X}_1^{-1} = \mathbf{T}_1 \Lambda_1 - \mathbf{W}_1 \mathbf{C} \mathbf{T}_1.$$

Перегруппируем слагаемые так, чтобы слева осталось выражение с искомой матрицей весовых коэффициентов  $\mathbf{W}_1$ , а справа все остальное:

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{C} \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1 (\Lambda_1 - \mathbf{X}_1 \Lambda_1^c \mathbf{X}_1^{-1}). \quad (1.30)$$

Выразим матрицу  $\mathbf{T}_1$  как

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1,2} & \mathbf{T}_{1_{(n-2) \times (n-2)}} \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{T}_{1,2} = [t_1 \ t_2]$ ,  $\mathbf{T}_{1,2} \in \mathbb{R}^{n \times 2}$  - 2 собственных вектора матрицы  $\mathbf{A}$ , соответствующие первой передвигаемой паре собственных чисел,  $\mathbf{T}_{1_{n \times (n-2)}} = [t_3 \ t_4 \ t_5 \ \dots \ t_n]$ ,  $\mathbf{T}_{1_{n \times (n-2)}} \in \mathbb{R}^{n \times (n-2)}$  - матрица, содержащая все остальные собственные вектора незамкнутой системы, которые соответствуют

остальным, не передвигаемым за данную итерацию собственным числом.

Матрицы  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_{c1}$  распишем следующим образом:

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \Lambda_{1_{2 \times 2}} & 0_{2 \times (n-2)} \\ 0_{(n-2) \times 2} & \Lambda_{1_{(n-2) \times (n-2)}} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{c1} = \begin{bmatrix} \Lambda_{c1_{2 \times 2}} & 0_{2 \times (n-2)} \\ 0_{(n-2) \times 2} & \Lambda_{c1_{(n-2) \times (n-2)}} \end{bmatrix};$$

$$\text{где } \Lambda_{1_{2 \times 2}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c = \begin{bmatrix} \lambda_1^c & 0 \\ 0 & \lambda_2^c \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{1_{ocm}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\Lambda_{1_{2 \times 2}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

$$\Lambda_{1_{(n-2) \times (n-2)}} \in \mathbb{R}^{(n-2) \times (n-2)}).$$

Тогда правую часть выражения (1.30) можно представить как:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 (\Lambda_1 - \mathbf{X}_1 \Lambda_1^c \mathbf{X}_1^{-1}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1_{1,2}} & \mathbf{T}_{1_{n \times (n-2)}} \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} \Lambda_{1_{2 \times 2}} & 0_{2 \times (n-2)} \\ 0_{(n-2) \times 2} & \Lambda_{1_{(n-2) \times (n-2)}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{2 \times 2} & 0_{2 \times (n-2)} \\ 0_{(n-2) \times 2} & \mathbf{I}_{(n-2) \times (n-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{c1_{2 \times 2}} & 0_{2 \times (n-2)} \\ 0_{(n-2) \times 2} & \Lambda_{c1_{(n-2) \times (n-2)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1} & 0_{2 \times (n-2)} \\ 0_{(n-2) \times 2} & \mathbf{I}_{(n-2) \times (n-2)} \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1_{1,2}} & \mathbf{T}_{1_{n \times (n-2)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1} & 0_{2 \times (n-2)} \\ 0_{(n-2) \times 2} & \Lambda_{1_{(n-2) \times (n-2)}} - \mathbf{I}_{(n-2) \times (n-2)} \Lambda_{1_{(n-2) \times (n-2)}} \mathbf{I}_{(n-2) \times (n-2)} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1_{1,2}} & \mathbf{T}_{1_{n \times (n-2)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1} & 0_{2 \times (n-2)} \\ 0_{(n-2) \times 2} & 0_{(n-2) \times (n-2)} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1_{1,2}} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) & 0_{(n-2) \times n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Левую часть выражения () можно представить как:

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{C} \mathbf{T}_1 = \mathbf{W}_1 \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1_{1,2}} & \mathbf{T}_{1_{n \times (n-2)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \mathbf{C} \mathbf{T}_{1_{1,2}} & \mathbf{W}_1 \mathbf{C} \mathbf{T}_{1_{n \times (n-2)}} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \mathbf{C} \mathbf{T}_{1_{1,2}} & \mathbf{W}_1 \mathbf{C} \mathbf{T}_{1_{n \times (n-2)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1_{1,2}} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}) & 0_{(n-2) \times n} \end{bmatrix}.$$

Выделим в полученном матричном равенстве первые 2 столбца, в результате чего получим следующее выражение:

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{C} \mathbf{T}_{1_{1,2}} = \mathbf{T}_{1_{1,2}} (\Lambda_{1_{2 \times 2}} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1_{2 \times 2}}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1}). \quad (1.31)$$

Для матрицы  $\mathbf{C} \mathbf{T}_{1_{1,2}}$  найдем ее псевдообратную матрицу Мура-Пенроуза, определяемую следующим выражением:

$$(\mathbf{C} \mathbf{T}_{1_{1,2}})^{-1} = \left( (\mathbf{C} \mathbf{T}_{1_{1,2}})^T (\mathbf{C} \mathbf{T}_{1_{1,2}}) \right)^{-1} (\mathbf{C} \mathbf{T}_{1_{1,2}})^T.$$

Умножая справа обе части выражения (1.31) на  $(\mathbf{CT}_{1,2})^{-1}$  (ранг матрицы  $\mathbf{CT}_{1,2}$  обязан быть не менее 2), получаем формулу, для вычисления матрицы весовых коэффициентов  $\mathbf{W}_1$ , замыкающей первую пару собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2$ :

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{T}_{1,2} \left( \Lambda_{1,2} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1,2}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1} \right) \cdot (\mathbf{CT}_{1,2})^{-1}.$$

Выражение для матрицы весовых коэффициентов  $\mathbf{W}_2$ , замыкающей 2-ю пару собственных чисел будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{W}_2 = \mathbf{T}_{2,4} \left( \Lambda_{2,2} - \mathbf{X}_{2 \times 2} \Lambda_{1,2}^c \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1} \right) \cdot (\mathbf{CT}_{2,4})^{-1},$$

где  $\mathbf{T}_2$  - это матрица собственных векторов уже новой матрицы системы  $\mathbf{A}_1^c$  с одной замкнутой парой собственных чисел  $\text{eig}(\mathbf{A}_1^c) = \text{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{W}_1 \mathbf{C}) = \{\lambda_1^c, \lambda_2^c, \lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_n\}$ , а  $\Lambda_{2,2}$  и  $\Lambda_{2,2}^c$  - это диагональные матрицы размера  $2 \times 2$  содержащие вторую передвигаемую пару собственных чисел и вторую желаемую пару собственных чисел.

Искомая матрица весовых коэффициентов, передвигающая все корни адаптивного наблюдателя в желаемые места, определяется суммой матриц  $\mathbf{W}_i$ , найденных на каждой итерации алгоритма:

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^k \mathbf{W}_i,$$

где  $k = n/2$ , если  $n$  – четное,  $k = (n+1)/2$ , если  $n$  – нечетное. В случае если размерность вектора состояния определяется нечетным числом, то в последней итерации алгоритма последовательного замыкания находится матрица весовых коэффициентов, «передвигающая» последний, непарный корень системы управления:

$$\mathbf{W}_k = t_k \left( \lambda_k - \lambda_k^c \right) \cdot (\mathbf{C}t_k)^{-1},$$

где  $\lambda_k$  и  $\lambda_k^c$  - последний непарный корень незамкнутой системы и последний непарный корень эталонного полинома соответственно,  $t_k$  - собственный вектор, соответствующий собственному числу  $\lambda_k$ .

## 1.6 Алгоритм последовательного замыкания. Некоторые замечания.

Необходимо внести ряд замечаний к алгоритму модального синтеза, описываемому в данной главе.

Первое замечание касается того, что преобразование подобия, приводящее матрицу системы к канонической форме, в общем случае комплекснозначное. То есть, матрица системы  $A$  с действительными компонентами преобразуется к диагональной или жордановой форме, на главной диагонали которой расположены как действительные собственные числа, так и пары комплексных чисел. Собственные вектора соответствующие паре комплексно-сопряженных собственных чисел, являющиеся столбцами матрицы преобразования подобия  $T_1$  тоже являются комплексно-сопряженными. При операциях с матрицами над полем комплексных чисел может накапливаться комплекснозначная ошибка, и в результате, получившаяся матрица обратной, рассчитанная по описываемому численному алгоритму может иметь мнимые компоненты коэффициентов, при отбрасывании которых точность расположения корней замкнутой системы может ухудшиться.

Поэтому предлагается перейти от диагональной записи канонической формы матрицы системы к блочно-диагональной записи, главная диагональ которой содержит блоки размером  $2 \times 2$ , в каждом из которых в действительной форме расположены пары комплексно-сопряженных чисел:

$$\begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \lambda_k & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \lambda_{k+1} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & a_j & b_j & \cdots \\ \cdots & -b_j & a_j & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}; \quad (1.32)$$

где  $\lambda_k = a_j + ib_j$ ,  $\lambda_{k+1} = a_j - ib_j$ . Аналог жордановой клетки над полем действительных чисел, содержащий кратную комплексно-сопряженную пару собственных чисел будет иметь следующую запись:

$$\begin{bmatrix} a_l & b_l & 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ -b_l & a_l & 0 & 1 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_l & b_l & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_l & a_l & 0 & 1 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & a_l & b_l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & -b_l & a_l \end{bmatrix}.$$

Известно, что паре комплексно-сопряженных собственных чисел матрицы соответствует пара комплексно-сопряженных собственных векторов. Для получения преобразования подобия, приводящего матрицу системы к блочно-диагональной форме (1.32), необходимо заменить пары комплекснозначных собственных векторов на их действительные аналоги следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \vec{k}_i + \vec{l}_i i & \vec{k}_i - \vec{l}_i i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \vec{k}_i & \vec{l}_i \end{bmatrix}.$$

Таким образом, мы заменили операции над полем комплексных чисел операциями над полем действительных чисел, тем самым сведя к нулю вероятность возникновения комплекснозначной вычислительной ошибки.

Следующее замечание по предложенному в данной главе алгоритму касается использования алгоритма последовательного замыкания для синтеза single-input систем. Как уже было сказано ранее, описываемые матричные процедуры попарного переноса корней системы управления в желаемые места на комплексной плоскости не будут работать, если количество входов системы (т.е. каналов управления) равно единице. Для таких случаев данный численный алгоритм можно модифицировать, «замыкая» за каждую итерацию не пару корней, а один корень системы. Тогда выражение для поиска матрицы обратной связи на каждой итерации примет следующий вид:

$$\mathbf{D}_i = \left( t_i^{-1} \mathbf{B} \right)^{-1} \left( \lambda_i - \lambda_i^c \right) t_i^{-1}, \quad (1.33)$$

где  $t_i^{-1}$  - строка матрицы преобразования подобия  $\mathbf{T}_i^{-1}$  ( $\mathbf{A}_{i-1} = \mathbf{T}_i \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{T}_i^{-1}$ ), соответствующая передвигаемому собственному числу  $\lambda_i$ , находящемуся на

диагонали матрицы собственных чисел  $\Lambda_i$ ,  $\lambda_i^c$  - желаемое собственное число замкнутой системы. Для задачи модального синтеза адаптивного наблюдателя, имеющего один измерительный канал (single-output систем), формула, для поиска матрицы весовых коэффициентов методом последовательного замыкания на  $i$ -ой итерации будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{W}_i = t_i (\lambda_i - \lambda_i^*) \cdot (\mathbf{C} t_i)^{-1},$$

где  $\lambda_i$  и  $t_i$  -  $i$ -ое собственное число и соответствующий ему собственный вектор матрицы системы,  $\lambda_i^*$  -  $i$ -й корень эталонного полинома.

Таки образом, можно сделать вывод, что для single-input single-output систем концепция последовательного замыкания допускает матричные операции над полем комплексных чисел, при этом данная концепция не подразумевает возведения матрицы системы  $\mathbf{A}$  в степень, что делает ее намного точнее известной формулы Аккермана, позволяющей строить обратную связь для систем с одним каналом управления. В следующем параграфе будет проведено сравнение точности размещения корней данной модификации метода последовательного замыкания и формулой Аккермана, реализованной в программной среде MATLAB в виде встроенной функции `acker()`.

### **1.7 Сравнение точности размещения корней алгоритмом последовательного замыкания и функцией `acker()`.**

Сравним точность работы представляемого в диссертации метода последовательного замыкания и функции `acker()` основанной на формуле Аккермана.

Проведем следующий численный эксперимент. Рассмотрим произвольную линейную систему управления 13-го порядка (размерность

вектора состояния равна 13), где

$$\mathbf{A}_{13} = \begin{bmatrix} 0.4513 & 0.4235 & 0.0988 & 0.2628 & 0.8129 & 0.2156 & 0.3270 & 0.2858 & 0.0079 & 0.3449 & 0.1169 & 0.8931 & 0.6727 \\ 0.2500 & 0.2736 & 0.8903 & 0.8240 & 0.4121 & 0.6337 & 0.8400 & 0.6568 & 0.9191 & 0.7042 & 0.3408 & 0.0607 & 0.6187 \\ 0.9554 & 0.4446 & 0.0334 & 0.3290 & 0.3842 & 0.7997 & 0.4925 & 0.2319 & 0.4107 & 0.1609 & 0.0367 & 0.1758 & 0.0068 \\ 0.1427 & 0.6275 & 0.8390 & 0.9413 & 0.5231 & 0.2085 & 0.0519 & 0.6220 & 0.7324 & 0.0015 & 0.5384 & 0.4163 & 0.7402 \\ 0.5126 & 0.5346 & 0.5073 & 0.2441 & 0.8921 & 0.8963 & 0.7780 & 0.0751 & 0.1511 & 0.5620 & 0.7372 & 0.7398 & 0.9917 \\ 0.9719 & 0.3854 & 0.1137 & 0.9571 & 0.4059 & 0.7457 & 0.4267 & 0.9668 & 0.8152 & 0.5465 & 0.1812 & 0.8930 & 0.1282 \\ 0.6483 & 0.8735 & 0.4904 & 0.5108 & 0.6044 & 0.5364 & 0.2800 & 0.6100 & 0.9096 & 0.5508 & 0.4262 & 0.0259 & 0.3606 \\ 0.6147 & 0.3003 & 0.5994 & 0.5646 & 0.0948 & 0.9700 & 0.3335 & 0.3837 & 0.7779 & 0.6945 & 0.0982 & 0.1376 & 0.1911 \\ 0.4697 & 0.4000 & 0.0902 & 0.9937 & 0.3360 & 0.5649 & 0.3669 & 0.0306 & 0.7571 & 0.9275 & 0.3032 & 0.4241 & 0.7144 \\ 0.5778 & 0.5177 & 0.9782 & 0.7710 & 0.1448 & 0.2177 & 0.7948 & 0.8576 & 0.4052 & 0.9442 & 0.7801 & 0.7646 & 0.1779 \\ 0.9113 & 0.0618 & 0.6530 & 0.3138 & 0.2449 & 0.8578 & 0.0387 & 0.6035 & 0.7019 & 0.9033 & 0.5370 & 0.5244 & 0.9868 \\ 0.3762 & 0.2314 & 0.4611 & 0.0579 & 0.3790 & 0.8620 & 0.7267 & 0.8478 & 0.5655 & 0.6041 & 0.7691 & 0.7545 & 0.0170 \\ 0.2288 & 0.1185 & 0.8638 & 0.0441 & 0.2703 & 0.3133 & 0.8727 & 0.5046 & 0.5847 & 0.9262 & 0.6389 & 0.1698 & 0.0398 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{13} = \begin{bmatrix} 0.8043 \\ 0.8598 \\ 0.5663 \\ 0.7541 \\ 0.5195 \\ 0.5859 \\ 0.1907 \\ 0.5034 \\ 0.0509 \\ 0.0561 \\ 0.3352 \\ 0.6309 \\ 0.8920 \end{bmatrix}.$$

Зададим желаемое расположение корней замкнутой системы:



$$p_{13} = \begin{bmatrix} -0.1205 + 0.9927i \\ -0.1205 - 0.9927i \\ -0.3546 + 0.9350i \\ -0.3546 - 0.9350i \\ -0.5681 + 0.8230i \\ -0.5681 - 0.8230i \\ -0.7485 + 0.6631i \\ -0.7485 - 0.6631i \\ -0.8855 + 0.4647i \\ -0.8855 - 0.4647i \\ -0.9709 + 0.2393i \\ -0.9709 - 0.2393i \\ -1.0000 + 0.0000i \end{bmatrix}.$$

Решим задачу модального управления. Найдем матрицу обратной связи для описываемой системы методом последовательного замыкания, и функцией `acker()`, реализованной в среде MATLAB. Используя в первом случае описываемый в диссертации алгоритм, а во втором случае функцию `acker(A13, B13, p13)`, получим следующие значения коэффициентов регуляторов, замыкающих систему управления:

$$\mathbf{D}_{13\_mpz}^T = \begin{bmatrix} -3.0074e+02 \\ 6.2871e+02 \\ 6.9350e+02 \\ -3.4177e+02 \\ 9.1584e+02 \\ -7.0301e+02 \\ 8.4388e+02 \\ -1.2244e+03 \\ -1.9798e+02 \\ 1.0719e+02 \\ 2.2511e+02 \\ -1.7487e+03 \\ 1.1268e+03 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{13\_acker}^T = \begin{bmatrix} -3.0075e+02 \\ 6.2873e+02 \\ 6.9352e+02 \\ -3.4178e+02 \\ 9.1586e+02 \\ -7.0304e+02 \\ 8.4390e+02 \\ -1.2244e+03 \\ -1.9799e+02 \\ 1.0719e+02 \\ 2.2511e+02 \\ -1.7488e+03 \\ 1.1268e+03 \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{D}_{13\_mpz}$  - матрица обратной связи, полученная методом последовательного замыкания,  $\mathbf{D}_{13\_acker}^T$  - матрица обратной связи, полученная

при помощи функции `acker()`. Как можно видеть, коэффициенты регуляторов, полученных для одной системы управления разными способами, отличаются только в 5-ой значащей цифре.

В результате расположение корней замкнутой системы, полученной алгоритмом последовательного замыкания и функцией `acker()` получается следующим:

$$p_{c\_mpz} = eig(\mathbf{A}_{13} - \mathbf{B}_{13}\mathbf{D}_{13\_mpz}) = \begin{bmatrix} -0.1205 + 0.9927i \\ -0.1205 - 0.9927i \\ -0.3546 + 0.9350i \\ -0.3546 - 0.9350i \\ -0.5681 + 0.8230i \\ -0.5681 - 0.8230i \\ -0.7485 + 0.6631i \\ -0.7485 - 0.6631i \\ -0.8855 + 0.4647i \\ -0.8855 - 0.4647i \\ -0.9709 + 0.2393i \\ -0.9709 - 0.2393i \\ -1.0000 + 0.0000i \end{bmatrix},$$

$$p_{c\_acker} = eig(\mathbf{A}_{13} - \mathbf{B}_{13}\mathbf{D}_{13\_acker}) = \begin{bmatrix} -0.1205 + 0.9927i \\ -0.1205 - 0.9927i \\ -0.3529 + 0.9352i \\ -0.3529 - 0.9352i \\ -0.5807 + 0.8161i \\ -0.5807 - 0.8161i \\ -0.7269 + 0.6863i \\ -0.7269 - 0.6863i \\ -0.9029 + 0.4365i \\ -0.9029 - 0.4365i \\ -0.9492 + 0.2496i \\ -0.9492 - 0.2496i \\ -1.0303 + 0.0000i \end{bmatrix}.$$

Для наглядного представления качества работы метода последовательного замыкания и функции `asker()` представим расположение корней замкнутой системы на комплексной плоскости (рис. 1.6)

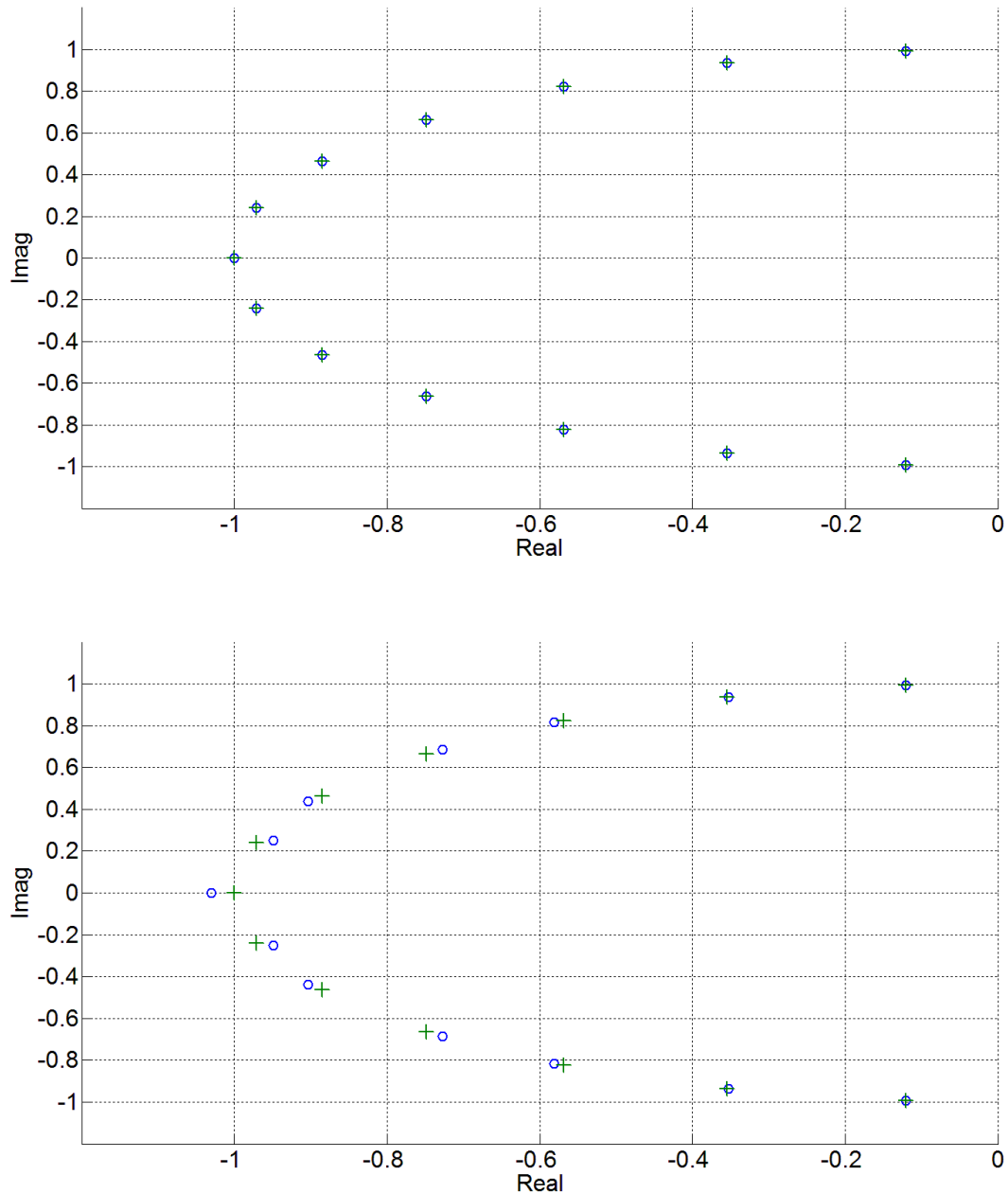


Рис. 1.6 Расположение собственных чисел замкнутой системы. Первый случай – спектр замкнутой системы полученной методом последовательного замыкания (верхний рисунок). Второй случай – спектр замкнутой системы полученной при помощи функции `asker()` (нижний рисунок). Зеленым цветом обозначено эталонное расположение корней, синим цветом – расположение корней замкнутой системы.

Как можно видеть из рисунка 1.6, спектр замкнутой системы, полученной методом последовательного замыкания со значительно большей точностью соответствует расположению корней эталонного полинома, которое было задано изначально. При этом спектр замкнутой системы, полученный встроенными средствами MATLAB, хоть и отличается от эталонного расположения корней, но при этом синтезируемая замкнутая система по-прежнему остается устойчивой.

Усложним задачу модельного синтеза системы управления и увеличим порядок системы управления от 13 до 20. Пусть матрица системы  $A_{20}$ , матрица управления  $B_{20}$ , и корни эталонного полинома  $p_{20}$  имеют соответственно следующие значения:

