

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В. КЕЛДЫША
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

На правах рукописи

ГУО ПЭН

**ИССЛЕДОВАНИЕ БАЛЛИСТИКО-НАВИГАЦИОННЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ АСТЕРОИДНО-КОМЕТНОЙ
БЕЗОПАСНОСТИ ЗЕМЛИ**

Специальность 01.02.01 — Теоретическая механика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Ивашкин В.В.

Москва — 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
ОГЛАВЛЕНИЕ	2
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ.....	5
ВВЕДЕНИЕ.....	6
ГЛАВА I. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ НАВИГАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОРБИТЫ ОПАСНОГО АСТЕРОИДА НА ОСНОВЕ ИЗМЕРЕНИЙ СИСТЕМЫ «НЕБОСВОД»	18
1.1. Моделирование наблюдений и измерений астероида с помощью системы «Небосвод».....	18
1.1.1. Принятый состав системы «Небосвод» и модель наблюдений	18
1.1.2. Алгоритм анализа видимости при наблюдении астероида с борта КА системы «Небосвод»	24
1.1.3. Вычисление параметров движения астероида относительно Земли ..	28
1.1.4. Постановка задачи определения орбиты астероида по результатам измерений системы «Небосвод»	31
1.2. Построение алгоритмов обработки результатов измерений	34
1.2.1. Линеаризация модели динамической системы и модели измерения .	36
1.2.2. Алгоритмы оценивания без уточнения мешающих параметров	39
1.2.3. Алгоритмы оценивания с уточнением мешающих параметров.....	40
1.2.4. Рекуррентные алгоритмы оценивания с уточнением мешающих параметров	47
1.3. Алгоритмы анализа точностей определения и прогнозирования орбиты астероида.....	50
1.3.1. Анализ точностей определения орбиты астероида по измерениям ...	50
1.3.2. Введение аналога коэффициента «отношение сигнал/шум» для анализа влияния мешающих параметров на точность оценивания	52
1.3.3. Вычисление частных производных в алгоритмах оценивания	56
1.4. Выводы по первой главе	59

ГЛАВА II. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ НАВИГАЦИИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ СИСТЕМЫ «НЕБОСВОД»	60
2.1. Анализ задачи навигации при наблюдении астероида Апофис.....	60
2.1.1. Принятая столкновительная траектория астероида Апофис.....	60
2.1.2. Анализ видимости Апофиса с бортов КА системы «Небосвод»	64
2.1.3. Анализ особенностей задачи навигации для астероида Апофис	68
2.1.4. Оценка точностей навигации для астероида Апофис в случае пролётного варианта орбиты, в 2028-2029 гг.....	82
2.1.5. Оценка точностей навигации для астероида Апофис в случае столкновительного варианта орбиты, в 2029-2036 гг.....	88
2.1.6. Выводы по разделу 2.1	100
2.2. Анализ задачи навигации при наблюдении астероида 2008 TC3	101
2.2.1. Анализ номинального движения астероида 2008 TC3.....	102
2.2.2. Анализ видимости при наблюдении астероида 2008 TC3	104
2.2.3. Оценка точностей навигации для астероида 2008 TC3	106
2.2.4. Выводы по разделу 2.2	109
2.3. Анализ задачи навигации для Челябинского метеороида	109
2.3.1. Номинальная траектория Челябинского метеороида.....	110
2.3.2. Анализ видимости при наблюдении Челябинского метеороида	111
2.3.3. Оценка точностей навигации для Челябинского метеороида	112
2.3.4. Выводы по разделу 2.3	115
2.4. Выводы по второй главе.....	115
ГЛАВА III. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ВЕРОЯТНОЙ ОБЛАСТИ СОУДАРЕНИЯ АПОФИСА С ЗЕМЛЁЙ В 2036 Г. 117	
3.1. Поиск попадающих в Землю траекторий астероида Апофис	117
3.2. Анализ характеристик столкновительных траекторий и зоны соударения с Землёй астероида Апофис.....	119
3.2.1. Построение столкновительной полосы на поверхности Земли	120
3.2.2. Анализ характеристик столкновительной полосы	124
3.2.3. Качественный анализ траекторий подлета Апофиса к Земле	127

3.3. Выводы по третьей главе	129
ГЛАВА IV. АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ СОЗДАНИЯ СТАБИЛЬНОГО СПУТНИКА АСТЕРОИДА АПОФИС КАК ОДНОРОДНОГО ТРЁХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА	130
4.1. Модель движения КА вокруг астероида Апофис как однородного трёхосного эллипсоида.....	131
4.2. Выявление стабильных орбит спутника Апофиса	136
4.3. Выводы по четвертой главе	140
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	141
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	143
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Два способа решения системы нормальных уравнений для случая уточнения мешающих параметров	154

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АКО	—	астероидно-кометная опасность
АСЗ	—	астероид, сближающийся с Землёй
ДУ	—	дифференциальное уравнение
ЗНВ	—	зона невидимости
ИСЗ	—	искусственный спутник Земли
КА	—	космический аппарат
КАГСО	—	космический аппарат, находящийся на геосинхронной орбите
КАГЦО	—	космический аппарат, находящийся на гелиоцентрической орбите Земли
ММП	—	метод мешающих параметров
МНК	—	метод наименьших квадратов
НКИП	—	наземный командно-измерительный пункт
НСОИ АФН	—	научная сеть оптических инструментов для астрометрических и фотометрических наблюдений
ОЗСО	—	орбитальная звездная стереоскопическая обсерватория
ОНТ	—	опасное небесное тело
ОСШ	—	отношение сигнала к шуму
СК	—	система координат
СКО	—	среднеквадратическое отклонение
СОДА	—	система обнаружения дневных астероидов
ЦУП	—	Центр управления полетом
ЧМ	—	Челябинский метеороид
ЭКОЗОНТ	—	экономичная космическая обсерватория для задачи обнаружения небесных тел
а.е.	—	астрономическая единица
а.и.	—	априорная информация
зв.в.	—	звездная величина

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время проблема астероидно-кометной опасности (АКО) признана мировым научным сообществом одной из важнейших актуальных общечеловеческих проблем. Быстрый рост числа обнаруженных объектов, сближающихся с Землёй, в том числе астероидов, комет, метеороидов и др., и наличие потенциально опасных угроз их столкновений с Землёй обуславливают необходимость активно изучать проблему АКО и подготовить научно-технические средства защиты Земли от АКО. Проблема АКО комплексная и междисциплинарная. При её решении актуально выявление всех потенциально опасных для Земли небесных тел (ОНТ), определение их орбит, информация о возможном столкновении с Землёй, получение надежной оценки рисков, анализ процесса и последствий столкновения, разработка оперативных и эффективных мер противодействия космическим угрозам для уменьшения ущерба Земле и др. [4, 29, 50, 66, 67, 69 и др.].

С конца XX века в ведущих технологически развитых странах мира начата разработка проектов и систем для обнаружения и каталогизации околоземных объектов, а также систем планетарной защиты, включающих средства разведки или перехвата астероидов и средства воздействия на ОНТ и др. [4, 66, 67]. По данным JPL, к концу 2018 г. было обнаружено свыше 19000 астероидов, сближающихся с Землёй (АСЗ), среди них 8393 – размером более 140 м, в том числе 894 АСЗ – размером более 1 км. Необходимо отметить, что около 98% АСЗ были открыты при помощи наземных астрономических обсерваторий в рамках американских программ *CSS*, *Pan-STARRS*, *ATLAS* и др. [94]. В России тоже организуются программы для наблюдения АСЗ, такие как сеть «Мастер» ГАИШ МГУ и международная сеть НСОИ АФН.

Однако, огромное количество небесных тел Солнечной системы наблюдать с Земли трудно. При этом в России и за рубежом идет интенсивная разработка технических средств следующего поколения, при помощи

современных космических телескопов, предназначенных для массового обнаружения ОНТ из дальнего космоса, а также для задач астрофизики. Основные преимущества наблюдения ОНТ с помощью космических телескопов перед наземными заключаются в возможности оперативного круглосуточного сканирования неба и получения высококачественных измерений на фоне неба без влияния атмосферы. Общие требования к созданию космической обзорной системы представляют собой обеспечение надёжной работы за много лет и качественной радиосвязи с Землёй, а также довольно большой области сканирования неба и визирования малых тел.

Важным шагом к реализации космической обзорной системы явился запуск инфракрасного космического телескопа WISE / NEOWISE (НАСА) апертурой 40 см в 2009 г. Он был размещен на солнечно-синхронной орбите на высоте ~500 км. Главной задачей этой миссии является полный обзор небесной сферы и поиск околоземных астероидов [104]. К настоящему времени с помощью этого телескопа было открыто более 33500 новых астероидов и комет, в том числе 290 околоземных объектов, включая 262 астероидов и 28 комет, среди них 47 относятся к потенциально опасным астероидам [104]. Среди реализуемых миссий известны также канадский мини-спутник *NEOSSat* (2013 г.), немецкий спутник *Asteroid Finder* (2014 г.) и др. Кроме того, Фонд B612 (США) проектирует новый инфракрасный космический телескоп апертурой 0.5 м под названием «Охранник» (лат. *Sentinel*), который должен был быть запущен в 2018 г. и размещен на близкой к Венере гелиоцентрической орбите [91]. Главной целью этой миссии есть обнаружение и каталогизация 90% АСЗ размером более 140 м до 2020 г. Но из-за некоторых причин эта миссия прекратилась. В работах [79, 91] изложена концепция с размещением трёх телескопов на близкой к Венере гелиоцентрической орбите с равными угловыми расстояниями друг от друга, ~ 120 градусов.

В России также исследуются возможности создания наземных и космических систем обнаружения и мониторинга, информационно-аналитического центра для сбора, хранения и обработки данных наблюдения

[53]. Это системы: «Космический барьер» [23, 27, 54], «Системы Обнаружения Дневных Астероидов» (СОДА) [30], «Орбитальная Звёздная Стереоскопическая Обсерватория» (ОЗСО) [63], «Экономичная Космическая Обсерватория для Задачи Обнаружения Небесных Тел» (ЭКОЗООНТ) [65], система планетарной защиты – «Цитадель» [4, 29] и др. Планируется к 2022 г. завершение создания системы обнаружения ОНТ и обнаружение 90% АСЗ размером более 50 м [67].

Для данных целей выявления ОНТ Российская корпорация «Комета» тоже проектирует космическую систему «Небосвод» [45]. Предполагается, что в её состав входят два космических комплекса. Первый комплекс, «Небосвод-1», имеет один-два устанавливаемых на геосинхронных орбитах КА с телескопами. Он регулярно осматривает всю небесную сферу, кроме околосолнечной области, где есть засветка Солнцем оптической аппаратуры. Второй комплекс, «Небосвод-2», устанавливается на гелиоцентрической орбите Земли с КА на некотором расстоянии, например, ~40 млн км, от Земли и регулярно осматривает «сбоку» пространство между Солнцем и Землёй, недоступное для наблюдения с Земли. На этапе проектирования этой системы важно проанализировать её навигационные характеристики, в частности, точность навигации при определении орбит ОНТ по оптическим измерениям системы. Построению методики анализа навигационных характеристик системы «Небосвод» посвящена основная часть диссертации (главы I, II).

В последние годы в рамках изучения проблемы АКО большое внимание ученых уделяется астероиду 99942 Апофис, который опасно сблизится с Землёй в 2029 г. и далее. Существует некоторая теоретическая вероятность его столкновения с Землёй в 2036 г. и в последующие годы [10, 16-22, 28, 32-39, 43, 46, 57-59, 64, 70, 73, 76-78, 81, 84-86, 111-114 и др.]. Исследования, посвященные астероиду Апофис, охватывают ряд важных направлений. Прежде всего, это - наблюдение Апофиса, чтобы получить больше траекторных измерений для уточнения его орбиты. Затем, на основании этого, проводится прогнозирование его движения и исследуются эволюция его орбиты, резонансные возвраты к Земле, оценивается вероятность его столкновения с

Землём [15, 28, 43, 57-59, 70, 76-78, 84-86, 111-114 и др.].

Исследование орбиты Апофиса показало, что его движение после тесного сближения с Землём в 2029 г. довольно чувствительно к возмущению его орбиты до 2029 г.: даже небольшое влияние, например, от давления солнечного света и эффекта Ярковского, может привести к значительному отклонению его орбиты после пролета мимо Земли [64, 81, 106, 114]. Выявление характеристик соударения Апофиса и Земли образует иное важное направление исследования. В работах [32-34, 57-59, 84, 85, 111-113] получен ряд траекторий Апофиса, ведущих к столкновению с Землём в 2036 г. и в некоторые другие годы до 2110 г. В работах [111-113] также приведены вероятные зоны падения астероида Апофис на Землю в 2036 г., 2068 г. и др. Особый интерес представляет выявление вероятной зоны падения на Землю Апофиса в 2036 г., её ранее привели в [99, 102]. Хотя к настоящему времени с достаточной уверенностью можно утверждать, что не будет столкновения Апофиса с Землём в 2036 г., однако остается важным анализ характеристик этой зоны падения. Этой задаче посвящена третья глава диссертации.

Кроме того, существует ряд работ [32-34, 52, 107], посвящённых способам предотвращения возможного столкновения с Землём довольно крупного астероида типа Апофис. Для этого перспективным считается заблаговременное отклонение орбиты астероида от столкновения некоторыми способами воздействия, в том числе, кинетическим ударом, гравитационным трактором. Исследование в [32-34] показало технологическую возможность отклонить движение Апофиса от столкновения путем проведения небольшой коррекции его орбиты до тесного сближения в 2029 г. Для этого возникает необходимость совершить миссию и доставить средства противодействия к Апофису.

С другой стороны, космическая миссия с целью размещения радиомаяков на поверхности Апофиса или на его спутнике позволяет долго проводить радиолокационные измерения, что может существенно уточнить орбиту Апофиса [2]. Так, в работе [75] дан проект экспедиции «*Foresight*» к Апофису с доставкой КА на орбиту его спутника для уточнения его орбиты. В работе [96]

изложен проект миссии разведки астероида Апофис – «*The Asteroid Probe Experiment (APEX) Mission*» с целью изучения характеристик астероида Апофис и др. В НПО им. С.А. Лавочкина РФ также разрабатывается проект полета к Апофису, и в рамках этой программы предполагается вывести долговременный спутник с радиомаяком на орбиту вокруг Апофиса, чтобы уточнить орбиту Апофиса [2]. Также следует отметить работы [38, 39, 46], в которых исследованы оптимальная траектория полета к Апофису и возврата к Земле, а также возмущенное пассивное движение спутника астероида с целью выявления условий, обеспечивающих стабильное движение на орбите спутника Апофиса. В работах [38, 39, 46] для Апофиса принята модель вытянутого эллипсоида вращения. В главе IV диссертации, в развитие этого исследования, изучаются характеристики орбитального движения спутника Апофиса как трёхосного эллипсоида, который ближе подходит к его реальной форме, для выявления возможности стабильного движения спутника астероида как трёхосного эллипсоида.

Таким образом, астероид Апофис оказался весьма важным объектом для исследования различных аспектов проблемы АКО. Есть и другие опасные небесные тела, которые надо изучать.

Исходя из вышеописанного, **целью** диссертационной работы является разработка баллистико-навигационных методик и алгоритмов, способствующих выявлению и улучшению знания орбитальных характеристик опасных небесных тел и их вероятных соударений с Землёй, а также построению технических систем - для обеспечения астероидно-кометной безопасности Земли.

Для достижения этого поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Разработка методики и алгоритмов определения орбиты и оценки точности определения орбиты опасного астероида по оптическим космическим измерениям системы «Небосвод» с учетом реальных ограничений на проведение наблюдений и мешающих факторов;
2. Оценка точности навигации системы «Небосвод» на основе

моделирования оптических космических измерений в применении к определению параметров орбит опасного астероида Апофис, астероида 2008 TC3 и Челябинского метеороида с учетом реальных ограничений на проведение наблюдений и измерений системой «Небосвод»;

3. Разработка методики и алгоритмов определения характеристик падения опасного астероида на поверхность Земли, и применение их к определению и исследованию характеристик вероятной зоны падения Апофиса на Землю;

4. Разработка методики и алгоритма вычисления орбитального движения КА вокруг астероида как однородного трёхосного эллипсоида и применение их к анализу движения КА вокруг астероида Апофис.

Практическая и теоретическая значимость работы. Решение задачи анализа навигационных характеристик космической системы «Небосвод» имеет не только практическую важность в связи с проектированием системы «Небосвод», но и теоретическое значение для совершенствования методов определения и прогнозирования орбиты ОНТ по оптическим космическим измерениям с учетом наличия ряда мешающих факторов. Методика определения характеристик падения астероида на Землю важна для анализа структуры множества попадающих траекторий и выявления воздействий столкновения опасного астероида с Землёй. Анализ орбитального движения спутника вокруг астероида Апофис как трёхосного эллипсоида важен для совершенствования методов определения гравитационного потенциала и силы притяжения эллипсоида и для выявления стабильных пассивных движений спутника в окрестности Апофиса. Разработанные методики и алгоритмы для решения вышеупомянутых задач, связанных с проблемой АКО, могут понадобиться в любой момент при тесном сближении с Землёй других ОНТ.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из оглавления, введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Общий объем диссертации составляет 162 страницы, включая 75 рисунков, 10 таблиц. Список литературы содержит 114 наименований.

Кратко опишем **основное содержание** диссертации.

Во *Введении* обоснована актуальность темы диссертационной работы; сформулированы цель исследования и рассматриваемые задачи, практическая и теоретическая значимость, а также научная новизна работы; представлена апробация работы; описаны структура и краткое содержание диссертации.

Первая глава посвящена разработке методики и алгоритмов решения навигационных задач по определению параметров орбиты опасного астероида на основе оптических космических измерений системы «Небосвод».

В разделе 1.1 сформированы исследуемые навигационные задачи определения параметров движения опасного астероида по измерениям системы «Небосвод», в том числе, анализ видимости астероида при наблюдении с борта КА системы «Небосвод», оценивание параметров движения астероида на основе обработки измерений, оценка точности навигации, а также анализ влияния мешающих (возмущающих) факторов на точность навигации. Описаны структура системы «Небосвод», её состав и модель измерений для данного этапа анализа. Разработан алгоритм анализа видимости астероида при его наблюдении с борта КА с учетом ограничений на условия оптического наблюдения – по затенению Землёй и Луной, засветке Солнцем и допустимой яркости астероида, т.е. звездной величине. Рассмотрена постановка задачи определения орбиты астероида по результатам измерений системы «Небосвод» с учетом мешающих факторов, в том числе, ошибок модели движения астероида, ошибок модели измерительной системы, априорной информации о начальном состоянии, а также систематических ошибок измерений.

В разделе 1.2 разработаны алгоритмы обработки измерений, в том числе, алгоритмы определения начального приближения по методу Гаусса и уточнения орбиты астероида на основе измерений по методу наименьших квадратов. При учете мешающих факторов рассмотрены оценки точности навигации для двух вариантов алгоритма обработки навигационных измерений. В первом случае нет оценивания мешающих параметров в динамической и измерительной системах. Во втором случае частично или полностью учитываются и уточняются мешающие параметры. При этом разработан

алгоритм оптимальной обработки измерений на основе модифицированного метода наименьших квадратов, или т.н. метода мешающих параметров.

В разделе 1.3 разработаны алгоритмы анализа точности определения и прогнозирования параметров движения астероида с учетом мешающих факторов. Оценка точности навигации получается аналитически – методом ковариационного анализа и численно – методом Монте-Карло. Введен аналог коэффициента «отношение сигнал/шум» для оценки влияния интенсивности ошибок мешающих параметров на результаты обработки измерений.

В разделе 1.4 сформулированы выводы по первой главе.

Во *второй главе* на основе алгоритмов первой главы выполнен численный анализ задач навигации с помощью системы «Небосвод» на основе моделирования наблюдения и измерений сближающихся с Землёй объектов – астероида Апофис, астероида 2008 ТС3 и Челябинского метеороида, результаты для которых соответственно представлены в разделах 2.1, 2.2 и 2.3.

Была взята близкая к номинальной виртуальная траектория Апофиса, ведущая к столкновению в 2036 г. Рассмотрены два участка его полета, соответствующие двум вариантам орбиты. Первый участок имеет «пролётный» вариант орбиты Апофиса до его сближения с Землёй в 2029 г. Второй участок соответствует модельному «попадающему» в Землю варианту орбиты Апофиса в период после его тесного сближения с Землёй в 2029 г. до их модельного соударения в 2036 г. Подобный анализ характеристик навигации системы «Небосвод» выполнен также для недавно столкнувшихся с Землёй астероида 2008 ТС3 и Челябинского метеороида.

В разделе 2.4 сформулированы выводы по второй главе.

Третья глава посвящена задаче определения и исследования характеристик вероятной области соударения Апофиса с Землёй в 2036 г.

Задача выполнена в два этапа. На первом этапе, выполненном коллегой Стихно К.А. и кратко представленном в разделе 3.1, разработаны алгоритмы для поиска всего вероятного множества попадающих в Землю траекторий астероида. Они применены к анализу виртуального падения Апофиса на Землю

в 2036 г. Получено несколько вероятных семейств столкновительных траекторий Апофиса, соответствующих подмножествам значений перигейного расстояния его орбиты от минимально возможного расстояния до касания поверхности Земли. На втором этапе, выполненном автором диссертации (п. 3.2), получено отображение всего множества попадающих траекторий астероида Апофис на поверхность Земли. Построена вероятная область падения Апофиса в 2036 г., имеющая вид узкой длинной полосы на поверхности Земли. Исследованы геометрические, временные и энергетические характеристики столкновительных траекторий Апофиса и полосы точек соударения астероида с Землёй, в частности, ее длина и ширина, ориентация в пространстве, угол и скорость входа астероида в атмосферу, время и скорость столкновения.

В разделе 3.3 сформулированы выводы по третьей главе.

В *четвёртой главе* исследована возможность создания стабильной орбиты спутника (с радиомаяком) астероида Апофис как однородного трёхосного эллипсоида. В разделе 4.1 разработана математическая модель орбитального движения КА вокруг Апофиса с учетом основных возмущений от притяжения небесных тел, давления солнечной радиации, а также несферичности астероида как трёхосного эллипсоида, и с учетом собственного вращения астероида. В разделе 4.2 приведены результаты анализа орбитального пассивного движения КА вокруг Апофиса, с точки зрения «времени жизни» спутника. Показано, что в случае Апофиса как трёхосного эллипсоида есть возможность создать длительную, в течение нескольких лет, стабильную орбиту спутника астероида. Данная орбита может быть использована для детального изучения характеристик астероида и уточнения его орбиты по радиотехническим наземным измерениям движения спутника, снабженного радиомаяком.

В разделе 4.3 сформулированы выводы по четвёртой главе.

В *заключении* приводятся основные результаты и выводы диссертации.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

1. Разработаны методика и алгоритмы определения параметров орбитального движения астероида по оптическим измерениям космической

системы «Небосвод» и оценки точностей навигации с учетом ошибок модели движения астероида, ошибок модели измерительной системы, априорной информации о начальном состоянии и систематических ошибок измерений. Введен аналог коэффициента «отношение сигнал/шум» для оценки влияния интенсивности ошибок мешающих параметров на точность навигации;

2. Получены оценки точности навигации при наблюдении астероида Апофис, астероида 2008 TC₃ и Челябинского метеороида с помощью моделирования измерений космической системы «Небосвод» при учете реальных ограничений по видимости, засветке Солнцем и звездной величине астероида. Показана возможность уточнения навигации за счет учета мешающих параметров;

3. Разработаны методика и алгоритмы определения характеристик падения астероида на Землю. Получены и исследованы геометрические, временные и энергетические характеристики вероятных столкновительных траекторий и вероятной области падения астероида Апофис на Землю в 2036 г.;

4. Разработана математическая модель орбитального движения КА вокруг астероида как однородного трёхосного эллипсоида с учетом возмущений от притяжения небесных тел и давления солнечного света. Для вычисления потенциала и силы притяжения однородного трёхосного эллипсоида получено аналитическое представление эллиптических интегралов в формуле Дирихле. Показана возможность создания стабильных орбит спутника астероида Апофис с движением спутника вокруг астероида в течение нескольких лет.

На защиту выносятся:

1. Методика и алгоритмы определения параметров орбитального движения астероида по оптическим измерениям космической системы «Небосвод» и оценки точностей навигации с учетом мешающих факторов. Введение аналога коэффициента «отношение сигнал/шум» для оценки влияния интенсивности ошибок мешающих параметров на точность навигации;

2. Оценки точностей навигации системой «Небосвод» при наблюдении астероида Апофис, астероида 2008 TC₃ и Челябинского метеороида;

3. Выявление возможности наблюдений системой «Небосвод» и высокоточного определения орбит не только крупных и средних астероидов типа Апофиса (~320 м), но и также более мелких (до 4-50 м) объектов, приближающихся к Земле, в том числе и дневных астероидов размером ~ 50 м и более;

4. Методика и алгоритмы определения характеристик падения опасного астероида на Землю. Характеристики вероятных столкновительных траекторий и вероятной области падения астероида Апофис на Землю в 2036 г.;

5. Математическая модель орбитального движения КА вокруг астероида как однородного трёхосного эллипсоида с учетом возмущений от притяжения небесных тел и давления солнечного света. Алгоритмы вычисления потенциала и силы притяжения однородного трёхосного эллипсоида по формуле Дирихле.

6. Результаты анализа орбитального движения спутника вокруг астероида Апофис как однородного трёхосного эллипсоида. Выявление возможности создания стабильных, в течение нескольких лет, орбит спутника Апофиса.

Достоверность полученных в диссертации научных результатов обеспечивается адекватностью примененных и разработанных моделей и методик современным теориям и данным, проверкой и тестированием разными способами, апробацией теоретических результатов численными расчетами, а также сравнением полученных результатов с исследованиями других авторов.

Апробация работы и публикации. Основные результаты, полученные в диссертации, доложены на следующих семинарах и конференциях:

XXXIX (2015 г.), XL (2016 г.) и XLII (2018 г.) Академические чтения по космонавтике памяти С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых, Москва; XII съезд международной общественной организации «Астрономическое общество» и приуроченная к нему научная конференция «Астрономия от ближнего космоса до космологических далей», Москва, 2015 г.; IX (п. Терскол, 2015 г.) и X (п. Агой, 2017 г.) международные конференции «Околоземная астрономия»; XXIII научно-техническая конференция «Сложные автоматизированные информационно-управляющие системы», НПО «Комета», 2016 г.; Конференция "ФППСМ-IX" «Фундаментальные и прикладные

проблемы современной механики», Томск, 2016 г.; 51-е (2016 г.) и 53-е (2018 г.) научные чтения памяти К.Э. Циолковского, Калуга; VI международная молодежная научная конференция «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики», Томск, 2016 г.; XIII (2017 г.) и XIV (2019 г.) международные конференции «Забабахинские научные чтения», Снежинск; Международная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (FAPM-2017), Москва, 2017 г.; Конференция «Актуальные проблемы современных космических исследований» (К 80-летию профессора Ивашкина В.В.), Москва, 2017 г.; XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики предварительная программа, Уфа, 2019 г. и др.

По результатам исследования опубликованы 23 печатные работы, в том числе – 7 статей в научных журналах и 3 препринта ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Среди них – 8 работ в научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору *Ивашкину Вячеславу Васильевичу* за помощь в выборе темы диссертации, а также за совместные исследования и постоянные консультации. Автор благодарит старшего преподавателя факультета «Фундаментальная наука» МГТУ им. Н.Э. Баумана *Стихно Кирилла Александровича* за совместные исследования. Автор также признателен Китайскому комитету по стипендии (*China Scholarship Council – CSC*) за полную финансовую поддержку на обучение в России.

ГЛАВА I

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ НАВИГАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОРБИТЫ ОПАСНОГО АСТЕРОИДА НА ОСНОВЕ ИЗМЕРЕНИЙ СИСТЕМЫ «НЕБОСВОД»

К основным вопросам, исследуемым в диссертации для анализа навигационных характеристик космической системы «Небосвод», относятся разработки эффективных методики и алгоритмов решения следующих задач:

- анализ видимости астероида с учетом ограничивающих условий наблюдения (затенение Землёй и Луной, засветка Солнцем, звездная величина астероида) для космических телескопов системы «Небосвод»;
- оценивание параметров движения наблюдаемого астероида с помощью обработки измерений и прогнозирование его движения, в частности, его движения относительно Земли;
- оценка точности навигации системы «Небосвод»;
- анализ влияния мешающих (возмущающих) факторов, в том числе, систематических ошибок измерений, ошибок моделей движения астероида и измерительной системы, априорной информации о начальном состоянии движения астероида на полученную точность навигации.

Глава посвящена разработке методики и алгоритмов решения вышеупомянутых навигационных задач по определению орбиты опасного астероида и оценке точности навигации на основе оптических космических измерений системы «Небосвод». Полученные результаты изложены в работе [19].

1.1. Моделирование наблюдений и измерений астероида с помощью системы «Небосвод»

1.1.1. Принятый состав системы «Небосвод» и модель наблюдений

Российская система «Небосвод» предназначена для обнаружения и

мониторинга опасных небесных тел, а также крупных элементов космического мусора в околоземном космическом пространстве [45, 55]. В состав системы «Небосвод» включаются два космических комплекса [45, 55]. Первый космический комплекс, «Небосвод-1», имеет один-два КА на геосинхронных орбитах (КАГСО), близких к геостационарной. Он регулярно осматривает всю небесную сферу, кроме околосолнечной области из-за засветки Солнцем оптической аппаратуры. Для КАГСО выбраны следующие основные параметры начальных орбит для того, чтобы обеспечить управление ими из районов Подмосковья и Дальнего Востока России: наклонение орбит $i=11^\circ\ldots12^\circ$, географическая долгота восходящего узла орбит $\Omega_G \approx 35^\circ$ и 135° , период обращения $86164 \text{ с} \approx 23 \text{ ч } 56 \text{ мин}$, высота перигея 34000 км, аргумент перигея $\omega=0^\circ$ [45]. Второй космический комплекс, «Небосвод-2», имеет 1-2 КА на гелиоцентрической орбите Земли (КАГЦО) на расстоянии около 40 млн км от Земли, регулярно осматривает «сбоку» пространство между Солнцем и Землёй, недоступное для наблюдения оптическими средствами с Земли [54, 55].