$A_{20} =$

|        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.7575 | 0.3795 | 0.6313 | 0.2196 | 0.0800 | 0.0657 | 0.3783 | 0.6167 | 0.0499 | 0.8083 | 0.5019 | 0.0822 | 0.7742 | 0.7877 | 0.5705 | 0.2414 | 0.7731 | 0.1193 | 0.4976 | 0.7115 |
| 0.2751 | 0.0932 | 0.5860 | 0.5182 | 0.0794 | 0.2300 | 0.9937 | 0.3087 | 0.1013 | 0.4476 | 0.2552 | 0.0698 | 0.1478 | 0.3477 | 0.2653 | 0.0258 | 0.9320 | 0.9785 | 0.4278 | 0.2140 |
| 0.9540 | 0.2591 | 0.2274 | 0.3530 | 0.0724 | 0.1170 | 0.3409 | 0.0851 | 0.0719 | 0.3465 | 0.5099 | 0.1209 | 0.4855 | 0.9721 | 0.9285 | 0.8465 | 0.1769 | 0.5182 | 0.5678 | 0.2552 |
| 0.4111 | 0.3358 | 0.7846 | 0.8595 | 0.9003 | 0.9898 | 0.8995 | 0.8768 | 0.9045 | 0.7571 | 0.0786 | 0.6778 | 0.0718 | 0.8360 | 0.0642 | 0.0149 | 0.0204 | 0.5078 | 0.6130 | 0.9586 |
| 0.2166 | 0.3751 | 0.2876 | 0.2600 | 0.9693 | 0.0705 | 0.2375 | 0.5907 | 0.3118 | 0.3602 | 0.0559 | 0.2189 | 0.7874 | 0.7118 | 0.6263 | 0.5504 | 0.8336 | 0.3250 | 0.8070 | 0.1819 |
| 0.6291 | 0.1463 | 0.9244 | 0.8437 | 0.3913 | 0.0600 | 0.2200 | 0.3031 | 0.5918 | 0.5566 | 0.6350 | 0.2373 | 0.3937 | 0.2149 | 0.9483 | 0.1197 | 0.4732 | 0.1973 | 0.8808 | 0.7985 |
| 0.0149 | 0.3168 | 0.2985 | 0.5828 | 0.3136 | 0.6616 | 0.9911 | 0.1681 | 0.3776 | 0.8887 | 0.6169 | 0.0086 | 0.2362 | 0.0154 | 0.5164 | 0.5879 | 0.1087 | 0.8629 | 0.1600 | 0.0400 |
| 0.0433 | 0.2812 | 0.5363 | 0.7194 | 0.5533 | 0.3441 | 0.9511 | 0.3399 | 0.9516 | 0.8402 | 0.0815 | 0.7271 | 0.0806 | 0.2100 | 0.9567 | 0.6222 | 0.0891 | 0.2679 | 0.0892 | 0.3092 |
| 0.1803 | 0.8201 | 0.3337 | 0.3435 | 0.7921 | 0.1285 | 0.6382 | 0.0674 | 0.7424 | 0.2440 | 0.6095 | 0.5610 | 0.0790 | 0.5365 | 0.2720 | 0.7470 | 0.1151 | 0.5387 | 0.3131 | 0.9671 |
| 0.2005 | 0.3421 | 0.2373 | 0.0093 | 0.7983 | 0.6371 | 0.5041 | 0.6535 | 0.8871 | 0.4356 | 0.5447 | 0.5520 | 0.9274 | 0.1085 | 0.5270 | 0.3099 | 0.1680 | 0.5515 | 0.6073 | 0.2670 |
| 0.7194 | 0.8720 | 0.5452 | 0.1925 | 0.8633 | 0.7465 | 0.3581 | 0.2443 | 0.5989 | 0.8286 | 0.8559 | 0.7422 | 0.2047 | 0.8538 | 0.9112 | 0.9165 | 0.9725 | 0.9633 | 0.3787 | 0.1219 |
| 0.4429 | 0.2680 | 0.1077 | 0.5074 | 0.7980 | 0.8053 | 0.7684 | 0.7579 | 0.6896 | 0.1527 | 0.6427 | 0.8246 | 0.9566 | 0.9109 | 0.2147 | 0.7823 | 0.2860 | 0.2696 | 0.9255 | 0.6074 |
| 0.8455 | 0.7754 | 0.1372 | 0.0242 | 0.0064 | 0.2690 | 0.7844 | 0.2990 | 0.3911 | 0.7580 | 0.2716 | 0.3934 | 0.3397 | 0.3337 | 0.8268 | 0.1011 | 0.5990 | 0.2657 | 0.0570 | 0.6453 |
| 0.3898 | 0.6092 | 0.0944 | 0.5500 | 0.9199 | 0.4340 | 0.0289 | 0.4188 | 0.2233 | 0.8765 | 0.1068 | 0.1359 | 0.9600 | 0.4691 | 0.1383 | 0.2811 | 0.8522 | 0.3100 | 0.9940 | 0.8744 |
| 0.8376 | 0.0180 | 0.3109 | 0.2762 | 0.0180 | 0.4018 | 0.0524 | 0.0558 | 0.1313 | 0.5021 | 0.0605 | 0.1957 | 0.3432 | 0.0029 | 0.4377 | 0.9075 | 0.2448 | 0.5573 | 0.6670 | 0.8973 |
| 0.7484 | 0.7015 | 0.8126 | 0.6962 | 0.0294 | 0.6081 | 0.3234 | 0.0309 | 0.1725 | 0.5703 | 0.6219 | 0.7203 | 0.0634 | 0.3109 | 0.8753 | 0.1111 | 0.7272 | 0.3782 | 0.6171 | 0.0532 |
| 0.5839 | 0.0158 | 0.5136 | 0.8813 | 0.7115 | 0.7701 | 0.7997 | 0.1866 | 0.9386 | 0.8515 | 0.6991 | 0.6696 | 0.6125 | 0.4852 | 0.7043 | 0.7898 | 0.4008 | 0.2458 | 0.1479 | 0.7595 |
| 0.1606 | 0.6839 | 0.8665 | 0.0247 | 0.5384 | 0.9411 | 0.6302 | 0.2709 | 0.0345 | 0.9846 | 0.2749 | 0.0599 | 0.5556 | 0.2622 | 0.4970 | 0.1023 | 0.3106 | 0.6762 | 0.0290 | 0.8589 |
| 0.5288 | 0.8779 | 0.9805 | 0.3412 | 0.5246 | 0.1315 | 0.9828 | 0.0662 | 0.8796 | 0.7902 | 0.4220 | 0.3843 | 0.9064 | 0.6831 | 0.6096 | 0.7679 | 0.6538 | 0.2613 | 0.5725 | 0.4817 |
| 0.4627 | 0.4318 | 0.3267 | 0.4214 | 0.5022 | 0.2557 | 0.1583 | 0.3335 | 0.5223 | 0.3507 | 0.3658 | 0.4912 | 0.2012 | 0.9112 | 0.0778 | 0.6621 | 0.3918 | 0.9615 | 0.0300 | 0.0751 |

$$\mathbf{B}_{20} = \begin{bmatrix} 9.0721\text{e-}02 \\ 2.0022\text{e-}01 \\ 7.7829\text{e-}01 \\ 4.0728\text{e-}01 \\ 8.2704\text{e-}01 \\ 1.4797\text{e-}01 \\ 7.3291\text{e-}01 \\ 1.4989\text{e-}01 \\ 8.3843\text{e-}01 \\ 5.4537\text{e-}01 \\ 9.6117\text{e-}01 \\ 7.5495\text{e-}02 \\ 9.3383\text{e-}01 \\ 3.5942\text{e-}01 \\ 6.6930\text{e-}02 \\ 9.6593\text{e-}01 \\ 6.4945\text{e-}01 \\ 4.2062\text{e-}01 \\ 5.9644\text{e-}01 \\ 3.4709\text{e-}01 \end{bmatrix}, \quad p_{20} = \begin{bmatrix} -0.0785 + 0.9969i \\ -0.0785 - 0.9969i \\ -0.2334 + 0.9724i \\ -0.2334 - 0.9724i \\ -0.3827 + 0.9239i \\ -0.3827 - 0.9239i \\ -0.5225 + 0.8526i \\ -0.5225 - 0.8526i \\ -0.6494 + 0.7604i \\ -0.6494 - 0.7604i \\ -0.7604 + 0.6494i \\ -0.7604 - 0.6494i \\ -0.8526 + 0.5225i \\ -0.8526 - 0.5225i \\ -0.9239 + 0.3827i \\ -0.9239 - 0.3827i \\ -0.9724 + 0.2334i \\ -0.9724 - 0.2334i \\ -0.9969 + 0.0785i \\ -0.9969 - 0.0785i \end{bmatrix}.$$

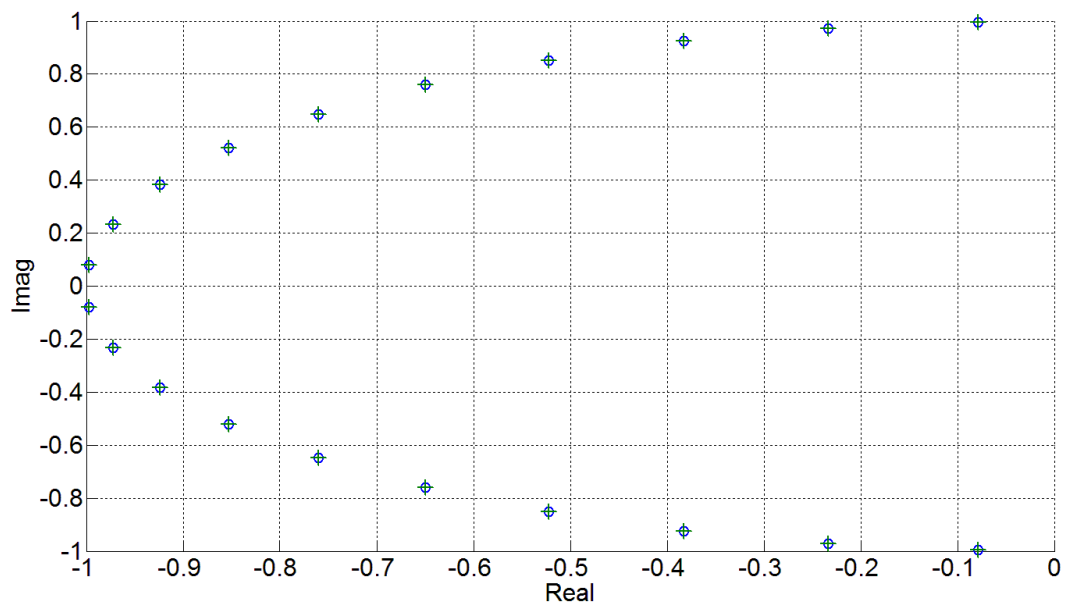
Так же как и в предыдущем численном примере найдем матрицу обратной связи для заданной системы управления. Сначала при помощи разрабатываемого алгоритма последовательного замыкания, а затем при помощи встроенных средств MATLAB (функции `acker()`). Матрицы регуляторов, полученные первым и вторым способом ( $\mathbf{D}_{20\_mpz}^T$  и  $\mathbf{D}_{20\_acker}^T$  соответственно) имеют следующий вид:

$$\mathbf{D}_{20\_mpz}^T = \begin{bmatrix} 602.6154 \\ 102.5373 \\ 363.1443 \\ -52.8930 \\ -711.9948 \\ -193.3828 \\ 275.0799 \\ 54.9700 \\ -354.8681 \\ 680.9102 \\ -450.7889 \\ -654.6919 \\ 541.3240 \\ 110.3442 \\ 200.7170 \\ -255.8385 \\ -51.0752 \\ 204.2991 \\ 14.6664 \\ 375.1742 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{20\_acker}^T = \begin{bmatrix} -11.9856 \\ -10.2734 \\ -3.4245 \\ 6.8489 \\ 6.8489 \\ -6.8489 \\ -1.7122 \\ -4.2806 \\ 1.7122 \\ -13.6979 \\ -5.9928 \\ 0.8561 \\ -8.5612 \\ 10.2734 \\ -6.8489 \\ 3.4245 \\ 0 \\ -23.9713 \\ 11.9856 \\ -10.2734 \end{bmatrix}.$$

Расположение корней замкнутой системы 20-го порядка, полученной алгоритмом последовательного замыкания и функцией `acker()` получается следующим:

$$p_{c\_mpz} = \begin{bmatrix} -0.0785 + 0.9969i \\ -0.0785 - 0.9969i \\ -0.2334 + 0.9724i \\ -0.2334 - 0.9724i \\ -0.3827 + 0.9239i \\ -0.3827 - 0.9239i \\ -0.5225 + 0.8526i \\ -0.5225 - 0.8526i \\ -0.6495 + 0.7604i \\ -0.6495 - 0.7604i \\ -0.7604 + 0.6494i \\ -0.7604 - 0.6494i \\ -0.8527 + 0.5225i \\ -0.8527 - 0.5225i \\ -0.9239 + 0.3827i \\ -0.9239 - 0.3827i \\ -0.9969 + 0.0785i \\ -0.9969 - 0.0785i \\ -0.9724 + 0.2334i \\ -0.9724 - 0.2334i \end{bmatrix}, \quad p_{c\_acker} = \begin{bmatrix} 31.1527 + 0.0000i \\ -1.5042 + 1.2934i \\ -1.5042 - 1.2934i \\ 1.2402 + 0.9324i \\ 1.2402 - 0.9324i \\ -0.0975 + 1.1259i \\ -0.0975 - 1.1259i \\ 0.6048 + 0.8126i \\ 0.6048 - 0.8126i \\ 0.7336 + 0.4430i \\ 0.7336 - 0.4430i \\ 0.2733 + 0.9161i \\ 0.2733 - 0.9161i \\ -1.2381 + 0.0000i \\ -0.2161 + 0.6014i \\ -0.2161 - 0.6014i \\ 0.2565 + 0.0000i \\ -0.6982 + 0.2212i \\ -0.6982 - 0.2212i \\ -0.6554 + 0.0000i \end{bmatrix}.$$

Представим расположение корней замкнутой системы полученной двумя разными способами на комплексной плоскости (рис. 1.7)



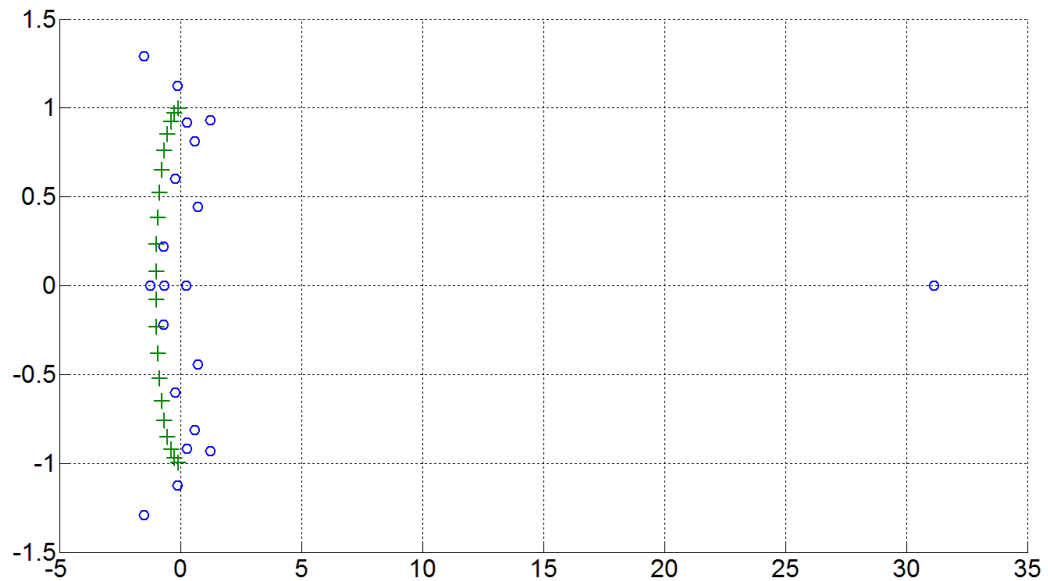


Рис. 1.7 Расположение собственных чисел замкнутой системы. Первый случай – спектр замкнутой системы полученной методом последовательного замыкания (верхний рисунок). Второй случай – спектр замкнутой системы полученной при помощи функции `acker()` (нижний рисунок). Зеленым цветом обозначено эталонное расположение корней, синим цветом – расположение корней замкнутой системы.

По расположению корней замкнутой системы, показанному на рис. 1.7 можно сказать, что спектр системы управления, полученной методом последовательного замыкания по-прежнему соответствует заданному эталонному расположению корней, при этом спектр системы управления, полученный с помощью функции `acker()` значительно отличается от эталонного расположения корней. Так же стоит отметить, что замкнутая система, полученная встроенными средствами MATLAB, получается неустойчивой.

Чтобы выделить и сравнить зависимость точности размещения корней замкнутой системы двумя разными способами от размерности вектора состояния, проведем еще один численный эксперимент. Для начала сформулируем понятие погрешности размещения корней.



Предположим мы решили задачу модального синтеза линейной системы управления и разместили корни замкнутой системы в наперед заданных местах. Обозначим  $i$ -й корень эталонного полинома через  $\lambda_i^* = a_i^* + jb_i^*$ , соответствующий ему  $i$ -й корень замкнутой системы обозначим как  $\lambda_i^c = a_i^c + jb_i^c$ . Чем дальше на комплексной плоскости лежит корень замкнутой системы  $\lambda_i^c$  от соответствующего ему корню эталонного полинома, тем выше погрешность его размещения. Зададим следующим образом погрешность размещения  $i$ -го корня замкнутой системы:

$$\delta_i = \frac{|\lambda_i^c - \lambda_i^*|}{|\lambda_i^*|}.$$

Наглядно погрешность размещения корня представлено на рисунке 1.8

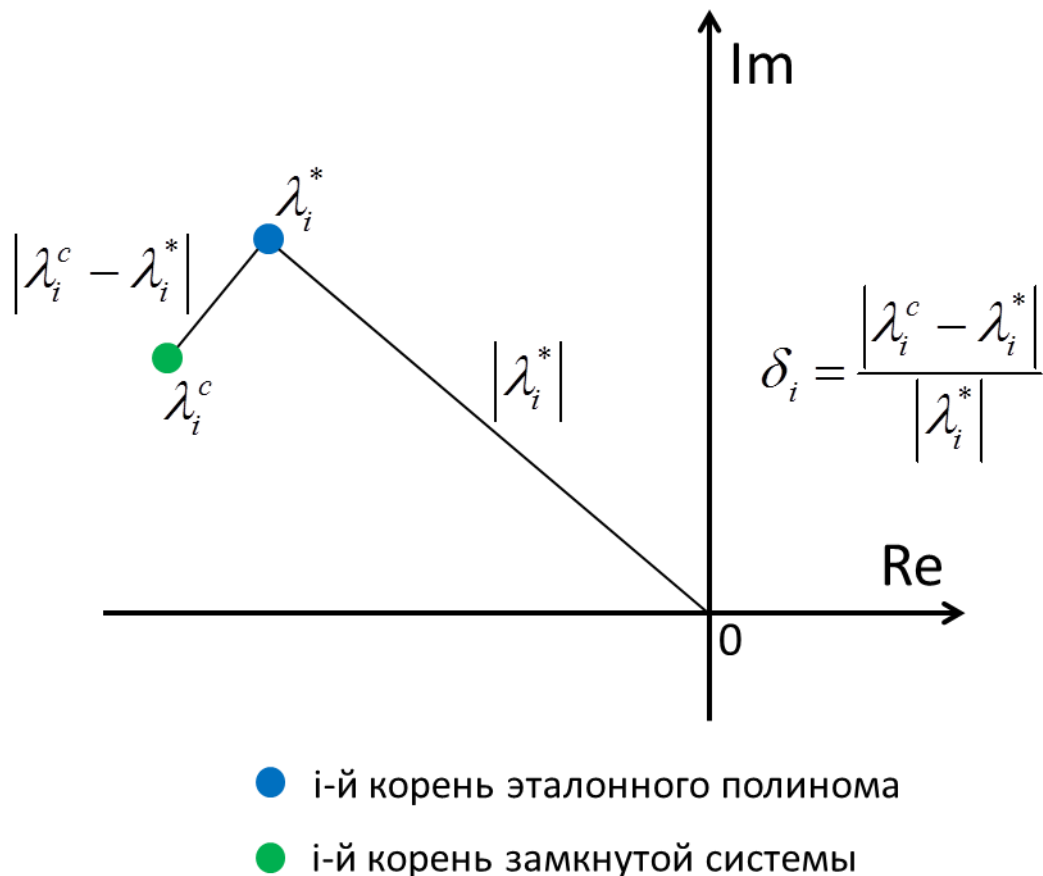


Рис. 1.8 Погрешность размещения  $i$ -го корня.

Погрешность размещения всего набора корней замкнутой системы определим как  $\Delta = \max_i \delta_i$ .

Для составления более объективной оценки зависимости погрешности расстановки собственных чисел для замыкания системы той или иной размерности, проведем для каждого  $n$  ( $n$  – размерность исследуемой системы) 1000 числовых экспериментов, в каждом из которых будем строить модальный регулятор сначала алгоритмом последовательного замыкания, а потом с помощью функции `asker()`. Получившиеся погрешности расстановки корней в каждом из 1000 экспериментов как для первого случая, так и для второго случая будем усреднять. Численный эксперимент проводим для случайно сгенерированных систем с размерностью от  $n=1$  до 15. В качестве эталонного полинома для численного эксперимента возьмем полином Баттерворта  $n$ -го порядка.

Результаты, демонстрирующие зависимость погрешности размещения корней замкнутой системы двумя разными способами от размерности вектора состояния представлены в таблице ниже.

| Размерность вектора состояния, $n$ | Формула Аккермана, погрешность размещения корней | Алгоритм последовательного замыкания, погрешность размещения корней |
|------------------------------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| 1                                  | 5.3957e-17                                       | 8.9373e-17                                                          |
| 2                                  | 1.6315e-13                                       | 1.8959e-13                                                          |
| 3                                  | 5.3072e-13                                       | 1.4459e-12                                                          |
| 4                                  | 4.8238e-11                                       | 5.0917e-11                                                          |
| 5                                  | 5.6851e-11                                       | 6.6290e-11                                                          |
| 6                                  | 1.5685e-10                                       | 6.2794e-10                                                          |
| 7                                  | 1.5038e-08                                       | 8.9459e-09                                                          |
| 8                                  | 1.5818e-07                                       | 1.9337e-06                                                          |
| 9                                  | 1.5237e-06                                       | 1.1131e-06                                                          |
| 10                                 | 7.8756e-06                                       | 2.9873e-06                                                          |

|    |            |            |
|----|------------|------------|
| 11 | 2.2743e-03 | 5.8439e-04 |
| 12 | 1.1455e-02 | 6.8308e-04 |
| 13 | 1.4071e-01 | 1.1785e-03 |
| 14 | 6.8786e-01 | 2.5416e-03 |
| 15 | 2.1366e+00 | 9.2508e-03 |

Для большей наглядности, результаты данного численного эксперимента представим на графике, на котором по вертикали будет отложена погрешность размещения корней в логарифмическом масштабе (рис 1.9)

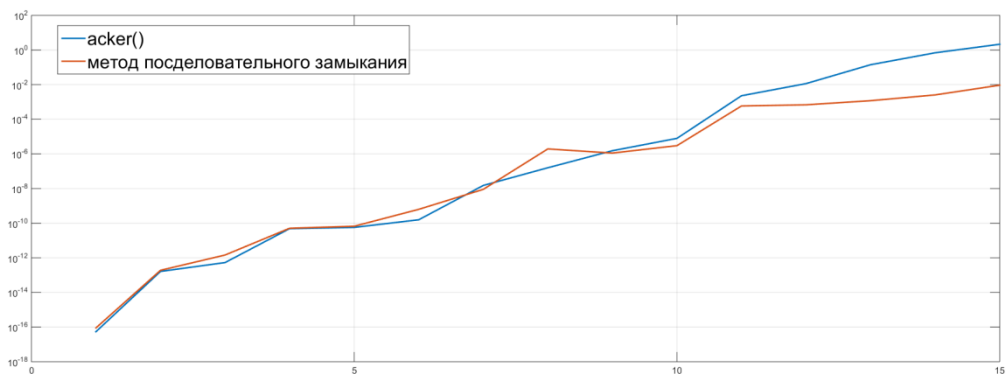


Рис. 1.9 Погрешность размещения корней замкнутой системы с использованием алгоритма последовательного замыкания и функции asker().

По данным из таблицы и графика, можно сделать вывод, что точность размещения собственных чисел как функцией asker() так и методом последовательного замыкания сохраняется примерно на одинаковом уровне для систем с размерностью вектора состояния от 1 до 9. Начиная с  $n=10$  погрешность функции asker() становится сначала на 1, а потом и на 2 порядка больше чем погрешность алгоритма последовательного замыкания.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что алгоритм последовательного замыкания позволяет намного точнее осуществлять модальный синтез линейных динамических систем, по сравнению со своими аналогами, реализованными в программной среде MATLAB.

## **1.8 Выводы по главе 1.**

В главе были представлены общие положения теории построения адаптивных систем управления, общая постановка задачи модального управления, и непосредственно сам алгоритм последовательного замыкания мод многомерных многосвязных систем управления.

Представленный численный алгоритм позволяет как осуществлять модальный синтез регулятора, так и модальный синтеза адаптивного наблюдателя. Основными достоинствами метода последовательного замыкания можно назвать сохранение точности расстановки корней замкнутой системы с ростом размерности вектора состояния, отсутствие принципиальных ограничений на положение и кратность корней эталонного полинома, а так же отсутствие ограничений на вид самой матрицы системы: алгоритм может работать с недиагонализируемыми матрицами объекта управления, в силу того, что диагональная матрица собственных чисел в случае необходимости может быть заменена на жорданову каноническую форму.

Проведенное сравнение роста погрешности расстановки корней замкнутой системы метода последовательного замыкания и функции `acker()`, основанной на формуле Аккермана показывает, что предлагаемый в диссертации алгоритм справляется с задачей синтеза систем управления с большой размерностью намного лучше встроенной функции программной среды MATLAB.

Все результаты, представленные в этой главе, за исключением общих положений теории построения адаптивных систем управления принадлежат лично автору.

## ГЛАВА 2. ЗАДАЧА ВЫВЕДЕНИЯ И УДЕРЖАНИЯ МКС В ПОЛОЖЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ.

Одним из возможных сценариев применения численного алгоритма модального синтеза многомерных многосвязных систем, представляемого в данной работе, является разработка систем управления ориентаций космических аппаратов, в том числе пилотируемых космических станций с использованием инерционных исполнительных органов [33,34,35,36].

В данной главе, для демонстрации работоспособности алгоритма последовательного, рассматривается задача выведения и удержания МКС в положении динамического равновесия. Равновесная ориентация МКС определяется действующей на нее суперпозицией гравитационного, гироскопического и аэродинамического моментов. В роли исполнительных органов в данной задаче выступает система силовых гироскопов, установленных на космической станции. Управление угловым положением станции происходит за счёт управляющего момента, создаваемого силовыми гироскопами. Рассматривается угловое положение МКС по всем трем каналам – крена, рысканья и тангажа. В силу автономности канала тангажа (каналы крена и рысканья гироскопически связаны), синтез закона управления проводится отдельно для канала тангажа, и для каналов крен-рысканье. Стоит отметить, что МКС находится на относительно невысокой орбите, что требует учета изначально неопределенного аэродинамического момента, поэтому вектор состояния, описывающий исследуемый объект управления, должен содержать несколько компонент, характеризующих

влияние аэродинамического момента на ориентацию КА, который идентифицируется в алгоритме управления МКС.

Гироскопическая связь крена и рысканья, делает невозможным построение отдельного закона управления для каждого из каналов управления, что приводит к проблеме синтеза системы управления с более чем одним входным сигналом. Более того, "расширение" вектора состояния, с целью учета переменных, отвечающих за аэродинамику, значительно увеличивает размерность объекта управления и как следствие увеличивает сложность синтеза закона управления данной системой. Поэтому, метод последовательного замыкания будет особенно актуален при решении данной задачи.

## ***2.1 Описание системы координат и вывод линеаризованных уравнений движения.***

В качестве орбитальной системы координат будем использовать систему LVLH (Local Vertical - Local Horizontal). В данной системе началом координат является центр масс МКС, ось OX направлена вдоль вектора орбитальной скорости, ось OZ из центра масс объекта управления в центр земли, ось OY дополняет систему координат до правой тройки (Рис. 2.1). В качестве связанной системы координат будем использовать систему ISS, оси которой совпадают с осями координат системы LVLH в режиме орбитальной ориентации (Рис. 2.2).

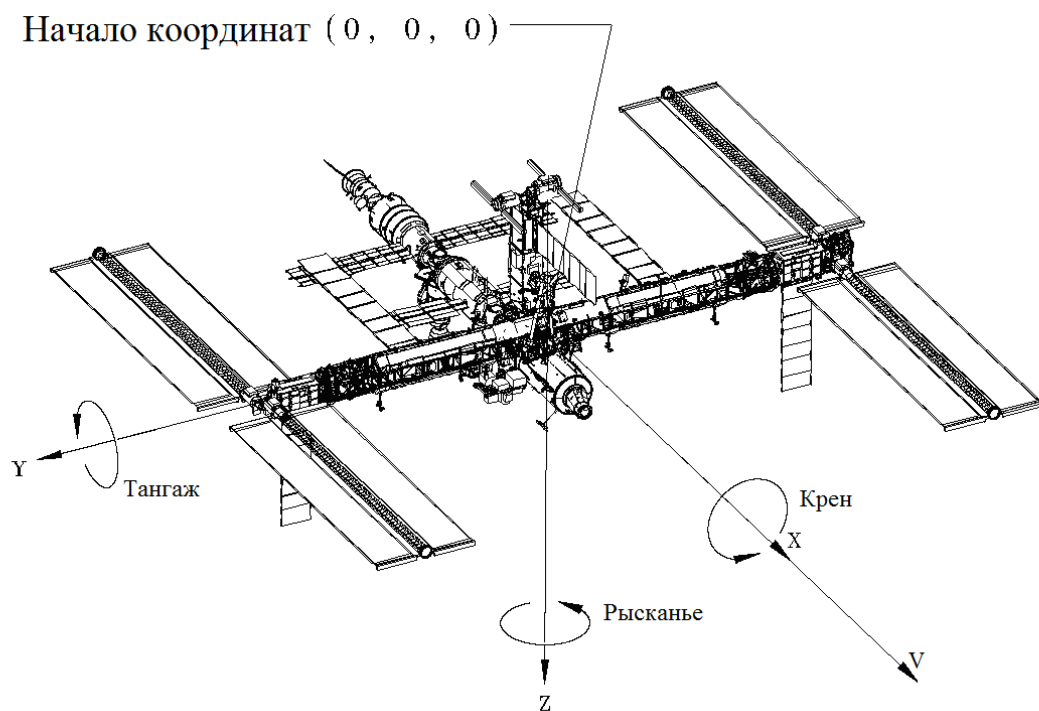


Рис. 2.1 Система координат LVLH.

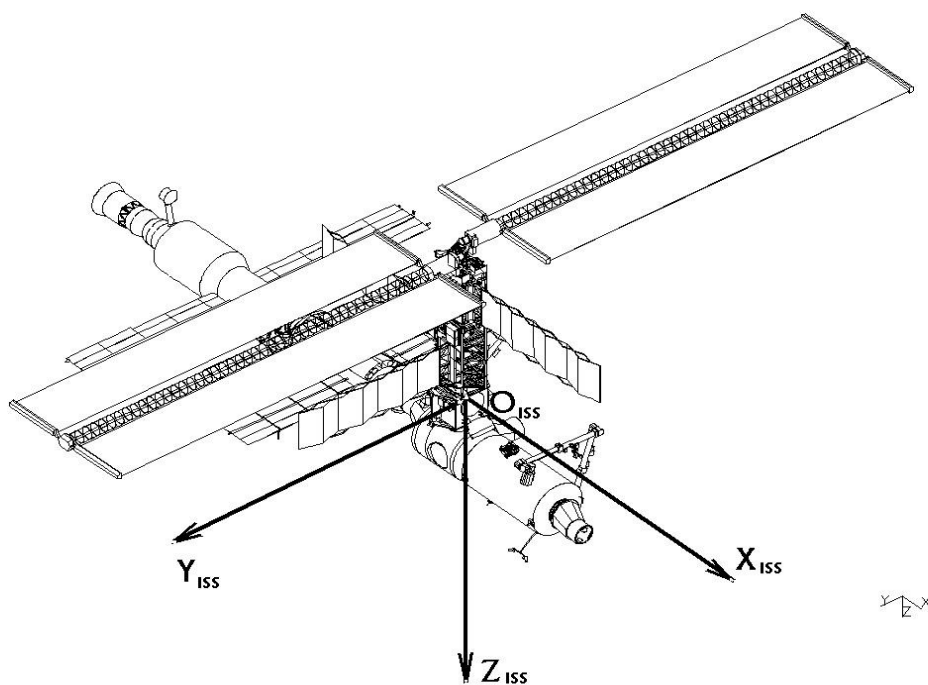


Рис. 2.2 Система координат ISS.

Динамика объекта управления, в данном случае Международной Космической Станции описывается следующими уравнениями:

1. Динамическим уравнением углового движения космического аппарата при воздействии гравитационного момента [37].

$$J\dot{\omega}_{abs} + \omega_{abs} \times J\omega_{abs} + \dot{h} + \omega_{abs} \times h = 3\frac{\mu}{r^3} \frac{r}{r} \times J \frac{r}{r} + M^{aero}, \quad (2.1)$$

где  $J$  - тензор инерции объекта управления,  $h$  – вектор суммарного кинетического момента силовых гироскопов  $3\frac{\mu}{r^3} \frac{r}{r} \times J \frac{r}{r}$  – гравитационный момент,  $\frac{r}{r}$  – единичный вектор местной вертикали;  $M^{aero}$  – аэродинамический момент.

2. Кинематическими соотношениями в кватернионом виде [38]

$$2\dot{N}_i^e = N_i^e \circ (\omega_{abs})_e - (\omega_0)_i \circ N_i^e, \quad (2.2)$$

где  $N_i^e$  – кватернион разворота из базиса  $i$  в базис  $e$  ( $i$  – орбитальный базис,  $e$  – связанная система координат, оси которой расположены вдоль главных осей инерции КА),  $(\omega_{abs})_e = [0 \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  – вектор абсолютной угловой скорости в проекциях на связанный базис,  $(\omega_0)_i = [0 \ 0 \ -\omega_0 \ 0]^T$  – вектор угловой скорости приборного базиса в проекциях на орбитальную систему координат.

В данной задаче углы отклонения связанного базиса от орбитального и их производные по каналам крена и рыскания предполагаются малыми, малыми предполагаются и производные по времени от углов крена, рыскания и тангажа. В то же время на сами углы отклонения в канале тангажа это ограничение не накладывается. Для упрощения дальнейшего анализа с учетом принятых ограничений спроектируем уравнения (2.1), (2.2) на связанный базис.



Прежде всего, для того, чтобы выразить компоненты кватерниона  $N_i^e$  через углы крена, рыскания и тангажа (углы Крылова), разложим разворот вокруг оси Эйлера, задаваемый этим кватернионом на три последовательных разворота: вокруг начального положения орта  $e_3$  ( $i_3$ ) – разворот по рысканию на угол  $-\psi$  (с кватернионом разворота  $P$ ), вокруг промежуточного положения орта  $e_2$  – разворот по каналу тангажа на угол  $\theta$  (с кватернионом разворота  $Y$ ) и вокруг конечного положения орта  $e_1$  – разворот по крену на угол  $\gamma$  (с кватернионом разворота  $R$ ).

$$N_i^e = P \circ Y \circ R = \begin{bmatrix} \cos \frac{\psi}{2} & 0 & 0 & \sin \frac{\psi}{2} \\ 0 & \cos \frac{\psi}{2} & \sin \frac{\psi}{2} & 0 \\ 0 & -\sin \frac{\psi}{2} & \cos \frac{\psi}{2} & 0 \\ -\sin \frac{\psi}{2} & 0 & 0 & \cos \frac{\psi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & 0 & -\sin \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\theta}{2} & 0 & \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & 0 & \cos \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & -\sin \frac{\theta}{2} & 0 & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\gamma}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

С учетом малости углов  $\gamma, \psi, \theta$  выражение (2.3) будет выглядеть следующим образом

$$N_i^e = P \circ Y \circ R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\psi}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\psi}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\psi}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{\psi}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\theta}{2} \\ \frac{\theta}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\theta}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\gamma}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отбрасывая величины второго и более порядка малости, получаем следующие компоненты кватерниона  $N_i^e$

$$\mathbf{N}_i^e = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\gamma}{2} \\ \frac{\theta}{2} \\ -\frac{\psi}{2} \end{bmatrix},$$

здесь использовано матричное представление операции кватернионного умножения. Выражая  $(\omega_{abc})_e$  из (2.2), получаем:

$$(\omega_{abc})_e = 2\tilde{\mathbf{N}}_i^e \circ \dot{\mathbf{N}}_i^e + \tilde{\mathbf{N}}_i^e \circ (\omega_0)_i \circ \mathbf{N}_i^e,$$

откуда с точностью до величин второго порядка малости последовательно получаем:

$$\begin{aligned} 2\tilde{\mathbf{N}}_i^e \circ \dot{\mathbf{N}}_i^e &= 2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma}{2} & \frac{\theta}{2} & -\frac{\psi}{2} \\ -\frac{\gamma}{2} & 1 & -\frac{\psi}{2} & -\frac{\theta}{2} \\ -\frac{\theta}{2} & \frac{\psi}{2} & 1 & \frac{\gamma}{2} \\ \frac{\psi}{2} & \frac{\theta}{2} & -\frac{\gamma}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\theta} \\ -\dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\theta} \\ -\dot{\psi} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{N}}_i^e \circ (\omega_0)_i \circ \mathbf{N}_i^e &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma}{2} & \frac{\theta}{2} & -\frac{\psi}{2} \\ -\frac{\gamma}{2} & 1 & -\frac{\psi}{2} & -\frac{\theta}{2} \\ -\frac{\theta}{2} & \frac{\psi}{2} & 1 & \frac{\gamma}{2} \\ \frac{\psi}{2} & \frac{\theta}{2} & -\frac{\gamma}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_0 \\ -\omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\gamma}{2} \\ \frac{\theta}{2} \\ -\frac{\psi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_0 \psi \\ -\omega_0 \\ \omega_0 \gamma \end{bmatrix}, \\ (\omega_{abc})_e &= \begin{bmatrix} \dot{\gamma} + \psi \omega_0 \\ \dot{\theta} - \omega_0 \\ -\dot{\psi} + \gamma \omega_0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Далее, проектируя единичный вектор местной вертикали на связанный базис, с точностью до величин 2-го порядка малости получаем:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{i}_2)_e = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ r \end{pmatrix}_e = \tilde{\mathbf{N}}_i^e \circ \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ r \end{pmatrix}_i \circ \mathbf{N}_i^e &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma}{2} & \frac{\theta}{2} & -\frac{\psi}{2} \\ -\frac{\gamma}{2} & 1 & -\frac{\psi}{2} & -\frac{\theta}{2} \\ -\frac{\theta}{2} & \frac{\psi}{2} & 1 & \frac{\gamma}{2} \\ \frac{\psi}{2} & \frac{\theta}{2} & -\frac{\gamma}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\gamma}{2} \\ \frac{\theta}{2} \\ -\frac{\psi}{2} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\psi}{2} & \frac{\theta}{2} & -\frac{\gamma}{2} & -1 \\ -\frac{\theta}{2} & -\frac{\psi}{2} & -1 & \frac{\gamma}{2} \\ -\frac{\gamma}{2} & 1 & -\frac{\psi}{2} & \frac{\theta}{2} \\ 1 & -\frac{\gamma}{2} & -\frac{\theta}{2} & -\frac{\psi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\gamma}{2} \\ \frac{\theta}{2} \\ -\frac{\psi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\theta \\ \gamma \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Проектирование векторного уравнения (2.2) на связанный базис с учетом (2.4) и (2.5) дает матричное уравнение:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\gamma} + \omega_0 \dot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ -\ddot{\psi} + \omega_0 \dot{\gamma} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & \dot{\psi} - \omega_0 \gamma & \dot{\theta} - \omega_0 \\ -\dot{\psi} + \omega_0 \gamma & 0 & -\dot{\gamma} - \omega_0 \psi \\ -(\dot{\theta} - \omega_0) & \dot{\gamma} + \omega_0 \psi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\gamma} + \omega_0 \psi \\ \dot{\theta} - \omega_0 \\ -\dot{\psi} + \omega_0 \gamma \end{bmatrix} = \\
&3\omega_0^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & \gamma \\ 1 & 0 & \theta \\ -\gamma & -\theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\theta \\ \gamma \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{M}^{aэpo}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Для упрощения математических выкладок при несущественном ущемлении общности окончательных результатов предполагается, что оси связанного базиса объекта управления совпадают по направлению с его главными осями инерции.

Применяя теорему об изменении кинетического момента отдельно к корпусу КА и отдельно к вращающимся элементам конструкции (силовым гироскопам) перепишем матричное уравнение в виде системы уравнений [39]

$$\begin{cases}
J_x \ddot{\gamma} = 4\omega_0^2 (J_z - J_y) \gamma - \omega_0 (J_x - J_y + J_z) \dot{\psi} - u_x + M_x^{aэpo}; \\
J_y \ddot{\theta} = 3\omega_0^2 (J_z - J_x) \theta - u_y + M_y^{aэpo}; \\
J_z \ddot{\psi} = \omega_0^2 (J_x - J_y) \psi + \omega_0 (J_x - J_y + J_z) \dot{\gamma} - u_z + M_z^{aэpo}; \\
\dot{h}_x = h_x \omega_0 + u_x; \\
\dot{h}_y = u_y; \\
\dot{h}_z = -h_x \omega_0 + u_z;
\end{cases} \quad (2.7)$$

где  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  - соответственно углы разворота по каналам крена, рысканья и тангажа;  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  - моменты инерции МКС относительно главных осей инерции;  $\omega_0$  - абсолютная угловая скорость МКС;  $h_x$ ,  $h_y$ ,  $h_z$  - компоненты вектора суммарного кинетического момента маховиков;  $M_x^{aэpo}$ ,  $M_y^{aэpo}$ ,  $M_z^{aэpo}$  - компоненты вектора аэродинамического момента,  $u_x, u_y, u_z$  - компоненты управляющего момента, через который осуществляется управляющее воздействие на корпус КА.

К системе (2.7) добавим еще несколько уравнений, содержащих переменные, отвечающие за воздействие аэродинамического момента на станцию [40]:

$$\begin{cases}
\ddot{q}_{1\psi} = \psi - \omega_0^2 q_{1\psi} \\
\ddot{q}_{2\psi} = \psi - 4\omega_0^2 q_{2\psi}, \\
\ddot{q}_{3\psi} = \psi - 9\omega_0^2 q_{3\psi}
\end{cases}
\begin{cases}
\ddot{q}_{1\theta} = \theta - \omega_0^2 q_{1\theta} \\
\ddot{q}_{2\theta} = \theta - 4\omega_0^2 q_{2\theta}; \\
\ddot{q}_{3\theta} = \theta - 9\omega_0^2 q_{3\theta}
\end{cases}$$

где  $q_{1\psi}, q_{2\psi}, q_{3\psi}, q_{1\theta}, q_{2\theta}, q_{3\theta}$  - переменные, отвечающие за аэродинамическое воздействие на станцию, в данном случае это три главных тона разложения

функции плотности атмосферы  $\rho = (\rho_{\max} - \rho_{\min}) \times \left| \cos\left(\frac{\omega_0 t - \phi_0}{2}\right) \right|^\alpha + \rho_{\min}$  по витку.

## 2.2 Описание объекта управления в пространстве состояний.

Перейдем к описанию динамики объекта управления в пространстве состояний. Как можно видеть из уравнения (2.7), канал крена и рысканья

гироскопически связаны между собой, а канал тангажа является автономным (он не имеет гироскопических связей ни с каналом крена, ни с каналом рысканья) [41]. Поэтому при рассмотрении МКС как объекта управления будем рассматривать отдельно связанные каналы крена и рысканья (в дальнейшем будем называть ее система «крен-рысканье») и отдельно канал тангажа (система «тангаж»).

Вектор состояния и вектор управления для системы «крен-рысканье» и для системы «тангаж» соответственно будут иметь следующий вид:

$$\mathbf{x}_{\gamma\psi} = \left[ \gamma \quad \dot{\gamma} \quad h_x \quad \int h_x dt \quad \psi \quad \dot{\psi} \quad h_z \quad \int h_z dt \quad q_{1\psi} \quad \dot{q}_{1\psi} \quad q_{2\psi} \quad \dot{q}_{2\psi} \quad q_{3\psi} \quad \dot{q}_{3\psi} \right]^T,$$

$$\mathbf{u}_{\gamma\psi} = \begin{bmatrix} u_x & u_z \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{x}_\theta = \left[ \theta \quad \dot{\theta} \quad h_y \quad \int h_y dt \quad q_{1\theta} \quad \dot{q}_{1\theta} \quad q_{2\theta} \quad \dot{q}_{2\theta} \quad q_{3\theta} \quad \dot{q}_{3\theta} \right]^T,$$

$$\mathbf{u}_\theta = \begin{bmatrix} u_y \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в пространстве состояний объект управления будет описываться следующими уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}_{\gamma\psi} = \mathbf{A}_{\gamma\psi} \mathbf{x}_{\gamma\psi} + \mathbf{B}_{\gamma\psi} \mathbf{u}_{\gamma\psi};$$

$$\dot{\mathbf{x}}_\theta = \mathbf{A}_\theta \mathbf{x}_\theta + \mathbf{B}_\theta \mathbf{u}_\theta,$$

где матрицы системы  $\mathbf{A}_{\gamma\psi}$  и  $\mathbf{A}_\theta$ , и матрицы управления  $\mathbf{B}_{\gamma\psi}$  и  $\mathbf{B}_\theta$  для системы «крен-рысканье» и для системы «тангаж» соответственно выглядят следующим образом:

$$\mathbf{A}_{\gamma\psi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_x & 0 & 0 & 0 & 0 & H_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_z & 0 & 0 & G_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_{\gamma\psi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/J_x & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1/J_z \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9\omega_0^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J_y \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где  $G_x = 4\omega_0^2(J_z - J_y)/J_x$ ,  $H_x = \omega_0(J_x - J_y + J_z)/J_x$ ,  $G_z = \omega_0^2(J_x - J_y)/J_z$ ,  
 $H_z = \omega_0(J_x - J_y + J_z)/J_z$ ,  $M_y = 3\omega_0^2(J_z - J_x)/J_y$ . Здесь  $\omega_0 = 0.0667 \text{ град/сек}$  - значение  
угловой скорости орбитального базиса LVLH,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_y & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 129.978287 & 3.294386 & 5.279790 \\ 3.294386 & 83.966791 & 0.990955 \\ 5.279790 & 0.990955 & 193.699689 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ кг} \times \text{м}^2 \quad - \quad \text{тензор}$$

инерции МКС.

## 2.3 Выбор эталонного полинома. Обобщенные полиномы Баттерворта.

Прежде чем приступить к модальному синтезу закона управления ориентацией МКС, необходимо определиться с тем, какой эталонный полином использовать. Эталонный полином определяет расположение корней замкнутой системы, и как следствие характер переходного процесса.

Чаще всего для оценки качества переходного процесса используют такие критерии как степень устойчивости и степень колебательности [42]. Степень устойчивости численно равна абсолютному значению действительной части ближайшего к мнимой оси корня (рис. 2.3)

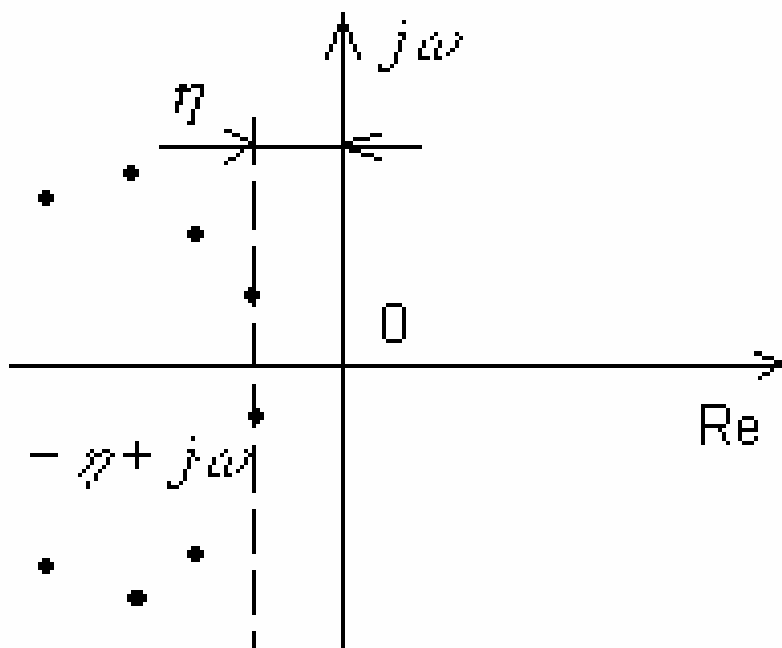


Рис. 2.3 Степень устойчивости динамической системы.

Чем больше степень устойчивости (коэффициент  $\eta$ ), тем быстрее затухает переходный процесс. Также можно отметить, что достаточно большой коэффициент устойчивости динамической системы делает систему управления более робастной, то есть не теряющей устойчивость при некоторых изменениях в значениях параметров системы.

Еще одним критерием качества динамической системы является степень колебательности. Из начала координат проведём лучи через два

комплексно сопряжённых корня так, чтобы все остальные корни оказались между этим и лучами (рис. 2.4).

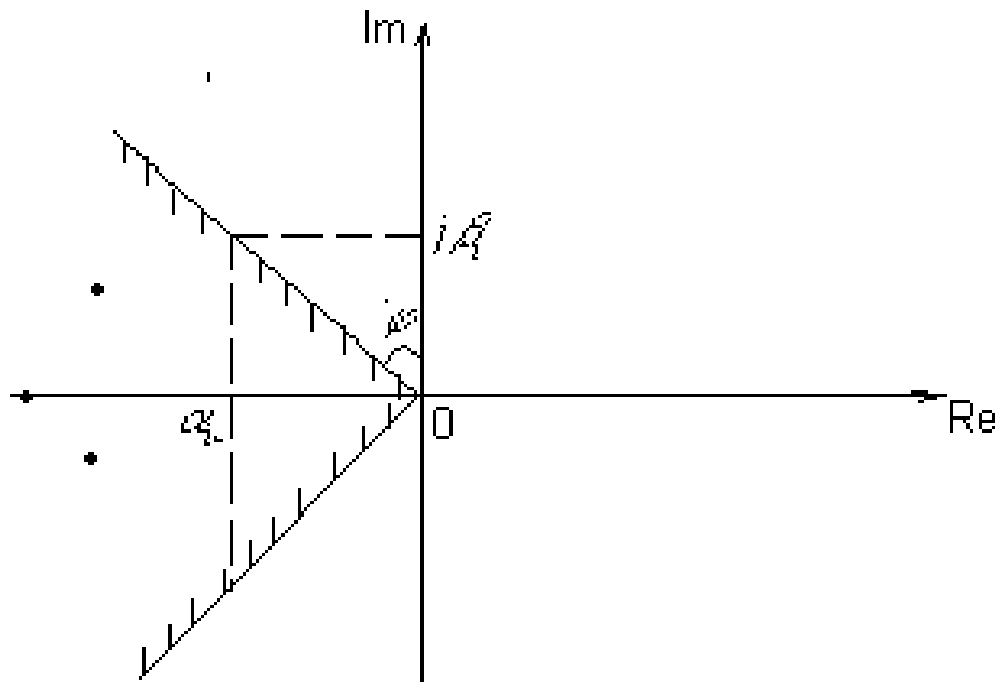


Рис. 2.4 К определению степени колебательности.

Степенью колебательности называется отношение

$$m = \min_i \frac{|\beta_i|}{|\alpha_i|} = \frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|}.$$

Чем больше значение  $m$ , тем быстрее затухает колебательный процесс. Если на систему накладывается требование  $m \geq m_{зад}$ , то это означает, что все корни характеристического уравнения системы должны находиться внутри заштрихованного сектора (см. рис 2.4).

Идеальным вариантом эталонного полинома, обладающего низкой степенью колебательности является бином Ньютона [31]

$$P(s) = (s + \omega_0)^n, \quad \omega_0 > 0.$$

На комплексной плоскости корни бинома Ньютона расположены в одной точке, лежащей в левой полуплоскости на действительной оси (рис. 2.5)



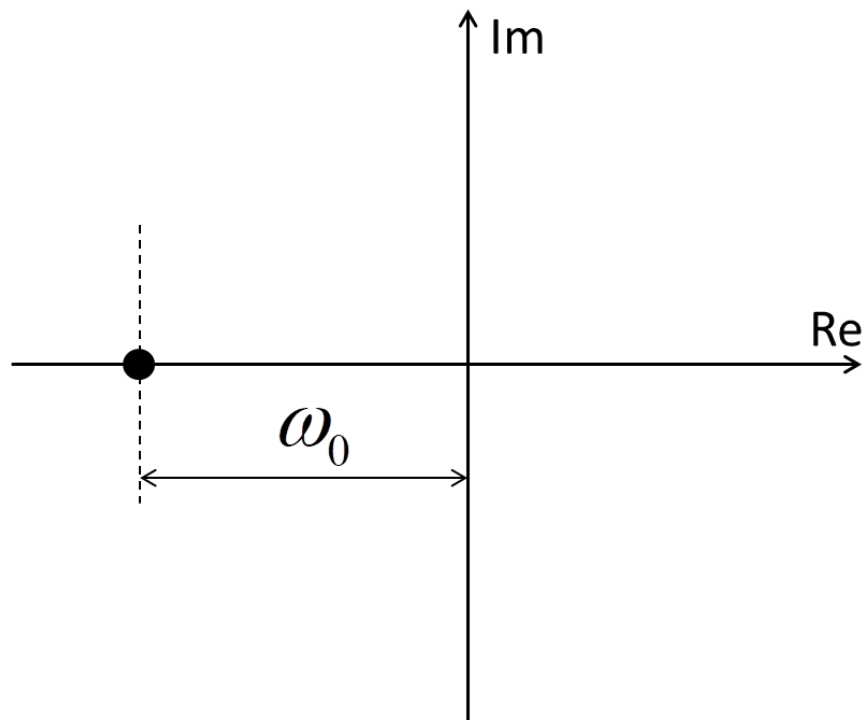


Рис. 2.5 Бином Ньютона. Расположение корней.

Нетрудно догадаться, что степень колебательности динамической системы, корни которой лежат согласно биному Ньютона, равна нулю, а степень устойчивости такой системы будет равна параметру  $\omega_0$ . Существенным же недостатком использования данного типа полиномов для построения систем управления является высокая чувствительность расположения корней к изменениям параметров системы, что вызвано кратностью корней полинома, что в свою очередь обусловлено потерей гладкости (так как детерминант полинома в этом случае обращается в нуль), несмотря на сохранение непрерывной зависимости корней характеристического полинома от его коэффициентов, [43]. Существует ненулевая вероятность, что при малейшем возмущении одного из параметров системы управления, корни полинома данного типа могут «уползти» в правую полуплоскость комплексной плоскости, то есть сделать систему управления неустойчивой.

Еще одним интересным семейством полиномов, широко используемых в основном при построении фильтров, являются полиномы Баттерворта [31] Классический полином Баттерворта определяется следующим образом

$$\prod_{k=1}^n \left( s - \omega_c \exp \left( \frac{j(2k+n-1)\pi}{2n} \right) \right).$$

На комплексной плоскости корни полиномов Баттерворта равномерно расположены левой полуплоскости на окружности радиусом  $\omega_c$  и центром в начале координат (рис. 2.6)

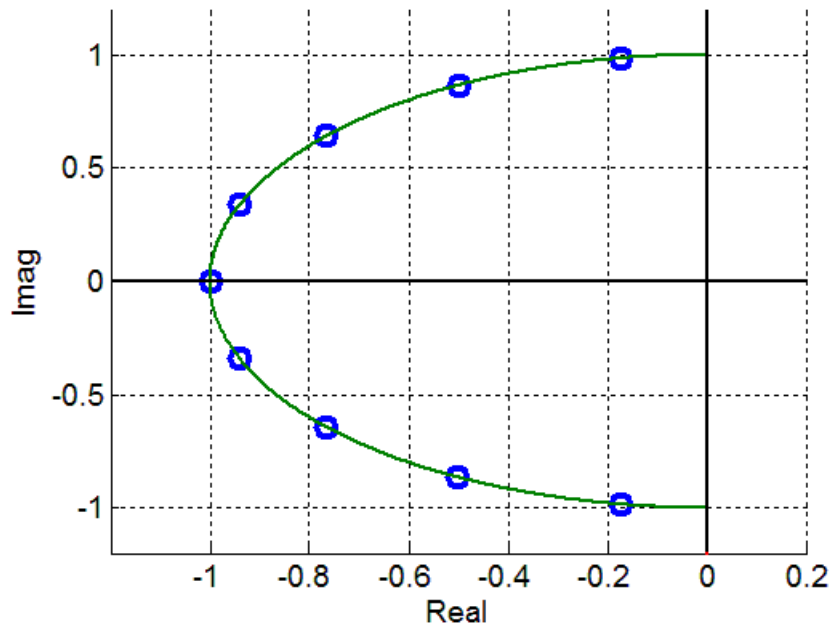


Рис. 2.6 Расположение корней классического полинома Баттерворта на комплексной плоскости.

Основным достоинством полинома Баттерворта является тот факт, что он обладает максимально гладкой АЧХ (амплитудно-частотной характеристикой) на частотах пропускания, что делает данный тип полиномов хорошим вариантом для построения фильтров. Но для задач модального синтеза систем управления, данное семейство полиномов не подходит в силу того, что построенная система управления будет обладать высокой степенью колебательности и низкой степенью устойчивости. Действительно, самая правая пара комплексно-сопряженных корней расположена слишком близко к мнимой оси, и при росте размерности динамической системы управления, степень устойчивости будет стремиться к нулю, а степень колебательности к бесконечности (рис. 2.7)

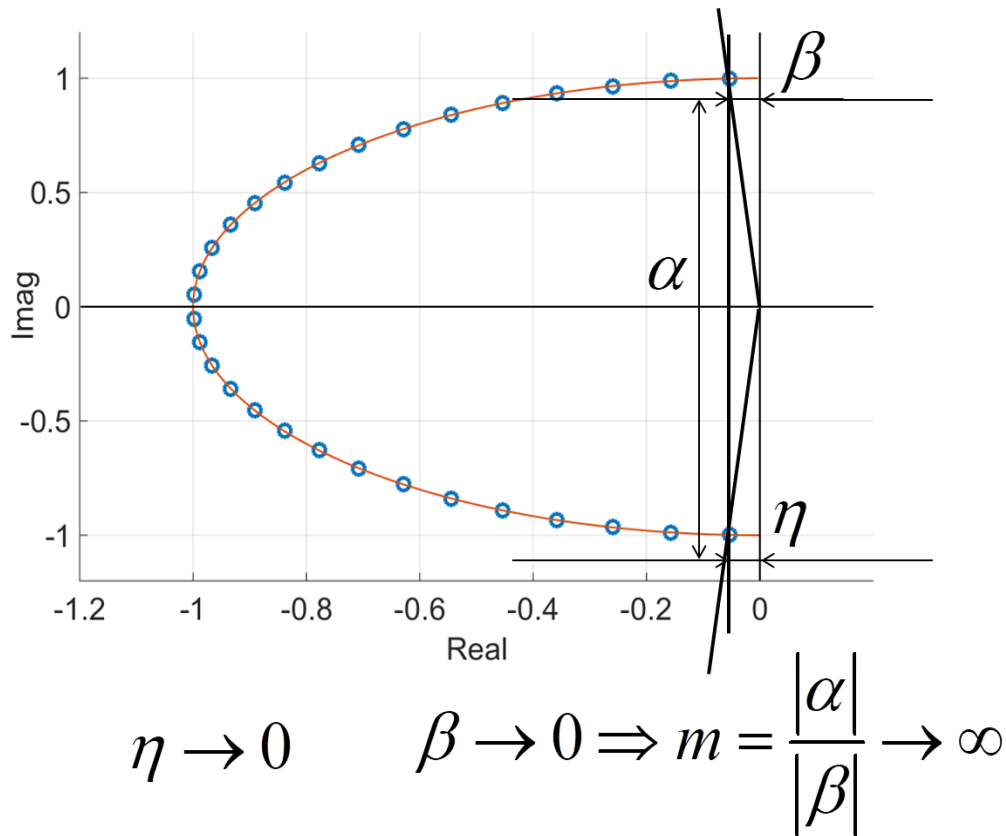
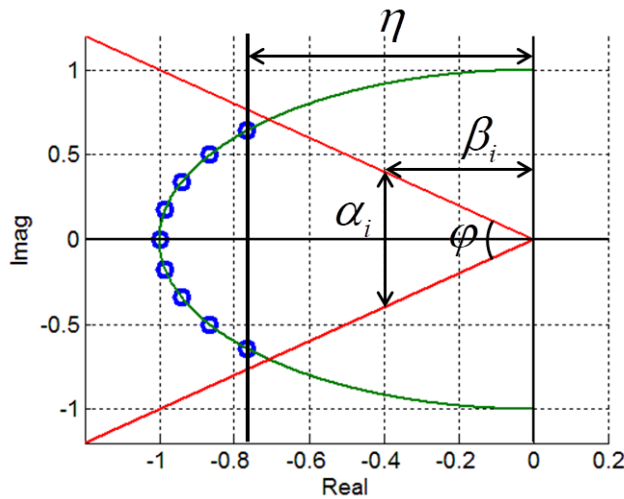


Рис. 2.7 Степень колебательности  $m$  и степень устойчивости  $\eta$  при полиноме Баттерворта большой размерности.