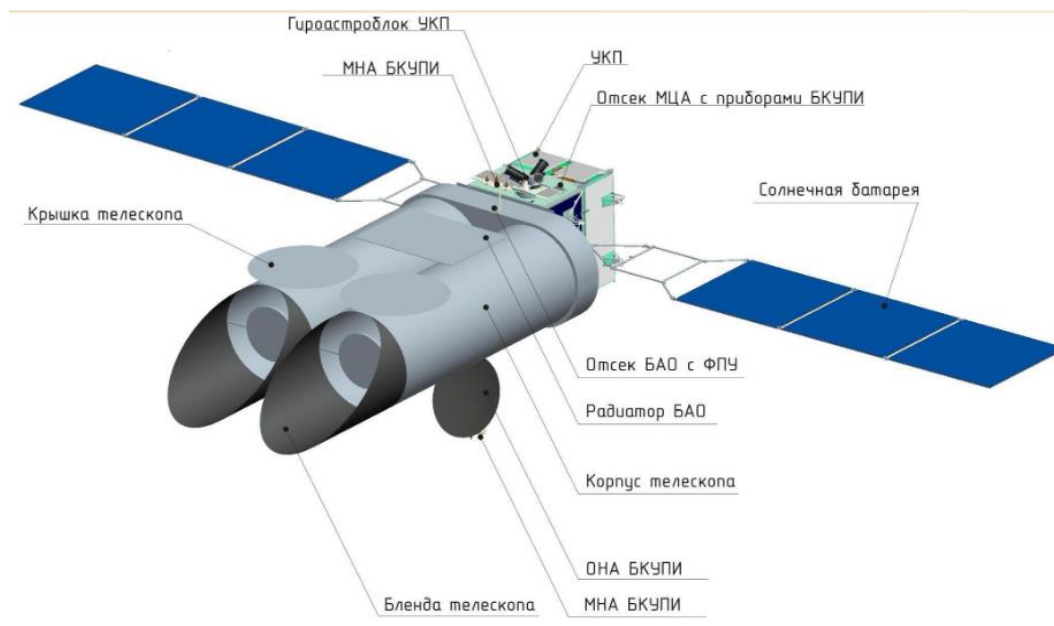


Рис. 1.1. Космический аппарат системы «Небосвод» [56]

Предполагается, что телескопы системы «Небосвод» имеют следующие основные характеристики: апертура ~ 1.5 м, длина телескопа ≤ 5 м, масса телескопа ≤ 400 кг, фокусное расстояние 10 м, поле зрения: $3.3\text{--}4.4^\circ$, формат

матричных приборов с зарядовой связью (МПЗС) 2048×2048 пикселей, размер пикселя 12×12 мкм и т.д. [45], при этом имеет ~ 0.2 угл. сек. /пиксел. На рис. 1.1 показан общий вид проекта КА системы «Небосвод» с двумя телескопами с обозначениями наиболее важных бортовых систем и агрегатов [56].

В состав системы «Небосвод» помимо космических телескопов входят также наземные командно-измерительные пункты (НКИП), расположенные на территории РФ и предназначенные для приёма информации с борта КА, обработки навигационных измерений, передачи команд на КА, а также обмена информацией с Центром управления полетом (ЦУП) и т.п. [45]. Задача НКИП и ЦУП заключается в проведении регулярных траекторных измерений наземными средствами для постоянного слежения за состоянием движения КА и управление их полетами для выполнения конкретных научных задач [45]. Полученные данные наблюдения хранятся и обрабатываются в Информационно-аналитическом центре Российской системы противодействия космическим угрозам [45, 53]. Предполагается, что с помощью системы «Небосвод» можно будет оперативно обнаруживать ОНТ размером 50–100 м и более и быстро определять параметры его орбиты до столкновения с Землёй - для выдачи сигналов космическим системам противодействия или в МЧС для принятия соответствующих мер по снижению ущерба от столкновения [45].

В рамках разработки методики и алгоритмов определения параметров орбиты астероида и оценки точности навигации на основе моделирования измерений системы «Небосвод», рассмотрим вариант системы, включающий в себя четыре КА. Для простоты обозначим два КАГСО из комплекса «Небосвод-1» через КА-1 и КА-2, два КАГЦО из комплекса «Небосвод-2» через КА-3 и КА-4, причем КА-3 – впереди Земли на орбите Земли, а КА-4 – позади Земли. На рис. 1.2 показана принятая нами схема размещения КА системы «Небосвод» в околоземном пространстве. Расстояния от КА-3 и КА-4 до Земли приняты $d_1 \approx d_2 \approx 40$ млн км (0.267 а.е.), при этом углы между направлениями от Солнца на КА-3 (и КА-4) и на Землю $\theta_1 \approx \theta_2 \approx 15.3^\circ$ (см. рис. 1.2).

В таблице 1.1 приведены принятые начальные элементы орбит КА

системы «Небосвод». Элементы орбит КА-1 и КА-2 приведены в геоцентрической геоэкваatorialной инерциальной прямоугольной системе координат (СК) на эпоху $J2000$. Элементы орбит КА-3 и КА-4 относятся к гелиоцентрической эклиптической СК на эпоху $J2000$, они близки к элементам орбиты Земли. Здесь $t_{\pi e} = 2456661.135699795$ (JD) – время, близкое к времени прохождения через перигелий для Земли. Для обеспечения расстояния от КА-3 и КА-4 до центра Земли близким к 40 млн км, принят момент прохождения КА-3 (впереди Земли) и КА-4 (позади Земли) равными $t_{\pi e} - 15.6$ сут и $t_{\pi e} + 15.6$ сут.

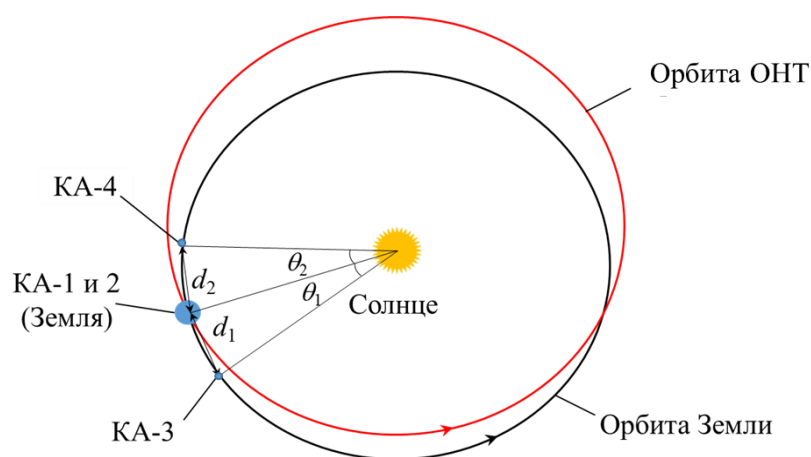


Рис. 1.2. Схема размещения КА системы «Небосвод»

Таблица 1.1. Принятые элементы начальных орбит КА системы «Небосвод»

Параметры	КА-1	КА-2	КА-3	КА-4
a , км	42164	42164	149598261.14144	149598261.14144
e	0.04235841	0.04235841	0.01671123	0.01671123
i , °	11	12	0.00005	0.00005
ω , °	0	0	114.20783	114.20783
Ω , °	194.0836	294.0836	348.73936	348.73936
Ω_G , °	35	135	—	—
t_{π} , UTC	01.03.2029	01.03.2029	$t_{\pi e} - 15.6$ сут	$t_{\pi e} + 15.6$ сут

В качестве номинальных траекторий движения КА системы «Небосвод» рассмотрены разные математические модели их описания. Для этого векторы состояния КА-1 и КА-2 определяются численным интегрированием дифференциальных уравнений (ДУ) движения ИСЗ в геоцентрической геоэкваatorialной инерциальной прямоугольной СК с учетом основных

возмущений: несферичности Земли, а также притяжения Луны и Солнца. При учете несферичности Земли применена стандартная модель гравитационного поля EGM2008 [95], и учтены гармоники до 10 степени включительно. Для КА-3 и КА-4 принято невозмущенное кеплеровское движение. Для удобства изложения обозначаем радиус-вектор и вектор скорости КА, в том числе КА-1-4, относительно Солнца на текущий момент времени t в гелиоцентрической геоэкваториальной инерциальной СК OXYZ на эпоху J2000 через $\mathbf{r}_{KA}(t)$ и $\mathbf{v}_{KA}(t)$.

Математическая модель орбитального движения наблюдаемого астероида вокруг Солнца описывается с помощью системы ДУ в этой же СК OXYZ на эпоху J2000 с учетом возмущений от притяжения планет (Меркурий, Венера, Земля и др.) и Луны, сжатия Земли (с точностью до второй зональной гармоники J_2), а также давления солнечного света. При этом векторы состояния больших небесных тел берутся из JPL-эфемериды DE421. На данном этапе анализа не учтено возмущение от эффекта Ярковского и др. Движение астероида описывается дифференциальными уравнениями:

$$d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}, \quad d\mathbf{v}/dt = \ddot{\mathbf{r}} = -\mu \mathbf{r}/r^3 + \mathbf{a}_{\text{тел}} + \mathbf{a}_{\text{сж}} + \mathbf{a}_{\text{дав}}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{r}(x, y, z)$ и $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$ – гелиоцентрический радиус-вектор и вектор скорости астероида; $\mu = \mu_S + \mu_A$; μ_S, μ_A – гравитационные параметры Солнца и астероида; $\mathbf{a}_{\text{тел}}, \mathbf{a}_{\text{сж}}, \mathbf{a}_{\text{дав}}$ – возмущающие ускорения из-за притяжения больших небесных тел, полярного сжатия Земли J_2 , и давления солнечного света. Через $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ обозначаются начальные радиус-вектор и вектор скорости астероида.

При учете давления солнечного света ускорение $\mathbf{a}_{\text{дав}}$ определяется следующим образом [12]:

$$\mathbf{a}_{\text{дав}} = k_s k_{\text{дав}} \mathbf{r}/r^3, \quad k_{\text{дав}} = C_A \frac{P}{1000} \frac{S_A}{M_A} (1 \text{ а.е.})^2, \quad (1.2)$$

где k_s – коэффициент тени: $k_s=1$, если астероид освещен Солнцем, $k_s=0$ – в противном случае (на данном этапе анализа принято $k_s=1$); $r=|\mathbf{r}|$ – расстояние от Солнца для астероида в «км»; $C_A=1+A_g$, A_g – альбеда поверхности астероида, $P=4.65 \times 10^{-6}$ Н/м² – солнечная постоянная; S_A, M_A – площадь поперечного сечения астероида, его масса; 1 а.е.=149597871 км. Обозначим средний радиус

и плотность астероида через R_A и ρ_A .

Предполагается, что с борта КА системы «Небосвод» выполняется визирование неба, опознавание звезд и астероида, определение его положения на фоне звезд, расчет углов – прямого восхождения α и склонения δ , определяющих линию визирования КА-астероид относительно плоскости экватора и принимаемых за измерения, на основе которых определяется орбита астероида. Измеряемые параметры Ψ – прямое восхождение α и склонение δ :

$$\Psi = [\alpha, \delta]^T, \quad (1.3)$$

здесь и в дальнейшем верхний индекс Т означает транспонирование. Расчётные значения углов (α, δ) вычисляются по радиус-вектору $\rho(\rho_x, \rho_y, \rho_z)$ от КА до астероида: $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{KA}$,

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\rho_y}{\rho_x}, \sin \alpha = \frac{\rho_y}{\sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2}}, 0 \leq \alpha < 2\pi, \\ \delta &= \arcsin \frac{\rho_z}{\rho}, \rho = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2}, -\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Реальные измерения $\bar{\Psi}_k, k=1, \dots, N$, расчетные значения Ψ_k и суммарные ошибки измерений $\mathbf{v}_{\text{sum } k}$ на момент измерений $t_k (t_k < t_{k+1})$:

$$\bar{\Psi}_k = [\bar{\alpha}_k, \bar{\delta}_k]^T, \Psi_k = [\alpha_k, \delta_k]^T, \mathbf{v}_{\text{sum } k} = [v_{\text{sum } \alpha k}, v_{\text{sum } \delta k}]^T, \quad (1.5)$$

где $v_{\text{sum } \alpha k}, v_{\text{sum } \delta k}$ – суммарные ошибки измерений углов прямого восхождения α_k и склонения δ_k . Модель ошибок измерений имеет вид:

$$\mathbf{v}_{\text{sum } k} = \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{s k}, \quad (1.6)$$

где $\mathbf{v}_k$ – вектор случайных ошибок измерений, $\mathbf{v}_{s k} = [\mu_\alpha, \mu_\delta]^T$ – вектор систематических ошибок измерений. Полагаем, что случайные ошибки измерений некоррелированы, $\mathbf{v}_k$ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\mathbf{R}_k$:

$$M\{\mathbf{v}_k\} = \mathbf{0}, M\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T\} = \mathbf{R}_k = \text{diag}(\sigma_{\alpha k}^2, \sigma_{\delta k}^2), \quad (1.7)$$

где $M\{\}$ – операция определения математического ожидания, $\sigma_{\alpha k}$ и $\sigma_{\delta k}$ – среднеквадратичные отклонения (СКО) измерений прямого восхождения α_k и склонения δ_k . Для их определения использованы соотношения:

$$\sigma_{\alpha k} = \sigma_{\text{и}}(t_k) / \cos \delta_k, \sigma_{\delta k} = \sigma_{\text{и}}(t_k), \sigma_{\text{и}}(t_k) = \sqrt{\sigma_{\text{и}1}^2 + \sigma_{\text{и}2}^2}, \quad (1.8)$$

где $\sigma_{\text{и}1}$ – СКО измерения углового положения точечного объекта, $\sigma_{\text{и}2}$ – СКО измерения за счет неточечного характера объекта: $\sigma_{\text{и}2} = \sigma_R / \rho_k$, ρ_k – расстояние от КА до визируемого объекта на момент времени t_k , где $\sigma_R = R_A / 3$ есть СКО линейной ошибки, равное трети среднего радиуса объекта R_A ; $\sigma_{\text{и}}(t_k)$ – суммарное СКО углового измерения на момент t_k .

Рассмотрены две модели систематических ошибок измерений $\mathbf{v}_{sk} = [\mu_\alpha, \mu_\delta]^T$. Для первой модели их значения приняты постоянными μ_α и μ_δ , равными СКО измерения углового положения точечного объекта $\sigma_{\text{и}1}$:

$$\mu_\alpha = \mu_\delta = \sigma_{\text{и}1}. \quad (1.9)$$

Для второй модели величины систематических ошибок измерений μ_α и μ_δ рассматриваются как случайные (одинаковые для всех измерений), распределенные по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и СКО $\sigma_{\mu\alpha}$ и $\sigma_{\mu\delta}$. При этом вектор $\mathbf{v}_{sk}$ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\mathbf{R}_{sk}$:

$$M \{ \mathbf{v}_{sk} \} = \mathbf{0}, \mathbf{R}_{sk} = \text{diag}(\sigma_{\mu\alpha}^2, \sigma_{\mu\delta}^2), \quad (1.10)$$

для анализа было принято:

$$\sigma_{\mu\alpha} = \sigma_{\mu\delta} = \sigma_{\text{и}1}. \quad (1.11)$$

В данной работе рассмотрены три варианта для СКО $\sigma_{\text{и}1}$ угловых измерений: 1"; 0.2"; 0.02". Они соответствуют линейной ошибке $\sim (750; 150; 15)$ км на расстоянии 1 а.е. В качестве основного варианта точности измерения, СКО $\sigma_{\text{и}1}$ принято среднее значение $\sigma_{\text{и}1} = 0.2''$, которое соответствует предполагаемому размеру пикселя МПЗС для телескопов.

1.1.2. Алгоритм анализа видимости при наблюдении астероида с борта КА системы «Небосвод»

Измерения, естественно, могут производиться лишь в те периоды, когда астероид находится в зоне видимости КА системы «Небосвод». При этом в данной работе на каждый момент измерения проверяются три условия

оптического наблюдения астероида с учетом практических ограничений на проведение наблюдения. Это, во-первых, отсутствие затенения Землёй и Луной. Во-вторых, для оптического наблюдения недоступна околосолнечная область из-за засветки от Солнца, размер этой области зависит от конструкции защитной бленды телескопа. На данном этапе анализа принято, что для проведения наблюдения с борта КА угол β между направлениями с КА на астероид и на центр Солнца должен быть не менее 30° , т.е. $\beta \geq 30^\circ$ [45]. В астрономии угол β часто назван элонгацией. И наконец, видимость астероида зависит от его блеска или яркости, характеризующейся видимой звёздной величиной (зв.в.) m_ϵ на момент наблюдения. Она не должна превышать проникающую силу телескопа, характеризующуюся предельной звездной величиной $m_{\text{пред}}$ при наблюдении наиболее слабых звезд.

Согласно ряду действующих программ (*Spacewatch*, *LINEAR*, *LONEOS*, *NEAT* и др.) наблюдения АСЗ, доступные видимые зв.в. для наземных оптических телескопов с апертурами 1...2 м составляют $20^m \dots 24^m$ [66]. Для космических телескопов предполагается, что отсутствие атмосферных помех обеспечит получение более высокого качества измерения и позволяет наблюдать более слабые звезды на фоне неба. При этом на данном этапе анализа для проектируемых космических телескопов системы «Небосвод» с апертурой 1.5 м принято, что $m_{\text{пред}} = 25^m$, т.е. для наблюдения видимая зв.в. m_ϵ астероида не должна превышать 25^m : $m_\epsilon \leq m_{\text{пред}} = 25^m$ [45].

Для анализа видимости астероида из-за засветки от Солнца и затенения Землёй и Луной при наблюдении с борта КА более наглядно рассмотреть видимые движения всех объектов на плоскости Солнце-КА-астероид. Так как все четыре КА системы «Небосвод» движутся в ближнем пространстве Земли, удобно для анализа построить проекцию орбит всех КА на плоскость Солнце-Земля-астероид и рассмотреть движение астероида относительно системы Солнце-Земля. При этом введем вращающуюся вместе с системой Солнце-Земля СК $oxuz$, в центре которой находится Солнце. Ось ox направлена от Солнца на Землю, ось oz перпендикулярна к плоскости Солнце-Земля-астероид

и направлена к северу. Ось ou , лежащая на плоскости Солнце-Земля-астероид, дополняет систему до правой. Орты ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$) СК $oxuz$ имеют вид:

$$\mathbf{e}_x = \frac{\mathbf{r}_E}{r_E}, \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z = \text{sign}(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{e}_z^0) \cdot \mathbf{e}_z^0, \mathbf{n}_0 = [0, 0, 1]^T, \mathbf{e}_z^0 = \frac{\mathbf{r}_E \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_E \times \mathbf{r}|}, \quad (1.12)$$

где $\mathbf{r}_E$ – гелиоцентрический радиус-вектор Земли. Кроме того, при переходе из инерциальной СК $OXYZ$ в СК $oxuz$ все координаты делятся на текущее расстояние от Солнца до Земли $r_E = |\mathbf{r}_E| \approx 1$ а.е., и получаются безразмерные координаты в СК $oxuz$, при этом положение Земли фиксируется на оси ox в точке $(1, 0, 0)$ этой СК. Для астероида в СК $oxuz$ получаются координаты:

$$x = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_x / r_E, \quad y = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_y / r_E, \quad z = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_z / r_E = 0. \quad (1.13)$$

Яркость астероида для КА-наблюдателя зависит не только от расстояния наблюдения, фазового угла Солнца, но и от его физических характеристик, в том числе размера и альбедо. Определяем видимую зв.в. m_ϕ астероида по широко применяемой полуэмпирической формуле Боуэлла [66, 71, 89]:

$$m_\phi = m_a + 5 \log_{10} r \rho + f(\Phi), \quad (1.14)$$

где

$$\begin{aligned} f(\Phi) &= -2.5 \log_{10} [(1-G)\Phi_1 + G\Phi_2], \\ \Phi_i &= w \Phi_{iS} + (1-w) \Phi_{iL}, \quad i = 1, 2, \\ w &= \exp\{-90.56 \tan^2(\Phi/2)\}, \\ \Phi_{iS} &= 1 - C_i \sin(\Phi) / \{0.119 + 1.341 \sin(\Phi) - 0.754 \sin^2(\Phi)\}, \\ \Phi_{iL} &= \exp\{-A_i [\tan(\Phi/2)]^{B_i}\}, \\ A_1 &= 3.332, B_1 = 0.631, C_1 = 0.986, \\ A_2 &= 1.862, B_2 = 1.218, C_2 = 0.238, \end{aligned} \quad (1.15)$$

m_a – абсолютная зв.в. астероида, r – расстояние от астероида до Солнца в а.е., ρ – расстояние от астероида до КА-наблюдателя в а.е., Φ – угол фазы, т.е. угол при астероиде между направлениями на Солнце и на КА. Абсолютная зв.в. m_a , зависящая от диаметра $D=2R_A$ (в км) и альбедо A_g поверхности астероида:

$$m_a = 15.6 - 5 \log_{10} D - 2.5 \log_{10} A_g. \quad (1.16)$$

Если параметры G и A_g не определены из наблюдений, то обычно полагают $G=0.15$, $A_g=0.15$ [66]. Так как все КА системы «Небосвод» с телескопами

находятся на почти постоянном расстоянии (~ 1 а.е.) от Солнца, то при наблюдении небесных объектов с некоторой заданной абсолютной зв.в. m_a в окрестности каждого КА существует практически одна и та же доступная область наблюдения (зона видимости). При этом чем меньше это значение m_a , тем больше размер и яркость объекта, больше доступная область наблюдения.

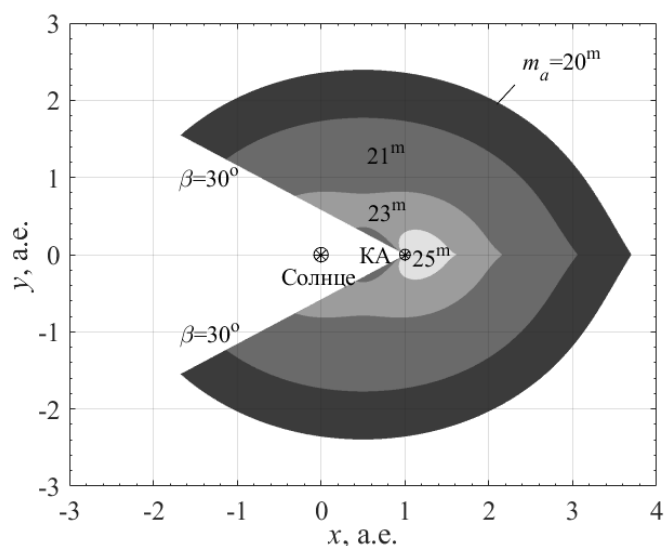


Рис. 1.3. Доступные области при наблюдении объектов с абсолютной зв.в. m_a от 20^m до 25^m с борта КА системы «Небосвод»

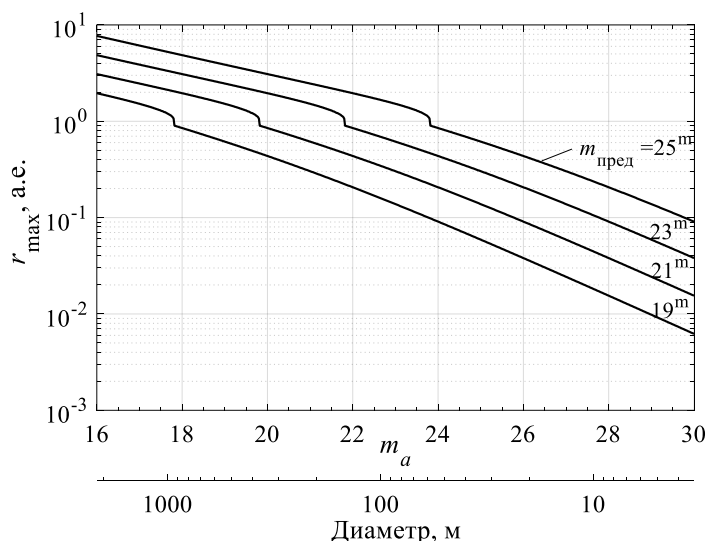


Рис. 1.4. Предельная дальность наблюдения $r_{\max}$ с борта КА в зависимости от абсолютной зв.в. объекта m_a и проницающей силы телескопа $m_{\text{пред}}$

На рис. 1.3 тенью показаны доступные области визирования для наблюдения объектов с абсолютной зв.в. $m_a = 20^m \dots 25^m$ ($D \sim 340 \dots 34$ м) с борта

КА системы «Небосвод». Здесь исключена недоступная область наблюдения (зона невидимости) из-за засветки Солнцем при $\beta < 30^\circ$. Видно, что наблюдение слабых объектов с $m_a = 25^m$ ($D \sim 34$ м) доступно в относительно малой области, имеющей форму «сердца». С уменьшением m_a , т.е. с увеличением размера объекта, расширяется зона видимости для КА. Заметим, что для каждой зоны видимости имеется предельная дальность наблюдения $r_{\max}$ с борта КА, при превышении которой объект нельзя увидеть. Для $m_a = 25^m$ ($D \sim 34$ м) будет $r_{\max} \approx 0.6$ а.е. в теневой стороне Земли при нулевом угле фазы. Для $m_a = 20^m$ ($D \sim 340$ м) будет $r_{\max} \approx 3$ а.е. в околосолнечной области при $\beta = 30^\circ$.

На рис. 1.4 приведена зависимость предельной дальности наблюдения $r_{\max}$ с борта КА от абсолютной зв.в. m_a (или диаметра D) наблюдаемого объекта и проникающей силы телескопа $m_{\text{пред}}$. Для большинства астероидов, имеющих альбедо $A_g \approx 0.15$, абсолютные зв.в. m_a соответствуют их размерам. Доступная область наблюдения расширяется с ростом проникающей силы телескопа $m_{\text{пред}}$.

Отметим, что величина $m_{\text{пред}} = 19^m \dots 23^m$ соответствует проникающей силе большинства наземных телескопов с апертурой 60 см ... 1.8 м [66]. При наблюдении астероидов диаметром 140 м ($m_a \sim 22^m$) с борта КА системы «Небосвод» $r_{\max}$ составляет ~ 2 а.е., а если их наблюдать с помощью наземных телескопов с $m_{\text{пред}} \leq 23^m$, получается $r_{\max} < 0.9$ а.е. Аналогично, при наблюдении астероида типа Апофис диаметром ~ 320 м ($m_a \sim 19.3^m$), $r_{\max}$ составляет ~ 3 а.е. для телескопов системы «Небосвод» и не более 2 а.е. для большинства наземных телескопов с проникающей силой $19^m \dots 23^m$.

1.1.3. Вычисление параметров движения астероида относительно Земли

Как известно, опасность астероида для Земли непосредственно зависит от его вероятности и энергии их столкновения, а также места и времени падения на поверхность Земли. При этом для оценки опасности астероида важно детально рассмотреть его движение относительно Земли. Для этого, в первую очередь, важно определить минимальное расстояние от астероида до Земли на

довольно длительном интервале времени, поскольку по этому расстоянию оценивается вероятность столкновения. Особое внимание надо обратить на движение астероида относительно Земли, когда он тесно сближается с Землёй, а даже входит в её сферу действия, тогда требуется выявить обстоятельства этого тесного сближения и определить параметры гиперболической орбиты астероида, в том числе элементы орбиты, прицельную дальность, скорость сближения, трассу подлета к Земле и др. Рассмотрим этот случай подробнее.

В качестве элементов геоцентрической орбиты астероида $\mathbf{q}_{\text{geo}} = (a, e, i, \omega, \Omega, t_{\pi})_{\text{geo}}$ удобно взять оскулирующие элементы его возмущенной орбиты на время прохождения через перигей t_{π} . В данной работе прогнозирование движения астероида $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ получается численным интегрированием системы ДУ в гелиоцентрической геоэкуаториальной СК OXYZ. Для анализа геоцентрического движения астероида переходим в геоцентрическую геоэкуаториальную инерциальную СК $O_E X_E Y_E Z_E$ на эпоху J2000. Радиус-вектор $\mathbf{r}_E$ и вектор скорости $\mathbf{v}_E$ Земли относительно Солнца в СК OXYZ определяются из JPL-эфемериды DE421. Векторы $\mathbf{r}_{EA}$, $\mathbf{v}_{EA}$ соответствуют радиус-вектору и вектору скорости астероида относительно центра масс Земли:

$$\mathbf{r}_{EA} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_E, \mathbf{v}_{EA} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_E. \quad (1.17)$$

Вычисление времени прохождения перигея t_{π} проводится итерационно. Процедура итерации состоит в следующем. Для начала определяем оскулирующие элементы $\mathbf{q}_{\text{geo}}^{(0)}$ геоцентрической орбиты астероида на некоторый момент времени, получаем приближенное время прохождения перигея $t_{\pi}^{(0)}$. Затем интегрируем ДУ движения астероида до $t_{\pi}^{(0)}$, находим радиус-вектор и вектор скорости астероида на момент $t_{\pi}^{(0)}$, по ним определяются уточнённые оскулирующие элементы $\mathbf{q}_{\text{geo}}$, включающие обновленное время прохождения перигея t_{π} . Опять интегрируя до обновленного t_{π} , находим элементы $\mathbf{q}_{\text{geo}}$ геоцентрической орбиты на следующей итерации. Таким образом итерационная процедура повторяется до тех пор, пока t_{π} мало меняется. По элементам $\mathbf{q}_{\text{geo}}$ вычисляются перигейное расстояние $r_{\pi} = a(1-e)$, вектор прицельной дальности $\mathbf{b}$ и скорость на “бесконечности” $\mathbf{V}_{\infty}$ [1, 5, 26].