Одним из решений данной проблемы может стать введение нового параметра, отвечающего за удаленность самой правой пары корней данного семейства полиномов от комплексной оси. Если равномерно расположить все корни на окружности в левой полуплоскости так, чтобы они лежали между двумя симметричными лучами, проведенными из начала координат, то степень колебательности такого полинома значительно уменьшится, а степень устойчивости наоборот возрастет (рис. 2.8). Назовем подобный тип полиномов обобщенными полиномами Баттерворта. Обобщенные полиномы Баттерворта получаются из классических полиномов Баттерворта введением варьируемого параметра  $\varphi$ , определяющего величину дуги, на которой располагаются корни. Аналитическая запись данного полинома выглядит следующим образом

$$\prod_{k=1}^n \left( s - \omega_c \exp \left( j \left( \frac{\varphi(2k-1)}{2n} + \pi - \frac{\varphi}{2} \right) \right) \right),$$

где  $n$  - размерность (порядок) полинома,  $\omega_c$  - частота среза,  $\varphi$  - параметр, отвечающий за величину дуги, на которой располагаются корни.



Степень устойчивости

$$\eta > \omega_c \cos \frac{\varphi}{2}$$

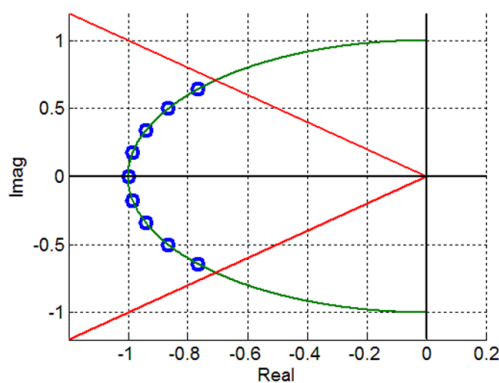
Степень колебательности

$$m < \frac{\alpha_i}{\beta_i} = 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

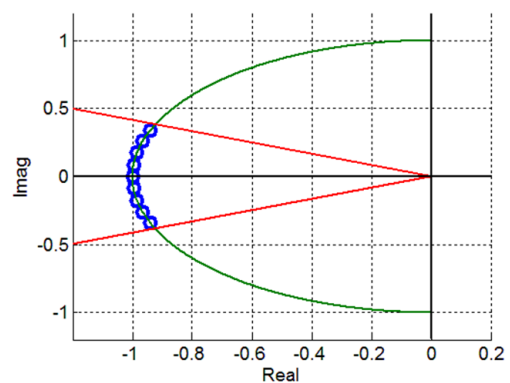
Рис. 2.8 Обобщенные полиномы Баттерворта. Степень устойчивости и степень колебательности.

При уменьшении параметра  $\varphi$ , степень устойчивости замкнутой системы построенной согласно эталонному полиному данного типа будет возрастать, а степень колебательности наоборот уменьшаться. При  $\varphi = 0$  корни полинома будут лежать в одной точке на действительной оси, что говорит о том, что бином Ньютона можно считать предельным случаем обобщенного полинома Баттерворта, при  $\varphi \rightarrow 0$  (рис. 2.9).

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$



$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$



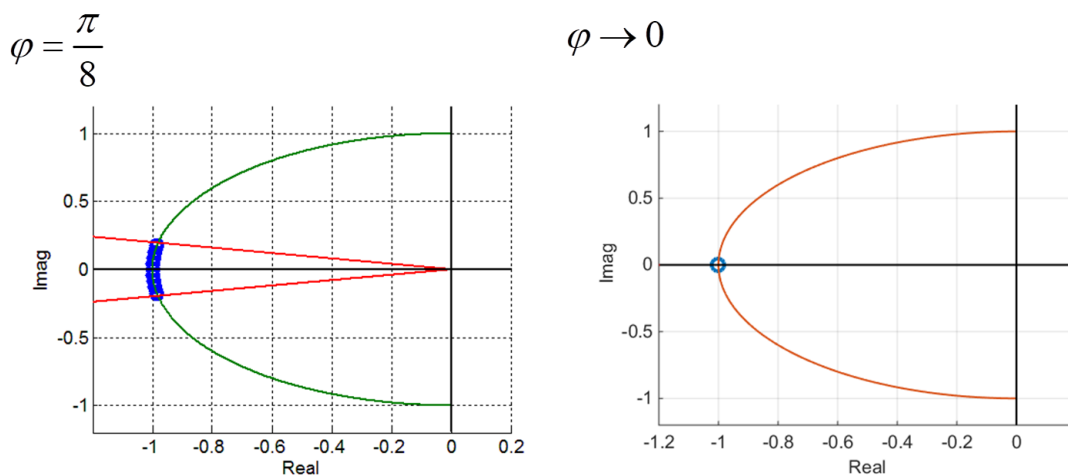


Рис. 2.9 Расположение корней обобщенного полинома Баттерворта при различных значениях параметра  $\varphi$ , в том числе при  $\varphi = 0$ .

Таким образом, можно сделать вывод, что обобщенные полиномы Баттерворта являются довольно удобным вариантом для использования в качестве эталонных при модальном синтезе систем управления, так как они обладают приемлемыми степенью устойчивости и степенью колебательности, при этом не имеют кратных корней, что дает возможность обеспечить робастность системе управления.

## 2.4 Синтез закона управления. Результаты математического моделирования.

Перейдем к построению закона управления, обеспечивающего устойчивое управление угловым положением МКС.

В качестве эталонного полинома для синтеза регулятора возьмем обобщенный полином Баттерворта, преимущества которого были подробно показаны в предыдущем параграфе:

$$\prod_{k=1}^n \left( s - \omega_c \exp \left( j \left( \frac{\varphi(2k-1)}{2n} + \pi - \frac{\varphi}{2} \right) \right) \right), \quad (2.8)$$

где  $n$  – порядок полинома ( $n=14$  для системы «крен-рысканье» и  $n=10$  для системы «тангаж»);  $\omega_c$  – частота среза ( $\omega_c = \omega_0$ , где  $\omega_0$  абсолютная угловая скорость МКС),  $\varphi = \frac{\pi}{6}$  – параметр, отвечающий за величину дуги, на которой

равномерно располагаются корни. Расположение корней эталонного полинома для системы «крен-рысканье» и для системы «тангаж» показано на (рис. 2.10)

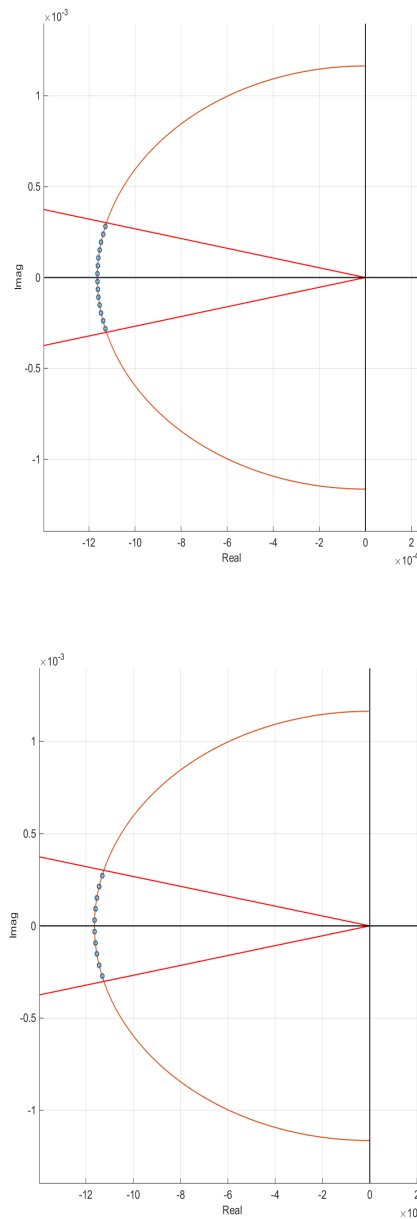


Рис. 2.10 Расположение корней эталонного полинома (обобщенного полинома Баттерворта) для системы «крен-рысканье» (первый рисунок) и для системы «тангаж» (второй рисунок).

Требуется найти такие законы управления

$$\mathbf{u}_{\gamma\psi} = -\mathbf{D}_{\gamma\psi} \mathbf{x}_{\gamma\psi};$$

$$\mathbf{u}_\theta = -\mathbf{D}_\theta \mathbf{x}_\theta ,$$

которые бы обеспечивали замкнутым системам

$$\dot{\mathbf{x}}_{\gamma\psi} = (\mathbf{A}_{\gamma\psi} - \mathbf{B}_{\gamma\psi} \mathbf{D}_{\gamma\psi}) \mathbf{x}_{\gamma\psi}; \quad (2.9)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{\theta} = (\mathbf{A}_{\theta} - \mathbf{B}_{\theta} \mathbf{D}_{\theta}) \mathbf{x}_{\theta} \quad (2.10)$$

требуемое расположение корней согласно эталонному полиному (2.8).

Для поиска числовых значений коэффициентов матриц обратной связи используем представляемый в данной работе метод последовательного замыкания мод движения. Сначала рассмотрим поиск закона управления для системы «крен-рысканье».

Расположение корней для системы «крен-рысканье» до замыкания выглядит следующим образом

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 + 0.0012i \\ 0 - 0.0012i \\ -0.0000 + 0.0035i \\ -0.0000 - 0.0035i \\ 0.0000 + 0.0023i \\ 0.0000 - 0.0023i \\ -0.0010 + 0.0004i \\ -0.0010 - 0.0004i \\ 0.0010 + 0.0004i \\ 0.0010 - 0.0004i \\ 0.0000 + 0.0012i \\ 0.0000 - 0.0012i \end{bmatrix}, \quad \text{для наглядности расположение корней}$$

незамкнутой системы представлено на рисунке 2.11

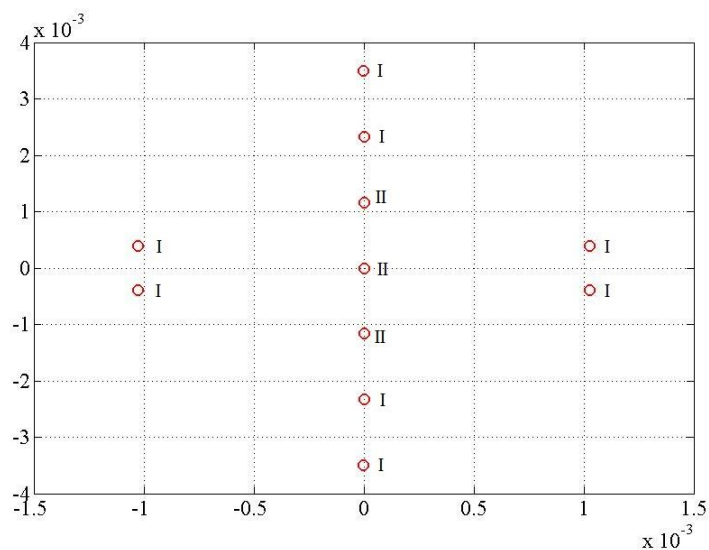


Рис 2.11 Расположение корней незамкнутой системы «крен рыскание» на комплексной плоскости (римской цифрой обозначена арифметическая кратность корней).

Исследуемая система имеет 14-ый порядок, следовательно, алгоритму последовательного замыкания понадобится 7 итераций для «переноса» всех пар собственных чисел в желаемое положение. Порядок замыкания мод движения (перенос пар собственных чисел в эталонное положение) зададим следующим образом (рис. 2.12)



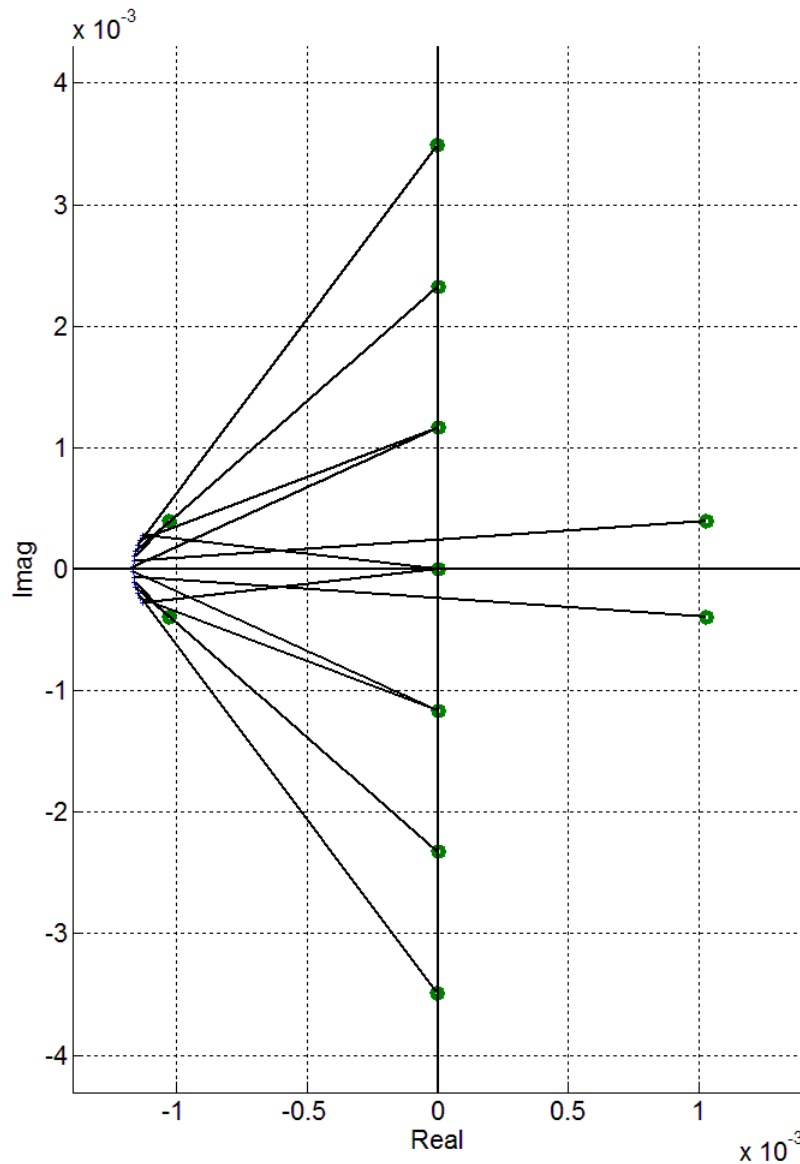


Рис 2.12 Порядок замыкания пар собственных чисел для системы «крен-рысканье».

По формуле (1.28), выведенной в первой главе получаем следующие матрицы обратной связи, каждая из которых «передвигает» одну пару собственных чисел системы «крен-рысканье» в желаемое положение:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_1^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.1293\text{e-}03 & 2.8008\text{e-}04 \\ -3.2589\text{e-}07 & 1.3140\text{e-}06 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2.8008\text{e-}04 & 1.1293\text{e-}03 \\ -1.3140\text{e-}06 & -3.2589\text{e-}07 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &
\mathbf{D}_2^T &= \begin{bmatrix} -6.0149\text{e-}06 & -2.3306\text{e-}05 \\ -5.9314\text{e-}03 & 1.5308\text{e-}03 \\ 2.2684\text{e-}03 & -6.4581\text{e-}04 \\ 1.2198\text{e-}06 & 5.8742\text{e-}07 \\ -1.1681\text{e-}05 & 3.0148\text{e-}06 \\ -5.4141\text{e-}03 & -2.0978\text{e-}02 \\ 6.4581\text{e-}04 & 2.2684\text{e-}03 \\ -5.8742\text{e-}07 & 1.2198\text{e-}06 \\ 2.3665\text{e-}11 & -6.1075\text{e-}12 \\ 5.2490\text{e-}09 & 2.0338\text{e-}08 \\ 2.1539\text{e-}26 & -4.4974\text{e-}26 \\ 1.0352\text{e-}23 & 2.0856\text{e-}23 \\ 1.8935\text{e-}26 & 1.6217\text{e-}25 \\ -3.1936\text{e-}23 & 4.9770\text{e-}23 \end{bmatrix} &
\mathbf{D}_3^T &= \begin{bmatrix} -7.1198\text{e+}02 & -3.0671\text{e+}02 \\ -8.0647\text{e+}05 & 1.1002\text{e+}05 \\ -3.3004\text{e-}03 & -6.8664\text{e-}04 \\ 7.4024\text{e-}07 & -4.5169\text{e-}08 \\ -7.6543\text{e+}03 & 1.0442\text{e+}03 \\ -1.8122\text{e+}06 & -7.8068\text{e+}05 \\ 3.8270\text{e-}03 & -1.0368\text{e-}04 \\ 1.5219\text{e-}06 & 1.8225\text{e-}07 \\ -4.3708\text{e-}11 & -5.9596\text{e-}12 \\ 2.2295\text{e-}08 & -3.4946\text{e-}09 \\ 4.6949\text{e-}18 & -2.5695\text{e-}19 \\ -3.7533\text{e-}15 & -1.5433\text{e-}15 \\ 9.6284\text{e-}02 & -1.3135\text{e-}02 \\ 1.8592\text{e+}01 & 8.0094\text{e+}00 \end{bmatrix} \\
\mathbf{D}_4^T &= \begin{bmatrix} -1.1843\text{e+}04 & 7.2734\text{e+}03 \\ -7.7488\text{e+}06 & 5.3989\text{e+}06 \\ -3.7652\text{e-}02 & 2.6989\text{e-}02 \\ 2.8122\text{e-}06 & -2.0146\text{e-}06 \\ -7.3030\text{e+}04 & 4.6117\text{e+}04 \\ -6.6542\text{e+}06 & 1.7072\text{e+}06 \\ 3.8297\text{e-}03 & -4.0124\text{e-}03 \\ 7.3504\text{e-}06 & -5.2474\text{e-}06 \\ -3.8489\text{e-}10 & 2.8398\text{e-}10 \\ -1.5247\text{e-}07 & 9.6306\text{e-}08 \\ 3.0868\text{e-}03 & -3.0712\text{e-}02 \\ 1.4076\text{e+}02 & -1.0071\text{e+}02 \\ 9.1204\text{e-}01 & -5.1441\text{e-}01 \\ -2.8730\text{e+}02 & 2.3687\text{e+}02 \end{bmatrix} &
\mathbf{D}_5^T &= \begin{bmatrix} -1.7143\text{e+}04 & 1.1203\text{e+}04 \\ -1.1308\text{e+}07 & 8.0689\text{e+}06 \\ -5.6003\text{e-}02 & 4.0834\text{e-}02 \\ 4.0360\text{e-}06 & -2.9521\text{e-}06 \\ -1.0429\text{e+}05 & 6.9332\text{e+}04 \\ -8.6078\text{e+}06 & 3.1125\text{e+}06 \\ 5.5818\text{e-}03 & -5.5266\text{e-}03 \\ 1.0764\text{e-}05 & -7.8588\text{e-}06 \\ -5.7429\text{e-}10 & 4.2761\text{e-}10 \\ -2.2744\text{e-}07 & 1.5084\text{e-}07 \\ 1.8144\text{e-}02 & -4.3449\text{e-}02 \\ 2.0989\text{e+}02 & -1.5223\text{e+}02 \\ 1.2731\text{e+}00 & -7.7920\text{e-}01 \\ -4.4186\text{e+}02 & 3.5259\text{e+}02 \end{bmatrix} &
\mathbf{D}_6^T &= \begin{bmatrix} -4.7183\text{e+}03 & 1.5557\text{e+}03 \\ -2.6614\text{e+}06 & 1.3663\text{e+}06 \\ -1.0567\text{e-}02 & 5.6507\text{e-}03 \\ 9.6821\text{e-}07 & -5.5646\text{e-}07 \\ -2.4958\text{e+}04 & 7.9998\text{e+}03 \\ -3.4074\text{e+}06 & -9.0027\text{e+}05 \\ -6.4150\text{e-}04 & -7.7809\text{e-}04 \\ 1.9663\text{e-}06 & -1.0643\text{e-}06 \\ -9.7413\text{e-}11 & 5.8708\text{e-}11 \\ -6.2525\text{e-}08 & 2.2155\text{e-}08 \\ -2.1160\text{e-}02 & -1.3347\text{e-}02 \\ 4.0514\text{e+}01 & -2.1064\text{e+}01 \\ 3.6077\text{e-}01 & -7.3131\text{e-}02 \\ -6.8596\text{e+}01 & 6.3454\text{e+}01 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_\gamma^T = \begin{bmatrix} -2.4862\text{e}+03 & -5.8343\text{e}+00 \\ -1.1541\text{e}+06 & 2.9833\text{e}+05 \\ -2.7336\text{e}-03 & 1.0104\text{e}-04 \\ 5.1388\text{e}-07 & -1.4985\text{e}-07 \\ -4.9675\text{e}+03 & -4.9516\text{e}+03 \\ -1.7063\text{e}+06 & -1.9552\text{e}+06 \\ -1.4489\text{e}-03 & -1.3443\text{e}-04 \\ 4.9074\text{e}-07 & -1.9065\text{e}-08 \\ 3.0045\text{e}-04 & -2.0563\text{e}-04 \\ -3.7007\text{e}-01 & 1.5937\text{e}-01 \\ -2.9831\text{e}-02 & -9.0197\text{e}-03 \\ 1.9454\text{e}+00 & 4.7057\text{e}+00 \\ 1.2868\text{e}-01 & 8.0936\text{e}-02 \\ 1.3209\text{e}+01 & 9.3268\text{e}+00 \end{bmatrix}.$$

Суммируя полученные матрицы, получаем искомую матрицу обратной связи, определяющую закон управления для системы «крен-рысканье»

$$\mathbf{D}_{\gamma\Psi}^T = \sum_{i=1}^7 \mathbf{D}_i^T = \begin{bmatrix} -3.4016\text{e}+03 & -4.0010\text{e}+01 \\ -1.0579\text{e}+06 & 2.7802\text{e}+05 \\ -2.2689\text{e}-03 & -4.5300\text{e}-06 \\ -3.9957\text{e}-06 & -1.6083\text{e}-07 \\ -5.6192\text{e}+04 & -5.4692\text{e}+03 \\ -8.1673\text{e}+06 & -2.0093\text{e}+06 \\ -5.2800\text{e}-03 & -1.3821\text{e}-04 \\ 4.1534\text{e}-07 & 8.3227\text{e}-10 \\ 6.4422\text{e}-04 & -2.1171\text{e}-04 \\ 4.2873\text{e}+00 & 1.8422\text{e}-01 \\ 5.7898\text{e}-02 & -8.5687\text{e}-03 \\ 6.3898\text{e}+01 & 5.5456\text{e}+00 \\ 5.3289\text{e}-01 & 8.6280\text{e}-02 \\ -1.5005\text{e}+02 & 7.4592\text{e}+00 \end{bmatrix}.$$

Теперь найдем матрицу обратной связи для системы «тангаж». Поскольку система управления по тангажу является single-input системой, то для синтеза регулятора воспользуемся модифицированным методом последовательного замыкания, «переносящим» за одну итерацию по одному корню в заданное положение. По формуле получаем матрицы обратной связи для «переноса» по отдельности каждого корня, после чего,

просуммировав их, получим итоговую матрицу обратной связи для системы «тангаж»:

$$\mathbf{D}_0^T = \begin{bmatrix} -1.0028e+04 \\ -1.9021e+06 \\ -5.3961e-03 \\ -9.5254e-07 \\ 2.0197e-03 \\ -7.8249e-01 \\ 2.2999e-02 \\ -1.3564e+00 \\ 7.6629e-03 \\ -2.1173e+01 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Для того чтобы продемонстрировать правильность выбора типа эталонного полинома для модального синтеза системы управления ориентацией МКС, еще раз построим модальные регуляторы для систем «крен-рысканье» и «тангаж», только в качестве эталонного полинома возьмем классический полином Баттерворта

$$\prod_{k=1}^n \left( s - \omega_c \exp \left( \frac{j(2k+n-1)\pi}{2n} \right) \right),$$

с частотой среза равной  $\omega_c = 2\omega_0$ ,  $n=14$  и  $10$  для систем «крен-рысканье» и «тангаж» соответственно. Расположение корней эталонных полиномов показано на (рис. 2.13)

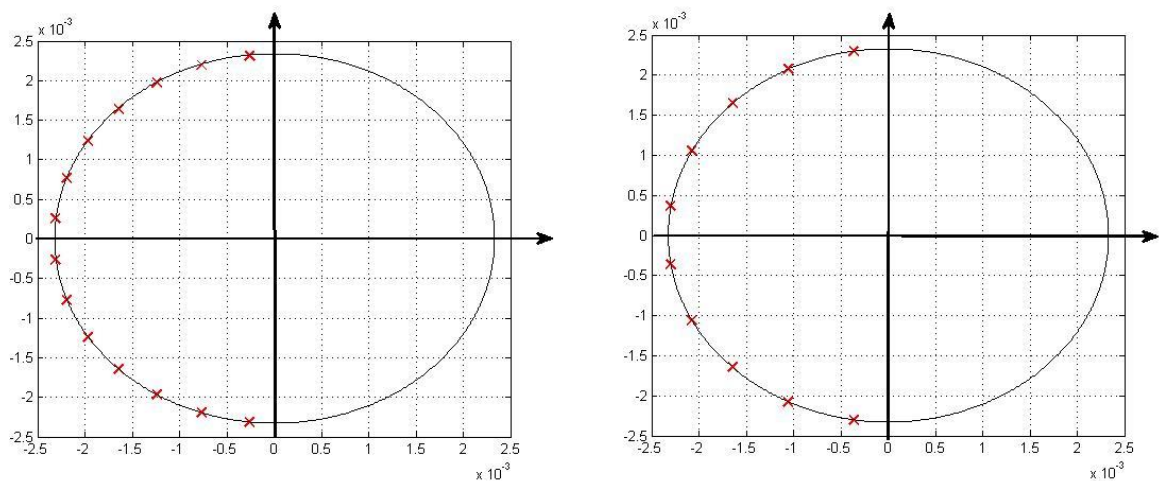


Рис 2.13 Расположение корней эталонного полинома Баттерворта для системы «крен-рысканье» (слева) и для системы «тангаж» (справа).

Используя метод последовательного замыкания, получим следующие значения для матриц обратной связи:

$$\mathbf{D}_{\gamma_{bat}}^T = \begin{bmatrix} -9.2642e+03 & 5.7158e+03 \\ 2.2672e+06 & -5.8619e+06 \\ 2.7193e-02 & -4.1871e-02 \\ 4.6806e-06 & 3.1351e-05 \\ 2.9367e+03 & -2.8407e+03 \\ -1.1700e+07 & 1.0268e+07 \\ -6.6631e-02 & 6.4046e-02 \\ -3.0921e-05 & 1.5060e-05 \\ 3.5352e-04 & 8.9431e-03 \\ 1.8997e+01 & -8.8208e+00 \\ -3.4739e-04 & -1.9733e-04 \\ 7.9223e-02 & -1.2335e-01 \\ -6.6505e-03 & 3.2664e-03 \\ -5.2919e-01 & -1.7878e+00 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{\theta_{bat}}^T = \begin{bmatrix} -9.3782e+03 \\ -5.1506e+06 \\ -4.6465e-02 \\ -1.6915e-05 \\ -6.4861e-03 \\ -8.8120e-01 \\ -2.1849e-17 \\ -1.5962e+00 \\ 4.5627e-03 \\ -7.1139e+00 \end{bmatrix}.$$

Ниже представлены результаты математического моделирования.

Математическое моделирование углового движения МКС было проведено как для системы управления, которая была построена методом модального управления по обобщенному полиному Баттерворта (далее по тексту закон управления 1), так и для системы, построенной по классическому полиному Баттерворта (далее по тексту закон управления 2).

Математическое моделирование проводилось в среде MATLAB. Получены зависимости 3-ех компонент (по каналам крена, рысканья и тангажа) углового положения МКС, ее угловой скорости от времени (рис.2.14 – рис 2.19) как для закона управления 1, так и для закона управления 2.

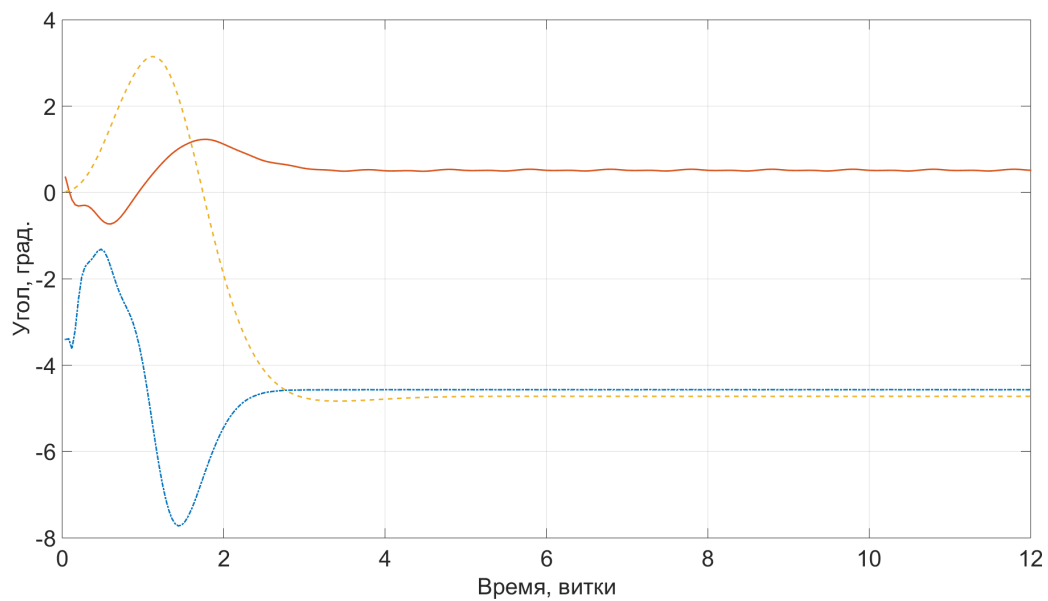


Рис. 2.14 Угловое положение МКС по каналам крена, рысканья и тангажа. Закон управления 1.

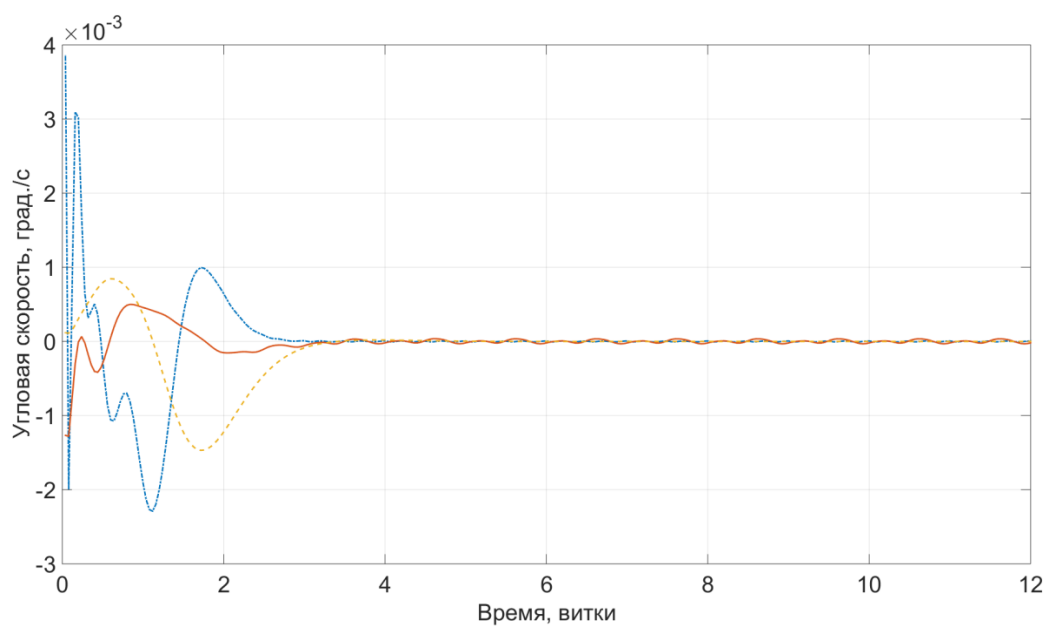


Рис. 2.15 Угловая скорость МКС по каналам крена, рысканья и тангажа. Закон управления 1.

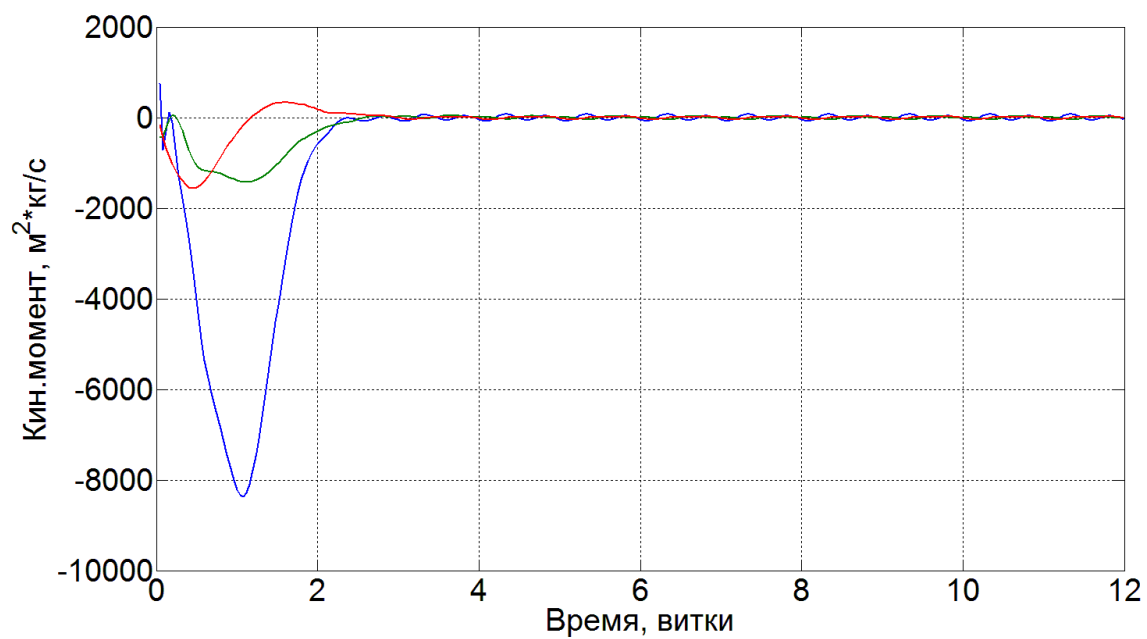


Рис. 2.16 Компоненты кинетического момента по каналам крена, рысканья и тангажа. Закон управления 1.

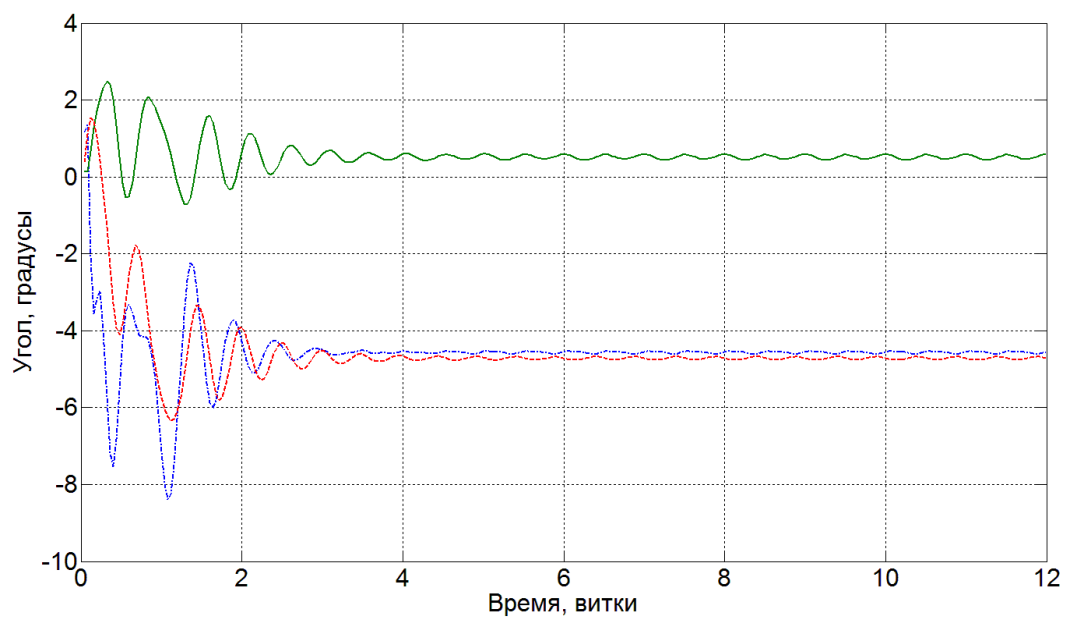


Рис. 2.17 Угловое положение МКС по каналам крена, рысканья и тангажа. Закон управления 2.

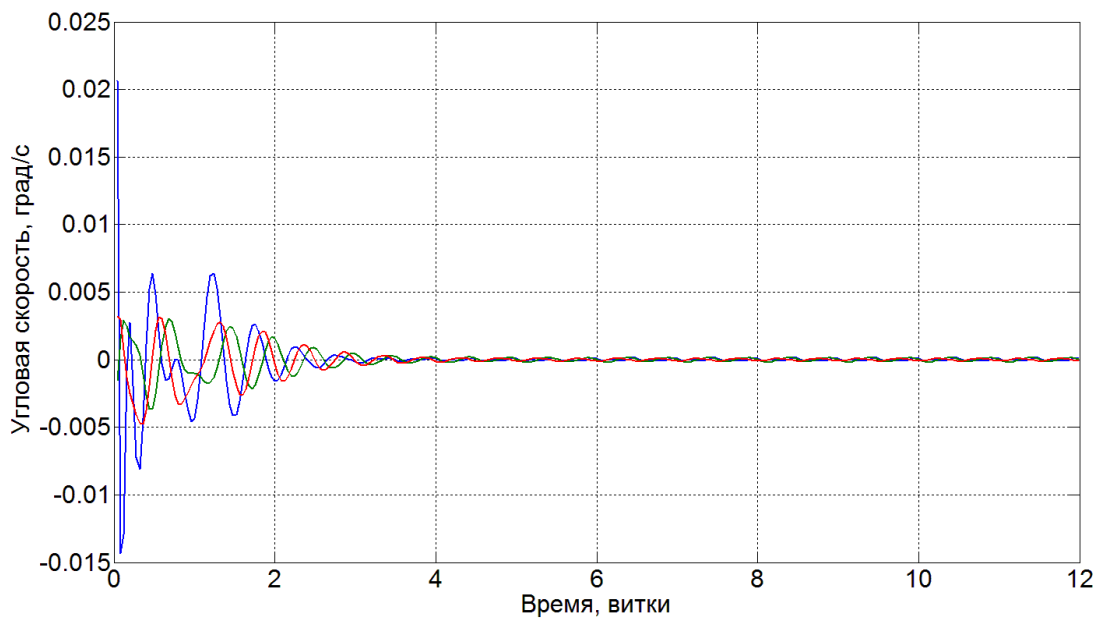


Рис. 2.18 Угловая скорость МКС по каналам крена, рысканья и тангажа. Закон управления 2.

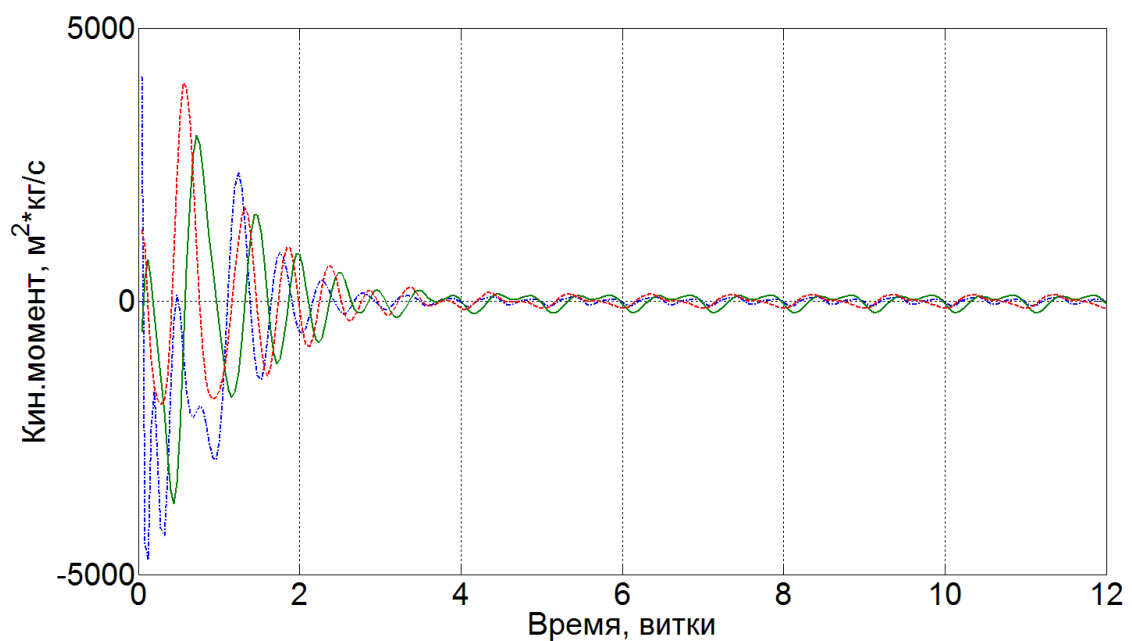


Рис. 2.19 Компоненты кинетического момента по каналам крена, рысканья и тангажа. Закон управления 2.

Математическое моделирование углового движения МКС показывает, что переходный процесс, динамику которого определяют корни обобщенного полинома Баттерворта (закон управления 1), имеет менее выраженную



осцилляционную составляющую, и проходит более «плавно». Переходный процесс, определяющийся корнями классического полинома Баттерворта (закон управления 2) напротив, демонстрирует высокую колебательность. Более того, начальная амплитуда компонент вектора состояния ниже в переходном процессе, который определяется корнями обобщенного полинома Баттерворта. Таким образом, на основании полученных результатов можно сделать вывод, что обобщенный полином Баттерворта является более подходящим эталонным полиномом для модального синтеза многомерных многосвязных динамических систем.

## ***2.5 Сравнение результатов, полученных методом последовательного замыкания и функцией place.***

Для демонстрации точности размещения корней при помощи алгоритма последовательного замыкания сравним результаты, полученные в предыдущем параграфе с аналогичными результатами, полученными при помощи функции `place()`. Для сравнения выберем систему управления по крену-рысканью.

Для численного решения задач модального синтеза многомерных систем с несколькими входами и выходами в программной среде Matlab реализована функция `place()`, основанная на алгоритме, представленном Каутским, Никольсоном и Ван Дуреном в одной из своих работ [22]. Функция получает на вход информацию о линейной системе управления (матрицу системы  $A$ , матрицу управления  $B$ ), а так же коэффициенты эталонного полинома. На выходе функция `place()` выдает такую матрицу обратной связи  $D$ , что замкнутая при помощи ее система управления будет иметь расположение корней согласно эталонному полиному, поданному на вход функции.

Предположим, что нам необходимо провести модальный синтез системы управления системы «крен-рысканье» и в качестве эталонного полинома взять в первом случае классический полином Баттерворта 14-го

порядка с  $\omega_c = 2\omega_0$  (далее по тексту полином 1 или  $p_1$ ), во втором случае обобщенный полином Баттерворта, используемый для модального синтеза системы управления «крен-рыскание» в предыдущем параграфе (далее по тексту полином 2 или  $p_2$ ),. Коэффициенты и расположение корней первого и второго эталонного полиномов показаны на рисунке ниже.

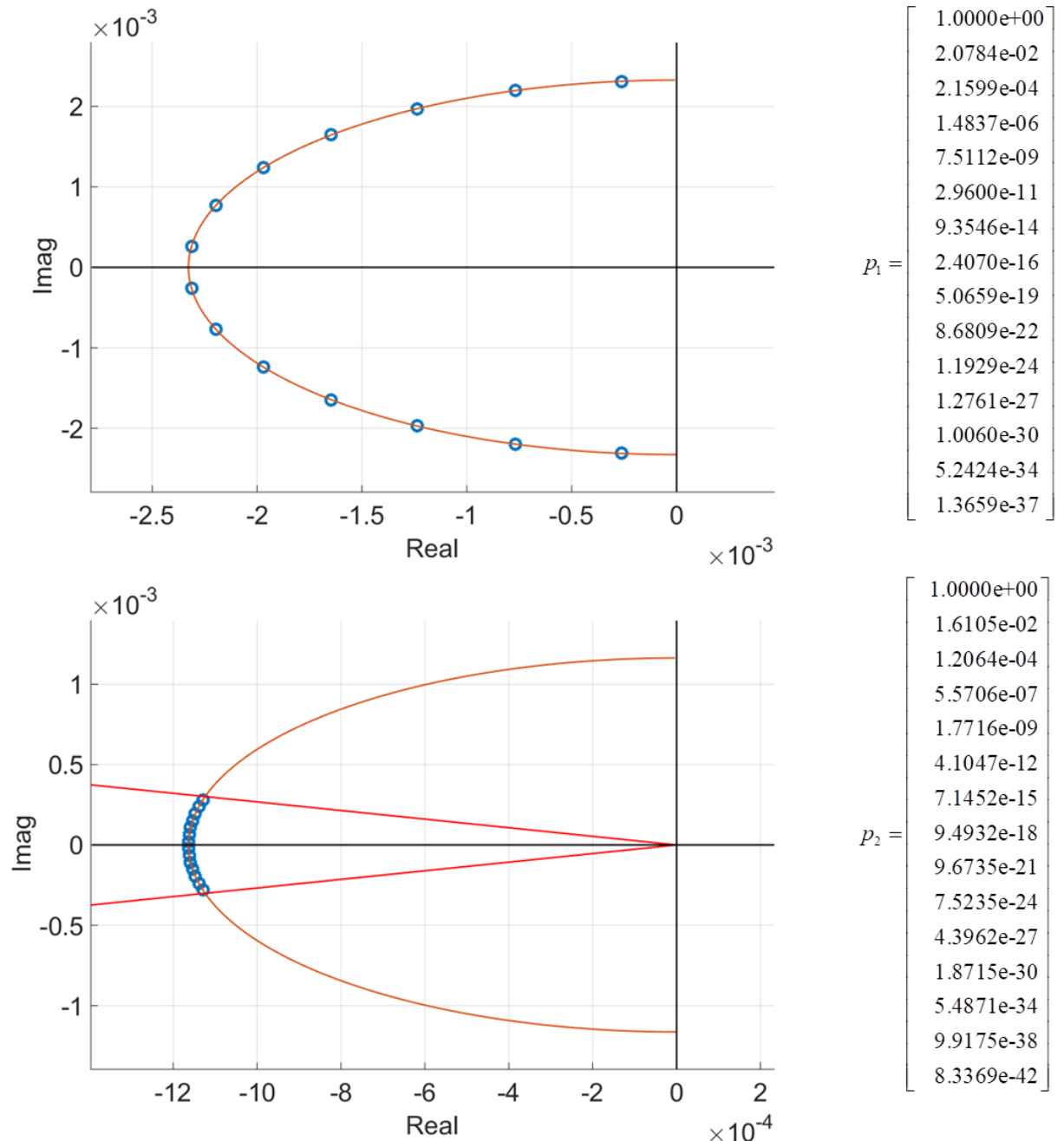


Рис. 2.20 Расположение корней и коэффициенты эталонного полинома для случая 1 (верхний рисунок) и для случая 2 (нижний рисунок).

Используя алгоритм последовательного замыкания, получаем следующие матрицы обратной связи  $D_{1\_alg}$  и  $D_{2\_alg}$  построенные по полиному 1 и по полиному 2 соответственно

$$D_{1\_alg} = \begin{bmatrix} -9.2642e+03 & 5.7158e+03 \\ 2.2672e+06 & -5.8619e+06 \\ 2.7193e-02 & -4.1871e-02 \\ 4.6806e-06 & 3.1351e-05 \\ 2.9367e+03 & -2.8407e+03 \\ -1.1700e+07 & 1.0268e+07 \\ -6.6631e-02 & 6.4046e-02 \\ -3.0921e-05 & 1.5060e-05 \\ 3.5352e-04 & 8.9431e-03 \\ 1.8997e+01 & -8.8208e+00 \\ -3.4739e-04 & -1.9733e-04 \\ 7.9223e-02 & -1.2335e-01 \\ -6.6505e-03 & 3.2664e-03 \\ -5.2919e-01 & -1.7878e+00 \end{bmatrix}, D_{2\_alg} = \begin{bmatrix} -3.4016e+03 & -4.0010e+01 \\ -1.0579e+06 & 2.7802e+05 \\ -2.2689e-03 & -4.5300e-06 \\ -3.9957e-06 & -1.6083e-07 \\ -5.6192e+04 & -5.4692e+03 \\ -8.1673e+06 & -2.0093e+06 \\ -5.2800e-03 & -1.3821e-04 \\ 4.1534e-07 & 8.3227e-10 \\ 6.4422e-04 & -2.1171e-04 \\ 4.2873e+00 & 1.8422e-01 \\ 5.7898e-02 & -8.5687e-03 \\ 6.3898e+01 & 5.5456e+00 \\ 5.3289e-01 & 8.6280e-02 \\ -1.5005e+02 & 7.4592e+00 \end{bmatrix}.$$

Получим аналогичные матрицы обратной связи при помощи функции `place()`. На вход функции `place()` подаются параметры системы управления «крен рысканье» (матрица системы и матрица управления) и полином для случая 1, а за тем те же параметры и полином для случая 2. Для полинома 1, матрица обратной связи  $D_{1\_place}$  имеет следующий вид:

$$D_{1\_place} = place(A_{\gamma\psi}, B_{\gamma\psi}, p_1) = \begin{bmatrix} 7.1123e+03 & 6.9184e+02 \\ -3.2693e+06 & 7.5876e+04 \\ -1.5286e-02 & -1.0643e-03 \\ 5.2021e-05 & 4.7746e-06 \\ 1.4860e+04 & -5.9218e+03 \\ 9.9665e+06 & -1.2624e+06 \\ 4.2493e-02 & 2.6926e-03 \\ -3.5777e-06 & -1.6987e-06 \\ 1.7167e-03 & 2.3272e-03 \\ 1.0527e+00 & -2.0129e+00 \\ 4.0528e-03 & 3.1582e-03 \\ -3.0967e+00 & -4.0645e-01 \\ -1.2917e-01 & 2.5232e-02 \\ 1.7446e+01 & 1.6500e+00 \end{bmatrix},$$

для полинома 2, алгоритм `place()` выдает ошибку, так как корни полинома расположены слишком близко друг к другу.

Расположение корней замкнутой системы управления «крен-рысканье» методом последовательного замыкания для полинома  $p_1$  и полинома  $p_2$  представлено на рисунке 2.21.

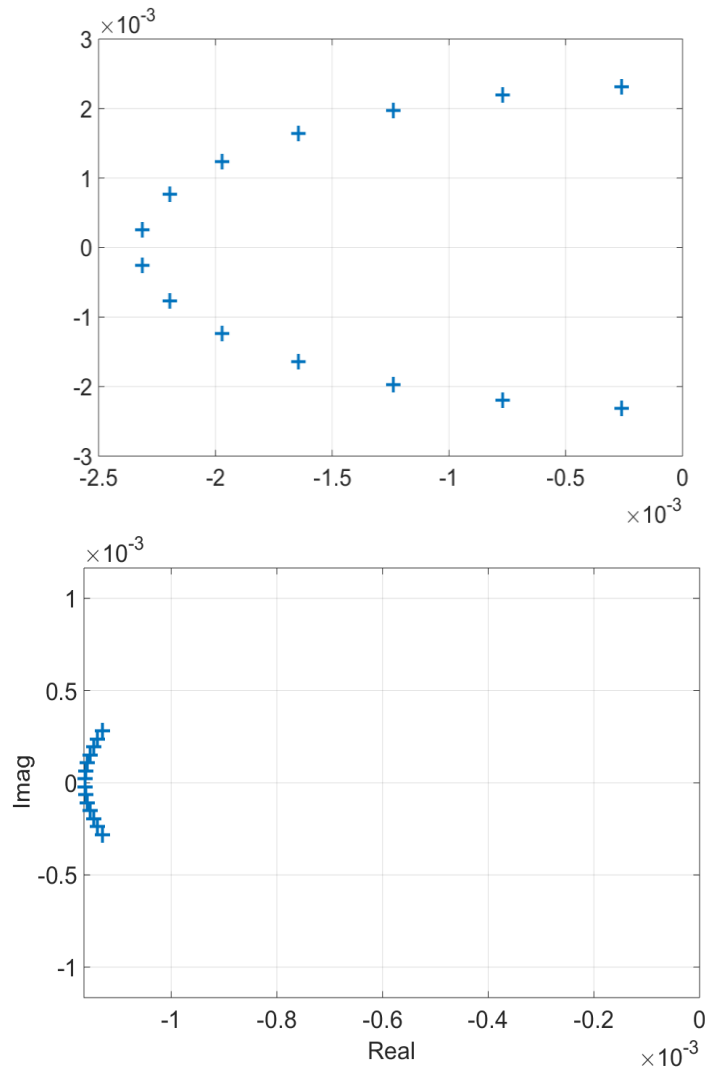


Рис. 2.21 Расположение корней замкнутой системы «крен-рысканье». Обратная связь получена алгоритмом последовательного замыкания. Верхний рисунок – классический полином Баттерворта в качестве эталонного, нижний рисунок – обобщенный полином Баттерворта в качестве эталонного.

Расположение корней замкнутой системы управления «крен-рысканье» при помощи функции `place()` для полинома  $p_1$  представлено рисунке 2.22. В случае, когда на вход функции подавался полином  $p_2$ , MATLAB выдавал следующую ошибку (рис. 2.23)

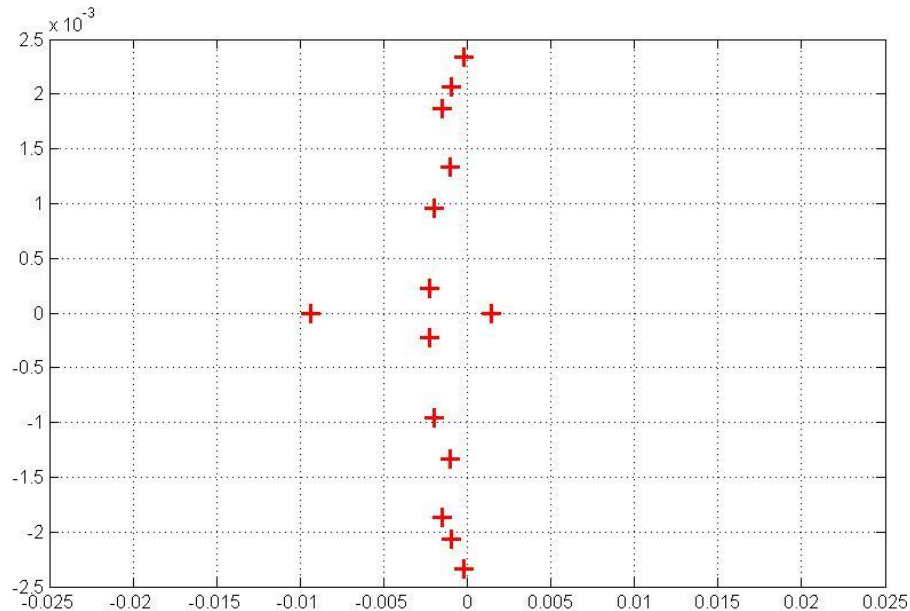


Рис. 2.22 Расположение корней, замкнутой при помощи функции `place()`, системы «крен-рысканье» с эталонным полиномом  $p_1$ .

```
Error using place (line 171)
The "place" command could not place the poles at the specified locations. Probable causes include:
* (A,B) is nearly uncontrollable
* The specified locations are too close to each other.

Error in teanew1 (line 162)
D = place(A,B,f)

fx >>
```

Рис. 2.23 Ошибка, выдаваемая в MATLAB, при попытке подать на вход функции `place()` эталонный полином  $p_2$ .