Соотношение между ними имеет:

$$b = \sqrt{r_{\pi}^2 + 2\mu_E r_{\pi} / V_{\infty}^2}, \quad (1.18)$$

где μ_E – гравитационный параметр Земли, $b=|\mathbf{b}|$, $V_{\infty} = |\mathbf{V}_{\infty}|$.

На данном этапе анализа не учитывается влияние атмосферы на движение астероида, при этом полагается, что условие $r_{\pi} \leq R_E$ ($R_E=6378.137$ км – средний экваториальный радиус Земли) соответствует падению астероида на Землю, в этом случае прицельная дальность b не превышает её предельное значение $b_{\text{пред}}$, т.е. $b \leq b_{\text{пред}}$, где $b_{\text{пред}} = \sqrt{R_E^2 + 2\mu_E R_E / V_{\infty}^2}$.

Для анализа движения астероида относительно поверхности Земли переходим в геоцентрическую геоэкваториальную гринвичскую вращающуюся систему координат $O_E X_G Y_G Z_G$. Определяются траасса астероида при подлете к Земле и координаты условной (без учета влияния атмосферы) точки падения на поверхности Земли, если будет столкновение. В качестве формы Земли принят земной эллипсоид, характеризуемый средним экваториальным радиусом R_E и полярным сжатием $\alpha_e=1/298.25$. Учтено влияние прецессии и нутации на определение координат точки падения на Земле. Для перехода от инерциальной СК $O_E X_E Y_E Z_E$ на эпоху J2000 (вектор $\mathbf{r}_{EA}$) к гринвичской СК $O_E X_G Y_G Z_G$ текущего момента (вектор $\mathbf{r}_G$) применена модель преобразования координат точки с учетом прецессии, нутации и вращения Земли [3, 6, 7, 14, 44, 88]:

$$\mathbf{r}_G = \mathbf{MNP} \mathbf{r}_{EA},$$

где $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}$ – матрицы суточного вращения Земли, нутации и прецессии. Они определяются в соответствии с моделью прецессии-нутации MAC2000 [88]. Отметим, что по теории нутации MAC2000 разложения нутации в долготу и в наклоне экватора включают 1365 членов (678 лунно-солнечных и 687 планетных), здесь мы учитывали 10 главных членов из них для вычисления лунно-солнечной нутации, которые тоже дают хорошее приближение вращения земной оси. Так как средние квадратичные погрешности определения координат полюса достаточно малы, влиянием движения земных полюсов на преобразование координат точки падения в нашей задаче пренебрегается.

По прямоугольным координатам определяются долгота λ , геоцентрическая широта φ' , географическая широта φ и высота H астероида над поверхностью земного эллипсоида [1, 5, 26, 49]. По географическим координатам (λ, φ) строится трасса астероида. Минимальная высота $H_{\min}$ (при $H_{\min} > 0$) полета астероида над поверхностью земного эллипсоида соответствует примерно моменту времени t_π . При $H_{\min} \leq 0$ считаем, что траектория астероида пересекает поверхность Земли, и точка пересечения (до t_π) соответствует месту падения на Землю. Обозначаем время столкновения и географические координаты условной точки падения через t_c ($t_c \leq t_\pi$), λ_c , φ_c , соответственно, а вектор скорости столкновения относительно поверхности Земли – через V_c . Способ определения времени столкновения t_c похож на вышеописанный способ определения времени прохождения перигея t_π , причем t_c определяется интегрированием и интерполяцией, при выполнении условий $t_c \leq t_\pi$ и $|H| < \varepsilon_H$, ε_H – мало.

Подобным же способом определяется время прохождения астероида через условную границу атмосферы при высоте $H=100$ км. Время и угол входа в атмосферу, а также соответствующие радиус-вектор и вектор скорости астероида относительно центра масс Земли обозначаются через $t_{\text{атм}}$, $\theta_{\text{атм}}$, $\mathbf{r}_{\text{атм}}$ и $\mathbf{v}_{\text{атм}}$. Переходом в местную СК определяются угол азимута A_z , угол места, а также наклонная дальность астероида относительно наземного наблюдателя.

1.1.4. Постановка задачи определения орбиты астероида по результатам измерений системы «Небосвод»

Для математического описания задачи определения орбиты астероида по измерениям космической системы «Небосвод» представим модель движения динамической системы (астероида) с помощью системы ДУ в виде:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{C}, t), \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \end{cases} \quad (1.19)$$

где $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n - n$ ($n=6$)-мерный вектор состояния на момент времени t ; $\mathbf{C}$ – вектор неточно известных параметров динамической системы размерности m , $\mathbf{C} \in \Omega_C$;

$\Omega_C \subset \mathbb{R}^m$ – заданная априорная область возможных значений вектора $\mathbf{C}$.

Модель движения КА (измерительной системы), определяющих измерения, представляем в виде:

$$d\mathbf{Z}/dt = \mathbf{G}(\mathbf{Z}, t), \quad (1.20)$$

где $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^q$ – q ($q=6$)-мерный вектор состояния КА на момент времени t .

С помощью функции измерений описывается соотношение между измеряемыми параметрами $\Psi(t)$, параметрами движения динамической системы (астероида) $\mathbf{X}(t)$ и параметрами состояния измерительной системы (КА) $\mathbf{Z}(t)$ на текущий момент времени t . Функцию измерений можно записать в виде:

$$\Psi(t) = \Psi(\mathbf{X}(t), \mathbf{Z}(t)), \quad (1.21)$$

где $\Psi(t) \in \mathbb{R}^p$ – p -мерный вектор-столбец измерений, для одного КА $p=2$.

В постановке задачи предполагается, что присутствуют случайные и систематические ошибки в измерениях, а также неточно известные параметры в модели движения динамической и измерительной систем, в частности, ошибок обновления и прогнозирования состояния КА. Задана априорная информация о начальном состоянии астероида. Вероятностные характеристики этих факторов и ошибок измерений известны, причем они имеют нормальное распределение с заданными математическими ожиданиями и ковариационными матрицами.

Тогда, учитывая, что в момент измерения t_k есть случайные и систематические ошибки измерений $\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{sk}$, имеем модель измерения:

$$\bar{\Psi}_k = \Psi(\mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k) + \mathbf{v}_{sk} + \mathbf{v}_k, k=1, \dots, N, \quad (1.22)$$

где $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}(t_k)$, $\mathbf{Z}_k = \mathbf{Z}(t_k)$. При этом измерению каждого КА ($\mathbf{Z}_k$) даем свое время t_k . Векторы случайных и систематических ошибок измерений $\mathbf{v}, \mathbf{v}_s$ на всем мерном интервале и для всех КА имеют вид:

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1^T, \dots, \mathbf{v}_k^T, \dots, \mathbf{v}_N^T]^T, \mathbf{v}_s = [\mathbf{v}_{s1}^T, \dots, \mathbf{v}_{sk}^T, \dots, \mathbf{v}_{sN}^T]^T, \quad (1.23)$$

$$\mathbf{v}_{s1} = \dots = \mathbf{v}_{sk} = \dots = \mathbf{v}_{sN}, k=1, \dots, N.$$

Введя обозначение $\mathbf{I}_{pN \times p} = [\mathbf{E}_p, \mathbf{E}_p, \dots, \mathbf{E}_p]^T$ ($\mathbf{E}_p$ – p -мерная единичная матрица), имеем $\mathbf{v}_s = \mathbf{I} \mathbf{v}_{sk}$. По предположению, случайные ошибки измерений некоррелированы, вектор $\mathbf{v}_k$ имеет нормальное распределение с нулевым

математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\mathbf{R}_k$. При этом для вектора $\mathbf{v}$ имеем:

$$M\{\mathbf{v}\}=\mathbf{0}, M\{\mathbf{v} \mathbf{v}^T\} = \mathbf{R} = \text{diag}\{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_N\}. \quad (1.24)$$

Чтобы учесть вышеописанные две модели систематических ошибок $\mathbf{v}_{sk}$ (1.9)-(1.10), можно считать, что они постоянны на всем мерном интервале, а их значения являются случайными. Тогда для первого случая будут $M\{\mathbf{v}_{sk}\}=\text{const} \neq 0$, а ковариационная матрица $\mathbf{R}_{sk}=\mathbf{0}$. Для второго случая $M\{\mathbf{v}_{sk}\}=\mathbf{0}$, $\mathbf{R}_{sk}=\text{diag}(\sigma_{\mu\alpha}^2, \sigma_{\mu\delta}^2)$. Тогда математическое ожидание и ковариационная матрица $\mathbf{R}_s$ вектора $\mathbf{v}_s$ систематических ошибок измерений имеют вид:

$$M\{\mathbf{v}_s\} = \mathbf{I} \cdot M\{\mathbf{v}_{sk}\}, M\left\{\left(\mathbf{v}_s - M\{\mathbf{v}_s\}\right)\left(\mathbf{v}_s - M\{\mathbf{v}_s\}\right)^T\right\} = \mathbf{R}_s = \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}_{sk} \cdot \mathbf{I}^T. \quad (1.25)$$

Для учета ошибок измерительной системы, рассмотрим случай, когда задана модель её движения (1.20) и предполагается, что в качестве начальных условий системы (1.20) её параметры состояния последовательно обновляются в моменты времени t_i , $i=1, \dots, M$, ($t_i < t_{i+1}$) на мерном интервале измерений (например, раз в сутки или в неделю, месяц и т.д.). В этом случае параметры состояния измерительной системы $\mathbf{Z}_k$ на момент измерения t_k и их ошибки получают прогнозированием её движения (1.20) от ближайшего предыдущего момента t_i , где $t_i \leq t_k < t_{i+1}$. При этом полагаем, что заданные параметры состояния $\bar{\mathbf{Z}}_i$ на момент t_i отклоняются от их истинных значений $\mathbf{Z}_i$ на ошибки ζ_{zi} с ковариационной матрицей $\mathbf{Q}_i$. Обозначая набор векторов $\mathbf{Z}_i$ через $\mathbf{Z}_I$:

$$\mathbf{Z}_I = [\mathbf{Z}_1^T, \dots, \mathbf{Z}_i^T, \dots, \mathbf{Z}_M^T]^T, i=1, \dots, M, \quad (1.26)$$

и вектор априорных значений $\bar{\mathbf{Z}}_i$ и ошибок ζ_{zi} через $\bar{\mathbf{Z}}_I$ и ζ_z , получим

$$\bar{\mathbf{Z}}_I = \mathbf{Z}_I + \zeta_z, M\{(\zeta_z - M\{\zeta_z\})(\zeta_z - M\{\zeta_z\})^T\} = \mathbf{Q} = \text{diag}\{\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_M\}. \quad (1.27)$$

Аналогично полагаем, что для параметров $\mathbf{C}$ в модели системы (1.19) априорные значения $\bar{\mathbf{C}}$ содержат ошибки ζ_c с ковариационной матрицей $\mathbf{S}$:

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \zeta_c, M\{(\zeta_c - M\{\zeta_c\})(\zeta_c - M\{\zeta_c\})^T\} = \mathbf{S}. \quad (1.28)$$

Пусть также дана априорная информация $\bar{\mathbf{X}}_0$ о случайном векторе начального состояния системы $\mathbf{X}_0$ с ковариационной матрицей $\mathbf{P}_0$ их ошибок ζ_{x0} :

$$\bar{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{X}_0 + \zeta_{x0}, M\{(\zeta_{x0} - M\{\zeta_{x0}\})(\zeta_{x0} - M\{\zeta_{x0}\})^T\} = \mathbf{P}_0. \quad (1.29)$$

Так как параметры Z_I и C неточно известны и их ошибки непосредственно влияют на расчет измеряемых параметров, такие неточно известные параметры, связанные с измерениями или с моделью движения системы, иногда называют *мешающими* или *возмущающими*, имея в виду, что они «мешают» обработке измерений [9, 13, 51, 62, 68]. Следуя этой традиции, будем также называть эти параметры мешающими. Согласно [13], мешающие параметры можно разделить на два типа: динамические, входящие в модель движения системы (как параметры C), и нединамические, например, параметры условий наблюдения (как параметры состояния КА). Можно также считать систематические ошибки измерений нединамическими мешающими параметрами.

Когда определяется орбита астероида по измерениям с борта КА системы «Небосвод», вектор $X(t)$ есть вектор состояния астероида в рассматриваемой СК OXYZ: $X(t)=[r(t), v(t)]^T$, при этом $F=[v(t), \ddot{r}(t)]^T$, вектор $Z(t)$ есть вектор состояния КА: $Z(t)=[r_{KA}(t), v_{KA}(t)]^T$. В качестве вектора C неточно известных параметров в модели движения астероида рассмотрены его альбедо A_g , плотность ρ_A и средний радиус R_A , влияющие на расчет возмущающего ускорения от давления солнечного света (1.2): $C=[A_g, \rho_A, R_A]^T$.

Требуется найти оптимальное оценивание вектора состояния системы, а также дать оценку точности фильтрации при наличии случайных ошибок измерений, а также всех вышесказанных мешающих факторов, в том числе систематических ошибок измерений v_s , ошибок параметров C в модели движения системы, ошибок параметров Z_I измерительной системы и ошибок априорного знания начального состояния X_0 .

1.2. Построение алгоритмов обработки результатов измерений

Опишем разработанную методику обработки измерений системы «Небосвод» для определения орбиты астероида. Сначала для открытого астероида определяется его первоначальная орбита. Методы начального определения орбиты предложены Эйлером, Ламбертом, Лагранжем, Гауссом, Лапласом, Гиббсом и др. [1, 105]. Для нашей задачи начальное приближение

орбиты на основе угловых измерений прямого восхождения и склонения определяется методом Гаусса – перехода от угловых координат к радиус-векторам и уточняется методом Херрика-Гиббса [105].

Затем после набора некоторого достаточного числа измерений, выполняется статистическая обработка измерений и итерационно уточняются параметры орбиты астероида. За основу алгоритма уточнения параметров орбиты астероида по данным траекторных измерений применен метод наименьших квадратов Гаусса-Лежандра, описанный и развитый в применении к решению задач механики космического полета в работах Акима Э.Л., Энеева Т.М., Эльясберга П.Е., Лидова М.Л., Ястребов В.Д., Шапиро И., Бажинова И.К., Почукаева В.Н., Тучина А.Г., Milani A., Tapley B., Vallado D.A. и др. [1, 5, 9, 11, 47, 49, 68, 93, 101, 105 и др.]. При этом оценка параметров системы определяется из условия минимизации функционала, зависящего от невязок измерений. В случае уточнения начального вектора состояния системы $\mathbf{X}_0$ оценка имеет вид:

$$\hat{\mathbf{X}}_0 = \arg \min_{(\mathbf{X}_0)} (J), \quad (1.30)$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{\Psi}_k - \Psi_k(\mathbf{X}_0))^T \mathbf{R}_k^{-1} (\bar{\Psi}_k - \Psi_k(\mathbf{X}_0)),$$

где $\mathbf{R}_k^{-1}$ – весовая матрица измерений.

Следуя необходимому условию минимума функционала получим

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \mathbf{X}_0} \right|_{\mathbf{X}_0 = \hat{\mathbf{X}}_0} = - \sum_{k=1}^N (\bar{\Psi}_k - \Psi_k)^T \mathbf{R}_k^{-1} \left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial \mathbf{X}_0} \right) = 0. \quad (1.31)$$

Решение нелинейной системы уравнений (1.31) получается итерационно по методу Ньютона-Гаусса с начальным условием $\hat{\mathbf{X}}_0^{(0)} = \bar{\mathbf{X}}_0$, полученным из орбиты на первом этапе:

$$\hat{\mathbf{X}}_0^{(j)} = \hat{\mathbf{X}}_0^{(j-1)} + (\mathbf{A}^{(j-1)})^{-1} \mathbf{b}^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.32)$$

$$\mathbf{A}^{(j-1)} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial \hat{\mathbf{X}}_0^{(j-1)}} \right)^T \mathbf{R}_k^{-1} \left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial \hat{\mathbf{X}}_0^{(j-1)}} \right), \quad \mathbf{b}^{(j-1)} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial \hat{\mathbf{X}}_0^{(j-1)}} \right)^T \mathbf{R}_k^{-1} (\bar{\Psi}_k - \Psi_k(\hat{\mathbf{X}}_0^{(j-1)})),$$

итерация продолжается до выполнения условия сходимости

$$\left| \hat{X}_{0i}^{(j)} - \hat{X}_{0i}^{(j-1)} \right| < \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots \quad (1.33)$$

где ε_i – набор заданных точностей.

Учитывая наличие и влияние на результаты навигации ряда мешающих факторов, рассмотрены оценки точности навигации для двух вариантов алгоритма обработки навигационных измерений. В первом случае оценивается только начальное состояние системы, при этом мешающие параметры есть, но они не оцениваются (будем называть этот вариант алгоритма классическим *методом наименьших квадратов* и кратко обозначаем его через МНК). Во втором случае частично или полностью учитываются и уточняются мешающие параметры в динамической и измерительной системах. При этом разработан алгоритм оптимальной обработки измерений на основе модифицированного метода наименьших квадратов, или т.н. *метода мешающих параметров* (ММП) [5, 62, 68].

1.2.1. Линеаризация модели динамической системы и модели измерения

В конструкции алгоритма фильтрации по МНК и ММП, как и в методе Ньютона-Гаусса решения систем нелинейных уравнений (1.31), используется линеаризация нелинейных функций модели динамической системы (1.19) в окрестности приближенного решения, которое называется опорным. Полагаем, что опорное движение системы, близкое к реальному, описывается ДУ:

$$\begin{cases} \frac{dX^*}{dt} = F(X^*, C^*, t), \\ X^*(t_0) = X_0^*, \end{cases} \quad (1.34)$$

где X^* , C^* относятся к опорному движению при начальных условиях X_0^* . Линеаризованное уравнение движения системы записывается в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t)x + \zeta(t)c, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.35)$$

$$c = C - C^*, x = X - X^*,$$

$$f(t) = \partial F(X^*, C^*, t) / \partial X, \quad \xi(t) = \partial F(X^*, C^*, t) / \partial C,$$

здесь c – вариация параметра возмущения модели C ; x – вектор состояния истинного движения системы относительно опорного, т.е. вариация вектора состояния, часто будем называть его просто вектором состояния; $f(t)$ – n -мерная квадратная матрица, $\xi(t)$ – матрица размерностью $n \times m$.

Линеаризованное уравнение (1.35) есть векторное линейное неоднородное ДУ первого порядка. Его общее решение можно записать в виде:

$$x = \Phi(t, t_0) x_0 + \zeta(t, t_0) c, \quad (1.36)$$

$$\Phi(t, t_0) = \partial X(t) / \partial X(t_0), \quad \zeta(t, t_0) = \partial X(t) / \partial C,$$

где $\Phi(t, t_0)_{n \times n}$ – матрица изохронных производных от текущего вектора состояния системы по начальному, или т.н. переходная матрица, матрицант системы. Она есть решение линейного однородного ДУ [101]:

$$d\Phi(t, t_0)/dt = f(t) \Phi(t, t_0), \quad (1.37)$$

при начальном условии вида $\Phi(t_0, t_0) = E_n$, где E_n – n -мерная единичная матрица. Матрица $\zeta(t, t_0)_{n \times m}$ в (1.36) характеризует чувствительность вектора состояния системы X к параметрам C . Она определяется интегрированием ДУ [101]:

$$d\zeta(t, t_0)/dt = f(t) \zeta(t, t_0) + \xi(t), \quad (1.38)$$

при начальном условии вида $\zeta(t_0, t_0) = 0$. При этом введя обозначения:

$$\Phi_k = \Phi(t_k, t_0), \quad \zeta_k = \zeta(t_k, t_0),$$

из (1.36), получим вектор состояния x на момент измерения t_k :

$$x_k = \Phi_k x_0 + \zeta_k c, \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.39)$$

Аналогично, линеаризованное уравнение движения измерительной системы (1.20) и её начальные условия записываются в виде:

$$dz(t)/dt = g(t)z(t), \quad z(t_i) = z_i, \quad (1.40)$$

$$z(t) = Z(t) - Z^*(t), \quad z_i = Z_i - Z_i^*, \quad g(t) = \partial G(Z^*, t) / \partial Z,$$

где $z(t)$ – вектор состояния движения измерительной системы $Z(t)$ относительно опорного $Z^*(t)$. Общее решение уравнения (1.40) можно записать в виде:

$$z(t) = \partial Z(t) / \partial Z(t_i) z_i. \quad (1.41)$$

Отметим, что для уменьшения ошибок прогнозирования движения КА при расчете вектора состояния измерительной системы z_k на момент измерения t_k

используем априорно заданный вектор состояния $\mathbf{z}_i$, который соответствует последнему (до момента измерения t_k , т.е. $t_i \leq t_k < t_{i+1}$) обновленному вектору состояния измерительной системы. Поэтому вектор состояния $\mathbf{z}_k$ на момент измерения t_k имеет вид:

$$\mathbf{z}_k = \partial \mathbf{Z}(t_k) / \partial \mathbf{Z}(t_i) \mathbf{z}_i, k = 1, \dots, N; i = 1, \dots, M, \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial \mathbf{Z}(t_k)}{\partial \mathbf{Z}(t_i)} = \begin{cases} \Phi_z(t_k, t_i), & t_i \leq t_k < t_{i+1}, \\ \mathbf{0}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

где $\Phi_z(t, t_i)$ – переходная матрица измерительной системы:

$$d\Phi_z(t, t_i) / dt = \mathbf{g}(t)\Phi_z(t, t_i), \quad \Phi_z(t_i, t_i) = \mathbf{E}_q. \quad (1.43)$$

Отметим предельный случай, когда вектор состояния $\mathbf{z}_i$ последовательно обновляется в каждый момент измерений, т.е. $t_i = t_k$, тогда $\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_i$, $\partial \mathbf{Z}(t_k) / \partial \mathbf{Z}(t_i) = \mathbf{E}_q$.

Теперь линеаризуем модель измерения. Введя отличие измеряемых параметров от опорных:

$$\psi_k = \Psi_k - \Psi_k^*, \quad \bar{\psi}_k = \bar{\Psi}_k - \Psi_k^*, \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.44)$$

где $\Psi_k^* = \Psi(\mathbf{X}_k^*, \mathbf{Z}_k^*)$, при этом $\bar{\psi}_k = \psi_k + \mathbf{v}_{sk} + \mathbf{v}_k$, и линеаризируя (1.21), получим

$$\psi_k = \partial \Psi_k / \partial \mathbf{X}_k \mathbf{x}_k + \partial \Psi_k / \partial \mathbf{Z}_k \mathbf{z}_k. \quad (1.45)$$

Подставляя уравнения (1.39) и (1.42) в (1.45) и обозначая

$$\mathbf{H}_{xk} = \partial \Psi_k / \partial \mathbf{X}_k, \quad \mathbf{H}_{ck} = \partial \Psi_k / \partial \mathbf{C} = \mathbf{H}_{xk} \boldsymbol{\zeta}_k, \quad \mathbf{H}_{zk} = \partial \Psi_k / \partial \mathbf{Z}_k,$$

получим

$$\psi_k = \mathbf{H}_{xk} \Phi_k \mathbf{x}_0 + \mathbf{H}_{ck} \mathbf{c} + \mathbf{H}_{zk} \cdot \partial \mathbf{Z}_k / \partial \mathbf{Z}_i \mathbf{z}_i. \quad (1.46)$$

Пусть

$$\bar{\boldsymbol{\psi}} = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1 \\ \bar{\psi}_2 \\ \vdots \\ \bar{\psi}_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_M \end{bmatrix},$$

тогда выражаем измерения $\boldsymbol{\psi}$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}$ через начальное состояние $\mathbf{x}_0$, а также параметры $\mathbf{c}$, $\mathbf{z}_I$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_s$ в моделях движения астероида и измерительной системы:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi} &= \mathbf{H}_{x0} \mathbf{x}_0 + \mathbf{H}_c \mathbf{c} + \mathbf{H}_z \mathbf{z}_I, \\ \bar{\boldsymbol{\psi}} &= \mathbf{H}_{x0} \mathbf{x}_0 + \mathbf{H}_c \mathbf{c} + \mathbf{H}_z \mathbf{z}_I + \mathbf{v}_s + \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\mathbf{H}_{x_0} = \partial\psi / \partial x_0, \mathbf{H}_c = \partial\psi / \partial c, \mathbf{H}_z = \partial\psi / \partial z_i.$$

Матрица частных производных $\mathbf{H}_z$ имеет блочные элементы $\mathbf{H}_{zki} = \partial\Psi_k / \partial z_i = \mathbf{H}_{zk} \cdot \partial\mathbf{Z}_k / \partial z_i$, причем в них для расчета частных производных $\partial\mathbf{Z}_k / \partial z_i$ приняты условия (1.42). При этом имеем

$$\mathbf{H}_{zki} = \frac{\partial\Psi_k}{\partial\mathbf{Z}_k} \cdot \frac{\partial\mathbf{Z}_k}{\partial z_i} = \begin{cases} \mathbf{H}_{zk} \cdot \Phi_z(t_k, t_i), & t_i \leq t_k < t_{i+1}, \\ \mathbf{0}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.48)$$

Если вектор состояния z_i последовательно обновляется на каждый момент измерений $t_i = t_k$, тогда здесь $\mathbf{H}_{zki} = \mathbf{H}_{zk} = \partial\Psi_k / \partial\mathbf{Z}_k$.

Исходя из допущения о законе распределения ошибок измерений в п. 1.1.4, выпишем заданные ковариационные матрицы для случайных векторов $\bar{c} = \bar{C} - C^*$, $\bar{z}_I = \bar{Z}_I - Z_I^*$ и $\bar{x}_0 = \bar{X}_0 - X_0^*$ (разностей априорных значений и опорных для мешающих параметров C , X_0 и Z на моменты t_i , $i=1, \dots, M$):

$$\begin{aligned} M \left\{ (\bar{c} - M\{\bar{c}\})(\bar{c} - M\{\bar{c}\})^T \right\} &= \mathbf{S}, \\ M \left\{ (\bar{z}_I - M\{\bar{z}_I\})(\bar{z}_I - M\{\bar{z}_I\})^T \right\} &= \mathbf{Q}, \\ M \left\{ (\bar{x}_0 - M\{\bar{x}_0\})(\bar{x}_0 - M\{\bar{x}_0\})^T \right\} &= \mathbf{P}_0. \end{aligned} \quad (1.49)$$

1.2.2. Алгоритмы оценивания без уточнения мешающих параметров

Здесь рассмотрим алгоритмы обработки навигационных измерений в случае, когда есть мешающие факторы, но они не оцениваются. Если нет априорной информации о начальном состоянии $\bar{x}_0$, оценка начального состояния системы $\hat{x}_0$ получается минимизацией функционала:

$$\hat{x}_0 = \arg \min_{(x_0)} (J), \quad J = \frac{1}{2} (\bar{\psi} - \psi)^T \mathbf{R}^{-1} (\bar{\psi} - \psi), \quad (1.50)$$

здесь предполагается, что весовая матрица соответствует реальной ковариационной матрице ошибок измерений. При этом оценка $\hat{x}_0$ имеет вид:

$$\hat{x}_0 = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \bar{\psi}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1}. \quad (1.51)$$

Ошибка оценки $\delta \hat{x}_0$ представляет собой разность оценки и реальных значений:

$$\delta \hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{H}_c \mathbf{c} + \mathbf{H}_z \mathbf{z}_I + \mathbf{v}_s + \mathbf{v}). \quad (1.52)$$

С учётом статистических характеристик ошибок измерений $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_s$, и мешающих параметров $\mathbf{c}$ и $\mathbf{z}_I$, согласно *теореме Гаусса-Маркова* ковариационная матрица $\mathbf{K}_{x_0}$ ошибки оценки $\hat{\mathbf{x}}_0$ имеет вид:

$$\mathbf{K}_{x_0} = M \{ \delta \hat{\mathbf{x}}_0 \delta \hat{\mathbf{x}}_0^T \} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{R}_s + \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T + \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T) \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1}. \quad (1.53)$$

Если нет мешающих факторов, то матрица $\mathbf{K}_{x_0}$ будет иметь вид [5, 68, 101]:

$$\mathbf{K}_{x_0} = \mathbf{A}^{-1}. \quad (1.54)$$

При учете априорной информации $\bar{\mathbf{x}}_0$, функционал J [60, 101]:

$$J = \frac{1}{2} (\bar{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi})^T \mathbf{R}^{-1} (\bar{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi}) + \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{P}_0^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0), \quad (1.55)$$

при этом оценка начального состояния $\hat{\mathbf{x}}_0$ имеет вид:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = (\mathbf{A} + \mathbf{P}_0^{-1})^{-1} (\mathbf{B} \bar{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{P}_0^{-1} \bar{\mathbf{x}}_0). \quad (1.56)$$

Тогда ковариационная матрица $\mathbf{K}_{x_0}$:

$$\mathbf{K}_{x_0} = (\mathbf{A} + \mathbf{P}_0^{-1})^{-1} + (\mathbf{A} + \mathbf{P}_0^{-1})^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{R}_s + \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T + \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T) \mathbf{B}^T (\mathbf{A} + \mathbf{P}_0^{-1})^{-1}. \quad (1.57)$$

Если нет мешающих параметров, матрица $\mathbf{K}_{x_0}$ имеет вид [60, 101 и др.]:

$$\mathbf{K}_{x_0} = (\mathbf{A} + \mathbf{P}_0^{-1})^{-1}. \quad (1.58)$$

1.2.3. Алгоритмы оценивания с уточнением мешающих параметров

Здесь рассмотрим алгоритмы обработки измерений, когда есть мешающие параметры и они уточняются. Общая теория оценивания с уточнением мешающих параметров по данным измерений, т.н. расширенная задача оценивания, представлена в ряде работ [9, 13, 40, 41, 51, 62, 68, 101 и др.]. При этом мешающие параметры рассматриваются как оцениваемые параметры и априорная информация о них является дополнительными измерениями. Эта задача оценивания также решается методом наименьших квадратов (МНК). Оценка определяется из условия минимизации функционала-критерия, зависящего как от невязок измерений, так и от невязок мешающих параметров. Этот метод является модифицированным методом наименьших квадратов.