Как можно видеть из рисунков, расположение корней замкнутой системы, полученной методом последовательного замыкания, намного лучше совпадает с изначальным расположением корней эталонного полинома  $p_1$ , чем при использовании функции `place()`. Более того, по эталонному полиному  $p_2$  функция `place()` вообще не может построить обратную связь и выдает ошибку. Таким образом, можно сделать вывод, что алгоритм

последовательного замыкания достаточно конкурентоспособен и может осуществлять синтез обратной связи для систем большой размерности и без каких-либо ограничений на взаимное расположение корней.

## **2.6 Выводы по главе 2.**

В главе решена задача построения закона управления ориентацией международной космической станции. В основу математической модели динамики МКС были взяты линеаризованные уравнения углового движения космического аппарата, несущего вращающиеся массы с учетом воздействия гравитационного и аэродинамического момента. Проведен анализ различных семейств эталонных полиномов на соответствие критериям качества, таким как степень колебательности и степень устойчивости, в ходе которого для решения задачи модального синтеза систем управления многомерных многосвязных систем были выбраны обобщенные полиномы Баттерворта.

С использованием алгоритма последовательного замыкания методом модального синтеза было получено 2 варианта регуляторов. Первый регулятор соответствовал обобщенному полиному Баттерворта, второй регулятор – классическому полиному Баттерворта. Результаты математического моделирования продемонстрировали как работоспособность алгоритма последовательного замыкания в задачах синтеза регуляторов большой размерности, так и правильность выбора обобщенного полинома Баттерворта как эталонного. Переходный процесс, определяемый корнями обобщенного полинома Баттерворта показывает меньшую колебательность, а так же меньшую начальную амплитуду компонент углов и угловых скоростей МКС, чем переходный процесс, определяемый корнями классического полинома Баттерворта.

Помимо этого в главе, на примере построения регулятора для системы «крен-рысканье» было проведено сравнение точности решения задачи модального синтеза многомерной многосвязной системы методом последовательного замыкания и функцией `place()`, реализованной в

программной среде MATLAB. Задача модального синтеза регулятора с классическим полиномом Баттерворта в качестве эталонного была выполнена как методом последовательного замыкания, так и функцией `place()`. При этом расположение корней замкнутой системы «крен-рысканье», построенной при помощи функции `place()` совершенно не соответствует корням эталонного полинома, который был изначально задан, более того один корень данной системы вообще находится правее мнимой оси, что говорит о потере устойчивости данной системы управления. С задачей модального синтеза регулятора, с обобщенным полиномом Баттерворта в качестве эталонного функция `place()` не справилась, выдав ошибку. Алгоритм последовательного замыкания успешно справился как с первой, так и со второй тестовой задачей, достаточно точно разместив корни замкнутой системы в заданных местах. Данные результаты демонстрируют высокую конкурентоспособность представляемого в диссертации численного алгоритма модального синтеза многомерных многосвязных систем, а так же его применимость к синтезу систем управления с большой размерностью вектора состояния и специфическим расположением корней эталонного полинома.

Результаты, полученные в данной главе, получены в соавторстве с научным руководителем Тимаковым С.Н. и были использованы как в бортовых алгоритмах управления МКС, так и в алгоритмах, интегрированных в наземный комплекс отладки бортового программного обеспечения для эмуляции системы управления американским сегментом МКС в режиме *momentum management*.

# ГЛАВА 3. СИНТЕЗ АДАПТИВНОГО АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАТФОРМЫ С ВРАЩАЮЩИМСЯ СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ.

Данная глава посвящена разработке алгоритма управления ориентацией КА с вращающимся солнечным парусом. В долгосрочной перспективе группировку космических аппаратов подобного типа можно использовать для таких задач как освещение заполярных областей Земли. В подобной задаче, солнечный парус выступает в роли так называемого «зеркала», отражающего поток солнечного света и направляющего отраженные лучи на заданную освещаемую область поверхности Земли. В связи орбитальным движением спутника рефлектора, а так же собственного вращения Земли для непрерывного освещения заданной области аппарату необходимо постоянно поддерживать необходимую ориентацию: вектор нормали к поверхности паруса должен быть всегда направлен по биссектрисе угла между направлением на Солнце и направлением на освещаемую точку.

Для эффективного решения задачи освещения заданной точки на поверхности Земли даже для спутника, находящегося на низкой околоземной орбите характерный размер паруса должен составлять не менее 100 метров. Подобные габариты элементов конструкции КА делают угловые маневры крайне затруднительными и требующими огромный расход рабочего тела.

Одно из решений проблемы управлением ориентацией крупногабаритной конструкцией КА, представляющего собой космическую платформу с вращающимся солнечным парусом было представлено в монографии [46]. Космическая платформа с солнечным парусом



представляла собой собственно вращающийся солнечный парус в виде пленочного диска с центральной жесткой вставкой, приборный отсек с датчиковой аппаратурой и компенсирующий силовой гироскоп в подвесе Гука (внутреннем кардановом подвесе). Внутренний карданов подвес обладал управляемыми и контролируемыми углами поворота, что позволяло отклонять ось вращения ротора гироскопа от оси вращения центральной жесткой вставки паруса для создания управляющего гироскопического момента. Центральная вставка выполнена в виде вантовой конструкции и служит для передачи момента импульса солнечного паруса приборному отсеку. Концепция управлением ориентацией платформы заключалась в том, что 99.9% массы пленочного диска солнечного паруса совершала колебания на первом кососимметричном тоне, что позволяло с большой степенью точности заменить динамическое движение пленочного диска паруса динамикой одного гироскопа в упругом подвесе. Таким образом, силовой гироскоп и вращающийся парус образовывали так называемую спарку – систему с двойным вращением, состоящую из двух гироскопов с противоположными осями вращения ротора. Данная система обладала большим скрытым кинетическим моментом, что позволяло быстро и эффективно менять ориентацию столь габаритного аппарата, не расходуя при этом рабочее тело. В этой главе, на основе предложенной в монографии концепции аппарата с двойным вращением, будет представлен алгоритм управления ориентацией для космической платформы с вращающимся солнечным парусом.

Построение системы управления угловым движением КА с подобной конструкцией имеет ряд трудностей. Во-первых, для синтеза алгоритма, обеспечивающего устойчивое угловое движение такого КА, требуется измерять не только компоненты его ориентации и угловой скорости, но ориентацию и угловую скорость колебаний пленочного диска солнечного паруса. Во-вторых, для построения правильной математической модели движения платформы требуется достаточно точно знать ряд параметров,

определяющихся конструкцией КА. В данной задаче изначально неизвестна эффективная жесткость центральной вставки солнечного паруса, теоретическое значение которой можно рассчитать с точностью порядка 30%. Эти два фактора ведут к необходимости использовать в контуре управления угловым движением аппарата элементы адаптивного управления с настраиваемой бортовой моделью.

Адаптивное управление с настраиваемой моделью является одним из актуальных направлений разработки алгоритмов управления движением летательных аппаратов. Суть адаптивного подхода заключается в одновременном изучении объекта, обладающего параметрической неопределенностью и управления им. В рассматриваемой в данной главе задаче параметрическую неопределенность объекту управления, как уже было сказано ранее, придает неизвестное значение эффективной жесткости центральной вставки пленочного диска паруса. Так же неопределенность вносит тот факт, что переменные движения КА, отвечающие за колебания пленочного диска паруса, не поддаются *прямому измерению*. Таким образом, рассматриваемый в данной главе адаптивный алгоритм управления космической платформой с большим солнечным парусом должен обеспечить как устойчивость динамического поведения КА, так и сходимости неизвестных переменных движения и параметров математической модели КА к их фактическим значениям.

Для поиска матрицы обратной связи и матрицы весовых коэффициентов, входящих в адаптивный алгоритм управления будет использован численный метод модального синтеза, рассмотренный в первой главе.

### 3.1 Описание конструкции космической платформы с вращающимся солнечным парусом.

Базовая конструкция космической платформы включает в себя вращающийся солнечный парус, приборный отсек с датчиковой аппаратурой и силовой гироскоп (рис. 3.1).

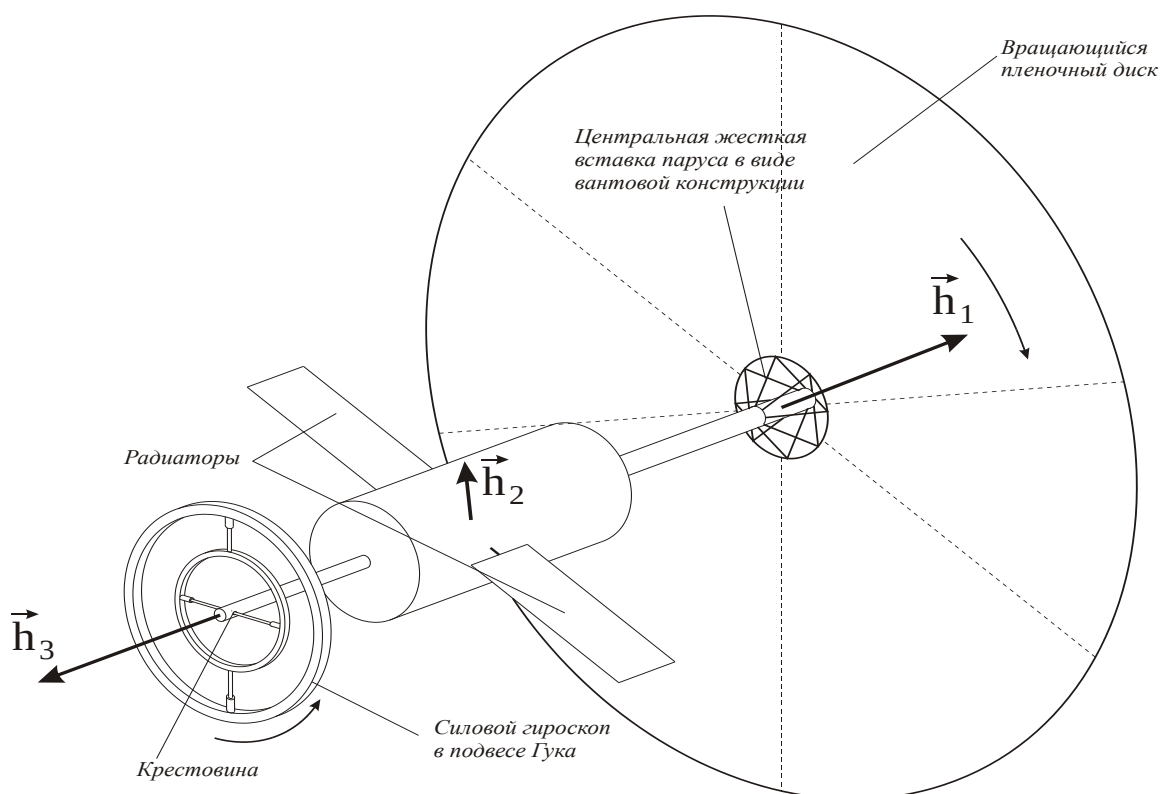


Рис. 3.1 Базовая конструкция космической платформы с вращающимся солнечным парусом.

В основу управления угловым движением космической платформы с большим вращающимся солнечным парусом положена известная схема спаренных силовых гироскопов. Одним из гироскопов является вращающийся солнечный парус в виде большого мембранного диска с центральной жесткой вставкой (вставка, выполненная в виде вантовой конструкции, необходима для передачи момента импульса корпусу аппарата). Второй представляет собой вращающийся в противоположном

направлении жесткий силовой гироскоп в подвесе Гука (далее по тексту компенсирующий гироскоп) с регулируемыми углами поворота оси вращения ротора и регулируемой угловой скоростью его вращения. Ротор приводится в движение вращающимся электромагнитным полем, увлекающим за собой магнитный материал ротора (например, сплав NdFeB) в соответствии с принципом работы вентильного электродвигателя. Таким образом, гиросистема платформы обладает *скрытым* кинетическим моментом, а сама платформа относится к классу аппаратов с двойным вращением. Тороидальный ротор компенсирующего гироскопа может поворачиваться вокруг взаимно перпендикулярных осей крестовины подвеса Гука, жестко связанных с корпусом приборного отсека платформы. В положении требуемой инерциальной ориентации КА оси вращения паруса и ротора компенсирующего гироскопа должны быть параллельны, векторы их собственных кинетических моментов равны по модулю и противоположно направлены, а кинетический момент корпуса аппарата должен равняться нулю. Для осуществления угловых маневров плоскость вращения ротора компенсирующего гироскопа отклоняется от плоскости вращения центральной вставки паруса. При этом векторы кинетических моментов паруса и гироскопа уже не параллельны друг другу. Геометрическая сумма этих векторов не равна нулю и, в силу сохранения суммарного кинетического момента, первоначально равного нулю, должна быть скомпенсирована противоположно направленным вектором. Этот вектор и задает направление разворота всей конструкции, которая совершает управляемое прецессионное движение с перманентным активным подавлением нутационных колебаний. Ось поворота ротора должна быть ортогональна как к требуемому направлению вектора разворота аппарата, так и к его продольной оси, проходящей через центры вращения паруса и компенсирующего гироскопа.

Существенным достоинством метода управления угловым движением, использующего скрытый кинетический момент в сравнении с другими

методами, является то, что с его помощью можно эффективно управлять угловым движением КА, имеющих большие и очень большие габариты и, соответственно, моменты инерции. В целом создание систем управления крупногабаритными космическими конструкциями с двойным вращением позволяет осуществлять планомерное движение к решению следующих задач: преобразование и ретрансляция энергии; теле- и радиосвязь; создание космических электростанций; освещение районов Земли отраженным солнечным светом; создание параболических концентраторов и радиоантенн; очистка космоса от техногенного мусора; освоение точек Лагранжа с неустойчивым положением равновесия (здесь устойчивость может быть обеспечена силами солнечного давления).

Опишем некоторые параметры элементов конструкции космической платформы. Рабочая поверхность солнечного паруса представляет собой в развернутом состоянии сплошной пленочный диск радиусом  $R=50$  м. Радиус центральной жесткой вставки, выполненной в виде вантовой конструкции, равен  $a=5$  м. Толщина полиамидной пленки (с учетом массы тонкопленочных GaAs-преобразователей энергии фотонов в электрическую) составляет  $7,5 \cdot 10^{-6}$  м (аналогично пленке на аппарате *IKAROS*), [44] и плотность материала  $\rho = 1,4 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Диск вращается с угловой скоростью  $\Omega = 0,5$  рад/с (4,77 об/мин), вследствие чего материал паруса находится в напряженно-деформированном состоянии. Площадь паруса равна приблизительно  $7\,800$  м<sup>2</sup>, масса – 82 кг, осевой момент инерции паруса  $A \approx mR^2 / 2 \approx 82 \text{ кг} \cdot (50 \text{ м})^2 / 2 \approx 102\,375 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ; кинетический момент паруса  $A\Omega \approx 51\,000 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ .

Для компенсации столь большого кинетического момента понадобится компенсирующий гироскоп с таким же по значению кинетическим моментом. Для получения максимально возможного осевого момента инерции и, как следствие, максимального кинетического момента при жестких ограничениях по массе в качестве силового гироскопа был

предложен тороидаальный ротор. При массе тороидаального ротора 140 кг, диаметре поперечного сечения 5 см и радиусе роторного кольца  $r_{\text{рот}}=1,5$  м (ограничение на габариты гироскопа лимитируются размерами выводимой на орбиту полезной нагрузки под обтекателем ракеты-носителя) скорость вращения ротора должна составлять  $\omega_{\text{рот}}=162$  рад/с = 1 547 об/мин. При такой угловой скорости вращения стальное роторное кольцо испытывает напряжение на разрыв

$$\sigma = \rho_{\text{сталь}} r_{\text{рот}}^2 \omega_{\text{рот}}^2 = 7900 \text{ кг} / \text{м}^3 \cdot (1.5 \text{ м})^2 \cdot (162 \text{ с}^{-1})^2 \approx 466.5 \text{ МПа},$$

что примерно в два раза меньше предела прочности на разрыв многих сортов стали в широком диапазоне температур от – 200 до +600 °С [45].

### **3.2 Вывод линеаризованных уравнения движения**

Введем систему координат OXYZ, так чтобы оси координат были связаны с осями чувствительности датчиковой аппаратуры (рис 3.2). Ось OX направим в сторону вращения ротора силового гироскопа, ось OY будет лежать в плоскости вращения центральной вставки, а ось OZ будет дополнять систему координат до правой тройки [48].

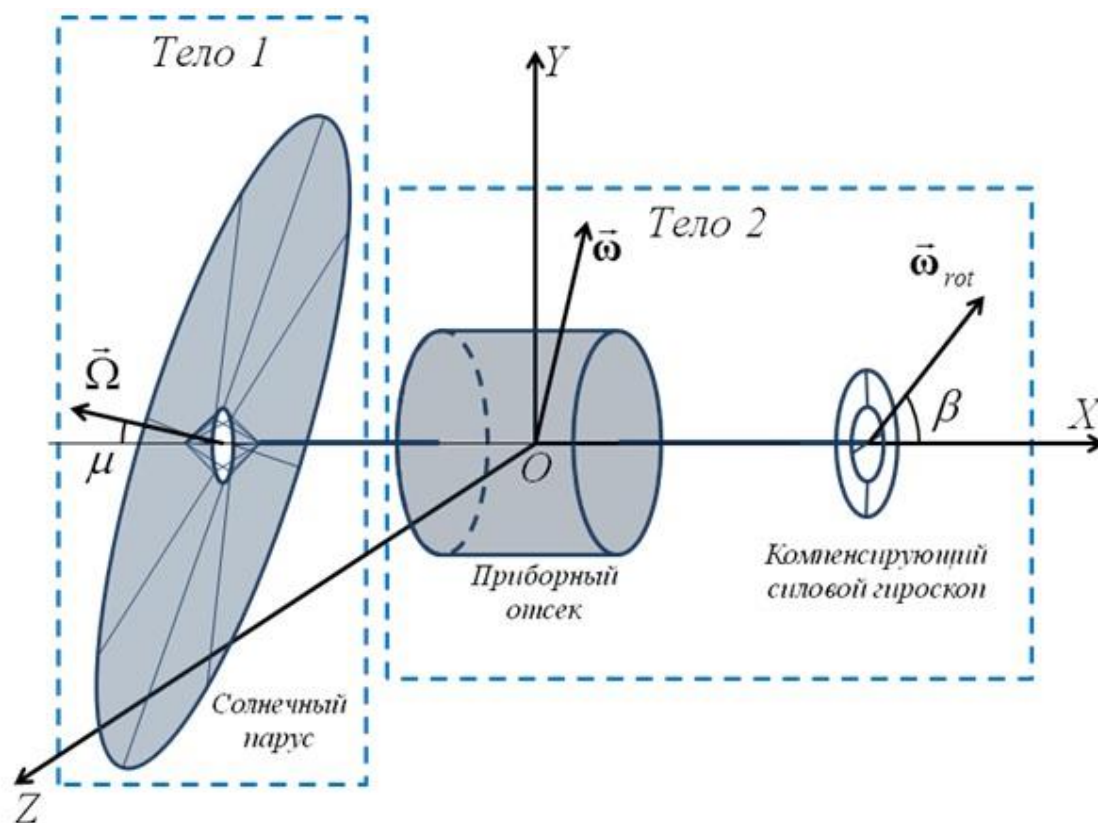


Рис. 3.2 Динамическая схема объекта управления.

Для описания динамики объекта управления «разобьем» его на 2 тела: тело 1 – солнечный парус, тело 2 – приборный отсек и силовой гироскоп в подвесе Гука (рис 3.2).

Рассмотрим тело 1. Как уже было сказано ранее, динамическое поведение солнечного паруса можно с большой точностью описать динамикой одного гироскопа в упругом подвесе. Исходя из этого, выражение, описывающее кинетический момент тела 1 будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{M}\mathbf{J}_1(\mathbf{\Omega} + \mathbf{M}^T\mathbf{\omega}),$$

где  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -\mu_z & \mu_y \\ \mu_z & 1 & -\mu_x \\ -\mu_y & \mu_x & 1 \end{bmatrix}$  – матрица малого поворота вектора угловой

скорости,  $\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} J_A & 0 & 0 \\ 0 & J_C & 0 \\ 0 & 0 & J_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102375 & 0 & 0 \\ 0 & 51187.5 & 0 \\ 0 & 0 & 51187.5 \end{bmatrix} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  – приведенный

момент инерции паруса ( $J_A = 2J_C$ ),  $\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_x \\ \dot{\phi}_y \\ \dot{\phi}_z \end{bmatrix}$  – угловая скорость КА,

$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} -\Omega + \dot{\mu}_x \\ \dot{\mu}_y \\ \dot{\mu}_z \end{bmatrix}$  относительная угловая скорость вращения паруса ( $\Omega = 0.5 \text{ рад/с}$ ).

Кинетический момент тела 2 равен

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega} + \mathbf{V} \mathbf{H},$$

где  $\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 & 0 & 0 \\ 0 & 1200 & 0 \\ 0 & 0 & 1200 \end{bmatrix} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  – момент инерции КА (далее

положим  $J_y = J_z = J$ ),  $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_z & \beta_y \\ \beta_z & 1 & -\beta_x \\ -\beta_y & \beta_x & 1 \end{bmatrix}$  – матрица малого поворота вектора

угловой скорости ротора гироскопа,  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  – кинетический момент ротора

силового гироскопа в связанной с ним системе координат ( $H = A\Omega$  согласно закону сохранения кинетического момента).

Применяя теорему об изменении кинетического момента ко всему объекту управления и отдельно к парусу и пренебрегая моментами сил солнечного давления, получим следующую систему уравнений, описывающую динамику движения КА

$$\begin{cases} (\dot{\mathbf{h}}_1 + \dot{\mathbf{h}}_2) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) = \mathbf{0}; \\ \dot{\mathbf{h}}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}_1 = -k^2 J_C \boldsymbol{\mu} \end{cases};$$

коэффициент эффективной жесткости центральной вставки  $k^2$  считается неизвестным, приблизительное теоретическое значение которого вычисляется по формуле [46]:

$$k^2 \approx \frac{(3+\varepsilon)^2 a^2}{2(1+\varepsilon)R^2} \Omega^2 \approx 0.01 \text{ с}^{-2},$$



где  $\varepsilon = 0.4$  - коэффициент Пуассона,  $a = 5\text{м}$  и  $R = 50\text{м}$  соответственно внутренний и внешний радиус пленочного диска солнечного паруса [47].

Расписывая уравнения закона сохранения момента импульса покомпонентно, проведя линеаризацию с точностью до второго порядка малости, а также полагая, что вокруг оси ОХ система управления достаточно точно удерживает аппарат, получаем уравнения движения КА вокруг осей ОУ и ОZ.

$$\begin{cases} \Omega \dot{\mu}_z + \ddot{\mu}_y + (1 + \frac{J}{J_C}) \dot{\omega}_y + 2\Omega \dot{\beta}_z = 0 \\ -\Omega \dot{\mu}_y + \ddot{\mu}_z + (1 + \frac{J}{J_C}) \dot{\omega}_z - 2\Omega \dot{\beta}_y = 0 \\ 2\Omega \dot{\mu}_z + \ddot{\mu}_y + \dot{\omega}_y - 2\Omega \omega_z + k^2 \mu_y = 0 \\ -2\Omega \dot{\mu}_y + \ddot{\mu}_z + \dot{\omega}_z + 2\Omega \omega_y + k^2 \mu_z = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

### **3.3 Переход в пространство состояний. Описание адаптивного наблюдателя.**

Приступим к описанию линеаризованных уравнений углового движения космической платформы с вращающимся солнечным парусом в пространстве состояний. В качестве переменных вектора состояния возьмем компоненты угловой скорости КА как твердого тела  $\omega_y$  и  $\omega_z$ , а так же углы и угловые скорости колебания 1-го тона пленочного диска солнечного паруса -  $\mu_y$ ,  $\mu_z$ ,  $\dot{\mu}_y$ ,  $\dot{\mu}_z$ . В роли управляющего воздействия в данной задаче выступают скорости прецессии силового гироскопа в подвесе Гука вокруг осей ОУ и ОZ -  $\dot{\beta}_y$  и  $\dot{\beta}_z$ .

Таким образом, вектор состояния и вектор управления для исследуемой системы будут иметь следующий вид

$$\mathbf{x}_s = [\omega_y \quad \omega_z \quad \mu_y \quad \dot{\mu}_y \quad \mu_z \quad \dot{\mu}_z]^T,$$

$$\mathbf{u}_s = (\dot{\beta}_y \quad \dot{\beta}_z)^T;$$

а система (3.1) в пространстве состояний будет описываться следующим уравнением:

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{B}_s \mathbf{u}_s \quad (3.2)$$

Где  $\mathbf{A}_s =$  
$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2\Omega J_c}{J} & \frac{J_c k^2}{J} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\Omega J_c}{J} & 0 & 0 & 0 & \frac{J_c k^2}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2(1 + \frac{J_c}{J})\Omega & -k^2(1 + \frac{J_c}{J}) & 0 & 0 & 2\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2(1 + \frac{J_c}{J})\Omega & 0 & 0 & -2\Omega & -k^2(1 + \frac{J_c}{J}) & 0 \end{bmatrix}$$
 –

матрица системы,

$$\mathbf{B}_s = \frac{2\Omega J_c}{J} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ - матрица управления.}$$

Перейдем от дифференциальных уравнений к конечно-разностным. Рассмотрим решение уравнения (3.2)

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}_s \mathbf{u}(\tau) d\tau,$$

где  $\Phi(t, t_0)$  – фундаментальная матрица решений, которая расписывается следующим образом через матричную экспоненту [30]

$$\Phi(t, t_0) = e^{\mathbf{A}_s(t-t_0)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\mathbf{A}_s(t-t_0))^i = \mathbf{I} + \mathbf{A}_s(t-t_0) + \frac{\mathbf{A}_s^2(t-t_0)^2}{2} + \dots$$

Если известно значение вектора состояния в момент времени  $t_0$ , то в момент  $t_0 + h$  вектор состояния определяется следующим выражением

$$\mathbf{x}(t_0 + h) = e^{\mathbf{A}_s h} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+h} e^{\mathbf{A}_s(t_0+h-\tau)} \mathbf{B}_s \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (3.3)$$

При достаточно малых значениях  $h$  выражение (3.3) можно описать в приближенной форме следующим образом

$$\mathbf{x}(t_0 + h) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}_s h) \mathbf{x}(t_0) + h \mathbf{B}_s \mathbf{u}(t_0). \quad (3.4)$$

Обозначим в (3.4)  $\mathbf{x}(t_0)$  как  $\mathbf{x}_n$  (вектор состояния на  $n$ -ном такте),  $\mathbf{x}(t_0 + h) = \mathbf{x}_{n+1}$  (вектор состояния на такте  $n+1$ ),  $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}(t_0)$  - вектор управления на  $n$ -ном такте,  $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{A}_s h$  - матрица переходных состояний,  $\mathbf{B} = h \mathbf{B}_s$  - матрица управления для дискретной системы. В результате получим следующую систему конечно-разностных уравнений, описывающую динамику объекта управления

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_y^{n+1} = \omega_y^n - \frac{2\Omega J_c h}{J} \omega_z^n + \frac{J_c k^2 h}{J} \mu_y^n - \frac{2\Omega J_c h}{J} \dot{\beta}_z^n \\ \omega_z^{n+1} = \omega_z^n + \frac{2\Omega J_c h}{J} \omega_y^n + \frac{J_c k^2 h}{J} \mu_z^n + \frac{2\Omega J_c h}{J} \dot{\beta}_y^n \\ \mu_y^{n+1} = \mu_y^n + h \dot{\mu}_y^n \\ \dot{\mu}_y^{n+1} = \dot{\mu}_y^n + 2(1 + \frac{J_c}{J}) \Omega h \omega_z^n - k^2 (1 + \frac{J_c}{J}) h \mu_y^n + 2\Omega h \dot{\mu}_z^n + \frac{2\Omega J_c h}{J} \dot{\beta}_z^n \\ \mu_z^{n+1} = \mu_z^n + h \dot{\mu}_z^n \\ \dot{\mu}_z^{n+1} = \mu_z^n - 2(1 + \frac{J_c}{J}) \Omega h \omega_y^n - k^2 (1 + \frac{J_c}{J}) h \mu_z^n - 2\Omega h \dot{\mu}_y^n - \frac{2\Omega J_c h}{J} \dot{\beta}_y^n \end{array} \right. ; \quad (3.5)$$

или в матричном виде

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_n + \mathbf{B} \mathbf{u}_n ; \quad (3.6)$$

$$\text{Где } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2h\Omega J_c}{J} & \frac{hJ_c k^2}{J} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2h\Omega J_c}{J} & 1 & 0 & 0 & \frac{hJ_c k^2}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h & 0 & 0 \\ 0 & 2h(1 + \frac{J_c}{J})\Omega & -hk^2(1 + \frac{J_c}{J}) & 1 & 0 & 2h\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h \\ -2h(1 + \frac{J_c}{J})\Omega & 0 & 0 & -2h\Omega & -hk^2(1 + \frac{J_c}{J}) & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_s = \frac{2h\Omega J_c}{J} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Перейдем к описанию настраиваемой бортовой модели КА, которую в дальнейшем будем называть в соответствии с общепринятой терминологией *адаптивным наблюдателем*. В данном случае уравнения адаптивного наблюдателя в конечно-разностной форме имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\omega}_y^{n+1} = \hat{\omega}_y^n - \frac{2\Omega J_c h}{J} \hat{\omega}_z^n + \frac{J_c \hat{K}^n h}{J} \hat{\mu}_y^n - \frac{2\Omega J_c h}{J} \dot{\beta}_z^n + W_{11}(\omega_y^n - \hat{\omega}_y^n) + W_{12}(\omega_z^n - \hat{\omega}_z^n) \\ \hat{\omega}_z^{n+1} = \hat{\omega}_z^n + \frac{2\Omega J_c h}{J} \hat{\omega}_y^n + \frac{J_c \hat{K}^n h}{J} \hat{\mu}_z^n + \frac{2\Omega J_c h}{J} \dot{\beta}_y^n + W_{21}(\omega_y^n - \hat{\omega}_y^n) + W_{22}(\omega_z^n - \hat{\omega}_z^n) \\ \hat{\mu}_y^{n+1} = \hat{\mu}_y^n + h \dot{\mu}_y^n + W_{31}(\omega_y^n - \hat{\omega}_y^n) + W_{32}(\omega_z^n - \hat{\omega}_z^n) \\ \hat{\mu}_y^{n+1} = \dot{\mu}_y^n + 2(1 + \frac{J_c}{J})\Omega h \hat{\omega}_z^n - \hat{K}^n (1 + \frac{J_c}{J})h \hat{\mu}_y^n + \\ + 2\Omega h \dot{\mu}_z^n + \frac{2\Omega J_c h}{J} \dot{\beta}_z^n + W_{41}(\omega_y^n - \hat{\omega}_y^n) + W_{42}(\omega_z^n - \hat{\omega}_z^n) \\ \hat{\mu}_z^{n+1} = \hat{\mu}_z^n + h \dot{\mu}_z^n + W_{51}(\omega_y^n - \hat{\omega}_y^n) + W_{52}(\omega_z^n - \hat{\omega}_z^n) \\ \hat{\mu}_z^{n+1} = \dot{\mu}_z^n - 2(1 + \frac{J_c}{J})\Omega h \hat{\omega}_y^n - \hat{K}^n (1 + \frac{J_c}{J})h \hat{\mu}_z^n - 2\Omega h \dot{\mu}_y^n - \\ - \frac{2\Omega J_c h}{J} \dot{\beta}_y^n + W_{61}(\omega_y^n - \hat{\omega}_y^n) + W_{62}(\omega_z^n - \hat{\omega}_z^n) \\ \hat{K}^{n+1} = \hat{K}^n + W_{71}(\omega_y^n - \hat{\omega}_y^n) + W_{72}(\omega_z^n - \hat{\omega}_z^n) \end{array} \right. ; \quad (3.7)$$

где  $W_{ij}$  - элементы матрицы весовых коэффициентов, обеспечивающие сходимость оценки вектора состояния к его реальному значению,  $\hat{x}_i^n$  - компоненты оценок вектора состояния на  $n$ -ном такте,  $\hat{K}^n$  - оценка коэффициента эффективной жесткости центральной вставки ( $k^2$ ) на  $n$ -ном такте. Последнее уравнение системы (3.7) представляет собой выражение градиентного спуска, а коэффициенты  $W_{9i}$  отвечают за скорость сходимости оценок неизвестного параметра системы (эффективной жесткости) к его реальному значению.