Иногда он именуется специальным термином «метод мешающих параметров» [62 и др.]. Априорная информация о начальном состоянии системы тоже может рассматриваться как дополнительное измерение [68, 101].

При решении задачи оценивания с учетом мешающих параметров также имеет место «теорема эквивалентности» [40, 48, 68], что суммарное отклонение измеряемых параметров из-за ошибок измерений и мешающих параметров эквивалентно измерительной ошибке. Для нашей задачи, согласно (1.47), это отклонение составляет $\mathbf{H}_c \mathbf{c} + \mathbf{H}_z \mathbf{z}_I + \mathbf{v}_s + \mathbf{v}$, которое имеет ковариационную матрицу $\mathbf{H}_c \mathbf{c} \mathbf{H}_c^T + \mathbf{H}_z \mathbf{z}_I \mathbf{H}_z^T + \mathbf{R}_s + \mathbf{R}$. Тогда задача оценивания соответствует случаю коррелированных измерений, для которой оценка получается по методу максимального правдоподобия [40, 68, 101], и имеет такой же вид, как в случае включения мешающих параметров в число измеряемых и оцениваемых параметров.

Для нашей задачи, после включения мешающих параметров $\mathbf{c}$ и $\mathbf{z}_I$, а также систематических ошибок измерений $\mathbf{v}_{sk}$ в число оцениваемых и измеряемых параметров, решение расширенной задачи оценивания сводится к оценке параметров $(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}, \mathbf{z}_I, \mathbf{v}_{sk})$ при выполнении критерия оптимальности:

$$(\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}_I, \hat{\mathbf{v}}_{sk}) = \arg \min_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}, \mathbf{z}_I, \mathbf{v}_{sk})} (J), \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi} - \mathbf{v}_s)^T \mathbf{R}^{-1}(\bar{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi} - \mathbf{v}_s) + \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{P}_0^{-1}(\bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0) + \\ & + \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{c}} - \mathbf{c})^T \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{c}} - \mathbf{c}) + \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{z}}_I - \mathbf{z}_I)^T \mathbf{Q}^{-1}(\bar{\mathbf{z}}_I - \mathbf{z}_I) + \\ & + \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{v}}_{sk} - \mathbf{v}_{sk})^T \mathbf{R}_{sk}^{-1}(\bar{\mathbf{v}}_{sk} - \mathbf{v}_{sk}), \end{aligned} \quad (1.60)$$

здесь $\bar{\mathbf{v}}_{sk}$ – априорное значение вектора систематических ошибок измерений.

Сначала рассмотрим случай, когда нет систематических ошибок $\mathbf{v}_s$, тогда требуется найти оценки параметров $(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}, \mathbf{z}_I)$ из условия оптимизации:

$$(\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}_I) = \arg \min_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}, \mathbf{z}_I)} (J), \quad (1.61)$$

$$J = \frac{1}{2}(\bar{\psi} - \psi)^T R^{-1}(\bar{\psi} - \psi) + \frac{1}{2}(\bar{x}_0 - x_0)^T P_0^{-1}(\bar{x}_0 - x_0) + \frac{1}{2}(\bar{c} - c)^T S^{-1}(\bar{c} - c) + \frac{1}{2}(\bar{z}_I - z_I)^T Q^{-1}(\bar{z}_I - z_I). \quad (1.62)$$

В данном случае обозначим расширенный вектор измеряемых параметров через $\tilde{\psi}$ и расширенный вектор оцениваемых параметров через $\tilde{x}$:

$$\tilde{\psi} = [\psi^T \quad x_0^T \quad c^T \quad z_I^T]^T, \quad \tilde{x} = [x_0^T \quad c^T \quad z_I^T]^T, \quad (1.63)$$

тогда $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\tilde{x})$. Пусть $\bar{\tilde{\psi}}$ – расширенный вектор измерений, $\Delta\tilde{\psi}$ – невязки расширенного вектора измерений:

$$\bar{\tilde{\psi}} = [\bar{\psi}^T \quad \bar{x}_0^T \quad \bar{c}^T \quad \bar{z}_I^T]^T, \quad \Delta\tilde{\psi} = \bar{\tilde{\psi}} - \tilde{\psi}.$$

Перепишем функционал критерия (1.62) оценки в векторном виде:

$$J = \frac{1}{2} \Delta\tilde{\psi}^T \tilde{\mathbf{P}} \Delta\tilde{\psi}, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \text{diag}\{\mathbf{R}^{-1}, \mathbf{P}_0^{-1}, \mathbf{S}^{-1}, \mathbf{Q}^{-1}\}. \quad (1.64)$$

где $\tilde{\mathbf{P}}$ – расширенная весовая матрица, соответствующая ковариационной матрице расширенного вектора измеряемых параметров $\tilde{\psi}$. Для того, чтобы значение функции критерия J достигало минимума по $\tilde{x}$, согласно условию оптимизации (1.64) оценка $\hat{\tilde{x}}$ должна удовлетворять необходимому условию:

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \tilde{x}} \right|_{\tilde{x}=\hat{\tilde{x}}} = -(\bar{\tilde{\psi}} - \tilde{\psi})^T \tilde{\mathbf{P}} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \right) = \mathbf{0}. \quad (1.65)$$

В качестве линейного приближения принято $\tilde{\psi} = (\partial \tilde{\psi} / \partial \tilde{x}) \cdot \tilde{x}$. Подставляя его в (1.65), получим искомую оценку, которая является решением *системы нормальных уравнений*:

$$\tilde{\mathbf{A}} \hat{\tilde{x}} = \tilde{\mathbf{B}} \bar{\tilde{\psi}}, \quad (1.66)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \right)^T \tilde{\mathbf{P}} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \right), \quad \tilde{\mathbf{B}} = \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \right)^T \tilde{\mathbf{P}},$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{x_0} & \mathbf{H}_c & \mathbf{H}_z \\ \mathbf{E}_6 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{qM} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{P}_0^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_c & \mathbf{0} & \mathbf{S}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_z & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1}, \mathbf{B}_c = \mathbf{H}_c^T \mathbf{R}^{-1}, \mathbf{B}_z = \mathbf{H}_z^T \mathbf{R}^{-1}. \quad (1.67)$$

Здесь полагаем, что матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ обратима, при этом она положительно определенная и симметричная. Тогда систему нормальных уравнений можем записать в виде:

$$\hat{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \bar{\tilde{\boldsymbol{\psi}}}. \quad (1.68)$$

Ковариационная матрица ошибок оценки $\hat{\tilde{\mathbf{x}}}$ имеет вид:

$$\tilde{\mathbf{K}} = M \left\{ (\hat{\tilde{\mathbf{x}}} - \tilde{\mathbf{x}})(\hat{\tilde{\mathbf{x}}} - \tilde{\mathbf{x}})^T \right\} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}. \quad (1.69)$$

Заметим, что учет мешающих параметров в расширенной задаче оценивания приводит к существенному увеличению размерности вектора определяемых параметров и количества нормальных уравнений. Основной сложностью решения этих уравнений, как правило, является обращение расширенной матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ системы нормальных уравнений, которая имеет размерность $qM+m+n$. Как известно, численное обращение матриц столь высокого порядка сопряжено со значительными вычислительными трудностями, которые сохраняются даже при использовании современных вычислительных технологий. Для преодоления этой трудности нами разработаны два способа вычисления обратной матрицы $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$ с использованием леммы обращения блочной матрицы (см. **Приложение А**), их упрощенный вариант представлен в [19].

На их основе разработаны две соответствующие вычислительные процедуры для получения оценок и ковариационных матриц. Выполнены численные контрольные тестовые расчеты для этих двух способов. Они показали эквивалентные результаты. Отметим, что второй способ представляется более простым, наглядным и удобным для численной реализации и применения в конкретном анализе.

В силу нелинейности системы одного шага линеаризации и оценки обычно мало для получения достаточно точной оценки. Кратко опишем соответствующий итерационный процесс. Для простоты формулы для

определения оценок $(\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}_I)$ можем соответственно выразить через некоторую функцию от параметров $(\bar{\boldsymbol{\psi}}, \bar{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{z}}_I)$:

$$(\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}_I) = f(\bar{\boldsymbol{\psi}}, \bar{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{z}}_I). \quad (1.70)$$

Итерационный процесс определения оценок $(\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}_I)$ имеет вид:

$$(\hat{\mathbf{x}}_0^{(j)}, \hat{\mathbf{c}}^{(j)}, \hat{\mathbf{z}}_I^{(j)}) = f(\bar{\boldsymbol{\psi}}, \hat{\mathbf{x}}_0^{(j-1)}, \hat{\mathbf{c}}^{(j-1)}, \hat{\mathbf{z}}_I^{(j-1)}), j=1, 2, \dots \quad (1.71)$$

при начальных условиях $\hat{\mathbf{x}}_0^{(0)} = \bar{\mathbf{x}}_0$, $\hat{\mathbf{c}}^{(0)} = \bar{\mathbf{c}}$, $\hat{\mathbf{z}}_I^{(0)} = \bar{\mathbf{z}}_I$ и продолжается до сходимости. В конце процесса ковариационные матрицы $\mathbf{K}_{x_0}$, $\mathbf{K}_c$ и $\mathbf{K}_z$ определяются при уточнённых начальных условиях $(\hat{\mathbf{x}}_0^{(j)}, \hat{\mathbf{c}}^{(j)}, \hat{\mathbf{z}}_I^{(j)})$.

Исходя из полученных результатов, получим алгоритмы оценивания для ряда случаев учета мешающих факторов и ошибок измерений.

1.2.3a. Случай наличия и оценивания всех мешающих факторов

В случае наличия всех мешающих факторов, в том числе постоянных на мерном интервале систематических ошибок $\mathbf{v}_{sk}$ с ковариационной матрицей $\mathbf{R}_{s\ k}$, критерий оптимальности и функционал J имеют вид (1.59)-(1.60). Поскольку $\partial\boldsymbol{\psi}/\partial\mathbf{v}_{sk} = \mathbf{I}$, где $\mathbf{I} = [\mathbf{E}_p, \mathbf{E}_p, \dots, \mathbf{E}_p]^T$, то аналогично прежнему получим алгоритм оценивания:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0 + \tilde{\mathbf{k}}_{x_0} (\bar{\boldsymbol{\psi}} - \mathbf{H}_{x_0} \bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{H}_c \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_z \bar{\mathbf{z}}_I - \mathbf{I} \bar{\mathbf{v}}_{sk}), \\ \hat{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{k}}_c (\bar{\boldsymbol{\psi}} - \mathbf{H}_{x_0} \bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{H}_c \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_z \bar{\mathbf{z}}_I - \mathbf{I} \bar{\mathbf{v}}_{sk}), \\ \hat{\mathbf{z}}_I = \bar{\mathbf{z}}_I + \tilde{\mathbf{k}}_z (\bar{\boldsymbol{\psi}} - \mathbf{H}_{x_0} \bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{H}_c \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_z \bar{\mathbf{z}}_I - \mathbf{I} \bar{\mathbf{v}}_{sk}), \\ \hat{\mathbf{v}}_{sk} = \bar{\mathbf{v}}_{sk} + \tilde{\mathbf{k}}_s (\bar{\boldsymbol{\psi}} - \mathbf{H}_{x_0} \bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{H}_c \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_z \bar{\mathbf{z}}_I - \mathbf{I} \bar{\mathbf{v}}_{sk}), \end{cases} \quad (1.72)$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_{x_0} = \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \tilde{\mathfrak{R}}^{-1}, \tilde{\mathbf{k}}_c = \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \tilde{\mathfrak{R}}^{-1}, \tilde{\mathbf{k}}_z = \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \tilde{\mathfrak{R}}^{-1}, \tilde{\mathbf{k}}_s = \mathbf{R}_{sk} \mathbf{I}^T \tilde{\mathfrak{R}}^{-1}, \quad (1.73)$$

$$\tilde{\mathfrak{R}} = \mathbf{R} + \mathbf{R}_s + \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T + \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T + \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T = \mathfrak{R} + \mathbf{R}_s, \quad (1.74)$$

здесь $\tilde{\mathfrak{R}}$ — ковариационная матрица суммарных ошибок всех возмущающих факторов, в том числе систематических ошибок измерений.

Ковариационные матрицы оценок $\hat{\mathbf{x}}_0$, $\hat{\mathbf{c}}$, $\hat{\mathbf{z}}_I$ и $\hat{\mathbf{v}}_{sk}$ имеют вид [19]:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{K}}_{x_0} = \mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 = \left(\mathbf{P}_0^{-1} + \mathbf{H}_{x_0}^T \left(\tilde{\mathfrak{R}} - \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \right)^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \right)^{-1}, \\ \tilde{\mathbf{K}}_c = \mathbf{S} - \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} \mathbf{H}_c \mathbf{S} = \left(\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{H}_c^T \left(\tilde{\mathfrak{R}} - \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \right)^{-1} \mathbf{H}_c \right)^{-1}, \\ \tilde{\mathbf{K}}_z = \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} \mathbf{H}_z \mathbf{Q} = \left(\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{H}_z^T \left(\tilde{\mathfrak{R}} - \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \right)^{-1} \mathbf{H}_z \right)^{-1}, \\ \tilde{\mathbf{K}}_{v_{sk}} = \mathbf{R}_{sk} - \mathbf{R}_{sk} \mathbf{I}^T \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} \mathbf{I} \mathbf{R}_{sk} = \left(\mathbf{R}_{sk}^{-1} + \mathbf{I}^T \left(\tilde{\mathfrak{R}} - \mathbf{R}_s \right)^{-1} \mathbf{I} \right)^{-1}. \end{cases} \quad (1.75)$$

При возникновении необходимости обращения матриц $\tilde{\mathfrak{R}}$ применяем формулу Шермана-Моррисона для обращения матрицы [8] и получим

$$\tilde{\mathfrak{R}}^{-1} = (\mathfrak{R} + \mathbf{R}_s)^{-1} = (\mathfrak{R} + \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}_{sk} \cdot \mathbf{I}^T)^{-1} = \mathfrak{R}^{-1} - \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{I} \left(\mathbf{R}_{sk}^{-1} + \mathbf{I}^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{I}^T \mathfrak{R}^{-1}. \quad (1.76)$$

1.2.3б. Случай наличия всех мешающих факторов, но нет уточнения параметров c , z_I и v_{sk}

Из (1.72)-(1.75) получим оценку $\hat{x}_0$ и ковариационную матрицу ошибок оценки:

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= \bar{x}_0 + \mathbf{k}_{x_0} \left(\bar{\psi} - \mathbf{H}_{x_0} \bar{x}_0 \right) = \mathbf{k}_{x_0} \bar{\psi} + \left(\mathbf{E} - \mathbf{k}_{x_0} \mathbf{H}_{x_0} \right) \bar{x}_0, \\ \mathbf{k}_{x_0} &= \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \left(\mathbf{R} + \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \right)^{-1}, \\ \mathbf{K}_{x_0} &= \mathbf{P}_0 - \mathbf{k}_{x_0} \left(\mathbf{R} + \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T - \mathbf{R}_s - \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T - \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \right) \mathbf{k}_{x_0}^T. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Заметим, что для этого же случая оценка $\hat{x}_0$ по методу наименьших квадратов без оценивания мешающих параметров получается в виде (1.56) (см. п. 1.2.2). Можно доказать, что формулы для $\hat{x}_0$ в (1.56) и (1.77) одинаковы. Коэффициенты перед $\bar{\psi}$ и $\bar{x}_0$ в (1.77) имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{x_0} &= \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \left(\mathbf{R} + \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \right)^{-1} = \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \left[\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \left(\mathbf{P}_0^{-1} + \mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \right)^{-1} \mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1} \right] = \\ &= \left[\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \left(\mathbf{P}_0^{-1} + \mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \right)^{-1} \right] \mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1} \\ &= \left\{ \mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_0 \left[\left(\mathbf{P}_0^{-1} + \mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \right) - \mathbf{P}_0^{-1} \right] \left(\mathbf{P}_0^{-1} + \mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \right)^{-1} \right\} \mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1} \\ &= \left(\mathbf{P}_0^{-1} + \mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \right)^{-1} \mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E - k_{x_0} H_{x_0} &= E - P_0 H_{x_0}^T \left(R + H_{x_0} P_0 H_{x_0}^T \right)^{-1} H_{x_0} \\
&= \left[P_0 - P_0 H_{x_0}^T \left(R + H_{x_0} P_0 H_{x_0}^T \right)^{-1} H_{x_0} P_0 \right] P_0^{-1} \\
&= \left(P_0^{-1} + H_{x_0}^T R^{-1} H_{x_0} \right)^{-1} P_0^{-1}.
\end{aligned}$$

При этом ковариационная матрица ошибок оценки $\hat{x}_0$ в (1.77) будет такой же, как и в (1.57).

1.2.3в. Случай наличия всех мешающих факторов, но нет оценивания z_I

В этом случае, аналогично прошлому, получаем из (1.72)-(1.75):

$$\begin{cases} \hat{x}_0 = \bar{x}_0 + \bar{k}_{x_0} \left(\bar{\psi} - H_{x_0} \bar{x}_0 - H_c \bar{c} - I \bar{v}_{sk} \right), \\ \hat{c} = \bar{c} + \bar{k}_c \left(\bar{\psi} - H_{x_0} \bar{x}_0 - H_c \bar{c} - I \bar{v}_{sk} \right), \\ \hat{v}_{sk} = \bar{v}_{sk} + \bar{k}_s \left(\bar{\psi} - H_{x_0} \bar{x}_0 - H_c \bar{c} - I \bar{v}_{sk} \right), \end{cases} \quad (1.78)$$

$$\bar{k}_{x_0} = P_0 H_{x_0}^T \bar{\mathfrak{R}}^{-1}, \bar{k}_c = S H_c^T \bar{\mathfrak{R}}^{-1}, \bar{k}_s = R_{sk} I^T \bar{\mathfrak{R}}^{-1},$$

$$\bar{\mathfrak{R}} = R + R_s + H_{x_0} P_0 H_{x_0}^T + H_c S H_c^T = \bar{\mathfrak{R}} - H_z Q H_z^T.$$

Ковариационные матрицы оценок $\hat{x}_0$, $\hat{c}$, и $\hat{v}_{sk}$ имеют вид:

$$\begin{cases} \bar{K}_{x_0} = P_0 - P_0 H_{x_0}^T \bar{\mathfrak{R}}^{-1} \left(\bar{\mathfrak{R}} - H_z Q H_z^T \right) \bar{\mathfrak{R}}^{-1} H_{x_0} P_0, \\ \bar{K}_c = S - S H_c^T \bar{\mathfrak{R}}^{-1} \left(\bar{\mathfrak{R}} - H_z Q H_z^T \right) \bar{\mathfrak{R}}^{-1} H_c S, \\ \bar{K}_{v_{sk}} = R_{sk} - R_{sk} I^T \bar{\mathfrak{R}}^{-1} \left(\bar{\mathfrak{R}} - H_z Q H_z^T \right) \bar{\mathfrak{R}}^{-1} I R_{sk}. \end{cases} \quad (1.79)$$

Разность между ковариационными матрицами для оценки $\hat{x}_0$ в (1.75) и (1.79), характеризующая ухудшение точности оценивания из-за наличия, но не уточнения мешающего вектора z_I :

$$\begin{aligned}
\bar{K}_{x_0} - \tilde{K}_{x_0} &= P_0 H_{x_0}^T \left[\bar{\mathfrak{R}}^{-1} - \bar{\mathfrak{R}}^{-1} \left(\bar{\mathfrak{R}} - H_z Q H_z^T \right) \bar{\mathfrak{R}}^{-1} \right] H_{x_0} P_0 \\
&= P_0 H_{x_0}^T \bar{\mathfrak{R}}^{-1} H_z Q H_z^T \bar{\mathfrak{R}}^{-1} H_z Q H_z^T \bar{\mathfrak{R}}^{-1} H_{x_0} P_0 > 0.
\end{aligned} \quad (1.80)$$

1.2.3г. Случай наличия всех мешающих факторов и отсутствия оценивания систематических ошибок

Используя приведенный в **Приложении А** алгоритм оценивания, получим

ковариационные матрицы оценок $\hat{\mathbf{x}}_0$, $\hat{\mathbf{c}}$, и $\hat{\mathbf{z}}_I$:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{x}_0}^{(2)} = \mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{\mathbf{x}_0}^T \mathfrak{R}^{-1} (\mathfrak{R} - \mathbf{R}_s) \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{P}_0, \\ \tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{c}}^{(2)} = \mathbf{S} - \mathbf{S} \mathbf{H}_{\mathbf{c}}^T \mathfrak{R}^{-1} (\mathfrak{R} - \mathbf{R}_s) \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_{\mathbf{c}} \mathbf{S}, \\ \tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{z}}^{(2)} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \mathbf{H}_{\mathbf{z}}^T \mathfrak{R}^{-1} (\mathfrak{R} - \mathbf{R}_s) \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_{\mathbf{z}} \mathbf{Q}. \end{cases} \quad (1.81)$$

Разность между ковариационными матрицами для оценки $\hat{\mathbf{x}}_0$ в (1.75) и (1.81), характеризующая ухудшение точности оценивания из-за наличия, но неуточнения систематических ошибок:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{x}_0}^{(2)} - \tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{x}_0} &= \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{\mathbf{x}_0}^T \left[\tilde{\mathfrak{R}}^{-1} - \mathfrak{R}^{-1} (\mathfrak{R} - \mathbf{R}_s) \mathfrak{R}^{-1} \right] \mathbf{H}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{P}_0 \\ &= \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{\mathbf{x}_0}^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{R}_s \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} \mathbf{R}_s \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{P}_0 > 0. \end{aligned} \quad (1.82)$$

1.2.4. Рекуррентные алгоритмы оценивания с уточнением мешающих параметров

Разработанные выше методы совместной обработки навигационных измерений с учетом мешающих параметров, как, например, классический метод наименьших квадратов (п.1.2.2) и метод мешающих параметров (п.1.2.3), надежны для получения оценок. Их основной недостаток заключается в том, что при достаточно большем объеме измерений требуется большая оперативная память из-за большой размерности матриц. В силу этого вычисления по этим методам оказываются длительными по быстродействию. Этот недостаток смягчается в рекуррентных алгоритмах нахождения оценок и соответствующей ковариационной матрицы. Для методической полноты ниже получены рекуррентные алгоритмы оценивания по методу мешающих параметров.

Предполагаем, что после обработки всей измерительной информации, поступившей до момента времени t_{k-1} ($k=1, \dots, N$) включительно, получены оценки начального состояния $\hat{\mathbf{x}}_{0|k-1}$, оценки $\hat{\mathbf{c}}_{|k-1}$ и $\hat{\mathbf{z}}_{i|k-1}$ для вектора мешающих параметров $\mathbf{c}$ и вектора $\mathbf{z}_i$ на последний момент обновления до t_{k-1} , а также их соответствующие ковариационные матрицы $\mathbf{P}_{0|k-1}$, $\mathbf{S}_{|k-1}$, $\mathbf{Q}_{i|k-1}$. Далее в следующий момент времени t_k выполнены измерения $\bar{\boldsymbol{\psi}}_k$. Если на интервале времени от t_{k-1} до t_k нет обновления состояния $\mathbf{z}_i$, то при обработке измерений

$\bar{\psi}_k$ оценки $(\hat{x}_{0|k-1}, \hat{c}_{|k-1}, \hat{z}_{i|k-1})$ и их ковариационные матрицы $(P_{0|k-1}, S_{|k-1}, Q_{i|k-1})$ могут рассматриваться как априорные данные. Если от t_{k-1} до t_k на некоторый момент t_i обновляется вектор состояния измерительной системы $\bar{z}_i$ с матрицей Q_i , то в качестве априорных данных приняты $(\hat{x}_{0|k-1}, \hat{c}_{|k-1}, \bar{z}_i)$ с ковариационными матрицами $(P_{0|k-1}, S_{|k-1}, Q_i)$. Обозначаем оценки после обработки измерений по t_k включительно через $(\hat{x}_{0|k}, \hat{c}_{|k}, \hat{z}_{i|k})$ и их ковариационные матрицы через $(P_{0|k}, S_{|k}, Q_{i|k})$. Применяя разработанные алгоритмы оценивания (см. Приложение А) с помощью метода мешающих параметров, получим в линейном приближении эквивалентные рекуррентные алгоритмы оценивания:

$$\begin{cases} \hat{x}_{0|k} = \hat{x}_{0|k-1} + k_{x0k} \Delta \bar{\psi}_k, & P_{0|k} = (E - k_{x0k} H_{xk} \Phi_k) P_{0|k-1}, & k_{x0k} = P_{0|k-1} \Phi_k^T H_{xk}^T \mathfrak{R}_k^{-1}, \\ \hat{c}_{|k} = \hat{c}_{|k-1} + k_{ck} \Delta \bar{\psi}_k, & S_{|k} = (E - k_{ck} H_{ck}) S_{|k-1}, & k_{ck} = S_{|k-1} H_{ck}^T \mathfrak{R}_k^{-1}, \\ \hat{z}_{i|k} = \hat{z}_{i|k-1} + k_{zki} \Delta \bar{\psi}_k, & Q_{i|k} = (E - k_{zki} H_{zki}) Q_{i|k-1}, & k_{zki} = Q_{i|k-1} H_{zki}^T \mathfrak{R}_k^{-1}, \end{cases}$$

$$\Delta \bar{\psi}_k = \bar{\psi}_k - H_{xk} \Phi_k \hat{x}_{0|k-1} - H_{ck} \hat{c}_{|k-1} - H_{zki} \hat{z}_{i|k-1}, \quad (1.83)$$

$$\mathfrak{R}_k = H_{xk} \Phi_k P_{0|k-1} \Phi_k^T H_{xk}^T + R_k + H_{ck} S_{|k-1} H_{ck}^T + H_{zki} Q_{i|k-1} H_{zki}^T,$$

с начальными условиями:

$$\begin{cases} \hat{x}_{0|0} = \bar{x}_0, & P_{0|0} = P_0, \\ \hat{c}_{|0} = \bar{c}, & S_{|0} = S, \\ \hat{z}_{i|k-1} = \bar{z}_i, & Q_{i|k-1} = Q_i, \quad i \in \{i | t_{k-1} < t_i \leq t_k\}, \end{cases} \quad (1.84)$$

где k_{x0k} , k_{ck} и k_{zki} – коэффициенты усиления, $\mathfrak{R}_k$ – совместная ковариационная матрица ошибок при учете всей информации на момент времени t_k . Здесь $H_{ck} = H_{xk} \zeta_k$, матрица ζ_k определяется из рекуррентного соотношения

$$\zeta_k = \zeta_{k|k-1} + \Phi_{k|k-1} \zeta_{k-1}, \quad (1.85)$$

где $\zeta_{k|k-1} = \zeta(t_k, t_{k-1})$, $\Phi_{k|k-1} = \Phi(t_k, t_{k-1})$ – переходные матрицы с момент времени t_{k-1} на t_k , $\zeta_k = \zeta(t_k, t_0)$. Отметим, что $\zeta(t_k, t_k) = \mathbf{0}_{n \times m}$, а $\Phi(t_k, t_k) = E_{n \times n}$. В (1.83) $\Phi_k = \Phi(t_k, t_0) = \Phi_{k|k-1} \Phi_{k-1}$. Отметим, что при использовании рекуррентных алгоритмов (1.83)-(1.85) операции проводятся лишь над матрицами меньшей размерности, что существенно ускоряет скорость вычислений. Итерация кончается после

обработки всех измерений, т.е. при $k = N$.