В матричном виде уравнение бортовой модели будет иметь вид, аналогичный описанному в предыдущем параграфе:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{n+1} &= \hat{\mathbf{A}}_n \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{B} \mathbf{u}_n + \mathbf{W}(\mathbf{y}_n - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_n), \\ \mathbf{y}_n &= \mathbf{C} \mathbf{x}_n\end{aligned}$$

где  $\hat{\mathbf{x}}_n = [\hat{\omega}_y^n \quad \hat{\omega}_z^n \quad \hat{\mu}_y^n \quad \dot{\hat{\mu}}_y^n \quad \hat{\mu}_z^n \quad \dot{\hat{\mu}}_z^n \quad \hat{K}^n]^T$  - вектор оценок, содержащий оценки компонент вектора состояния и неизвестных параметров системы (в данном случае  $\hat{K}^n$ ),  $\mathbf{y}_n$  - вектор измерений,  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  -

матрица измерений,  $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{21} & W_{31} & W_{41} & W_{51} & W_{61} & W_{71} \\ W_{12} & W_{22} & W_{32} & W_{42} & W_{52} & W_{62} & W_{72} \end{bmatrix}^T$  матрица

весовых коэффициентов,  $\hat{\mathbf{A}}_n$  - матрица системы для бортовой модели

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & -\frac{2h\Omega J_c}{J} & \frac{hJ_c \hat{K}_n}{J} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2h\Omega J_c}{J} & 1 & 0 & 0 & \frac{hJ_c \hat{K}_n}{J} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2h(1 + \frac{J_c}{J})\Omega & -h\hat{K}_n(1 + \frac{J_c}{J}) & 1 & 0 & 2h\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h & 0 \\ -2h(1 + \frac{J_c}{J})\Omega & 0 & 0 & -2h\Omega & -h\hat{K}_n(1 + \frac{J_c}{J}) & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Вычитая из уравнения (3.6) уравнение (3.7), запрограммированного в бортовом компьютере, получим уравнения в невязках:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = (\mathbf{A}_k - \mathbf{W}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}_n.$$

Здесь вектор  $\tilde{\mathbf{x}}_n = [\tilde{\omega}_y^n \quad \tilde{\omega}_z^n \quad \tilde{\mu}_y^n \quad \dot{\tilde{\mu}}_y^n \quad \tilde{\mu}_z^n \quad \dot{\tilde{\mu}}_z^n \quad \tilde{K}^n]^T$  - вектор невязок, содержащий невязки как по переменным состояния, так и по неизвестному параметру системы -  $\tilde{K}^n$ . Матрица  $\mathbf{A}_k$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{A}_k = \left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & -\frac{2h\Omega J_c}{J} & \frac{hJ_c \hat{K}_n}{J} & 0 & 0 & 0 & \frac{hJ_c \hat{\mu}_y^n}{J} \\ \frac{2h\Omega J_c}{J} & 1 & 0 & 0 & \frac{hJ_c \hat{K}_n}{J} & 0 & \frac{hJ_c \hat{\mu}_z^n}{J} \\ 0 & 0 & 1 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2h(1 + \frac{J_c}{J})\Omega & -h\hat{K}_n(1 + \frac{J_c}{J}) & 1 & 0 & 2h\Omega & -h\hat{\mu}_y^n(1 + \frac{J_c}{J}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h & 0 \\ -2h(1 + \frac{J_c}{J})\Omega & 0 & 0 & -2h\Omega & -h\hat{K}_n(1 + \frac{J_c}{J}) & 1 & -h\hat{\mu}_z^n(1 + \frac{J_c}{J}) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Как можно заметить матрица  $\mathbf{A}_k$  содержит компоненты вектора оценок переменных состояния, а так же оценку эффективной жесткости -  $\hat{K}_n$ , что делает задачу построения адаптивного закона управления нелинейной. Поэтому сделаем допущение, что оценки переменных вектора состояния и неизвестного параметра – медленно меняющиеся во времени величины и будем рассматривать задачу в квазистатической постановке.

Дополним рассматриваемую систему законом управления:  $\mathbf{u}_n = -\mathbf{D}\hat{\mathbf{x}}_n$ ,

где  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \end{bmatrix}$  - матрица обратной связи, коэффициенты

которой определяются условием устойчивости замкнутой системы.

Всю полную систему управления с учетом настраиваемой бортовой модели, а так же с учетом обратной связи можно описать следующим матричным уравнением:

$$\mathbf{x}_e^{n+1} = \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e^n = \left[ \begin{array}{cc|c} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D} & \mathbf{B}\mathbf{D} & \mathbf{0}_{6 \times 1} \\ \hline \mathbf{0}_{7 \times 6} & \mathbf{A}_k - \mathbf{W}\mathbf{C} & \end{array} \right] \mathbf{x}_e^n,$$

где  $\mathbf{x}_e = [\mathbf{x}^T \quad \tilde{\mathbf{x}}^T]^T$  - расширенный вектор состояния, содержащий компоненты вектора состояния, невязки переменных состояния, а так же невязку неизвестного настраиваемого параметра системы.

### **3.4 Модальный синтез системы управления. Поиск матрицы обратной связи и матрицы весовых коэффициентов.**

Перейдем непосредственно к построению регулятора и адаптивного наблюдателя для исследуемой динамической системы, то есть к поиску матриц **D** и **W**.

В качестве эталонного полинома как для корней регулятора, так и для корней адаптивного наблюдателя выберем «обобщенный» полином Баттерворта:

$$\prod_{k=1}^n \left( s - \omega_c e^{j \left( \frac{\varphi(2k+n-1)}{2n} + \pi \right)} \right).$$

В данной задаче обобщенный полином Баттерворта был выбран в качестве эталонного с целью обеспечения робастности динамической системе. Как уже упоминалось ранее, значение коэффициента приведенной жесткости центральной вставки солнечного паруса точно не известно, поэтому система управления должна быть сохранять устойчивость при некотором разбросе значений данного неизвестного коэффициента. У классического полинома Баттерворта одна пара корней находится достаточно близко к мнимой оси и при некоторых изменениях коэффициента жесткости эти корни могут «уползти» в правую полуплоскость, что сделает систему управления неустойчивой. У обобщенного же полинома Баттерворта с  $\varphi = \pi / 2$  все пары корней находятся далеко от мнимой оси, что обеспечивает робастность замкнутой системе, то есть сохранение устойчивости при изменениях параметров.

Начнем построение системы управления с синтеза регулятора. Положим, что значение приведенной жесткости  $k^2$  нам известно с погрешностью в 30% и составляет  $0.007c^{-2}$ . Параметры обобщенного

полинома Баттерворта возьмем следующие:  $\omega_c = 2, \varphi = \pi/2$ . Расположение корней данного эталонного полинома будет следующим:

$$\Lambda_s^* = \begin{bmatrix} -1.5867 - 1.2175i \\ -1.5867 + 1.2175i \\ -1.8478 - 0.7654i \\ -1.8478 + 0.7654i \\ -1.9829 - 0.2611i \\ -1.9829 + 0.2611i \end{bmatrix}.$$

На комплексной  $s$ -плоскости корни эталонного полинома выглядят следующим образом (рис. 3.3)

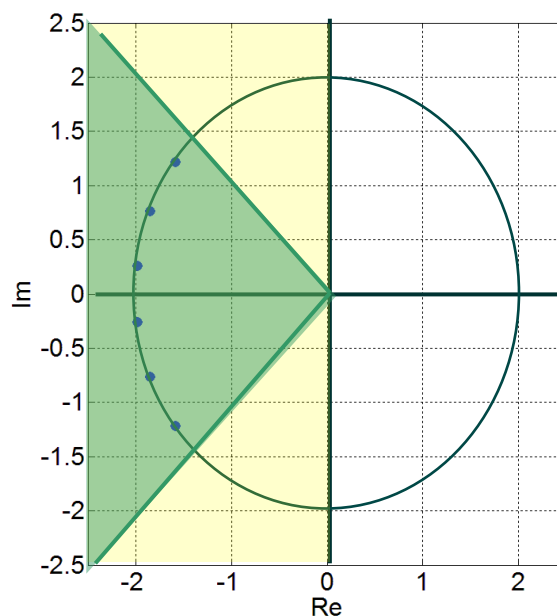


Рис. 3.3 Расположение корней эталонного полинома для синтеза регулятора на комплексной  $s$ -плоскости.

Поскольку исследуемая система управления дискретная, применим следующее билинейное преобразование

$$s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

для того чтобы получить эквивалентное расположение корней на комплексной  $z$ -плоскости.



$$\Lambda_z^* = \begin{bmatrix} 0.7073 - 0.1794i \\ 0.7073 + 0.1794i \\ 0.6811 - 0.1086i \\ 0.6811 + 0.1086i \\ 0.6683 - 0.0363i \\ 0.6683 + 0.0363i \end{bmatrix}.$$

На комплексной z-плоскости расположение корней будет иметь следующий вид (рис. 3.4)

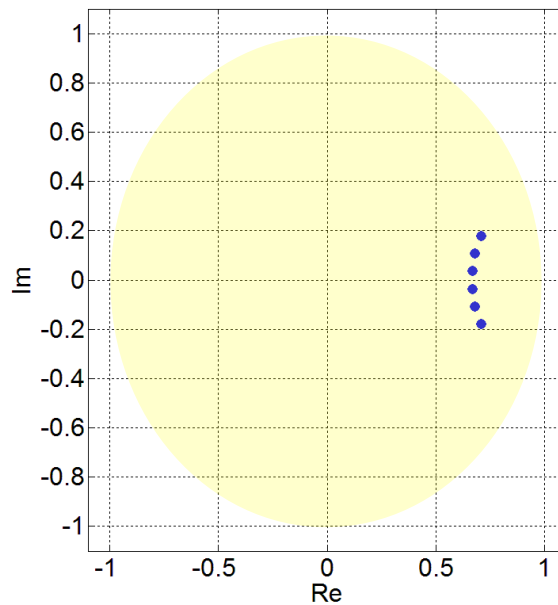


Рис. 3.4 Расположение корней эталонного полинома для синтеза регулятора на комплексной z-плоскости.

Зададим порядок «перестановки» пар собственных чисел системы управления в желаемое положение:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1.0000 + 10.198i \\ 1.0000 - 10.198i \end{bmatrix} &\rightarrow \text{итерация1} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.7073 - 0.1794i \\ 0.7073 + 0.1794i \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1.0000 + 0.1979i \\ 1.0000 - 0.1979i \end{bmatrix} &\rightarrow \text{итерация2} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.6811 - 0.1086i \\ 0.6811 + 0.1086i \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1.0000 + 0.0000i \\ 1.0000 + 0.0000i \end{bmatrix} &\rightarrow \text{итерация3} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.6683 - 0.0363i \\ 0.6683 + 0.0363i \end{bmatrix} \end{aligned}.$$

Воспользовавшись формулой (1.28), выведенной в первой главе получим следующие матрицы обратной связи для «переноса» каждой пары собственных чисел:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 1.0210 & 0.0343 & 0.0006 & -0.0009 & 0.0074 & -0.0000 \\ -0.0343 & 1.0210 & -0.0074 & 0.0000 & 0.0006 & -0.0009 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0.0293 & -0.0245 & 0.0336 & -0.0334 & 0.3097 & -0.3095 \\ 0.0245 & 0.0293 & -0.3097 & 0.3095 & 0.0336 & -0.0334 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} 0.0068 & -0.0387 & 0.0402 & 0.0061 & 0.2709 & -0.3517 \\ 0.0582 & 0.0048 & -0.3958 & 0.5217 & 0.0964 & -0.0388 \end{bmatrix}.$$

Результирующая матрица обратной связи выражается через сумму матриц  $\mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{D}_2$ ,  $\mathbf{D}_3$ :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1.0572 & -0.0289 & 0.0744 & -0.0282 & 0.5881 & -0.6612 \\ 0.0484 & 1.0552 & -0.7130 & 0.8312 & 0.1306 & -0.0731 \end{bmatrix}.$$

Исследуем получившуюся замкнутую систему на робастность относительно изменений значения приведенной жесткости  $k^2$ . Проварьируем значение приведенной жесткости центральной вставки паруса в диапазоне  $k^2 \in [0.005; 0.02] \text{с}^{-2}$  и проследим за «миграцией» корней замкнутой системы  $\mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{A}(k^2) - \mathbf{B}\mathbf{D})\mathbf{x}_n$  (рис. 3.5).

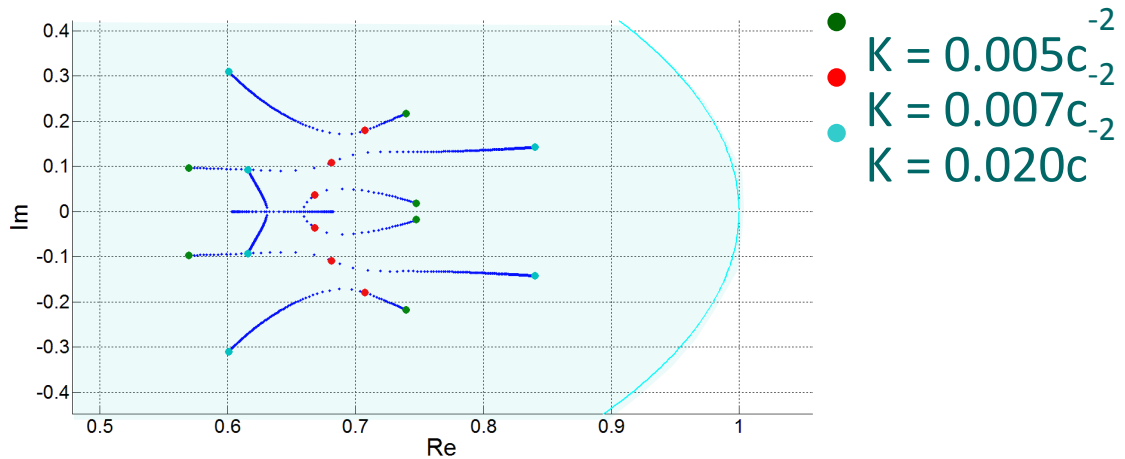


Рис. 3.5 «Миграция» корней замкнутой системы  $\mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{A}(k^2) - \mathbf{B}\mathbf{D})\mathbf{x}_n$  при варьировании параметра  $k^2$ .

Как видно из рисунка, даже при ошибке в определении коэффициента жесткости в 2 раза система управления, построенная методом модального синтеза, остается устойчивой.

Перейдем к синтезу адаптивного наблюдателя. Целью адаптации в данной задаче является идентификация коэффициента жесткости при одновременной оценке переменных  $\hat{\mu}_y$  и  $\hat{\mu}_z$ .

В качестве эталонного полинома также возьмем обобщенный полином Баттерворта, только уже с  $n=7$  (остальные параметры  $\omega_c = 0.5$ ,  $\varphi = \pi / 2$ ). Расположение корней заданного эталонного полинома до и после билинейного преобразования будет следующим:

$$\Lambda_s^* = \begin{bmatrix} -0.7818 + 0.6235i \\ -0.7818 - 0.6235i \\ -0.9010 + 0.4339i \\ -0.9010 - 0.4339i \\ -0.9749 + 0.2225i \\ -0.9749 - 0.2225i \\ -1.0000 - 0.0000i \end{bmatrix}, \quad \Lambda_z^* = \begin{bmatrix} 0.8488 + 0.1069i \\ 0.8488 - 0.1069i \\ 0.8318 + 0.0729i \\ 0.8318 - 0.0729i \\ 0.8216 + 0.0369i \\ 0.8216 - 0.0369i \\ 0.8182 \end{bmatrix}.$$

Наглядно расположение корней эталонного полинома для синтеза адаптивного наблюдателя представлено на рисунке 3.6

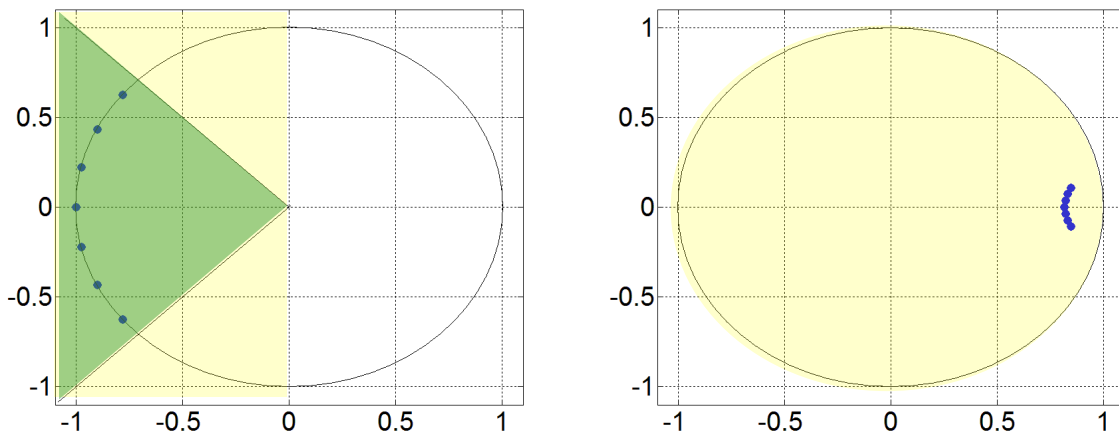


Рис. 3.6 Корни эталонного полинома для синтеза наблюдателя. Слева – s-плоскость, справа z-плоскость.

Для переноса каждой пары собственных чисел в желаемое положение получаем следующие «элементарные» матрицы обратной связи:

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0.1510 & 8.4241 & -0.1975 & -0.1509 & 0.0035 & -8.4241 & 0.0494 \\ -8.4241 & 0.1515 & -0.0035 & 8.4241 & -0.1975 & -0.1515 & 0.0491 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0.1332 & -0.0957 & -0.3241 & -0.7834 & -0.6471 & 0.4221 & 0.0722 \\ 0.1873 & 0.2037 & 0.9918 & -0.3887 & -0.1971 & -1.2003 & 0.2632 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} -0.6041 & 0.1634 & -1.7274 & 2.3826 & 1.7169 & 1.6215 & 0.6309 \\ -3.7567 & 0.9609 & -10.8840 & 14.5455 & 10.4961 & 10.1924 & 3.8436 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 0.1733 & -0.0374 & 0.3750 & -0.0968 & -1.1008 & -0.9584 & 0.9218 \\ -0.0374 & 0.0081 & -0.0810 & 0.0209 & 0.2379 & 0.2071 & -0.1992 \end{bmatrix}^T.$$

Результирующая матрица весовых коэффициентов бортовой модели получается равной:

$$\mathbf{w} = \sum \mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} -0.1467 & 8.4543 & -1.8739 & 1.3515 & -0.0274 & -7.3389 & 1.6743 \\ -12.0309 & 1.3241 & -9.9768 & 22.6018 & 10.3394 & 9.0477 & 3.9568 \end{bmatrix}^T.$$

### **3.5 Результаты численного моделирования.**

Для демонстрации работоспособности как метода последовательного замыкания, представляемого в этой работе, так и синтезируемого с его использованием адаптивного алгоритма управления проведено математическое моделирование режима гашения начальных угловых скоростей КА и режима программного разворота.

Для моделирования режима гашения, начальные условия были заданы следующими:

$$\begin{aligned} \omega_y^0 &= 0.1^\circ / c \\ \omega_z^0 &= 0.1^\circ / c \\ \mu_y^0 &= 0.1^\circ \\ \mu_z^0 &= 0.1^\circ \\ \hat{K}_0 &= 0.007 c^{-2} \end{aligned}.$$

Моделирование проведено в среде MATLAB. Результаты математического моделирования представлены на рисунках (рис . 3.7 – рис. 3.12)

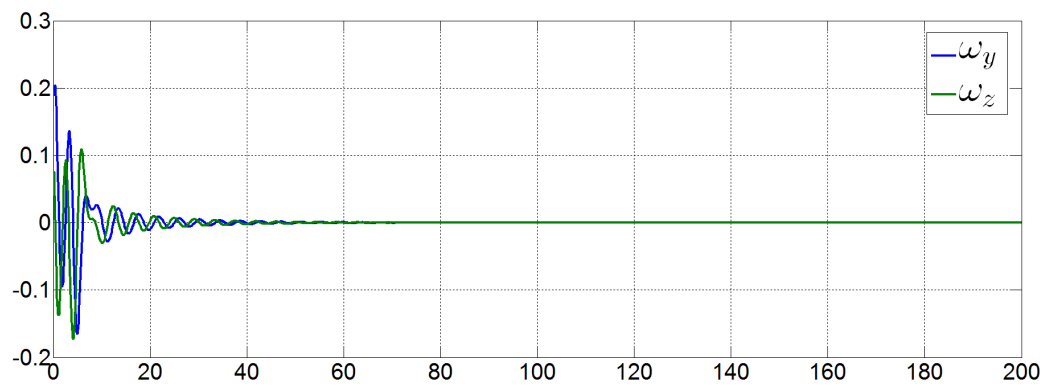


Рис. 3.7 Компоненты абсолютной угловой скорости КА. Режим гашения начальных угловых скоростей.

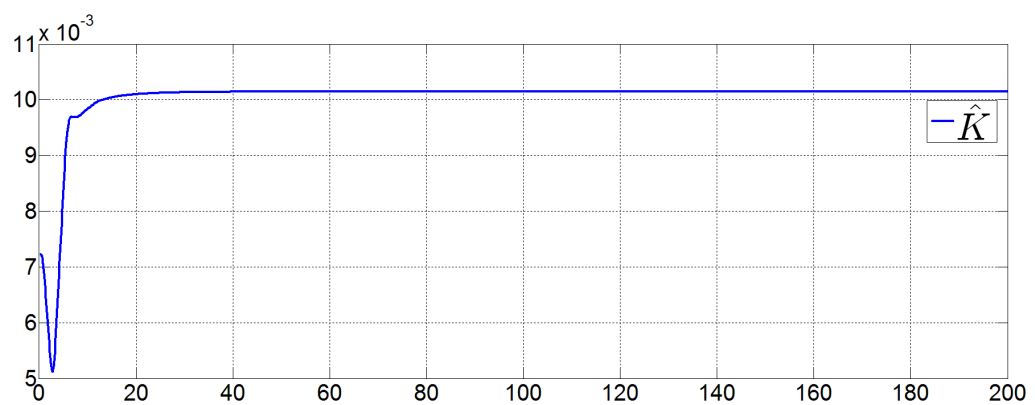


Рис. 3.8 Оценка приведенной жесткости центральной вставки. Режим гашения начальных угловых скоростей.

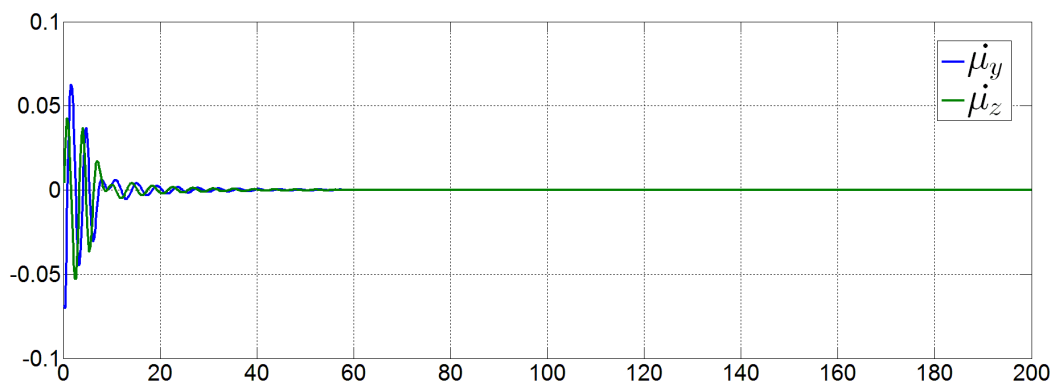


Рис. 3.9 Компоненты угловой скорости плоскости вращения солнечного паруса. Режим гашения начальных угловых скоростей.

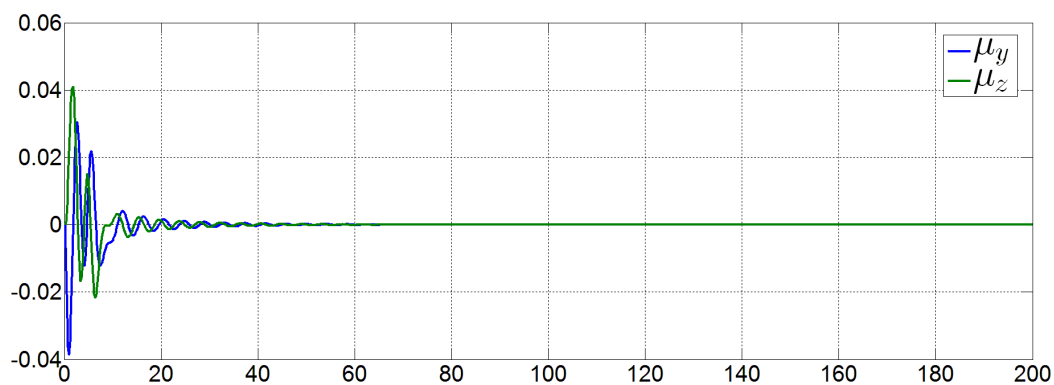


Рис. 3.10 Угловое отклонение солнечного паруса вокруг осей ОУ и ОZ. Режим гашения начальных угловых скоростей.