Введем обозначения:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_k = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_{0|k}, & \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_{0|k-1}, & \mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi_k \mathbf{P}_{0|k-1} \Phi_k^T, \\ \hat{\mathbf{z}}_k = \Phi_{zki} \hat{\mathbf{z}}_{i|k}, & \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \Phi_{zki} \hat{\mathbf{z}}_{i|k-1}, & \mathbf{Q}_{k|k-1} = \Phi_{zki} \mathbf{Q}_{i|k-1} \Phi_{zki}^T, \end{cases} \quad (1.86)$$

$\Phi_{zki} = \Phi_z(t_k, t_i)$, $\Phi_{zk|k-1} = \Phi_z(t_k, t_{k-1})$. Исходя из (1.83) получаем оценки вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}_k$ и вектора мешающих параметров $\hat{\mathbf{z}}_k$ на момент t_k , а также их ковариационные матрицы $\mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_k$:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{k}_{xk} \Delta \bar{\psi}_k, & \mathbf{P}_k = (\mathbf{E} - \mathbf{k}_{xk} \mathbf{H}_{xk}) \mathbf{P}_{k|k-1}, & \mathbf{k}_{xk} = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_{xk}^T \mathfrak{R}_k^{-1}, \\ \hat{\mathbf{z}}_k = \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} + \mathbf{k}_{zk} \Delta \bar{\psi}_k, & \mathbf{Q}_k = (\mathbf{E} - \mathbf{k}_{zk} \mathbf{H}_{zk}) \mathbf{Q}_{k|k-1}, & \mathbf{k}_{zk} = \mathbf{Q}_{k|k-1} \mathbf{H}_{zk}^T \mathfrak{R}_k^{-1}, \\ \Delta \bar{\psi}_k = \bar{\psi}_k - \mathbf{H}_{xk} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{H}_{ck} \hat{\mathbf{c}}_{|k-1} - \mathbf{H}_{zk} \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}, \\ \mathfrak{R}_k = \mathbf{H}_{xk} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_{xk}^T + \mathbf{R}_k + \mathbf{H}_{ck} \mathbf{S}_{|k-1} \mathbf{H}_{ck}^T + \mathbf{H}_{zk} \mathbf{Q}_{k|k-1} \mathbf{H}_{zk}^T, \end{cases} \quad (1.87)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \Phi_{k|k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, & \mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi_{k|k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k|k-1}^T, \\ \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \Phi_{zk|k-1} \hat{\mathbf{z}}_{k-1}, & \mathbf{Q}_{k|k-1} = \Phi_{zk|k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Phi_{zk|k-1}^T. \end{cases} \quad (1.88)$$

При этом рекуррентные алгоритмы оценивания (1.83) сведены к динамической фильтрации для нелинейной системы с учетом мешающих параметров. Уравнения (1.87) и (1.88) соответствуют этапам корректировки и прогноза на интервале времени от t_{k-1} до t_k . Если на данном интервале времени на некоторый момент t_i ($t_{k-1} < t_i \leq t_k$) обновляется вектор состояния $\bar{\mathbf{z}}_i$ с матрицей $\mathbf{Q}_i$, тогда прогноз вектора состояния $\mathbf{z}_k$ и его матрицы на момент t_k производится от его обновленного состояния на t_i :

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|i} = \Phi_{zki} \bar{\mathbf{z}}_i, \quad \mathbf{Q}_{k|i} = \Phi_{zki} \mathbf{Q}_i \Phi_{zki}^T. \quad (1.89)$$

Затем после обработки измерений по t_k получаются оценка $\hat{\mathbf{z}}_k$ и его ковариационная матрица $\mathbf{Q}_k$:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{z}}_k = \hat{\mathbf{z}}_{k|i} + \mathbf{k}_{zk} \Delta \bar{\psi}_k, & \mathbf{Q}_k = (\mathbf{E} - \mathbf{k}_{zk} \mathbf{H}_{zk}) \mathbf{Q}_{k|i}, & \mathbf{k}_{zk} = \mathbf{Q}_{k|i} \mathbf{H}_{zki}^T \mathfrak{R}_k^{-1}, \\ \Delta \bar{\psi}_k = \bar{\psi}_k - \mathbf{H}_{xk} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{H}_{ck} \hat{\mathbf{c}}_{|k-1} - \mathbf{H}_{zk} \hat{\mathbf{z}}_{k|i}, \\ \mathfrak{R}_k = \mathbf{H}_{xk} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_{xk}^T + \mathbf{R}_k + \mathbf{H}_{ck} \mathbf{S}_{|k-1} \mathbf{H}_{ck}^T + \mathbf{H}_{zk} \mathbf{Q}_{k|i} \mathbf{H}_{zk}^T, \end{cases} \quad (1.90)$$

Таким образом, получены рекуррентные соотношения (1.87)-(1.90) для определения оценок вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}_k$ и вектора мешающих параметров $\hat{\mathbf{z}}_k$

на момент t_k , а также их ковариационных матриц P_k и Q_k . Сравнивая ковариационные матрицы R_k и $H_{zk}Q_kH_{zk}^T$ по введенному ниже в п. 1.3.2 аналогу коэффициента «отношения сигнал/шум» (ОСШ), можем определить степень влияния ошибок $\hat{z}_k$ относительно ошибок измерений на точность оценивания. Если это влияние довольно большое и коэффициент ОСШ менее некоторого значения, требуемого для обеспечения хорошего качества информации, то надо улучшить точность знания состояния измерительной системы (КА).

1.3. Алгоритмы анализа точностей определения и прогнозирования орбиты астероида

1.3.1. Анализ точностей определения орбиты астероида по измерениям

Для оценки точностей определения и прогнозирования параметров движения астероида использованы два метода: аналитический, использующий ковариационный анализ, и численный, использующий статистические испытания «Монте-Карло». В аналитическом методе делаем расчет математического ожидания и ковариационных матриц для ошибок определения параметров орбиты из-за ошибок измерений и мешающих параметров. В численном методе, сравнивая расчетную орбиту астероида, полученную обработкой измерений, с известной исходной точной орбитой, получим отклонение параметров расчетной орбиты от номинальной, соответствующее ошибкам оценивания. В результате определяются статистические характеристики ошибок оценивания, в том числе математическое ожидание и ковариационные матрицы ошибок определения искомых параметров.

Пусть оцениваемый вектор состояния астероида X_0 определяет вектор других параметров $W=W(X_0)$. В линейном приближении вектор искомых параметров $w(w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ является некоторой функцией от оцениваемых параметров x_0 : $w=w(x_0)$. Полагаем, что задана также матрица частных производных $\partial w / \partial x_0$. Оцениваемое значение вариации вектора w из-за суммарных ошибок измерений и мешающих параметров в линейном приближении имеет вид:

$$\hat{\mathbf{w}} = \partial \mathbf{w} / \partial \mathbf{x}_0 \cdot \hat{\mathbf{x}}_0. \quad (1.91)$$

Среднее отклонение оцениваемых параметров $\mathbf{x}_0$ из-за суммарных ошибок измерений при учете мешающих факторов соответствует их математическому ожиданию $M \{ \hat{\mathbf{x}}_0 \}$. Оно имеет вид:

$$M \{ \hat{\mathbf{x}}_0 \} = \mathbf{f} \left(M \{ \bar{\boldsymbol{\psi}} \}, M \{ \bar{\mathbf{x}}_0 \}, M \{ \bar{\mathbf{c}} \}, M \{ \bar{\mathbf{z}}_I \}, M \{ \bar{\mathbf{v}}_{sk} \} \right). \quad (1.92)$$

Отсюда следует математическое ожидание искомого вектора $\mathbf{w}$ и его разброс:

$$M \{ \hat{\mathbf{w}} \} = \partial \mathbf{w} / \partial \mathbf{x}_0 \cdot M \{ \hat{\mathbf{x}}_0 \}, \quad \mathbf{K}_w = \left(\partial \mathbf{w} / \partial \mathbf{x}_0 \right) \mathbf{K}_{x_0} \left(\partial \mathbf{w} / \partial \mathbf{x}_0 \right)^T. \quad (1.93)$$

Они определяют эллипсоид рассеивания искомого вектора $\mathbf{w}$ с центром $M(\hat{\mathbf{w}})$ в ℓ -мерном фазовом пространстве. При $\ell=2$ имеем эллипс рассеивания на плоскости. Главная диагональ ковариационной матрицы $\mathbf{K}_w$ даёт выражения для средних квадратичных отклонений (СКО) составляющих вектора $\mathbf{w}$:

$$\sigma_{w_i} = \sqrt{(\mathbf{K}_w)_{ii}}, \quad i=1, 2, \dots, \ell. \quad (1.94)$$

Предполагаем, что максимальное отклонение из-за всех случайных возмущающих факторов составляет $3\sigma_{w_i}$ с вероятностью 0.997. В рассмотренной модели полагаем также, что максимальное отклонение $\delta w_{i \max}$ от всех возмущающих факторов для компонента w_i принимает вид:

$$\delta w_{i \max} = |M \{ \hat{w}_i \}| + 3\sigma_{w_i}, \quad i=1, 2, \dots, \ell. \quad (1.95)$$

Кроме вектора уточняемых параметров, получены также оценки точностей определения параметров орбиты астероида: по географическим координатам (долготе λ_c и широте φ_c) точки падения на Землю, времени столкновения t_c , а также по перигейному расстоянию r_π и времени прохождения перигея t_π , по компонентам вектора $\mathbf{b}$ прицельной дальности в картинной плоскости у Земли (ξ, η). Здесь ось ξ направлена по вектору прицельной дальности $\mathbf{b}_0$ номинальной траектории астероида, ось по вектору $\mathbf{C}_0 = \mathbf{b}_0 \times \mathbf{V}_{\infty 0}$, где $\mathbf{V}_{\infty 0}$ – номинальная скорость на бесконечности. Набор этих параметров составляет вектор $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{W} = (r_\pi, t_\pi, \mathbf{b}(\xi, \eta), \lambda_c, \varphi_c, t_c). \quad (1.96)$$

Оценены также максимальные ошибки этих параметров - в смысле 3σ , они обозначены через: $\delta r_\pi, \delta t_\pi, \delta \mathbf{b}(\delta \xi, \delta \eta), \delta \lambda_c, \delta \varphi_c, \delta t_c$. Также определяем ошибку

$\delta b = (\delta \xi^2 + \delta \eta^2)^{1/2}$, которая характеризует разброс вектора прицельной дальности в картинной плоскости. При этом оцениваемое перигейное расстояние находится в диапазоне $r_{\pi 0} \pm \delta r_{\pi}$, здесь $r_{\pi 0}$ – перигейное расстояние для номинальной траектории астероида. Если выполняется условие $r_{\pi 0} + \delta r_{\pi} < R_E$, то по закону 3σ (с вероятностью 0.997) можно уверенно утверждать, что будет столкновение астероида с Землёй. В противном случае, если $r_{\pi 0} - \delta r_{\pi} > R_E$, то с большой вероятностью (0.997) не будет столкновения с Землёй.

На основе полученных формул для ковариационных матриц в разных случаях учета исходных ошибок измерений и мешающих факторов (1.72)-(1.82) в работе [19] дан приближенный качественный анализ влияния этих ошибок на ошибки оценивания. Если есть только случайные ошибки измерений, то ошибки оценивания уменьшаются с ростом числа измерений, асимптотически приближаясь к нулю. Добавление начальной априорной информации по x_0 уменьшит ошибки оценивания, но этот эффект уменьшается с ростом числа измерений. Наличие мешающих факторов увеличивает ошибки оценивания. При этом степень ухудшения точности оценивания из-за дополнительных ошибок мешающих параметров зависит от их интенсивности по сравнению с мощностью основных ошибок измерений.

1.3.2. Введение аналога коэффициента «отношение сигнал/шум» для анализа влияния мешающих параметров на точность оценивания

Отмеченная степень увеличения ковариационной матрицы оценки из-за влияния мешающих параметров (c, z_I) зависит от их интенсивности $H_c S H_c^T + H_z Q H_z^T$ (1.74) относительно мощности измерений, характеризующейся матрицей R . Для этого А.И. Назаренко ранее [51] ввел термин «отношение сигнал/шум» (ОСШ), который можно трактовать как отношение СКО мешающих параметров к СКО измерений. При этом мешающие параметры рассмотрены в [51] как шум для измерительной системы, а измерения как полезный сигнал. Используя эту идею, введём коэффициент ОСШ несколько иначе. Будем характеризовать ковариационную матрицу её следом (суммой

элементов главной диагонали матрицы), полагая, что в многомерном случае этот след лучше характеризует матрицу, отражая «интенсивность или мощность сигнала или шума». В соответствии с этим определим, что на момент измерения t_k коэффициент ОСШ для нашей задачи есть отношение следа ковариационной матрицы $\mathbf{R}_k$ ошибок измерений к следу эквивалентной ковариационной матрицы $\mathbf{H}_{ck}\mathbf{S}\mathbf{H}_{ck}^T + \mathbf{H}_{zki}\mathbf{Q}_i\mathbf{H}_{zki}^T$ отклонения измеряемых параметров из-за ошибок мешающих параметров $\mathbf{c}$ и $\mathbf{z}_i$:

$$\eta_{\text{осш}}(t_k) \stackrel{\text{def}}{=} 10 \log_{10} \left(\frac{\text{tr}(\mathbf{R}_k)}{\text{tr}(\mathbf{H}_{ck}\mathbf{S}\mathbf{H}_{ck}^T + \mathbf{H}_{zki}\mathbf{Q}_i\mathbf{H}_{zki}^T)} \right), \quad (1.97)$$

где tr (от англ. *trace*) – операция вычисления следа матрицы. $\eta_{\text{осш}}(t_k) = \eta_{\text{осш } k}$ – коэффициент ОСШ в децибелах (дБ) на момент времени t_k . Средний уровень ОСШ $\bar{\eta}_{\text{осш}}$ на заданном мерном интервале определим в виде:

$$\bar{\eta}_{\text{осш}} \stackrel{\text{def}}{=} 10 \log_{10} \left(\frac{\text{tr}(\mathbf{R})}{\text{tr}(\mathbf{H}_c\mathbf{S}\mathbf{H}_c^T + \mathbf{H}_z\mathbf{Q}\mathbf{H}_z^T)} \right). \quad (1.98)$$

Этот коэффициент ОСШ важен и удобен для анализа степени влияния мешающих параметров на точность оценивания. Чем больше этот коэффициент, тем меньше влияние мешающих параметров относительно основных измерений. При стремлении $\eta_{\text{осш}} \rightarrow \infty$, мешающие параметры оказывают слабое действие на результаты оценивания, и можно пренебречь их влиянием. В противном случае, когда $\eta_{\text{осш}} \rightarrow -\infty$, основные измерения можно считать точными и для анализа точности навигации можно учитывать лишь ошибки мешающих параметров. В критическом случае, когда $\eta_{\text{осш}}$ близок к нулю, влияния ошибок измерений и мешающих параметров примерно равносильны.

Для повышения точности оценивания точность определения мешающих параметров надо выбирать настолько высокой, насколько это практически возможно. Однако из-за технических и других практических трудностей нельзя бесконечно её улучшать. Поэтому с точки зрения практических соображений в отношении требований к точности определения мешающих параметров этот коэффициент ОСШ даёт возможность выбирать эту точность более разумно.

Например, можем выбирать её так, чтобы коэффициент ОСШ был не меньше некоторой предельной величины, которая обеспечивает достаточно хороший уровень качества информации в наихудшем случае ошибок. Так, будет $\eta_{\text{осш } k} \geq 20$ дБ, если $\text{tr}(\mathbf{H}_{ck} \mathbf{S} \mathbf{H}_{ck}^T + \mathbf{H}_{zki} \mathbf{Q}_i \mathbf{H}_{zki}^T) \leq 0.01 \text{tr}(\mathbf{R}_k)$. Можем считать тогда, что влияние мешающих параметров уже незначительно.

Рассмотрим сначала упрощенный случай, когда $\text{tr}(\mathbf{H}_{ck} \mathbf{S} \mathbf{H}_{ck}^T) \ll \text{tr}(\mathbf{H}_{zki} \mathbf{Q}_i \mathbf{H}_{zki}^T)$, ошибку модели можно игнорировать. Полагаем, что ошибки мешающих параметров $\mathbf{z}_i$ являются некоррелированными равноточными, т.е. ковариационная матрица имеет вид:

$$\mathbf{Q}_i = \sigma_{z_i}^2 \mathbf{E}_q,$$

тогда коэффициент ОСШ имеет вид

$$\eta_{\text{осш } k} = 10 \log_{10} \left(\frac{\text{tr}(\mathbf{R}_k)}{\text{tr}(\mathbf{H}_{zki} \mathbf{Q}_i \mathbf{H}_{zki}^T)} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{\text{tr}(\mathbf{R}_k)}{\sigma_{z_i}^2 \|\mathbf{H}_{zki}\|_F^2} \right) = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{R}_k)}}{\sigma_{z_i} \|\mathbf{H}_{zki}\|_F}, \quad (1.99)$$

где $\|\mathbf{H}_{zki}\|_F$ — евклидова норма матрицы $\mathbf{H}_{zki}$ размером $p \times q$, которая характеризует чувствительность измеряемых параметров к параметрам $\mathbf{z}_i$. Чем больше значение $\|\mathbf{H}_{zki}\|_F$, тем выше чувствительность и меньше $\eta_{\text{осш } k}$.

В общем случае при учете ошибки модели движения, т.е. ошибки мешающих параметров $\mathbf{s}$, делаем приведение к эквивалентной дисперсии:

$$\text{tr}(\mathbf{H}_{zki} \mathbf{Q}_i \mathbf{H}_{zki}^T + \mathbf{H}_{ck} \mathbf{S} \mathbf{H}_{ck}^T) = \bar{\sigma}_{z_i}^2 \cdot \text{tr}(\mathbf{H}_{zki} \mathbf{H}_{zki}^T) = \bar{\sigma}_{z_i}^2 \cdot \|\mathbf{H}_{zki}\|_F^2, \quad (1.100)$$

при этом

$$\bar{\sigma}_{z_i}^2 = \frac{\text{tr}(\mathbf{H}_{zki} \mathbf{Q}_i \mathbf{H}_{zki}^T + \mathbf{H}_{ck} \mathbf{S} \mathbf{H}_{ck}^T)}{\|\mathbf{H}_{zki}\|_F^2}, \quad (1.101)$$

где $\bar{\sigma}_{z_i}^2$ — эквивалентная дисперсия случайного вектора $\mathbf{z}_i$.

Поставляя (1.100)–(1.101) в уравнение (1.97), получим

$$\eta_{\text{осш } k} = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{R}_k)}}{\bar{\sigma}_{z_i} \|\mathbf{H}_{zki}\|_F}, \quad (1.102)$$

тогда формула (1.102) для вычисления коэффициента ОСШ в общем случае имеет формально такой же вид, как и в упрощенном случае (1.99).

Рассмотрим первый критический случай, при СКО $\bar{\sigma}_{zi} = 1$. В этом случае критическое значение коэффициента ОСШ имеет вид:

$$\eta_{\text{осш}k|\bar{\sigma}_{zi}=1} = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{R}_k)}}{\|\mathbf{H}_{zki}\|_F}. \quad (1.103)$$

Тогда коэффициент ОСШ $\eta_{\text{осш}k}$ равен:

$$\eta_{\text{осш}k} = \eta_{\text{осш}k|\bar{\sigma}_{zi}=1} - 20 \log_{10}(\bar{\sigma}_{zk}). \quad (1.104)$$

Учитывая (1.102)–(1.104), получим:

$$\bar{\sigma}_{zi} = 10^{(\eta_{\text{осш}k|\bar{\sigma}_{zi}=1} - \eta_{\text{осш}k})/20} = 10^{-\eta_{\text{осш}k}/20} \cdot \frac{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{R}_k)}}{\|\mathbf{H}_{zki}\|_F}. \quad (1.105)$$

Рассмотрим второй критический случай, при ОСШ $\eta_{\text{осш}k}=0$, т.е. интенсивности ошибок измерений и мешающих параметров на данный момент времени равносильны. Из (1.105) критическое значение СКО $\bar{\sigma}_{zi(0)}$ составляет

$$\bar{\sigma}_{zi(0)} = \bar{\sigma}_{zi|\eta_{\text{осш}k}=0} = \frac{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{R}_k)}}{\|\mathbf{H}_{zki}\|_F}. \quad (1.106)$$

Поставляя (1.106) в (1.105), получим

$$\bar{\sigma}_{zi} = 10^{-\eta_{\text{осш}k}/20} \cdot \bar{\sigma}_{zi(0)}, \quad \eta_{\text{осш}k} = 20 \log_{10}(\bar{\sigma}_{zi(0)}/\bar{\sigma}_{zi}). \quad (1.107)$$

Чтобы коэффициент ОСШ был неотрицательным, $\eta_{\text{осш}k} \geq 0$, надо, чтобы эквивалентное СКО $\bar{\sigma}_{zi}$ было не более критического значения, т.е. $\bar{\sigma}_{zi} \leq \bar{\sigma}_{zi(0)}$.

Есть связь между двумя критическими значениями (1.103) и (1.106):

$$\eta_{\text{осш}k|\bar{\sigma}_{zi}=1} = 20 \log_{10}(\bar{\sigma}_{zi(0)}). \quad (1.108)$$

Если точность мешающих параметров выбирается так, чтобы в наихудшем случае было хорошее качество информации, $\eta_{\text{осш}k} \geq \eta_{\min}$, тогда необходимо, чтобы эквивалентное СКО $\bar{\sigma}_{zi}$ не нарушало ограничения $\bar{\sigma}_{zi} \leq \bar{\sigma}_{zi\max}$, где:

$$\bar{\sigma}_{zi\max} = 10^{-\eta_{\min}/20} \cdot \bar{\sigma}_{zi(0)} = 10^{(\eta_{\text{осш}k|\bar{\sigma}_{zi}=1} - \eta_{\min})/20}. \quad (1.109)$$

Поэтому, чем больше критическое значение СКО $\bar{\sigma}_{zi(0)}$ или $\eta_{\text{осш}k|\bar{\sigma}_{zi}=1}$, тем

больше будет предельное максимальное СКО $\bar{\sigma}_{zi\max}$. При ограничении коэффициента ОСШ значением не ниже $\eta_{\min}=20$ дБ точность мешающих параметров должна выбираться так, чтобы эквивалентное СКО $\bar{\sigma}_{zi}$ было меньше $0.1\bar{\sigma}_{zi(0)}$.

1.3.3. Вычисление частных производных в алгоритмах оценивания

В процессе обработки измерений и анализа точности навигации на основе разработанных алгоритмов фильтрации возникает необходимость проведения разнообразных расчетов, в частности, вычисления некоторых матриц частных производных. Это, во-первых, матрицы частных производных от измеряемых параметров $\Psi(t)=[\alpha(t), \delta(t)]^T$ по текущему вектору состояния астероида $X(t)=[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)]^T$: $\partial\Psi(t)/\partial X(t)$, по текущему вектору состояния измерительной системы $Z(t)=[\mathbf{r}_{KA}(t), \mathbf{v}_{KA}(t)]^T$ и вектору мешающих параметров в модели движения астероида C : $\partial\Psi(t)/\partial Z(t)$ и $\partial\Psi(t)/\partial C$. Во-вторых, переходные матрицы $\Phi(t, t_0)=\partial X/\partial X_0$, $\Phi_z(t, t_i)=\partial Z(t)/\partial Z(t_i)$ и матрица частных производных от текущего вектора состояния астероида по мешающим параметрам C : $\partial X/\partial C$. В-третьих, частные производные от параметров прогноза по оцениваемому вектору начального состояния астероида: $\partial W/\partial X_0$.

Для вычисления этих частных производных часто применяются как аналитический или приближенно аналитический метод, так и численные методы, в том числе, метод конечных разностей, метод интегрирования дифференцированных уравнений в вариациях и др. [68]. Эти методы отличаются друг от друга точностью, сложностью их реализации, а также быстродействием при расчете. По сравнению с численными методами аналитический или приближенно аналитический методы дают довольно точные результаты и эффективны по быстродействию. А численный метод, например, метод конечных разностей, довольно универсален, но неэффективен по точности расчета, так как точность зависит от шага численного дифференцирования, который выбирается на основе результатов серии расчётов с различными шагами. При этом требуется найти оптимальный шаг.

Численные методы часто применяются в случаях, когда есть сложная математическая зависимость и трудно найти аналитические выражения для частных производных. Принципа выбора метода вычисления этих частных производных заключается в требовании к точности расчета и эффективности метода. Для многих случаев также используется численно-аналитический метод.

В нашей задаче частные производные $\partial\Psi(t)/\partial X(t)$ и $\partial\Psi(t)/\partial Z(t)$ могут вычисляться аналитическим методом, так как измеряемые параметры $\Psi(t)$ имеет простую математическую зависимость от параметров $X(t)$ и $\mathbf{r}_{KA}$. Аналитические выражения для $\partial\Psi(t)/\partial X(t)$ и $\partial\Psi(t)/\partial Z(t)$ имеют вид [5]:

$$\partial\Psi(t)/\partial X(t) = [\partial\Psi/\partial\mathbf{r}, \partial\Psi/\partial\mathbf{v}], \partial\Psi(t)/\partial Z(t) = [\partial\Psi/\partial\mathbf{r}_{KA}, \partial\Psi/\partial\mathbf{v}_{KA}],$$

где $\partial\Psi/\partial\mathbf{r}$, $\partial\Psi/\partial\mathbf{v}$ – градиенты измеряемых параметров $\Psi=[\alpha, \delta]$ по радиус-вектору $\mathbf{r}$ и вектору скорости $\mathbf{v}$ астероида (1.4):

$$\partial\Psi/\partial\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \partial\alpha/\partial\mathbf{r} \\ \partial\delta/\partial\mathbf{r} \end{bmatrix}, \partial\Psi/\partial\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial\alpha/\partial\mathbf{v} \\ \partial\delta/\partial\mathbf{v} \end{bmatrix}. \quad (1.110)$$

$$\begin{cases} \partial\alpha/\partial\mathbf{r} = \frac{1}{\rho_x^2 + \rho_y^2} [-\rho_y, \rho_x, 0], \\ \partial\delta/\partial\mathbf{r} = \frac{1}{\rho^2 \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2}} [-\rho_x \rho_z, -\rho_y \rho_z, \rho_x^2 + \rho_y^2], \end{cases} \quad (1.111)$$

$$\partial\alpha/\partial\mathbf{v} = \partial\delta/\partial\mathbf{v} = \mathbf{0}, \partial\Psi/\partial\mathbf{v} = \mathbf{0}, \partial\Psi/\partial\mathbf{r}_{KA} = -\partial\Psi/\partial\mathbf{r}, \partial\Psi/\partial\mathbf{v}_{KA} = \mathbf{0}.$$

Так как в нашей задаче имеется сложная зависимость параметров X от X_0 и $\mathbf{C}$, матрицы $\partial X/\partial X_0$ и $\partial X/\partial \mathbf{C}$ могут достаточно точно определяться путем интегрирования дифференциальных уравнений движения астероида вместе с вспомогательными уравнениями в вариациях. Вычислив матрицу $\partial X/\partial \mathbf{C}$, можем определять частные производные $\partial\Psi/\partial \mathbf{C}$ через соотношение

$$\partial\Psi/\partial \mathbf{C} = \partial\Psi/\partial X \cdot \partial X/\partial \mathbf{C}.$$

Переходная матрица $\Phi(t, t_0) = \partial X/\partial X_0$ и аналогично матрица $\Phi_z(t, t_i) = \partial Z(t)/\partial Z_i$ могут также приближено вычисляться аналитическим способом, который основан на предположении невозмущенного движения. В ряде работ, например, [5, 7], предложены алгоритмы определения переходной матрицы в рамках кеплеровского движения. Здесь кратко опишем использованные

алгоритмы, которые представлены в работах [5, 7]:

$$\Phi = \partial X / \partial X_0 \approx (\partial X / \partial \mathbf{q}) \cdot (\partial \mathbf{q} / \partial X_0) = (\partial X / \partial \mathbf{q}) \cdot (\partial X_0 / \partial \mathbf{q})^{-1}, \quad (1.112)$$

где $\mathbf{q}$ – набор оскулирующих элементов орбиты. В [5, 7] даны формулы для вычисления производных от вектора состояния $\mathbf{X}$ по различным наборам элементов орбиты $\mathbf{q}$. Этот способ позволяет быстро и довольно точно вычислять переходную матрицу для маловозмущенной орбиты, и часто применяется в итерационном процессе уточнения параметров орбиты. Точность вычисления переходной матрицы влияет на сходимость алгоритма итерации, то есть алгоритм оценивания может не сходиться из-за плохой точности вычисления переходной матрицы. Поэтому, чтобы не терять эту точность, для сильно возмущенной орбиты можно разбить орбиту на нескольких участках [5].

Так как параметры прогноза $\mathbf{W}$ (1.96) состоят из ряда параметров геоцентрического движения астероида, имеющих сложную зависимость от X_0 , то для вычисления $\partial \mathbf{W} / \partial X_0$ применен метод конечных разностей. Варьируя составляющие вектора X_0 , и интегрируя ДУ движения астероида до момента сближения астероида с Землёй, находим параметры $\mathbf{W}$ для варьируемых траекторий, определяем их отклонения от номинальных, получим $\partial \mathbf{W} / \partial X_0$.

При вычислении частных производных $\partial r_\pi / \partial X_0$, $\partial t_\pi / \partial X_0$ и $\partial \mathbf{b}(\xi, \eta) / \partial X_0$ также применяется численно-аналитический метод по соотношениям:

$$\begin{aligned} \partial r_\pi / \partial X_0 &= \partial r_\pi / \partial \mathbf{q}_{\text{geo}} \cdot \partial \mathbf{q}_{\text{geo}} / \partial X_0, \\ \partial t_\pi / \partial X_0 &= \partial t_\pi / \partial \mathbf{q}_{\text{geo}} \cdot \partial \mathbf{q}_{\text{geo}} / \partial X_0, \\ \partial \mathbf{b}(\xi, \eta) / \partial X_0 &= \partial \mathbf{b}(\xi, \eta) / \partial \mathbf{q}_{\text{geo}} \cdot \partial \mathbf{q}_{\text{geo}} / \partial X_0, \end{aligned} \quad (1.113)$$

где матрица $\partial \mathbf{q}_{\text{geo}} / \partial X_0$ определяется методом конечных разностей, аналогично процессу численного вычисления $\partial \mathbf{W} / \partial X_0$, а частные производные от параметров r_π , t_π и $\mathbf{b}(\xi, \eta)$ по элементам $\mathbf{q}_{\text{geo}} = (a, e, i, \omega, \Omega, t_\pi)_{\text{geo}}$ геоцентрического орбиты находятся аналитически:

$$\begin{aligned} \partial r_\pi / \partial \mathbf{q}_{\text{geo}} &= [\partial r_\pi / \partial a, \partial r_\pi / \partial e, \partial r_\pi / \partial i, \dots, \partial r_\pi / \partial t_\pi] = [1-e, -a, 0, 0, 0, 0], \\ \partial t_\pi / \partial \mathbf{q}_{\text{geo}} &= [\partial t_\pi / \partial a, \partial t_\pi / \partial e, \partial t_\pi / \partial i, \dots, \partial t_\pi / \partial t_\pi] = [0, 0, 0, 0, 0, 1], \end{aligned}$$

а аналитические выражения для вычисления частных производных $\partial \mathbf{b}(\xi, \eta) / \partial \mathbf{q}_{\text{geo}}$

от вектора прицельной дальности $\mathbf{b}(\xi, \eta)$ в картинной плоскости по элементам $\mathbf{q}_{\text{geo}}$ геоцентрической орбиты астероида представлены в работе [5].

1.4. Выводы по первой главе

Разработаны методика и алгоритмы для определения орбиты опасного астероида и для оценки точности определения его орбиты для космических оптических измерений системы «Небосвод» с учетом как случайных и систематических ошибок измерений, так и априорной информации, а также ряда мешающих факторов, таких как ошибки модели движения астероида, а также ошибок измерительной системы (КА). Построены два способа решения системы нормальных уравнений для метода уточнения мешающих параметров. Исходя из этого, построены также рекуррентные алгоритмы фильтрации для случая наличия и оценивания рассмотренных мешающих параметров.

Разработаны алгоритмы приближенной оценки точности навигации системы «Небосвод» с помощью метода ковариационного анализа, а также численного метода статистических испытаний «Монте-Карло». Для анализа влияния ошибок мешающих параметров на результаты обработки измерений введен аналог коэффициента «отношение сигнал/шум».

ГЛАВА II

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ НАВИГАЦИИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ СИСТЕМЫ «НЕБОСВОД»

Для анализа навигационных характеристик системы «Небосвод» выполнено исследование задачи навигации для трёх сближающихся с Землёй космических объектов – астероидов Апофис и 2008 ТСЗ, а также Челябинского метеороида (ЧМ). Основной анализ выполнен для астероида Апофис. Кроме того, анализ навигации выполнен также для астероида 2008 ТСЗ и ЧМ, которые сталкивались с Землёй в 2008 и 2013 гг. Этот анализ для астероида 2008 ТСЗ и ЧМ помогает лучше выявить возможность системы «Небосвод» для обнаружения более мелких опасных космических объектов, а также «дневных» астероидов, которые приближаются к Земле со стороны Солнца и трудно наблюдаются с помощью наземных оптических средств. Полученные результаты опубликованы в работах [16, 20-22, 35 и др.].

2.1. Анализ задачи навигации при наблюдении астероида Апофис

В данном разделе рассмотрена задача определения и прогнозирования параметров движения астероида Апофис по оптическим измерениям с борта КА системы «Небосвод» на участках полета астероида Апофис до и после его тесного сближения с Землёй в 2029 г. Проанализирована видимость при его оптических наблюдениях и выполнен анализ точностей навигации на разных участках полета астероида Апофис.

2.1.1. Принятая столкновительная траектория астероида Апофис

Для моделирования процесса космической навигации с помощью системы «Небосвод» в работе была взята одна из виртуальных столкновительных с Землёй в 2036 г. траекторий астероида Апофис. Для неё перигейное расстояние

~2070 км в 2036 г. В модели движения астероида Апофис были приняты следующие физические параметры C (п. 1.1):

$$A_g^* = 0.44, \rho_A^* = 2.5 \times 10^3 \text{ кг/м}^3, R_A^* = 160 \text{ м}, \quad (2.1)$$

где A_g^* , ρ_A^* , R_A^* – принятые значения альбедо, плотности и среднего радиуса астероида Апофис, при этом имеются соответствующие характеристики Апофиса: площадь поперечного сечения $S_A^* = 2.01 \times 10^4 \text{ м}^2$, масса $M_A^* = 4.29 \times 10^{10} \text{ кг}$, коэффициент $k_{dav}^* = 70 \text{ км}^3/\text{с}^2$ (1.2). В качестве номинальных начальных данных для уравнений движения астероида (1.1) принято радиус-вектор $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор скорости $\mathbf{v}_0(v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$ на начальный момент времени $t_0 = 0$ ч., 1 июня 2028 г. ($JD(t_0) = 2461923.5$, при этом начальное расстояние от Апофиса до Земли ~100 млн км) в СК OXYZ на эпоху J2000 (п. 1.1):

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -127391818.290357 \text{ км} \\ -68096782.870589 \text{ км} \\ 28509601.154223 \text{ км} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{x_0} \\ v_{y_0} \\ v_{z_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18.789607318 \text{ км/с} \\ -20.855868637 \text{ км/с} \\ -7.276038831 \text{ км/с} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

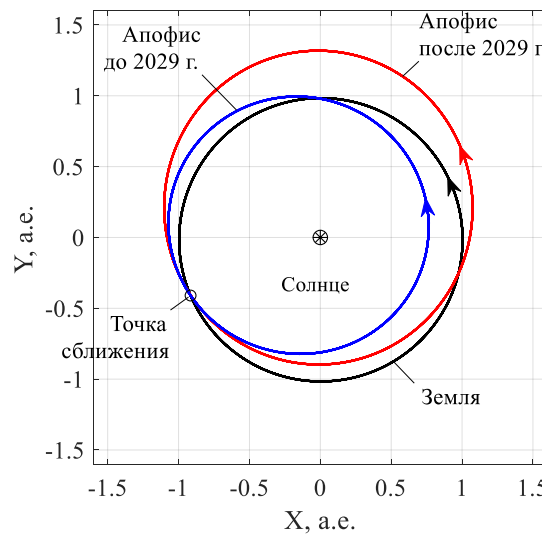


Рис. 2.1. Гелиоцентрические орбиты астероида Апофис и Земли до тесного сближения с Землёй в 2029 г. и после его в 2029-2036 гг.

Интегрируя уравнения движения астероида (1.1) в периоде 2021-2036 гг. методом Рунге-Кутты 8-го порядка при условиях (2.1) и (2.2), получим вектор состояния Апофиса на каждый момент времени данного интервала. На рис. 2.1 показаны орбиты астероида Апофис и Земли в 2021-2036 гг. Здесь заметно

изменение орбиты астероида Апофис после 2029 г., когда астероид Апофис переходит с низкоэнергической на высокоэнергическую орбиту вокруг Солнца.

Таблица 2.1. Расчетные элементы столкновительной гелиоцентрической орбиты астероида Апофис до и после его тесного сближения в 2029 г.

Параметры	До сближения в 2029 г.	После сближения в 2029 г.
a , а.е.	0.9217921	1.1120773
e	0.1926887	0.1950615
i , °	3.3675039	2.2135315
ω , °	126.7483036	70.1549745
Ω , °	203.8086949	203.6424881
M_0 , °	249.3023706	310.8250516
T_0	0 ч. 11.04.2029 г.	0 ч. 15.04.2029 г.
Период T , сут	323.2570 (0.8856 г.)	428.3521 (1.1736 г.)

Таблица 2.2. Расчетные элементы геоцентрических орбит Апофиса в 2029 и 2036 гг.

Параметры	Пролет в 2029 г.	Столкновение в 2036 г.
p , км	189779.1184	4501.2269
e	4.15295	1.17411
i , °	140.49478	65.62473
ω , °	50.26490	130.20522
Ω , °	167.70781	195.10042
r_π , км	36829.2	2070.4
b_0 , км	47082.7	7316.1
$b_{\text{пред}}$, км	13775.6	13869.1
V_∞ , км/с	5.84	5.79
t_π	21:45:27, 13.04.2029 г.	8:53:42, 13.04.2036 г.

В табл. 2.1 даны расчетные оскулирующие элементы гелиоцентрических орбит Апофиса до и после тесного сближения в 2029 г. По элементам орбиты Апофиса на эпоху 11.04.2029 г. (до сближения) расстояния в перигелии и афелии орбиты составляют 0.744 а.е. и 1.099 а.е. Энергия орбиты $h = -962.395$ км²/с². Период обращения Апофиса составляет 323.26 сут = 0.8856 г. $\approx 7:8$

периода обращения Земли. При тесном сближении с Землёй 13.04.2029 г. гравитационное воздействие ускоряет астероид Апофис. Он переходит на орбиту с расстояниями в перигелии 0.895 а.е. и в афелии 1.329 а.е., энергией $h = -797.72 \text{ км}^2/\text{с}^2$, период обращения Апофиса составляет $428.35 \text{ сут} \approx 1.1736 \text{ г.} \approx 7:6$ периода обращения Земли. Энергия орбиты увеличивается на $164.67 \text{ км}^2/\text{с}^2$. Отметим, что последующие измерения позволили несколько уточнить орбиту Апофиса [96], последние элементы его орбиты немного отличаются от нашей принятой системы номинальных элементов орбиты астероида Апофис.

Для принятой нами модельной столкновительной орбиты астероида Апофис анализ геоцентрического движения астероида показывает, что он проходит в 2029 г. через перигей в момент времени $t_{\pi 29} = 21 \text{ ч } 45 \text{ мин } 27 \text{ с}$, 13 апреля, на расстоянии от Земли $r_{\pi 29} = 36829.2 \text{ км} \approx 5.77 R_E$ и далее столкнется с Землёй в 2036 г. в момент времени $t_c = 8 \text{ ч } 46 \text{ мин } 3 \text{ с}$, 13 апреля 2036 г., $\text{JD}(t_c) = 2464796.8653125$. Географические координаты номинальной условной (без учета влияния атмосферы) точки соударения с Землёй по широте $\varphi_c = 23.7^\circ$ и долготе $\lambda_c = -126.3^\circ$, эта точка находится в Тихом океане (в области А0, см. рис. 3.1, 3.3 и 3.4), примерно в 1000 км от западного побережья Мексики. Время прохождения через условный перигей в 2036 г. составляет $t_{\pi 36} = 8 \text{ ч } 53 \text{ мин } 42 \text{ с}$, 13 апреля (~8 мин позже столкновения), имея условное перигейное расстояние $r_{\pi 36} = 2070.4 \text{ км}$. Расчетные элементы геоцентрических орбит для этих сближений приведены в табл. 2.2, где также дано предельное значение прицельной дальности $b_{\text{пред}}$ в случае касания орбиты Апофиса с Землёй.

На данном этапе анализа рассмотрены два участка его полета, соответствующих двум вариантам орбиты. Первый участок имеет «пролетный» вариант орбиты Апофиса – до его сближения с Землёй в 2029 г. Предполагается, что измерения и навигация начинаются с момента достижения расстояния ~100 млн км от Земли до Апофиса (1 июня 2028 г.) и продолжаются до пролета мимо Земли 13 апреля 2029 г., всего 317 сут. Второй участок соответствует модельному «попадающему» в Землю варианту орбиты Апофиса. При этом принимается, что измерения и навигация начинаются после тесного сближения

астероида Апофис с Землёй в апреле 2029 г. и продолжаются до их модельного соударения 13 апреля 2036 г., всего 7 лет.

2.1.2. Анализ видимости Апофиса с бортов КА системы «Небосвод»

Видимость космических тел, в частности, слабых астероидов, при оптическом наблюдении с помощью системы «Небосвод» зависит от ряда факторов, среди которых рассмотрены затенение Землёй и Луной, засветка Солнцем и яркость астероида. В данной работе для всех телескопов на бортах КА системы «Небосвод» приняты одинаковые характеристики наблюдения, причем угловое расстояние β между направлениями на Солнце и на астероид не должно быть менее 30 градусов, а предельная видимая звездная величина $m_{\text{пред}} = 25^m$. Следуя алгоритмам (п. 1.1.2) для построения движения астероида в системе Солнце-Земля во вращающейся СК и для расчета видимой звездной величины астероида по формуле Боуэлла, проанализирована видимость при наблюдении Апофиса с бортов КА системы «Небосвод».

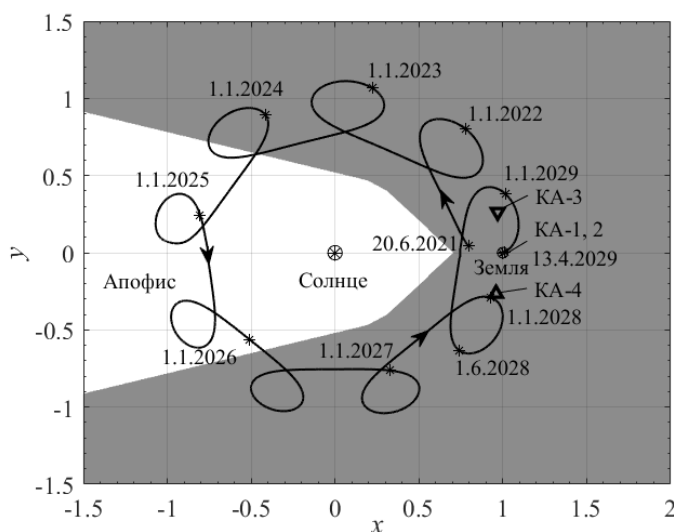


Рис. 2.2. Движение Апофиса в 2021-2029 гг. и теньевая зона видимости системы «Небосвод»

В п. 1.1.2 также рассмотрены зоны видимости для КА системы «Небосвод» при наблюдении объектов с разными абсолютными звездными величинами (рис. 1.3 и 1.4). Используя эти результаты, построены зоны видимости при наблюдении астероида Апофис диаметром ~ 320 м (абсолютная зв.в. $\sim 19.3^m$) для

каждого КА. Объединяя их, получим общую доступную область наблюдения астероида Апофис для рассмотренной схемы размещения телескопов системы «Небосвод», она отмечена как теневая область на рис. 2.2.

Положения КА-3 и КА-4 на рис. 2.2 отмечены треугольниками. Угол Земля-Солнце-КА-3 (или КА-4) составляет примерно 15° . При добавлении КА-3 и КА-4, размещающихся впереди и позади Земли, улучшена видимость не только в далеком пространстве, но и в близком пространстве между Солнцем и Землёй, где трудно наблюдается с помощью наземных и околоземных средств.

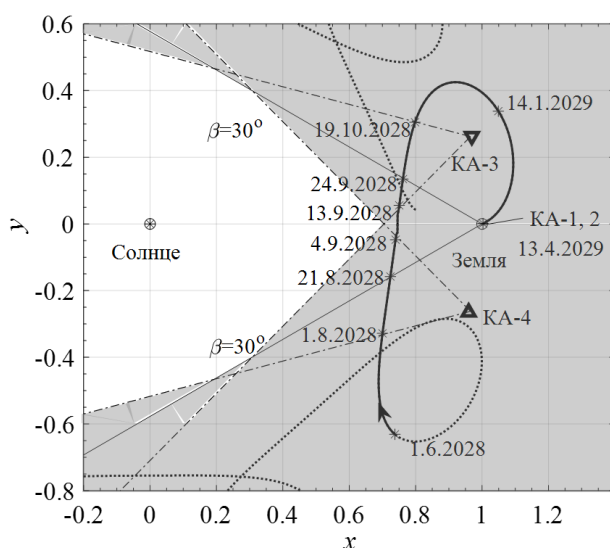


Рис. 2.3. Движение Апофиса на участке полета к Земле в 2028-2029 гг.

Видимость при наблюдении астероида Апофис с борта КА до тесного сближения с Землёй в 2029 г. На рис. 2.2 построена орбита астероида Апофис относительно Солнца и Земли во вращающейся СК с 20 июня 2021 г. до тесного сближения с Землёй 13 апреля 2029 г. На орбите звездочками отмечены положения Апофиса в соответствующие моменты времени. Так как размер Апофиса довольно большой, ~ 320 м, предельная дальность при его наблюдении с борта КА системы «Небосвод» составляет ~ 3 а.е., при этом доступная область наблюдения покрывает все участки полета астероида Апофис, кроме тех, для которых нет видимости из-за засветки Солнцем. Получается, что лишь на двух участках нет видимости (см. рис. 2.2): 1) с 0 ч 10.6.2023 г. по 17 ч 31.8.2023 г., течение 82.7 сут; 2) с 12 ч 25.2.2024 г. по 0 ч 11.1.2026 г., течение 686.5 сут. Общая продолжительность невидимости составляет 769.2 сут ≈ 2.1 г., т.е. около

1/4 всего времени Апофис находится в зоне невидимости системы «Небосвод».

На данном этапе конкретный анализ задачи навигации проводится для наблюдения астероида Апофис с 1 июня 2028 г. по 13 апреля 2029 г., причем начальное расстояние от Земли до Апофиса достигает ~100 млн км. При этом на рис. 2.3 подробнее указано движение Апофиса относительно Солнца и Земли на данном отрезке времени. Из рис. 2.2 и 2.3 видно, что в этот период астероид Апофис находится в общей зоне видимости системы «Небосвод». Однако, для каждого КА существуют несколько зон невидимости (ЗНВ) из-за засветки Солнцем, когда астероид Апофис пролетит через дневную сторону Земли, т.е. пространство между Солнцем и Землёй. Там показаны также выходящие из КА линии визирования астероида для предельных случаев $\beta=30^\circ$, они выделяют зоны невидимости из-за засветки от Солнца для каждого КА.

Анализ показывает, что КА-1 и КА-2, находящиеся на геосинхронных орбитах Земли, имеют близкие ЗНВ с 19 ч 21.8.2028 г. по 8 ч 24.9.2028 г. из-за засветки Солнцем. Здесь расстояние от астероида Апофис до Земли составляет ~ 41 млн. км. Длительность ЗНВ составляет 33.5 сут. Для КА-3 ЗНВ появляется с 22 ч 13.9.2028 г. по 17 ч 19.10.2028 г., всего 35.8 сут. Для КА-4 ЗНВ имеется с 16 ч 1.8.2028 г. по 2 ч 4.9.2028 г., всего 33.4 сут. Астероид Апофис последовательно проходит через ЗНВ для КА-4, КА-1, КА-2, КА-3, см. рис. 2.3. Размещение КА-3 и КА-4 во двух сторонах Земли дает возможность следить за астероидом Апофис, когда он проходит через дневную сторону Земли. Кроме того, есть несколько небольших (до 80 мин в день) ЗНВ из-за тени от Земли для КА-1 и КА-2. Не существуют ЗНВ из-за тени от Луны в рассмотренный период.

Видимость при наблюдении астероида Апофис с борта КА после тесного сближения с Землёй в 2029 г. до столкновения в 2036 г. Рассмотрена также видимость Апофиса после его пролета мимо Земли в 2029 г. до столкновения с Землёй в 2036 г. Аналогично, во вращающейся вместе с Землёй гелиоцентрической СК построена орбита астероида Апофис в данный период, она показана на рис. 2.4. ЗНВ из-за засветки от Солнца при наблюдении Апофиса с бортов КА системы «Небосвод» приведены в таблице 2.3.

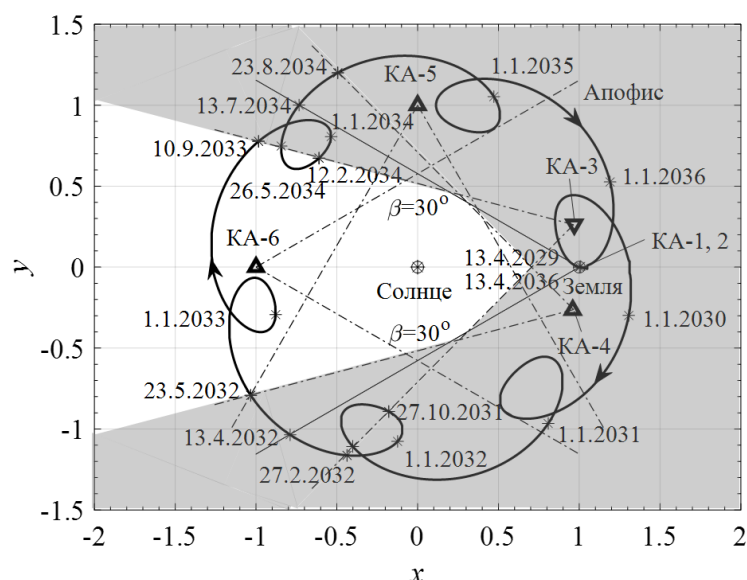


Рис. 2.4. Орбита Апофиса после его сближения с Землёй в 2029 г. до столкновения с Землёй в 2036 г.

Таблица 2.3. Зоны невидимости из-за засветки от Солнца при наблюдении с бортов КА системы «Небосвод» в 2029-2036 гг.

№ КА	Начало ЗНВ	Конец ЗНВ	$\Delta t_{\text{ЗНВ}}$, сут	$\sum \Delta t_{\text{ЗНВ}}$, сут
КА-1	1 ч. 14.04.2029	3 ч. 04.05.2029	20.08	841.2
	19 ч. 13.04.2032	22 ч. 13.07.2034	821.13	
КА-2	2 ч. 14.04.2029	13 ч. 04.05.2029	20.45	841.5
	19 ч. 13.04.2032	23 ч. 13.07.2034	821.17	
КА-3	7 ч. 08.06.2029	10 ч. 02.07.2029	24.13	826.7
	8 ч. 11.06.2031	16 ч. 27.10.2031	138.33	
	15 ч. 27.02.2032	21 ч. 10.09.2033	561.25	
	20 ч. 12.02.2034	20 ч. 26.05.2034	103.0	
КА-4	15 ч. 23.05.2032	8 ч. 23.08.2034	821.70	821.7
КА-1–4	15 ч. 23.05.2032	21 ч. 10.09.2033	475.25	578.3
	20 ч. 12.02.2034	20 ч. 26.05.2034	103.0	
КА-1(2)+КА-5(6)	19 ч. 13.04.2032	15 ч. 23.05.2032	39.8 (0)	39.8 (0)

Анализ показывает, что в этот период, кроме зон невидимости из-за засветки Солнцем, расчетная видимая звездная величина астероида Апофис не превышает 23^{m} , что ярче принятой предельной видимой зв.в. телескопов $m_{\text{пред}}=25^{\text{m}}$, т.е. в 2029-2036 гг. проникающая сила телескопов в 25^{m} обеспечит

хорошую видимость астероида Апофис. Засветка от Солнца оказывает сильное влияние на возможность наблюдения астероида Апофис. Так, на интервале времени с 13 апреля 2029 г. до 13 апреля 2036 г. для КА-1 и КА-2 существуют две близкие длительные зоны невидимости из-за засветки от Солнца. Первая ЗНВ находится с начала 14 апреля до начала 4 мая 2029 г., длительность этого интервала $\Delta t_{\text{ЗНВ1}} \approx 20$ сут. Вторая ЗНВ расположена с 19 ч. 13 апреля 2032 г. (3 года после тесного сближения Апофиса с Землёй в 2029 г.) по 23 ч. 13 июля 2034 г., $\Delta t_{\text{ЗНВ2}} = 821$ сут. ≈ 2.25 г. (см. Табл. 2.3), она разъединяет интервал наблюдения на два относительно больших сеанса наблюдения Апофиса. Первый сеанс находится в интервале с 4 мая 2029 г. по 13 апреля 2032 г., $\Delta t_{\text{сеанс1}} = 1076$ сут. ≈ 2.95 г. Второй сеанс длится с 14 июля 2034 г. по 13 апреля 2036 г., $\Delta t_{\text{сеанс2}} = 640$ сут. ≈ 1.75 г.

При наблюдении Апофиса с бортов КА-3 и КА-4 видимость заметно не улучшается. Для КА-3 имеются 4 длительные зоны невидимости, продолжительностью всего 826.7 сут. ≈ 2.265 г., см. табл. 2.3 и рис. 2.4. Для КА-4 есть одна ЗНВ из-за засветки от Солнца. Эта зона длится с 15 ч. 23.05.2032 г. по 8 ч. 23.8.2034 г., длительность ее составляет 821 сут. ≈ 2.25 г. При наблюдении астероида Апофис с борта всех КА имеются общие длительные ЗНВ: с 23.5.2032 г. по 10.9.2033 г. и с 12.2.2034 г. по 26.5.2034 г., всего 578.25 сут. ≈ 1.58 г. При этом для существенного улучшения видимости удобно иметь КА-5 и КА-6 на гелиоцентрической орбите Земли, чтобы угол Земля-Солнце-КА составил 90° (КА-5) и 180° (КА-6), см. табл. 2.3 и рис. 2.4.

Влияние тени Земли и Луны на видимость Апофиса мало. В течение 7 лет (2029-2036 гг.) существуют несколько десятков небольших ЗНВ из-за тени Земли при наблюдении с бортов КА-1 и КА-2. Длительность этих зон $\Delta t_{\text{ЗНВ}}$ не более 80 мин в день. Также есть несколько небольших (до 10 мин в день) ЗНВ из-за тени Луны.

2.1.3. Анализ особенностей задачи навигации для астероида Апофис

В данном подразделе выполнен анализ задачи определения орбиты

астероида Апофис на базе оптических угловых измерений системы «Небосвод» и задачи оценки точности навигации на *пролетном* участке его орбиты.

Для обработки измерений и определения орбиты астероида Апофис применены классический метод наименьших квадратов (МНК) – без оценивания мешающих параметров (п. 1.2.2), а также его модифицированный вариант – метод мешающих параметров (ММП) (п. 1.2.3), который приводит к уменьшению влияния ошибок мешающих параметров на точность оценивания. Для надежности точность оценивания при применении обоих методов – МНК и ММП для обработки измерений получается двумя способами: аналитически, расчетом ковариационной матрицы и математического ожидания оцениваемых параметров, а также численно – методом Монте-Карло.

Для сравнения этих способов дадим оценку точности определения пролетной орбиты астероида по вектору прицельной дальности орбиты $\mathbf{b}(\xi, \eta)$, перигейному расстоянию r_π и времени прохождения перигея t_π , получим также эллипсы ошибок рассеивания в картинной плоскости (ξ, η) у Земли, ошибку $\delta b = (\delta \xi^2 + \delta \eta^2)^{1/2}$. Сравняется их эффективность оценкой точности навигации при использовании МНК и ММП в ряде частных случаев наличия ошибок измерений и мешающих факторов, в том числе, систематических ошибок измерений, ошибок положения КА в момент измерений и др. Также отдельно проанализировано влияние ошибок измерений и мешающих факторов на точность навигации. Затем, в п. 2.1.4 и 2.1.5 приведем точности навигации в зависимости от мерного интервала на разных участках навигации при наблюдении астероида Апофис с разных КА системы «Небосвод».

Рассмотрены три участка навигации для «пролетного» варианта орбиты астероида Апофис в 2028-2029 гг.: 1) *дальний*, с расстоянием от Земли до Апофиса от 100 млн км до его прохождения перигея – с 1 июня 2028 г. по 13 апреля 2029 г., всего 317 суток; 2) *средний*, с расстоянием до Апофиса от 50 млн км – с 14 января 2029 г. до перигея, всего 90 суток; 3) *близкий*, к сближению с Землёй в 2029 г., с расстоянием до Апофиса от 3.5 млн км – за 7 суток до перигея. Предполагаем, что измерения выполняются с начального

момента каждого участка и продолжаются до конца данного участка. На каждый момент измерений проводятся наблюдения астероида Апофис с бортов КА системы «Небосвод» – при наличии видимости.

Сравнительный анализ точностей навигации аналитическим методом и численным методом Монте-Карло. Сначала рассмотрен случай определения орбиты астероида Апофис по измерениям при наличии только ошибок измерений. Сделан анализ статистических ошибок оценивания двумя указанными методами на выделенных трёх участках траекторий полёта Апофис. Анализ выполнен для трёх вариантов ошибки угловых измерений $\sigma_{\text{ил}}$: 1"; 0.2"; 0.02". Предполагаем, что существуют, кроме случайных, и систематические ошибки $\mathbf{v}_s = [\mu_\alpha, \mu_\delta]^T$ в измерениях прямого восхождения и склонения: $\mu_\alpha = \mu_\delta = \sigma_{\text{ил}}$, нет ошибок других мешающих параметров. Сначала применен классический метод наименьших квадратов без оценивания систематических ошибок.

В качестве примера рассмотрим программу измерений с борта КА-1 на ближнем к Земле участке полета астероида Апофис, с интервалом времени между измерениями $\Delta t = 4$ ч. При этом до перигея получают 42 момента измерений для КА-1. На рис. 2.5 приведены ошибки вектора прицельной дальности (точки на рисунках) и эллипсы рассеивания (3σ) в картинной плоскости для вариантов ошибки измерений $\sigma_{\text{ил}}$: 1"; 0.2"; 0.02", штриховые - для аналитического метода, и сплошные - для численного метода Монте-Карло (3000 испытаний). Центры эллипсов отмечены крестиками. Видно, что оба метода оценки точности определения орбиты астероида Апофис дают близкие результаты: эллипсы ошибок близки друг к другу. Центры эллипсов немного отклоняются от нуля из-за систематических ошибок измерений, видно их малое влияние на точность оценивания для данной программы измерений.

На рис. 2.5 видно, что для варианта $\sigma_{\text{ил}} = 1''$ максимальная ошибка определения прицельной дальности $\delta b \approx 2.1$ км, ошибки $\delta r_\pi \approx 2$ км, $\delta t_\pi \approx 0.1$ с. При $\sigma_{\text{ил}} = 0.2''$, ошибки $\delta b \approx \delta r_\pi \approx 0.45$ км, $\delta t_\pi \approx 0.075$ с, т.е. здесь точность примерно на 5 раз лучше, чем для варианта $\sigma_{\text{ил}} = 1''$. Для варианта $\sigma_{\text{ил}} = 0.02''$ получаем высокую

точность определения орбиты астероида: $\delta b \approx \delta r_\pi \approx 0.13$ км, $\delta t_\pi \approx 0.03$ с, т.е. точность на ~ 4 раз лучше, чем для случая $\sigma_{и1} = 0.2''$.