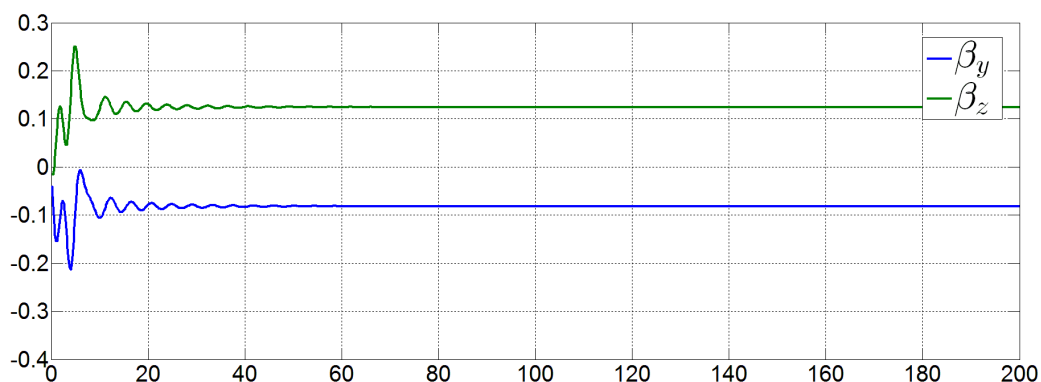


Рис. 3.11 Углы отклонения ротора силового гироскопа относительно связанного базиса вокруг осей Оу и Oz. Режим гашения начальных угловых скоростей.

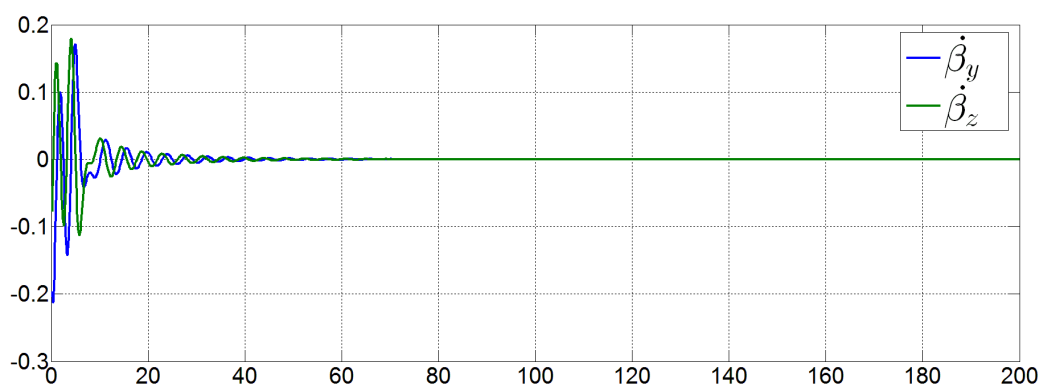


Рис. 3.12 Скорости прецессии силового гироскопа в подвесе Гука вокруг осей Оу и Oz. Режим гашения начальных угловых скоростей.

Для режима программного разворота, компонента угловой скорости космической платформы вдоль оси ОУ была равна  $\omega_y^{prog} = 0.5^\circ / c$ , таким образом поворот на  $90^\circ$  вокруг оси ОУ космический аппарат должен совершить за 180 секунд. Результаты математического моделирования режима программного разворота представлены на рисунках 3.13 - 3.17.

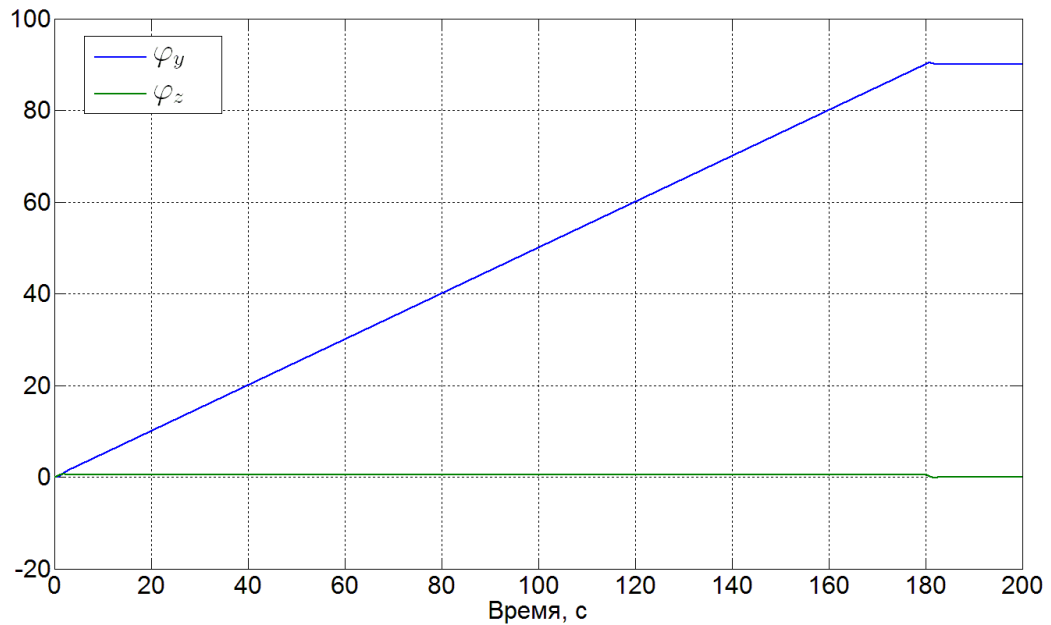


Рис. 3.13 Компоненты абсолютной угловой скорости КА. Режим программного разворота.

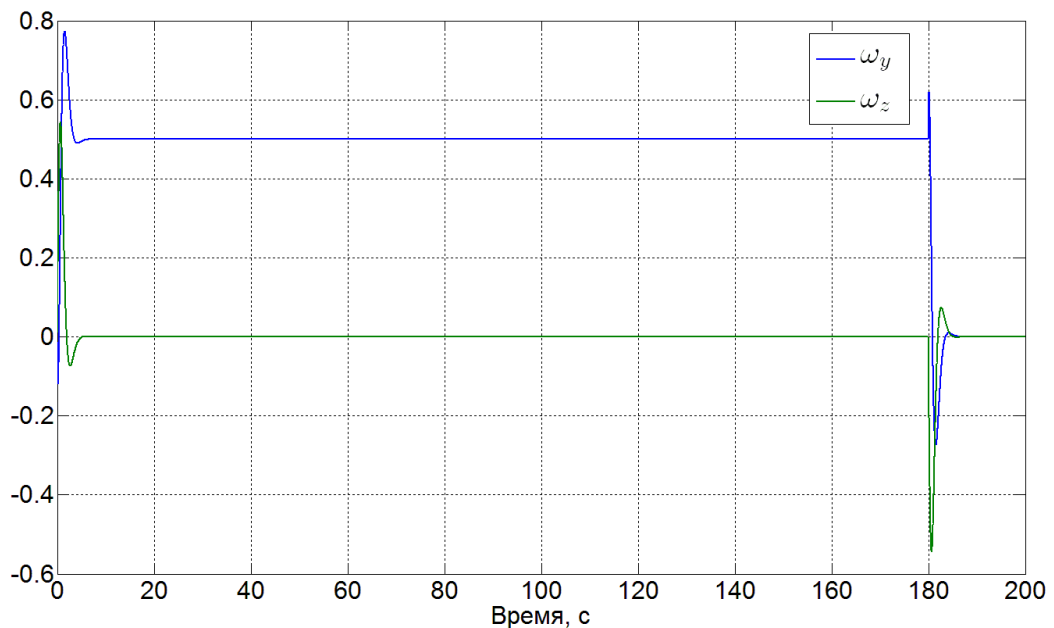


Рис. 3.14 Поведение угловых компонент положения КА вокруг осей ОУ и ОZ. Режим программного разворота.

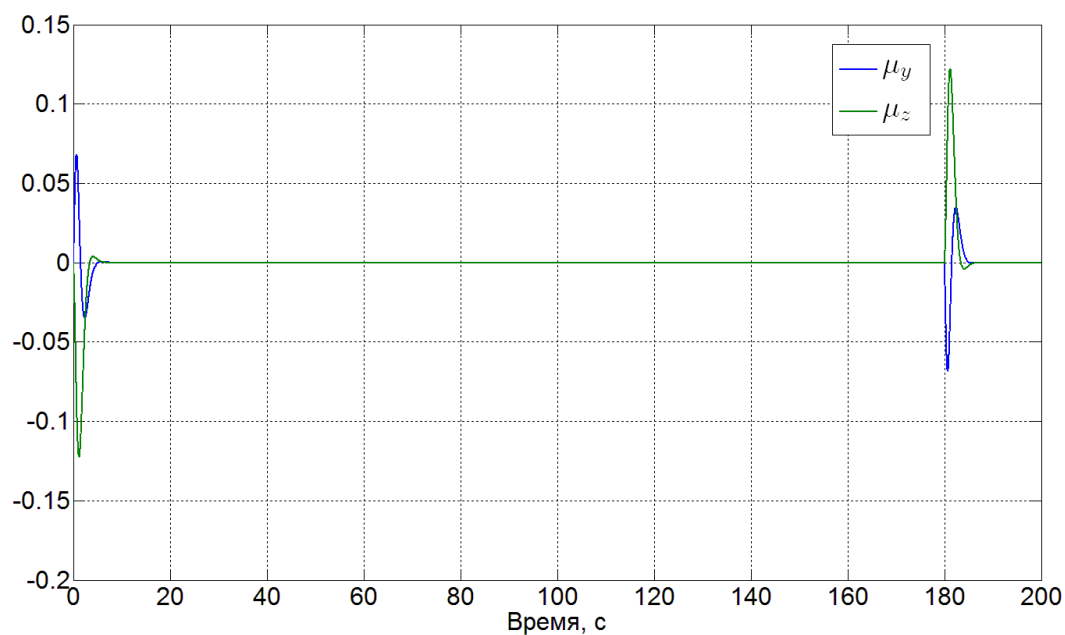


Рис. 3.15 Компоненты угловой скорости плоскости вращения солнечного паруса. Режим программного разворота.

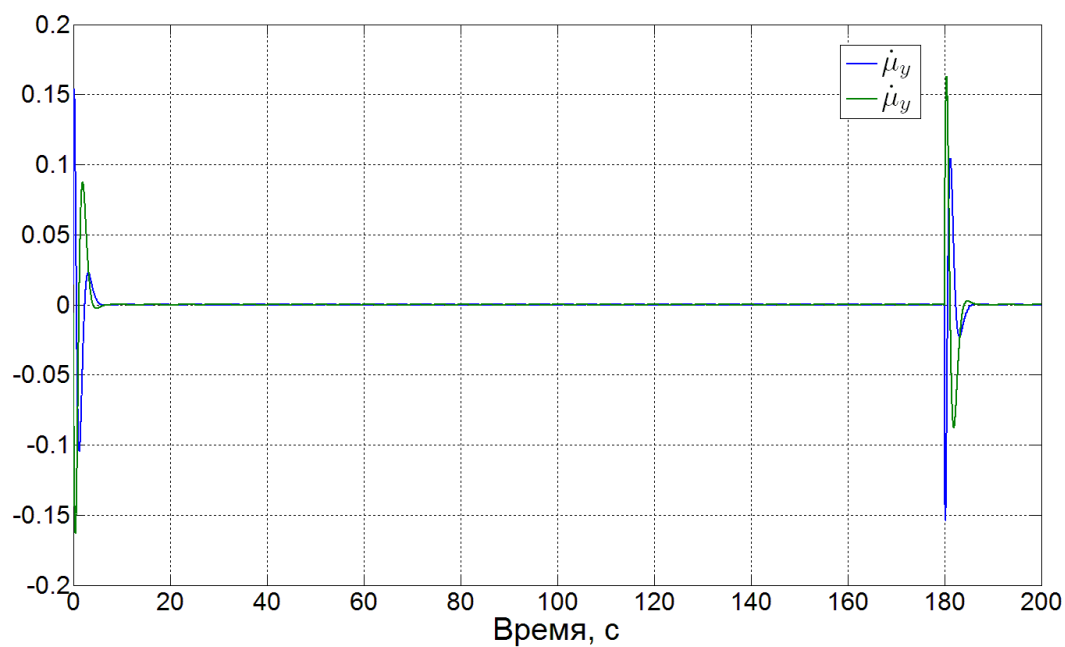


Рис. 3.16 Угловое отклонение солнечного паруса вокруг осей ОУ и ОZ. Режим программного разворота.



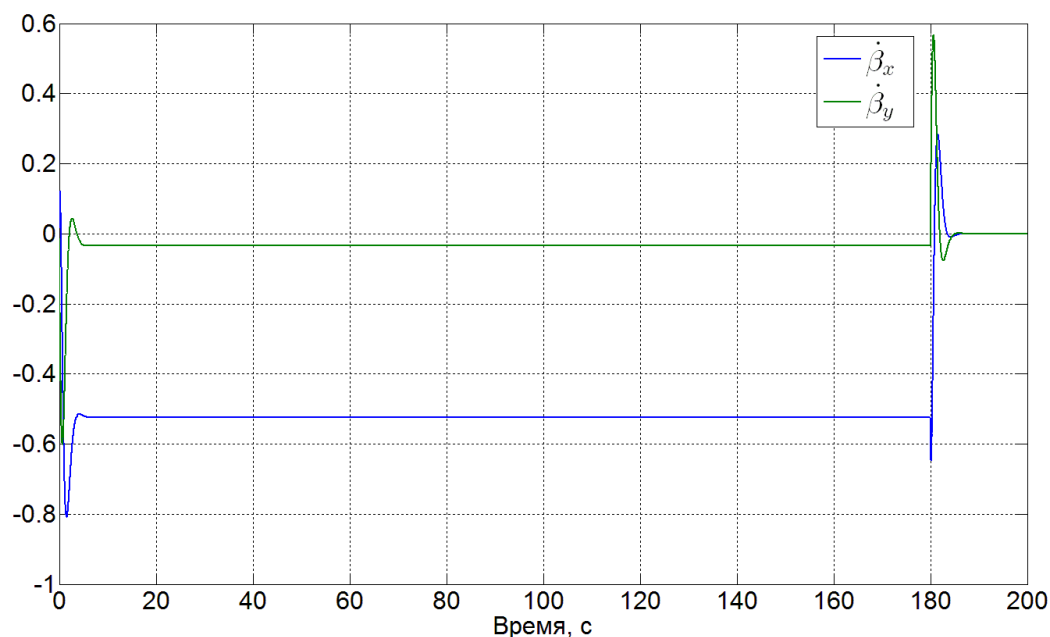


Рис. 3.17 Скорости прецессии силового гироскопа в подвесе Гука вокруг осей Оу и Oz. Режим программного разворота.

### 3.6 Выводы по главе 3.

Разработан адаптивный алгоритм управления ориентацией космической платформы с вращающимся солнечным парусом. Данный алгоритм позволяет одновременно осуществлять управление угловым положением космической платформы и оценивать неизвестные компоненты вектора состояния и неизвестные параметры объекта управления.

Матрица обратной связи, обеспечивающая устойчивость системе управления, и матрица весовых коэффициентов, обеспечивающая сходимость оцениваемых параметров объекта управления и компонент вектора состояния к их реальным значениям, были получены при помощи представляемого в диссертации алгоритма последовательного замыкания. В качестве эталонного полинома как для модального синтеза регулятора, так и модального синтеза адаптивного наблюдателя был взят обобщенный полином Баттерворта.

Для подтверждения работоспособности как метода последовательного замыкания, так и построенного при помощи данного метода адаптивного алгоритма управления было проведено математическое моделирование

динамического поведения объекта управления в режиме гашения начальных угловых скоростей при активном демпфировании колебаний пленочного диска солнечного паруса. Полученные зависимости компонент вектора состояния, а так же неизвестных параметров системы от времени демонстрируют высокую скорость затухания переходного процесса, что говорит о правильности выбора эталонного полинома для решения задачи модального синтеза.

В силу параметрической неопределенности объекта управления, было проведено исследование построенной замкнутой системы на робастность. Показано, что при варьировании значения неизвестного параметра системы в пределах  $\pm 30\%$  замкнутая система не теряет устойчивости.

Результаты данной главы получены в тесном сотрудничестве с соавторами монографии [46] А.В. Зыковым, В.П. Легостаевым, А.В. Субботиным, А.В. Сумароковым, С.Н. Тимаковым. Личный вклад автора заключается в разработке алгоритма адаптивного наблюдателя с настраиваемой моделью и синтезе закона управления ориентацией космической платформы с вращающимся солнечным парусом.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В диссертации предложен численный алгоритм модального синтеза многомерных многосвязных адаптивных систем управления, основанный на принципе последовательного замыкания мод. Данный алгоритм позволяет осуществлять как построение регулятора (матрицы обратной связи), обеспечивающего асимптотическую устойчивость исследуемой системе управления, так и построение адаптивного наблюдателя (матрицы весовых коэффициентов), обеспечивающей асимптотическую сходимость оценок вектора состояния и оценок неизвестных параметров системы к их фактическим значениям. Проведено сравнение точности расположения корней замкнутой системы методом последовательного замыкания и функцией *askeg*, основанной на формуле Аккермана. Сравнение показало, что представленный в диссертации алгоритм обеспечивает более медленный рост вычислительной ошибки с ростом размерности вектора состояния, что говорит о преимуществе метода последовательного замыкания по сравнению с аналогами, реализованными в программной среде MATLAB. Алгоритм последовательного замыкания может быть применен в различных областях техники, в частности, при разработке адаптивных систем управления, обеспечивающих устойчивое взаимосогласованное динамическое поведение группировки автономных аппаратов различного назначения.
2. Проведено исследование различных семейств эталонных полиномов на соответствие корневым критериям качества, таким как степень колебательности и степень устойчивости. Представлен новый тип полиномов (обобщенные полиномы Баттерворта), получающихся путем введения нового параметра в выражение для классического

полинома Баттерворта, обеспечивающего большую степень устойчивости и меньшую колебательность.

3. С использованием алгоритма последовательного замыкания решена задача автономного поиска и удержания МКС в положении динамического равновесия (momentum management). Получены два варианта законов управления ориентацией космической станцией по каналам крен + рысканье и по каналу тангажа. Первый вариант закона управления построен по обобщенному полиному Баттерворта, второй вариант построен по классическому полиному Баттерворта. Математическое моделирование показало, что переходный процесс, определяемый корнями обобщенного полинома Баттерворта, демонстрирует меньшую колебательность, а так же меньшую начальную амплитуду компонент углов и угловых скоростей МКС в переходном процессе поиска и поддержания ее равновесной ориентации, что подтверждает соответствие данного полинома Баттерворта критериям качества (степень колебательности и степень устойчивости). Также, на примере решаемой во второй главе задачи проведено сравнение точности размещения корней замкнутой алгоритма последовательного замыкания и функции `place()`, демонстрирующее преимущества разрабатываемого в диссертации алгоритма.
4. Решена задача построения адаптивного закона управления ориентацией космической платформы с вращающимся солнечным парусом. Уравнения углового движения космической платформы рассматривались в конечно-разностном виде. При помощи метода последовательного замыкания получены значения матриц регулятора и коэффициентов адаптивного наблюдателя. Использование обобщенного полинома Баттерворта в качестве эталонного обеспечило робастность и достаточный запас устойчивости системе управления, имеющей параметрическую неопределенность. Проведенное

математическое моделирование углового движения космической платформы с вращающимся солнечным парусом режима гашения начальных угловых скоростей продемонстрировало высокую скорость сходимости компонент вектора состояния к положению равновесия. Моделирование режима программного разворота КА показало, что при угловой скорости  $\omega_y^{prog} = 0.5^\circ / c$  углы отклонения плоскости мембранного диска не превосходят  $0.2^\circ$ , а компоненты скорости прецессии силового гироскопа не превосходят  $1^\circ/c$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления, «Мир», М., 1975.
2. Lee R. C. K. Optimal Estimation, Identification, and Control. Research Monograph No. 28. The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts (1964).
3. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Матричные методы в теории практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2016. 666с.
4. Alexandridis A.T., Galanos G.D. Optimal pole-placement for linear multi-input controllable systems // IEEE Trans. Circuits Syst. 1987. V. CAS-34. P. 1602–1604.
5. Antoulas A.C. Approximation of Large Scale Dynamical Systems. SIAM. 2005.
6. Balas M.J. Trends in Space Large Structure Control Theory: Fondest Hopes, Wildest Dreams // IEEE Trans. Automat. Control. 1982. V. 27. P. 522 – 535.
7. Datta B.N, Ram Y.N., Sarcissian D.R. Multi Input Partial Pole Placement for Distributed Gyroscopic Systems // Proc. CDC, 2001. CD-ROM.
8. Girko V.L. Circular Law // Theory Probab. Appl., 1984, No. 29, P. 694 – 706.
9. Iracleous D.P., Alexandridis F.T. A Simple Solution to the Optimal Eigenvalue Assignment Problem // IEEE Trans. Automat. Control. 1994. V. 44. No 4. P. 1746–1744.
10. J. Ackermann, *Der entwurf linearer regelungssysteme im zustandsraum, Regelungstechnik und Prozessdatenverarbeitung*, 7 (1992), pp.297-300.
11. Mayne D.Q., and Murdoch P., 1970, *Int. J. Control*, 11, 223.
12. Maki M.C., and Van de Vegte J., 1974, *I.E.E.E. Trans. autom. Control*, 19, 130.

13. Barnett S., 1975, *Introduction to Mathematical Control Theory* (Oxford University Press).
14. Gourishankar V., and Ramar K., 1976, *Int. J. Control*, 23, 493.
15. Klein G., and Moore B.C., 1977, *I.E.E.E. Trans. autom. Control*, 22, 140; 1982, Feedback design of linear systems by eigenvector selection, Department of Mechanic Engineering, Columbia University, preprint.
16. Porter B., and D'Azzo J.J., 1978, *Int. J. Control*, 27, 487.
17. Wonham W.M., 1979, *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, 2<sup>nd</sup> edition (New York: Springer).
18. Moore B.C., 1978, *I.E.E.E. Trans. autom. Control*, 21, 689.
19. Flamm, O.S., 1980, *I.E.E.E. Trans. autom. Control*, 27, 690.
20. Fahmy M.M., and O'Reilly J., 1982, *I.E.E.E. Trans. autom. Control*, 27, 690.
21. Varga A., 1981, *I.E.E.E. Trans. autom. Control*, 26, 517.
22. J. Kautsky, N. K. Nichols, and P. Van Dooren, *Robust pole assignment in linear state feedback*, *Internat. J. Control*, 41 (1985), pp. 1129-1155.
23. Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н., “Размещение полюсов в больших динамических системах с многими входами и выходами”, *Доклады Академии наук*, **439**:4 (2011), С. 464–466.
24. Sunkel, J. W., and Shieh, L. S., «An Optimal Momentum Management Controller for the Space Station», *Proceeding of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, AIAA, Washington, DC, Pt.1, p 402.
25. Тимаков С.Н., Богданов К.А., Нефедов С.Е. Метод последовательного замыкания мод движения для многомерных, многосвязных динамических систем. // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана, серия Приборостроение, Том 5 №98, 2014, С. 40-59.
26. Тимаков С.Н., Богданов К.А. Метод последовательного замыкания мод движения для многомерных, многосвязных динамических систем (Multi-Input Multi-Output) // Материалы 7-ой мультikonференции по

- проблемам управления, УМАС-2014, С. 496–508, С.-Петербург, 7-9 октября 2014.
27. *Деревецкий Д.П., Фрадков А.Л.* Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. М.: Наука, 1981. – 216 с.
28. *Фихтенгольц Г.М.* Курс Дифференциального и интегрального исчисления том 1. – М.:Наука. 1966. – 607 с.
29. *Эльясберг П.Е.* Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976. – 416 с.
30. Справочник по теории автоматического управления/Под ред. А.А. Красовского. Изд. «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, 1987.
31. *Квакернаак Х., Сиван Р.*, Линейные оптимальные системы управления. :М. Мир, 1977.
32. *Кузовков Н.Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. :М. Машиностроение, 1976.
33. *Воробьева Е.А., Zubov Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н., Тимаков С.Н.*, Синтез стабилизирующего управления космическим аппаратом на основе обобщенной формулы Аккерманна // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2011. №1. С. 116–126.
34. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Синтез законов управления космическим аппаратом, обеспечивающих оптимальное размещение полюсов замкнутой системы управления // Известия РАН, Теория и системы управления, 2012, № 3, С. 98 – 109.
35. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Синтез развязывающих законов стабилизации орбитальной ориентации космического аппарата // Известия РАН, Теория и системы управления, 2011. № 6. С.
36. *Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н., Пролетарский А.В.* Управление по выходу спектром движения



- космического аппарата // Известия РАН, Теория и системы управления, 2014, № 4, С. 111 –122.
- 37.Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. :М. Наука, 1965.
  - 38.Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. :М. Наука, 1973.
  - 39.Тимаков Н.С. Исследование управляемого углового движения космического аппарата на высокоэллиптической орбите. // Навигация и управление движением. Матер. IX Конф. молодых ученых. СПб, 2007. С. 330–336
  40. J. T. *Harduvel*. Continuous Momentum Managemant of Earth-Oriented Spacecraft. // Journal of Guidance, Conntrol, and Dymamics, Vol 12, No. 6, 1992, pp. 1417-1426.
  41. Богачев А.В., Воробьева Е.А., Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н., Тимаков С.Н. Разгрузка кинетического момента инерционных исполнительных органов космического аппарата в канале тангажа// Изв. РАН. Теория и системы управления. 2011. № 3. С.125-132.
  - 42.Воронов А.А. Теория автоматического управления. Часть 1.
  - 43.А. Б. Филимонов, Н.Б. Филимонов. О неробастности систем модальной угловой стабилизации упругих летательных аппаратов. // Материалы конференции «Управление в морских и аэрокосмических системах» УМАС 2016. СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2016. С. 416-423.
  44. Shirasawa Y., Mory O., Sawada H. et al. Demonstration of solar sail deployment system using a high altitude baloon // 27st Inernational Symposium of space technology and science, Tsukuba, Japan. 2009. P. 4.
  45. Физические величины: Справочник /А. П. Бабичев, Н. А. Бабушкина, А. М. Братковский и др.; Под. ред. И. С. Григорьева, Е. 3. Мейлихова. — М.; Энергоатомиздат, 1991. — 1232 с.

46. Задачи управления движением космического аппарата с вращающимся солнечным парусом: монография/ К.А. Богданов и др.; под. ред. д.т.н С.Н. Тимакова. – Королев:РКК Энергия, 2016. – 116 с.
47. Легостаев В.П., Субботин А.В., Тимаков С.Н., Черемных Е.А. Собственные колебания вращающейся мембраны с центральной жесткой вставкой (применение функций Хойна). //Прикладная математика и механика, Том 75. Вып.2, 2011, С. 224–238.
48. Легостаев В.П., Субботин А.В., Тимаков С.Н., Зыков А.В. Исследование динамики управляемого углового движения космического аппарата с вращающимся солнечным парусом. //Труды МФТИ, Том 5 №2, 2013, С. 106–119.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Список работ, входящих в перечень ВАК.

1. *Тимаков С.Н., Богданов К.А., Нефедов С.Е.* Метод последовательного замыкания мод движения для многомерных, многосвязных динамических систем. // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана, серия Приборостроение, Том 5 №98, 2014, С. 40-59.
2. *Богданов К.А., Сумароков С.В., Тимаков С.Н.* О решении задачи наведения спутника осветителя на заданный район поверхности Земли и оценка освещенности. // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана, серия Приборостроение, Том № 6 (117), 2017, С. 115-129.
3. *Е.А. Микрин, С.Н. Тимаков, А.В. Зыков, А.В. Сумароков, А.В. Жирнов, К.А. Богданов.* Опыт и перспективы создания бортовых алгоритмов управления движением космических аппаратов. // «Вестник РФФИ». № 3 (95) июль–сентябрь 2017 года, 2017, С. 23 - 45.
4. *К. А. Богданов, С. Н. Тимаков.* Задача поиска и поддержания положения динамического равновесия международной космической станции. // ТРУДЫ ФГУП «НПЦАП». Системы и приборы управления. № 2 (42) 2018, ФГУП «НПЦАП», 2018г, С. 16 - 17.