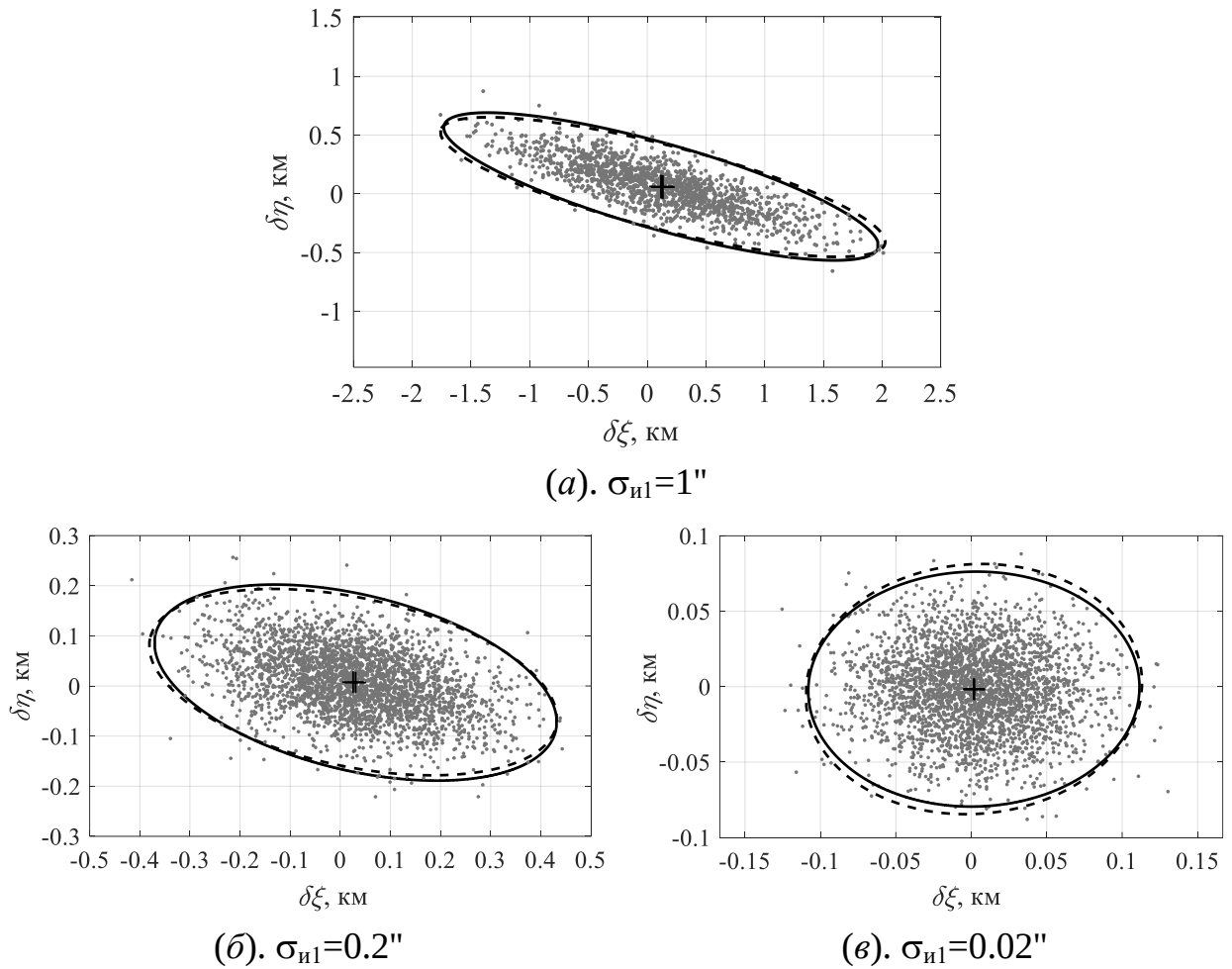


Рис. 2.5. Эллипсы рассеивания (3σ) в картинной плоскости для двух способов расчета: аналитического (штриховая линия) и численного (сплошная линия) для случая измерений с борта КА-1 на ближнем участке, $\Delta t = 4$ ч

Для других участков навигации оба метода тоже дают близкие результаты. При этом для дальнего участка точности навигации будут, в отличие от ближнего участка, примерно пропорциональны ошибке $\sigma_{и1}$. Здесь отметим, что точность навигации пропорциональна суммарной точности углового измерения $\sigma_{и} = (\sigma_{и1}^2 + \sigma_{и2}^2)^{1/2}$, где $\sigma_{и2} = \sigma_R / \rho$ – СКО измерения за счет неточечного характера объекта. На дальнем участке расстояние ρ от КА до астероида велико, и $\sigma_{и2} \ll \sigma_{и1}$, и точность навигации оказалась примерно линейной в зависимости от $\sigma_{и1} \approx \sigma_{и}$, а на ближнем участке эта линейность нарушается из-за $\sigma_{и2}$.

Затем рассмотрен случай наличия ошибок мешающих параметров,

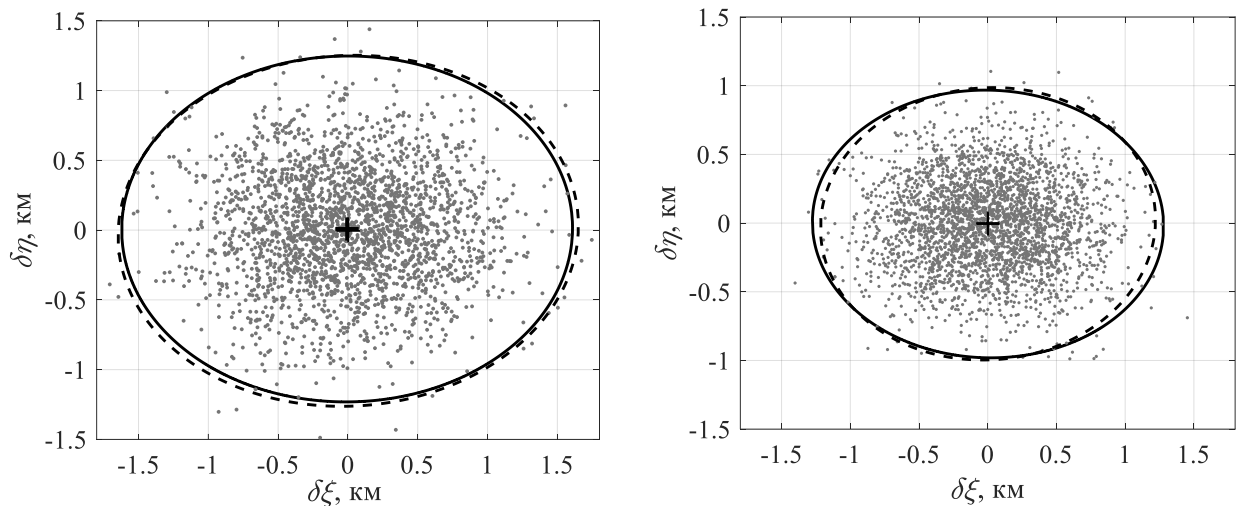
например, когда в каждый момент измерений положение КА неточно известно. В этом случае при обработке измерений используются неточные параметры движения КА, что приводит к ошибкам в значениях измеряемых параметров. Эти возмущающие воздействия накапливаются в ошибках определения орбиты Апофиса. Для уменьшения их влияния на точность оценивания можно применять метод мешающих параметров, что позволяет уточнить положение КА.

В качестве примера для сравнения точностей оценивания в случаях применения метода без уточнения мешающих параметров, и метода с их уточнением, рассмотрим прежнюю программу измерения. Здесь предполагаем, что существуют не только случайные и систематические ошибки измерений, но и ошибки положения КА-1 на каждый момент измерений. Точность угловых измерений принята $\sigma_{\text{и1}}=0.02''$ и $0.2''$, систематические ошибки измерений приняты постоянными, равными $\sigma_{\text{и1}}$. СКО ошибок $\sigma(x, y, z)$ по координатам КА-1 принято равным $\sigma_{\text{КА}}=1$ км. Точность определения орбиты астероида Апофис по методу наименьших квадратов и методу мешающих параметров получается также аналитически и численно – методом Монте-Карло.

На рис. 2.6а приведены разбросы вектора прицельной дальности **b** и эллипсы рассеивания (3σ) в картинной плоскости для двух способов расчета: аналитического (штриховая линия) и численного (сплошная) в соответствии с применением метода наименьших квадратов для случая наличия ошибок положения КА-1: $\sigma(x, y, z)=\sigma_{\text{КА}}=1$ км, $\sigma_{\text{и1}}=0.02''$. Оценка точности δb дает 1.65 км. Сопоставление эллипсов рассеивания на рис. 2.6а и 2.5в показывает большое влияние ошибок положения КА-1 на точность оценивания. На рис. 2.5в отсутствуют ошибки положения КА-1, а на рис. 2.6а есть ошибки положения КА-1.

Для рис. 2.6б при обработке измерений применен метод мешающих параметров, уточняются начальный вектор состояния астероида Апофис данного участка его полета, а также координаты КА-1. Аналитическим методом и методом Монте-Карло (3000 испытаний) получены разбросы вектора прицельной дальности **b**, а также эллипсы рассеивания в картинной плоскости.

Оба метода оценки точности навигации в этом случае тоже дали близкие результаты. Получена оценка точности $\delta b \approx 1.25$ км. При этом путем уточнения координат КА-1 точность оценивания по прицельной дальности улучшена на 24%. Наглядно видим, что эллипсы на рис. 2.6б меньше, чем их на рис. 2.6а.

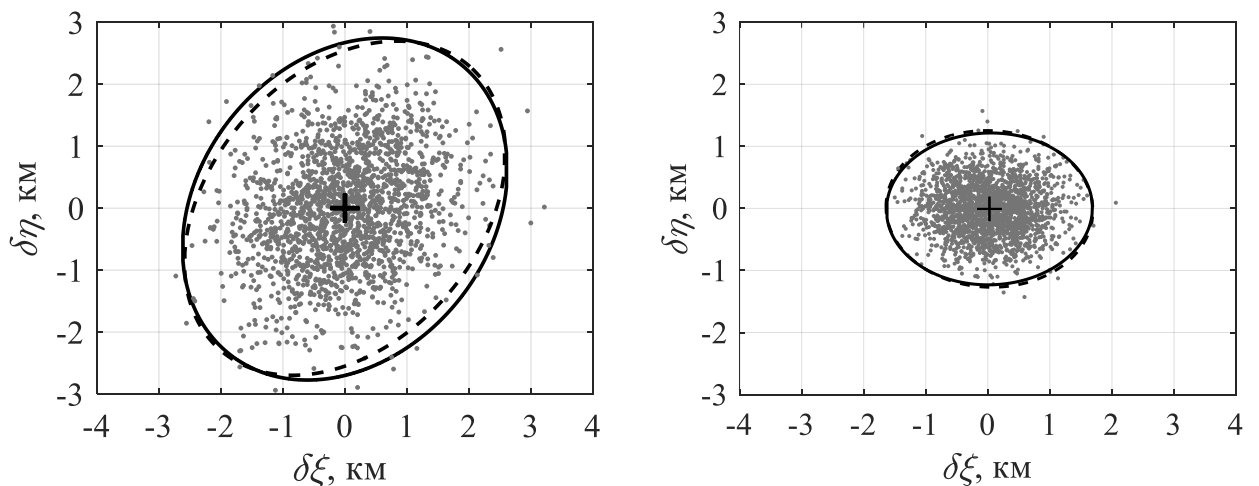


(а). МНК – без оценивания мешающих параметров

(б). ММП – с уточнением мешающих параметров

Рис. 2.6. Эллипсы рассеивания (3σ) в картинной плоскости для двух способов расчета: аналитического (штриховая линия) и численного (сплошная линия),

$$\sigma_{и1}=0.02'', \sigma_{КА}=1 \text{ км}$$



(а). МНК – без оценивания мешающих параметров

(б). ММП – с уточнением мешающих параметров

Рис. 2.7. Эллипсы рассеивания (3σ) в картинной плоскости для двух способов расчета: аналитического (штриховая линия) и численного (сплошная линия),

$$\sigma_{и1}=0.2'', \sigma_{КА}=1 \text{ км}$$

На рис. 2.7а и б даны эллипсы рассеивания в картинной плоскости для этой же программы измерений и для точности измерений $\sigma_{и1}=0.2''$. Если нет оценивания мешающих параметров, то $\delta b \approx 3$ км, а если есть это оценивание, то $\delta b \approx 1.7$ км, т.е. уточнением координат КА точность навигации повышена на 43%.

Таким образом, при априорном задании вероятностных характеристик ошибок измерений и мешающих параметров точность навигации может быть эффективно оценена аналитически, методом ковариационного анализа в соответствии с применённым методом оценивания – МНК или ММП. Показано, что применение уточнения мешающих параметров позволяет заметно уменьшить их влияние на точность навигации по сравнению со случаем без их оценивания.

Теперь отдельно анализируем влияние ошибок измерений, ошибок обновления и прогнозирования состояния КА, ошибок модели движения астероида, а также начальной априорной информации на точность навигации.

Анализ влияния случайных и систематических ошибок измерений на точность навигации. Сначала рассмотрен случай, когда есть только случайные ошибки измерений, $\sigma_{и1}=0.2''$. Полагаем, что измерения проводятся с борта каждого КА на ближнем к Земле участке полета Апофиса, при наличии видимости, $\Delta t=1$ час. На рис. 2.8 приведена точность навигации по прицельной дальности δb в зависимости от мерного интервала или от времени до перигея при обработке измерений с бортов разных КА. Видно, что, так как КА-3 и КА-4 находятся далеко от астероида по сравнению с КА-1 и КА-2 при приближении астероида Апофис к Земле, качество измерений с бортов КА-3 и КА-4 намного хуже, чем с бортов КА-1 и КА-2. При этом для КА-1 или КА-2 за 1 сут до перигея получается $\delta b < 1$ км, а для КА-3 или КА-4 $\delta b \sim 10^5$ км. Однако, при совместной обработке измерений с бортов КА-3 и КА-4 $\delta b \approx 80$ км.

Затем рассмотрен случай навигации на ближнем участке, при учете случайных и систематических ошибок измерений. Принято, что значения систематических ошибок случайно формируются, причем $\sigma_{\mu\alpha}=\sigma_{\mu\delta}=\sigma_{и1}=0.2''$, $\Delta t=1$ ч, при обработке измерений они не уточняются. На рис. 2.9 приведена точность навигации δb в зависимости от мерного интервала или от времени до

перигея при измерениях с бортов КА-1 и КА-2. Кривая 1 соответствует случаю только случайных ошибок измерений, кривая 3 – наличию обеих ошибок измерений, кривая 2 дает разницу кривых 1 и 3, т.е. влияние систематических ошибок измерений. Видим, что оно на ближнем участке навигации очень мало по сравнению с влиянием случайных ошибок измерений, как в случае рис. 2.5.

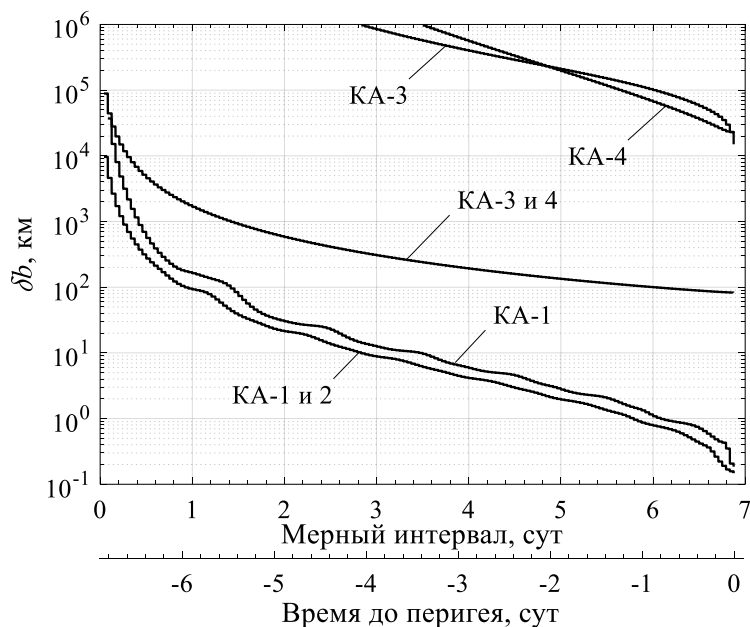


Рис. 2.8. Точность навигации δb на ближнем участке:

есть только случайные ошибки измерений, $\Delta t=1$ ч, $\sigma_{и1}=0.2''$

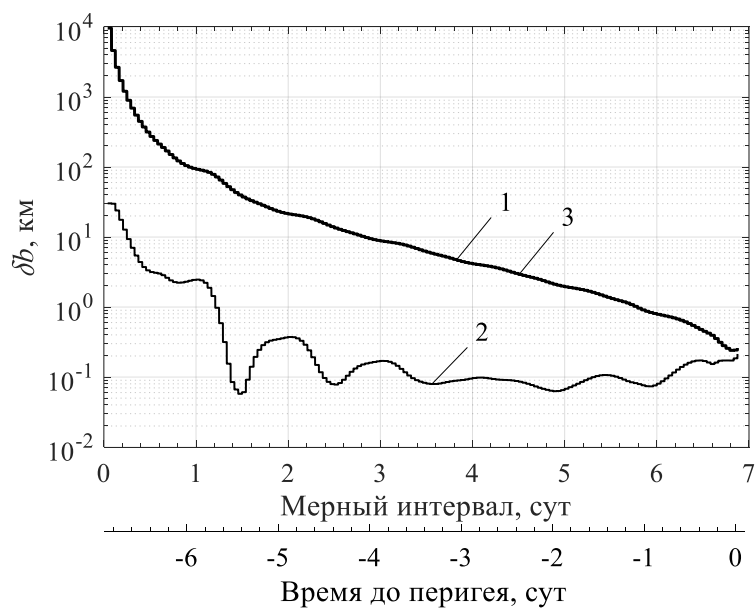


Рис. 2.9. Точность навигации δb на ближнем участке при измерениях с КА-1 и КА-2, $\Delta t=1$ ч, $\sigma_{и1}=0.2''$

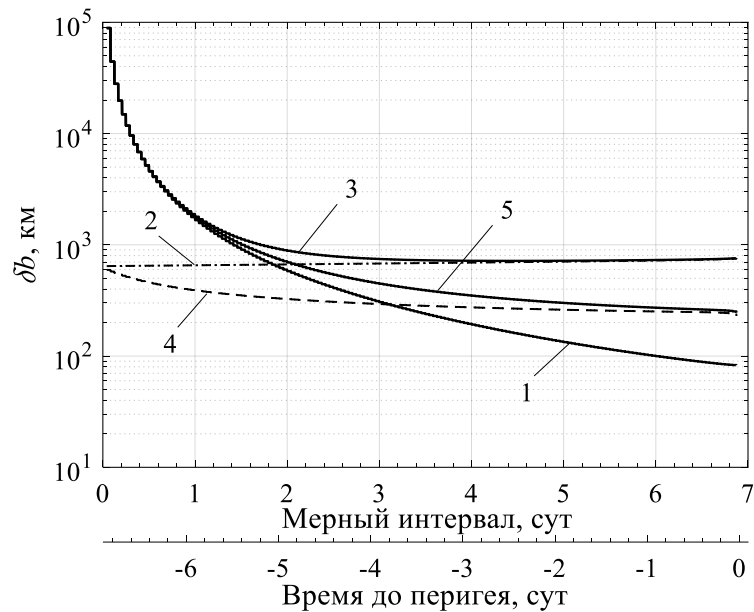


Рис. 2.10. Точность навигации δb на ближнем участке при измерениях с КА-3 и КА-4, $\Delta t=1$ ч., $\sigma_{и1}=0.2''$

При обработке измерений с бортов КА-3 и КА-4 влияние систематических ошибок измерений на точность навигации на ближнем участке навигации большое. Для этого случая на рис. 2.10 приведены точности навигации δb для разных вариантов учета систематических ошибок измерений. Кривая 1 соответствует наличию только случайных ошибок. Кривые 2 и 3 соответствуют случаю, когда систематические ошибки не уточняются, причем для кривой 3 есть обе ошибки измерений, кривая 2 – разница кривых 1 и 3, т.е. даёт влияние систематических ошибок. Кривые 4 и 5 соответствуют случаю, когда систематические ошибки уточняются, причем для кривой 5 есть обе ошибки измерений, кривая 4 – разница кривых 1 и 5. Уточнение систематических ошибок заметно уменьшает ошибку навигации δb : с ~ 740 км до ~ 250 км, при этом ситуация приближается к случаю, когда есть только случайные ошибки измерений.

Анализ влияния ошибок обновления и прогнозирования состояния КА на точность навигации. Для этого случая предполагается, что состояния КА последовательно обновляются с начального момента мерного интервала в моменты времени t_i , через промежутки Δt_i . Это включает в себя частный случай, когда состояния КА обновляются на каждый момент измерений t_k , при этом $t_i=t_k$

и $\Delta t_i = \Delta t$. Так как измеряемые углы явно не зависят от скорости КА на момент измерения, при этом в частном случае $t_i = t_k$ рассматривается влияние ошибок положения КА на результаты обработки измерений. В более общем случае обновления состояния КА проводятся реже, т.е. $\Delta t_i > \Delta t$. В другом предельном случае обновление состояния КА есть только в начале мерного интервала. Полагаем, что на каждый момент обновления t_i заданы состояния КА с некоторыми ошибками, для анализа СКО положения и скорости КА приняты:

$$\sigma(x, y, z) = 1 \text{ км}, \sigma(v_x, v_y, v_z) = 1 \text{ мм/с}. \quad (2.3)$$

Сначала анализируем влияние ошибок положения КА на каждый момент измерений, $\Delta t_i = \Delta t$. Полагаем, что кроме ошибок обновления состояния КА существуют в измерениях только случайные ошибки, $\sigma_{и1} = 0.2''$.

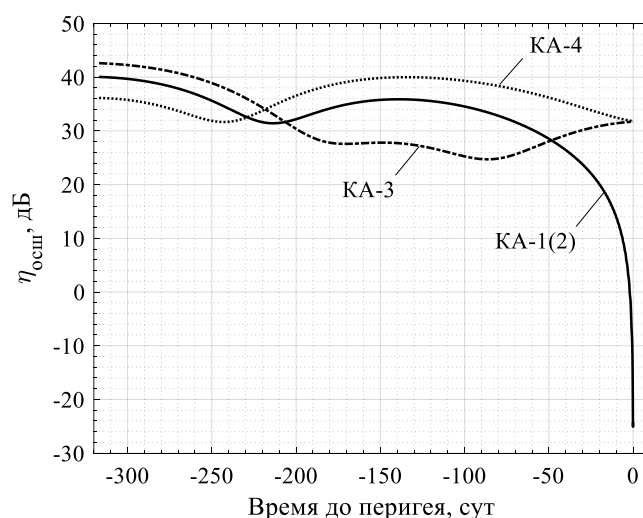


Рис. 2.11. Коэффициент ОСШ $\eta_{осш}$ при измерениях с КА-1-4 в зависимости от времени до перигея, $\Delta t_i = \Delta t = 1$ ч, $\sigma_{КА} = 1$ км, $\sigma_{и1} = 0.2''$

Сравним интенсивность ошибок положения КА в отношении к ошибкам измерений с помощью введенного коэффициента ОСШ (см. п. 1.3.2). На рис. 2.11 приведен коэффициент ОСШ $\eta_{осш}$ при измерениях с борта КА-1-4 в зависимости от времени до перигея для случая: $\Delta t_i = \Delta t = 1$ ч., $\sigma_{и1} = 0.2''$. Чем меньше значение ОСШ $\eta_{осш}$, тем сильнее влияние ошибок состояния КА на точность навигации по сравнению с влиянием случайных ошибок измерений. Видно из рис. 2.11, что при ошибках (2.3) коэффициент ОСШ $\eta_{осш}$ для КА-1(2) вблизи Земли значительно меньше, чем $\eta_{осш}$ для КА-3 и КА-4. Тем самым, будет

сильнее влияние ошибок положения КА-1 и КА-2 на точность навигации. Когда астероид вдали от Земли, то коэффициенты ОСШ для всех КА меняются в диапазоне от 24 до 43 дБ, и влияние ошибок положения КА ($\sigma(x, y, z) = \sigma_{КА} = 1$ км) довольно мало. Кроме того, влияние ошибок положения КА на точность навигации зависит от $\sigma_{КА}$ (2.3). При увеличении $\sigma_{КА}$ на 10 раз, коэффициент ОСШ $\eta_{осш}$ уменьшается на 20 дБ.

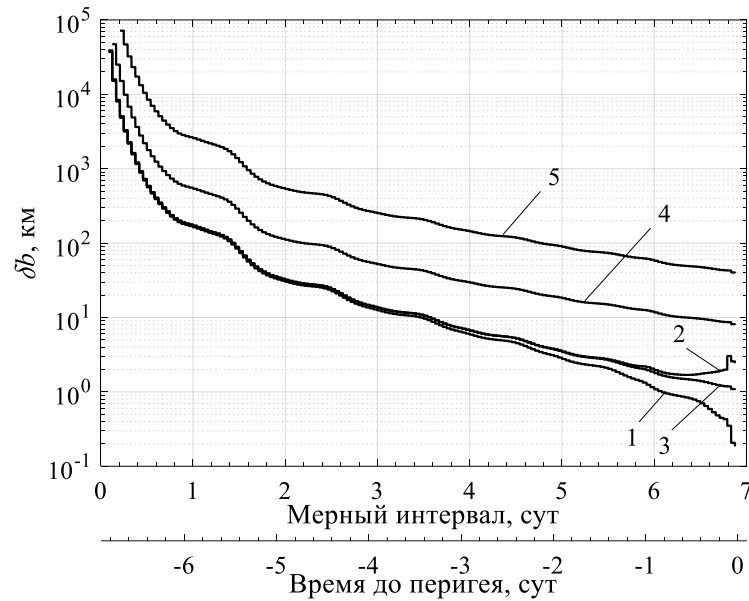


Рис. 2.12. Точность навигации δb на ближнем участке при измерениях с КА-1, $\Delta t_i = \Delta t = 1$ ч., $\sigma_{и1} = 0.2''$

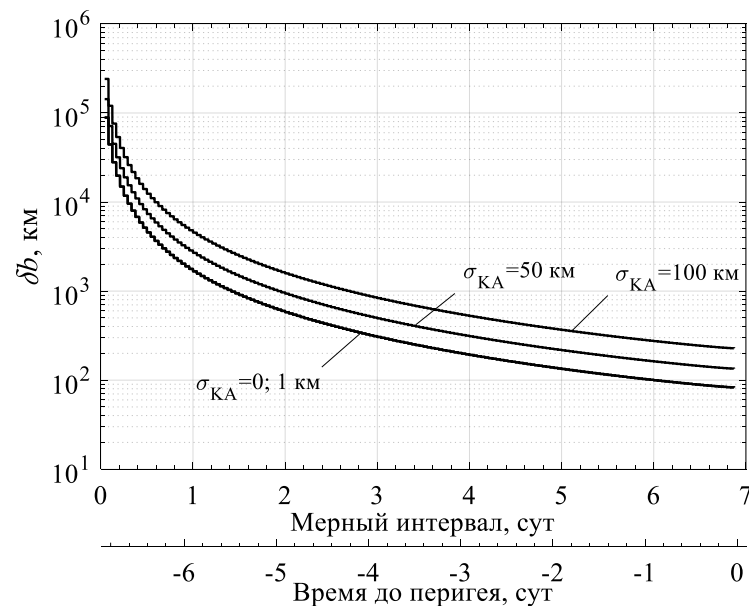


Рис. 2.13. Точность навигации δb на ближнем участке при измерениях с КА-3 и КА-4, для $\Delta t_i = \Delta t = 1$ ч., $\sigma_{и1} = 0.2''$

На рис. 2.12 приведена точность навигации δb в зависимости от мерного интервала на ближнем участке полета Апофиса при измерениях с борта КА-1 для разных вариантов учета ошибок положения КА-1. Для кривой 1 есть только случайные ошибки измерений, вблизи перигея $\delta b \approx 0.2$ км. Для кривой 2, кроме этого, есть и ошибки координат КА, которые не уточняются, здесь $\delta b \approx 3$ км, это соответствует анализу коэффициента ОСШ. Для кривой 3, в отличие от кривой 2, есть уточнение, здесь $\delta b = 1$ км. Видно, что уточнением координат КА-1 можно заметно уменьшить влияние их ошибок на точность навигации. При увеличении ошибок координат КА $\sigma_{КА}$ увеличивается суммарная ошибка навигации. Кривые 4 и 5 соответствуют вариантам $\sigma_{КА} = 10; 50$ км, с уточнением положения КА на каждый момент измерений. За 2 сут до перигея наихудшая точность навигации (кривая 5) составляет $\delta b \approx 100$ км.

Аналогично, получена точность навигации на данном участке при совместной обработке измерений с бортов КА-3 и КА-4, $\sigma_{КА} = 0; 1; 50; 100$ км, с уточнением координат КА (рис. 2.13). За 2 сут до перигея точность навигации получается $\delta b = 135-365$ км, что хуже, чем в случае измерений с КА-1.

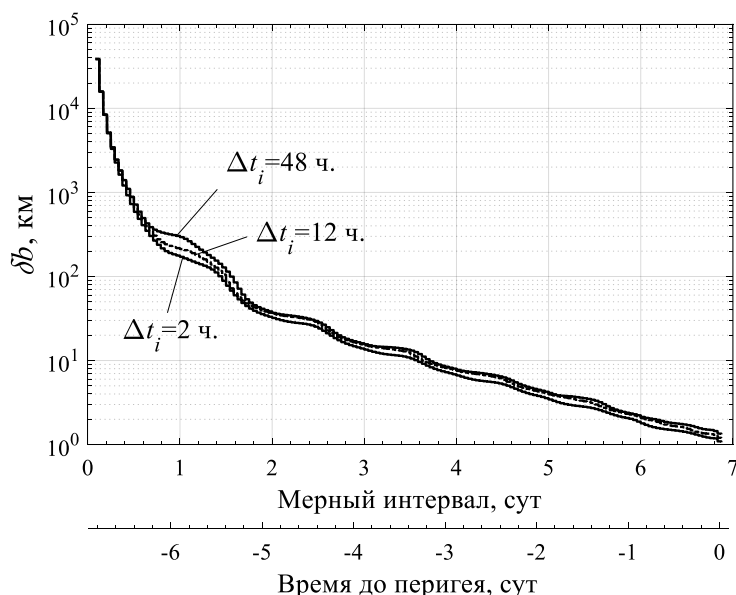


Рис. 2.14. Точность навигации δb на ближнем участке при измерениях с КА-1, $\Delta t = 1$ ч., $\sigma_{ил} = 0.2''$, для трёх вариантов: $\Delta t_i = 2$ ч; 12 ч; 48 ч

Теперь рассмотрим влияние частоты обновления состояния КА на

точность навигации. В этом случае положение КА на момент измерений для расчета измеряемых параметров получается путем прогнозирования движения КА от последнего момента обновления состояния КА. На рис. 2.14 приведена точность навигации δb при измерениях с борта КА-1, $\Delta t=1$ ч., $\sigma_{и1}=0.2''$, для вариантов обновления состояния КА-1: $\Delta t_i=2$ ч; 12 ч; 48 ч. Видно, что чем реже обновление состояния КА-1, тем хуже точность навигации. Отметим, что точность навигации до перигея для всех этих вариантов практически одинакова, причем предельный случай $\Delta t_i=\Delta t$ близок к ним.

Анализ влияния ошибок модели движения астероида Апофис на точности навигации. Рассмотрено также влияние ошибок в модели движения астероида Апофис за счёт неточных физических параметров $C=[A_g, \rho_A, R_A]^T$ для расчета возмущающего ускорения от давления солнечного света. По проведенному анализу размера и отражательной способности астероида Апофис в [98] реальная форма астероида Апофис оценивалась близкой к удлинённому эллипсоиду, у которого средняя полуось примерно равна малой полуоси, а отношение большой полуоси к малой оценивалось около 1.5 ± 0.2 . Его диаметр $2R_A \approx 270 \pm 60$ м, альбедо $A_g \approx 0.33 \pm 0.08$ [78] и средняя плотность оценена $\rho_A = 2.5 \pm 0.5 \times 10^3$ кг/м³, это соответствует площади поперечного сечения $S_A = 1.43 \pm 0.32 \times 10^4$ м², массе $M_A = 2.58 \pm 1.79 \times 10^{10}$ кг, и коэффициенту $k_{дав} = 76.87 \pm 23.6$ км³/с². Отсюда следуют ошибки в модели движения астероида Апофис за счёт неточных параметров $C=[A_g, \rho_A, R_A]^T$, разность между оцениваемыми параметрами $\bar{C}$ и принятыми в модели движения астероида Апофис C^* (2.1) имеет математическое ожидание и их СКО σ_c :

$$M\{\bar{C}\} = (-0.11, 0, -25), \quad 3\sigma_c = (3\sigma_{A_g}, 3\sigma_{\rho_A}, 3\sigma_{R_A}) = (0.08, 500, 10). \quad (2.4)$$

Разброс ошибок вектора C характеризует ковариационной матрицей:

$$S = \text{diag}(\sigma_{A_g}^2, \sigma_{\rho_A}^2, \sigma_{R_A}^2). \quad (2.5)$$

Так как влияние ошибок модели движения астероида Апофис на точность определения параметров его движения увеличивается с длительностью мерного

интервала, рассмотрим случай оценки точности навигации на дальнем участке полета астероида Апофис. При этом получены точности навигации по прицельной дальности δb , по перигейному расстоянию δr_π , а также по времени прохождения перигея δt_π на дальнем участке при обработке измерений с борта КА-1, $\Delta t=1$ сут. Анализ показывает, что влияние ошибок модели движения астероида на точность навигации мало, за 317 сут измерений оно составляет: по прицельной дальности $\delta b \sim 1$ км, $\delta r_\pi \sim 0.12$ км, $\delta t_\pi \sim 10^{-4}$ с.

Анализ влияния априорной информации о начальном состоянии на точности навигации. При обработке навигационных измерений возможно использование априорной информации (а.и.) об ошибках знания элементов орбиты или вектора состояния астероида к моменту начала сеанса измерений, если астероид наблюдался ранее. Для анализа влияния априорной информации о начальном состоянии на точности навигации рассмотрим случай обработки измерений с борта КА-1 на ближнем участке полета астероида Апофис. Предполагаем, что априорно задано начальное СКО:

$$\sigma(x_0, y_0, z_0) = 1 \text{ км}, \sigma(v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}) = 1 \text{ мм/с}. \quad (2.6)$$

Полагаем, что измерения астероида Апофис с борта КА-1 проводятся от начала данного участка до конца с постоянным интервалом времени между измерениями $\Delta t=1$ ч, учитывались априорная информация и случайные ошибки в измерениях при точности наблюдения $\sigma_{\text{ил}}=0.2''$.

На рис. 2.15 приведена точность навигации δb на ближнем участке навигации для 5 вариантов учета априорной информации (а.и.). Здесь для кривой 1 есть только случайные ошибки измерений. Для кривой 2 есть а.и., для которой СКО соответствует (2.6), $\sigma_2=\sigma$. Для кривой 3 ошибки а.и. увеличены в 10 раз по отношению к (2.6), $\sigma_3=10\sigma$; для кривой 4: $\sigma_4=100\sigma$; для кривой 5: $\sigma_5=1000\sigma$. Анализ показывает, что априорная информация значительно улучшает точность навигации лишь в начале данного участка, с увеличением мерного интервала точность навигации приближает к случаю отсутствия а.и., и чем больше априорный разброс начального вектора состояния, тем ближе

точность навигации к случаю отсутствия априорной информации.

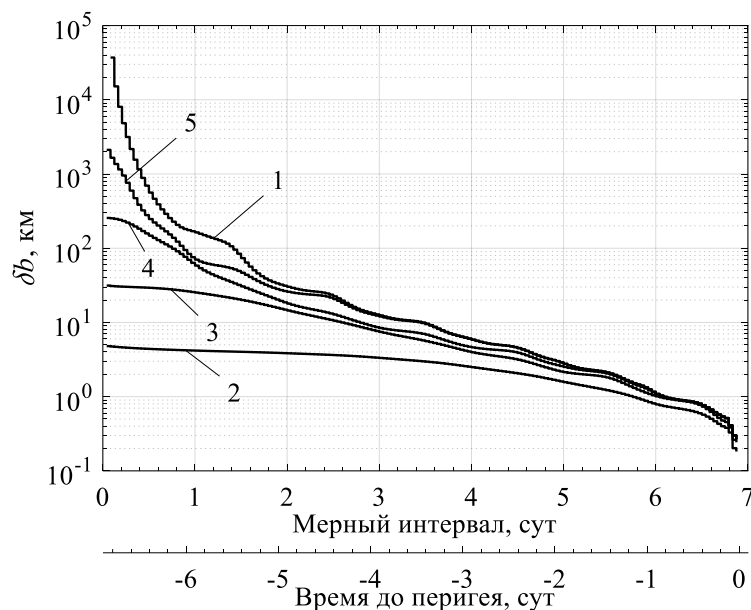


Рис. 2.15. Точность навигации δb на ближнем участке при измерениях с КА-1 для 5 вариантов учета априорной информации

2.1.4. Оценка точностей навигации для астероида Апофис в случае пролётного варианта орбиты, в 2028-2029 гг.

На предыдущем этапе анализа отдельно рассмотрено влияние ошибок измерений и всех мешающих факторов на точность навигации при наблюдении астероида Апофис с помощью системы «Небосвод». Оценим точность навигации на разных участках полета Апофиса (от дальнего до ближнего к Земле) при совместном учете всех ошибок измерений и мешающих факторов, причем мешающие параметры уточняются. Предполагаем, что каждый КА имеет одинаковые вероятностные характеристики при измерении астероида, причем для СКО ошибок измерений принято $\sigma_{и1}=0.2''$, для систематических ошибок принято $\sigma_{\mu\alpha}=\sigma_{\mu\delta}=\sigma_{и1}$. Заданы ошибки положения КА на каждый момент измерений: для КА-1 и КА-2 принято $\sigma_{КА1}=\sigma_{КА2}=1$ км, а для КА-3 и КА-4 принято $\sigma_{КА3}=\sigma_{КА4}=5$ км. Для параметров модели движения астероида Апофис приняты ошибки из-за неточности знания альбедо, среднего радиуса и плотности астероида (2.4). Не учитывается априорная информация о начальном состоянии астероида Апофис. На каждый момент измерений одновременно

проводятся наблюдения с борта каждого КА системы «Небосвод» при наличии видимости. Точность навигации получается аналитически с применением метода обработки измерений с уточнением всех мешающих параметров. Кроме того, для анализа влияния выбора КА для наблюдения Апофиса рассмотрены три варианта обработки измерений – с бортов КА-1 и КА-2 или КА-1 и КА-3 или КА-3 и КА-4. Опишем полученные результаты.

Дальний участок полета астероида Апофис. В этом случае предполагаем, что все КА одновременно измеряют с 0 ч. 1 июня 2028 г. через $\Delta t=12$ ч-5 суток, и исключены моменты времени, для которых нет видимости. На рис. 2.16 и рис. 2.17 дана зависимость точностей навигации по прицельной дальности δb и времени прохождения перигея δt_π от мерного интервала на дальнем участке при обработке измерений с бортов КА-1 и КА-2. Для принятой номинальной орбиты Апофиса при сближении Апофиса с Землёй в 2029 г. имеем $r_{\pi 29}=36829.2$ км, при этом для выявления факта отсутствия падения на Землю в 2029 г. надо иметь оценку точности навигации:

$$\delta r_\pi < r_{\pi 29} - R_E = 30451 \text{ км.} \quad (2.7)$$

На дальнем участке навигации для случая совместных измерений с бортов КА-1 и КА-2, $\Delta t=5$ сут., через ~ 0.2 г. измерений полученная точность навигации δr_π будет удовлетворять условию (2.7), при этом можно сказать, что с большой вероятностью (0.997) не будет столкновения Апофиса с Землёй в 2029 г. Точность навигации резко улучшается с ростом числа измерений. Так, к последнему месяцу до перигея: $\delta b=6-70$ км, $\delta r_\pi=5-64$ км, $\delta t_\pi=7-12$ с.

На рис. 2.18 приведена точность навигации δb на данном участке для случаев измерений с бортов КА-1 и КА-2 или КА-1 и КА-3 или КА-3 и КА-4, $\Delta t=12$ ч. Сравнительный анализ показывает, что в начале данного участка навигации, когда астероид Апофис находится далеко от Земли, точность навигации при измерениях с бортов КА-3 и КА-4 на порядке лучше, чем с бортов КА-1 и КА-2. Для случаев измерений с бортов КА-1 и КА-3 или КА-3 и КА-4, $\Delta t=12$ ч., через ~ 20 сут можно уверенно утверждать, что столкновение астероида Апофис с Землёй в 2029 г. будет маловероятно, и точность

прогнозирования резко улучшается с ростом числа измерений.

При сближении астероида Апофис с Землёй, в конце данного участка, наоборот, точность навигации при измерениях с КА-3 и КА-4 на порядке хуже, чем с КА-1 и КА-2, причем для измерений с КА-3 и КА-4 $\delta b \approx 19$ км, $\delta r_\pi \approx 17.7$ км, $\delta t_\pi \approx 1.6$ с, а для измерений с КА-1 и КА-2 или с КА-1 и КА-3 получается в конце данного участка навигации $\delta b \approx 2$ км, $\delta r_\pi \approx 1.6$ км, $\delta t_\pi \approx 0.16$ с.

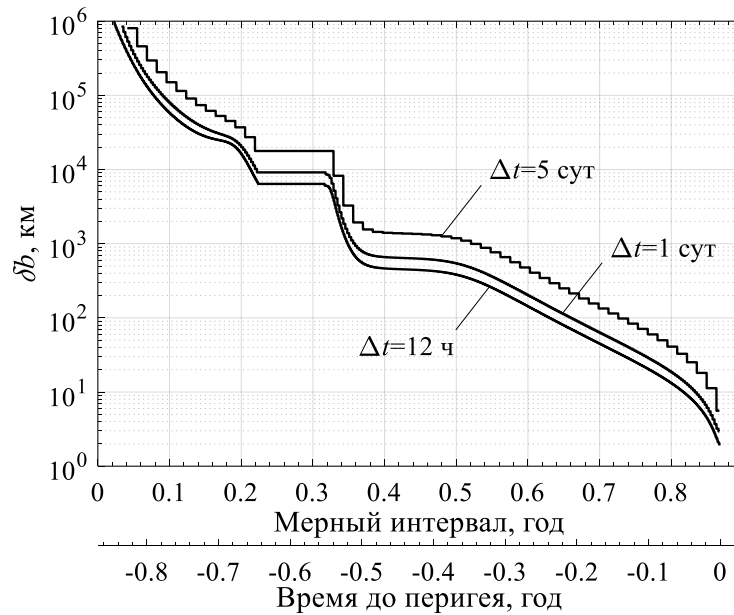


Рис. 2.16. Точность навигации δb на дальнем участке при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{и1} = 0.2''$

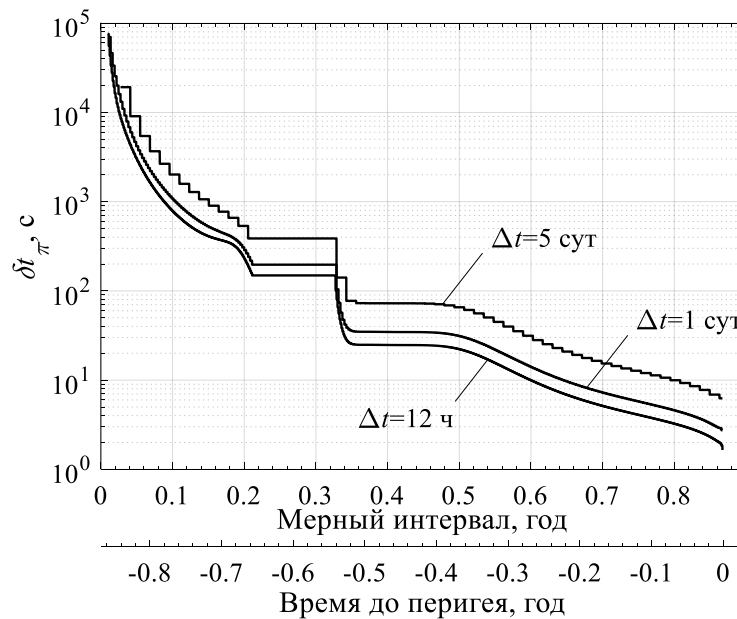


Рис. 2.17. Точность навигации δt_π на дальнем участке при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{и1} = 0.2''$

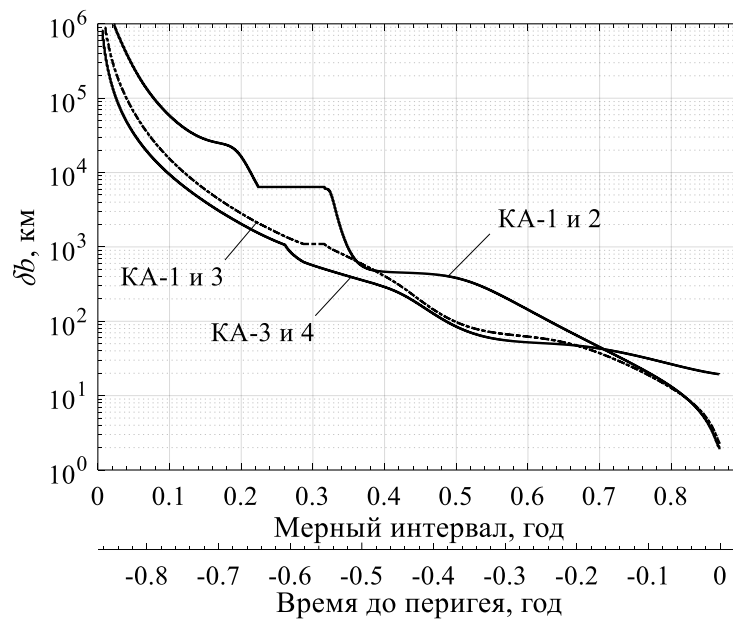


Рис. 2.18. Точность навигации δb на дальнем участке, $\sigma_{\text{н1}}=0.2''$, $\Delta t=12$ ч

Средний участок полета астероида Апофис. Для этого случая на рис. 2.19 и 2.20 приведена точность навигации δb и δt_{π} в зависимости от мерного интервала при измерениях с КА-1 и КА-2 через $\Delta t=12$ ч-5 сут. Через ~ 10 сут навигации точность δr_{π} будет удовлетворять условию (2.7) для подтверждения факта отсутствия падения астероида в 2029 г. До конца данного участка точность навигации улучшается: $\delta b \approx 2-27$ км, $\delta r_{\pi} \approx 1.5-27$ км, $\delta t_{\pi} \approx 3-76$ с.

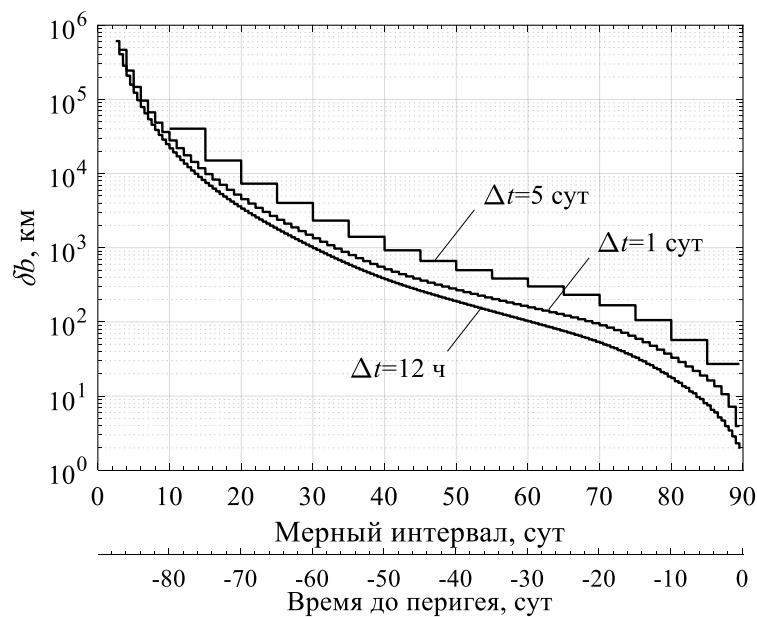


Рис. 2.19. Точность навигации δb на среднем участке при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{\text{н1}} = 0.2''$

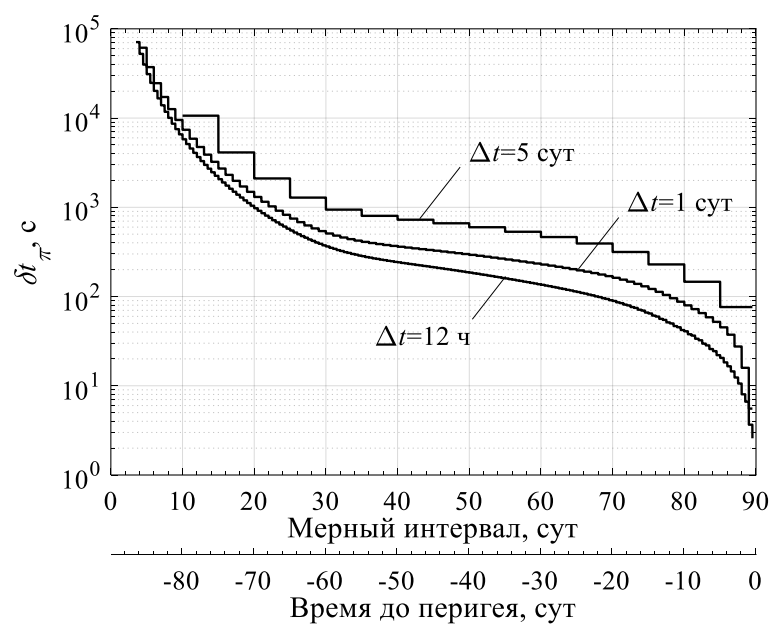


Рис. 2.20. Точность навигации δt_{π} на среднем участке при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{н1} = 0.2''$

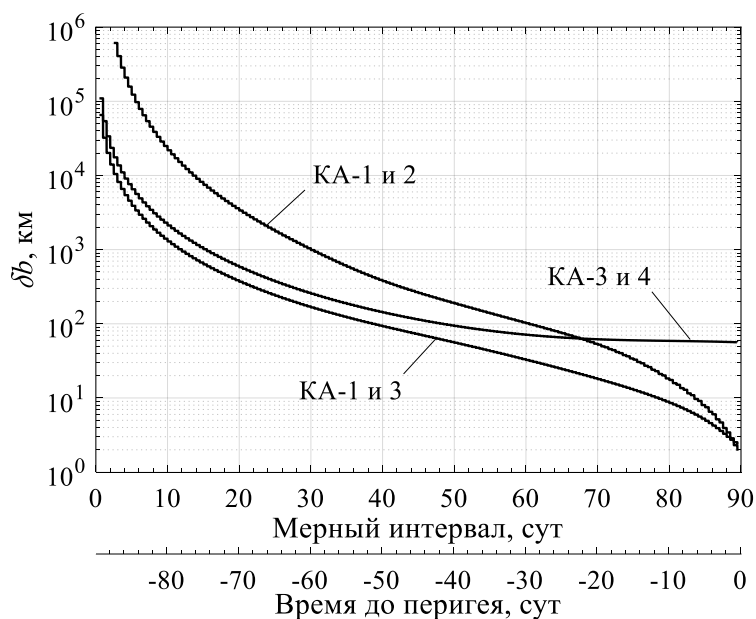


Рис. 2.21. Точность навигации δb на среднем участке $\sigma_{н1} = 0.2''$, $\Delta t = 12$ ч

На рис. 2.21 приведена точность навигации δb для случаев измерений с КА-1 и КА-3 или КА-3 и КА-4. Так как в начале данного участка полета астероида он ближе к КА-3, чем к КА-1, 2 и 4, то точность навигации для измерений с КА-1 и КА-3 или с КА-3 и КА-4 лучше, чем для КА-1 и КА-2. При этом через ~ 2 -3 сут измерений получается $\delta r_{\pi} < 10$ тыс. км, и можно сказать, что столкновение астероида Апофис с Землёй в 2029 г. будет маловероятно (2.7).

В конце данного участка астероид Апофис приближает к Земле, измерения с КА-1 и КА-2 лучше, чем с КА-3 и КА-4. Для варианта измерений с КА-3 и КА-4 точность $\delta b \approx 56$ км, $\delta r_\pi \approx 47$ км, $\delta t_\pi \approx 28$ с, а для вариантов измерений с КА-1 и КА-2 или КА-1 и КА-3 $\delta b \approx 2.4$ км, $\delta r_\pi \approx 1.8$ км, $\delta t_\pi \approx 2.8$ с.

Ближний от Земли участок полета астероида Апофис. В этом случае начало ~за 7 суток до прохождения перигея. На рис. 2.22 и 2.23 приведена точность навигации δb и δr_π на данном участке полета астероида Апофис при измерениях с КА-1 и КА-2 через $\Delta t = 1-12$ ч. Вблизи перигея получается точность навигации $\delta b \approx 0.8-3$ км, $\delta r_\pi \approx 0.7-2.4$ км, $\delta t_\pi \approx 0.3-3.5$ с.

На рис. 2.24 приведена точность навигации δb для измерений с разных КА, $\Delta t = 1$ ч. На данном ближнем к Земле участке навигации измерения с КА-1 и КА-2 или с КА-1 и КА-3 намного лучше, чем измерения с КА-3 и КА-4. Для случая измерений с КА-3 и КА-4, получается вблизи перигея $\delta b \approx 254$ км, $\delta r_\pi \approx 231$ км, $\delta t_\pi \approx 33$ с, а для измерений с КА-1 и КА-2 или с КА-1 и КА-3 получается более высокая точность навигации: $\delta b \approx 1$ км, $\delta r_\pi \approx 0.8$ км, $\delta t_\pi \approx 0.5$ с. На данном участке навигации через полусуток измерений с разных бортов КА получим довольно надежную оценку об отсутствии столкновения Апофиса с Землей в 2029 г.

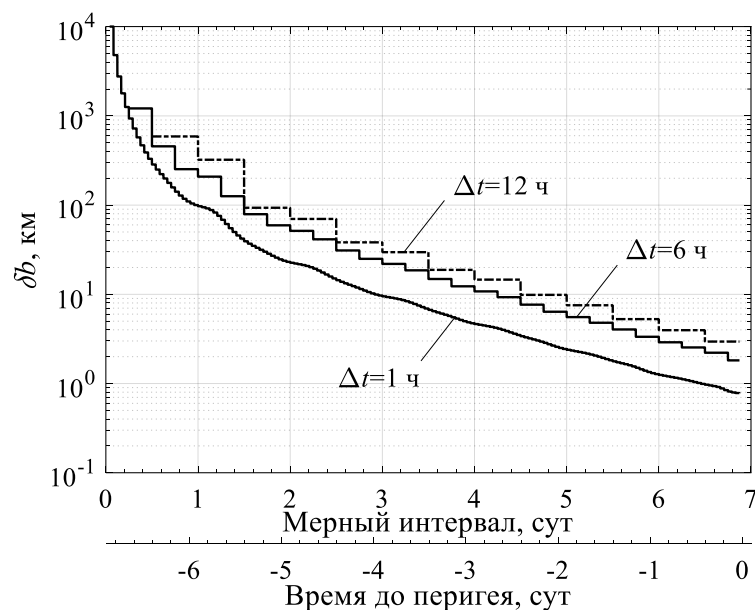


Рис. 2.22. Точность навигации δb на ближнем участке при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{и1} = 0.2''$

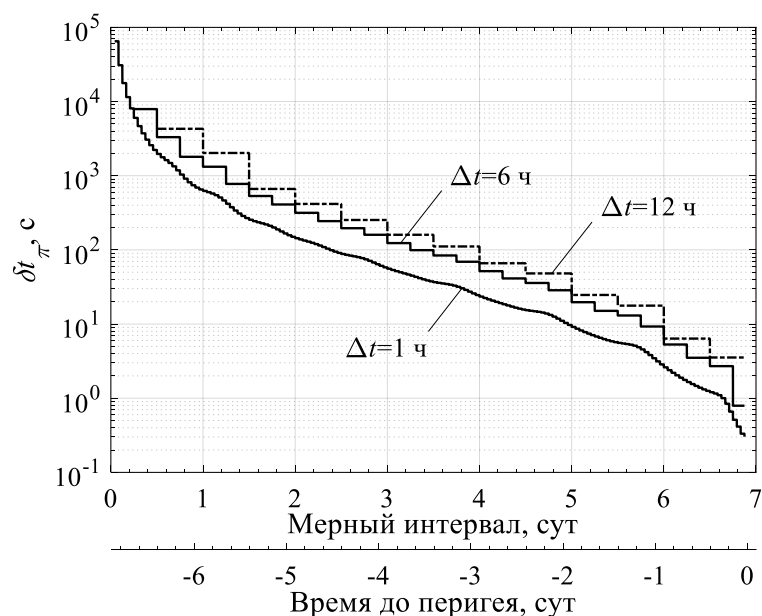


Рис. 2.23. Точность навигации δt_π на ближнем участке при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{ил} = 0.2''$

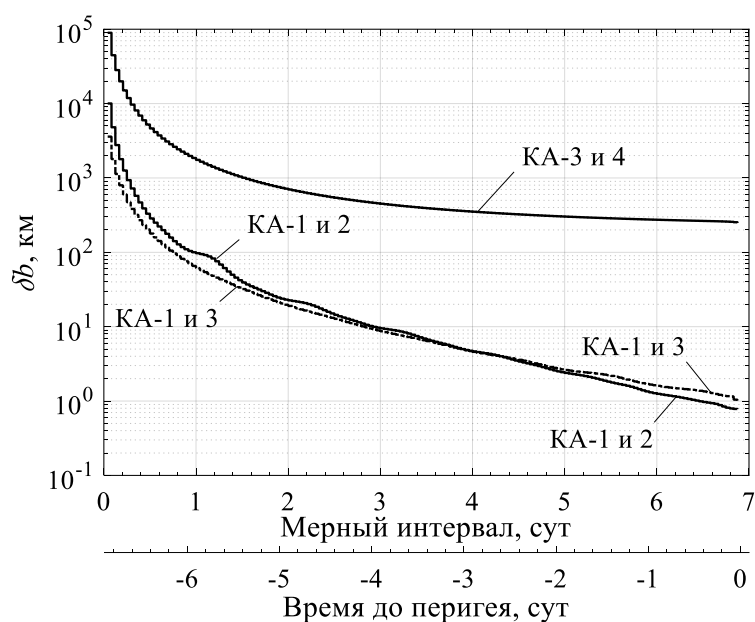


Рис. 2.24. Точность навигации δb на ближнем участке при измерениях с разных КА, $\sigma_{ил}=0.2''$, $\Delta t = 1$ ч

2.1.5. Оценка точностей навигации для астероида Апофис в случае столкновительного варианта орбиты, в 2029-2036 гг.

Аналогично исследована точность навигации системы «Небосвод» для анализа столкновительного варианта орбиты Апофиса на участке его полета после тесного сближения с Землёй в 2029 г. до условного столкновения в 2036 г.

С учетом проведенного в п. 2.1.2 анализа видимости наблюдения астероида Апофис с борта КА системы «Небосвод», когда существуют длительные (течение ~ 2.25 года) зоны невидимости для каждого КА в 2032-2034 г., разделяем траекторию астероида Апофис на четыре участка его наблюдения:

- 1) **дальний** – от начала первого длительного сеанса наблюдения астероида Апофис с борта КА-1 или КА-2 (4 мая 2029 г., примерно 20 сут. после его тесного сближения с Землёй, здесь начальное расстояние от Земли до астероида ~ 10.6 млн. км) и до столкновения Апофиса с Землёй в 2036 г.;
- 2) **средний** – от начала наблюдения 14 июля 2034 г. (это начало второго длительного сеанса наблюдения Апофиса с борта КА-1 или КА-2, здесь астероид находится на 304 млн км (~ 2 а.е.) от Земли) до столкновения астероида Апофис с Землёй в 2036 г.;
- 3) **1^{ый} ближний** – начало наблюдений 14 марта 2036 г. (за месяц до столкновения, начальное расстояние астероида до Земли ~ 16.6 млн км);
- 4) **2^{ой} ближний** – начало наблюдений 7 апреля 2036 г. (за неделю до столкновения, начальное расстояние астероида до Земли ~ 3 млн км).

При анализе точностей навигации на этих четырёх участках наблюдения астероида Апофис с помощью системы «Небосвод» приняты такие же условия, как выше, в 2028-2029 гг.: точность измерения $\sigma_{\text{и1}}=0.2''$, есть случайные и систематические ошибки измерений ($\sigma_{\mu\alpha}=\sigma_{\mu\delta}=\sigma_{\text{и1}}$), ошибки состояния КА на моменты обновления ($\sigma_{r1}=\sigma_{r2}=1$ км, $\sigma_{v1}=\sigma_{v2}=1$ мм/с, $\sigma_{r3}=\sigma_{r4}=5$ км, $\sigma_{v3}=\sigma_{v4}=5$ мм/с), а также ошибки модели движения астероида. Измерения проводятся одновременно с бортов КА-1, 2 или КА-1, 3 или КА-3, 4 – при наличии видимости, через $\Delta t=1-10$ сут. Для столкновительного варианта орбиты астероида определяются точности навигации не только по вектору прицельной дальности в картинной плоскости, перигейному расстоянию, времени прохождения перигея для геоцентрической орбиты в 2036 г., но и по координатам (географическим долготе λ_c и широте φ_c) условной точки падения и времени столкновения с Землёй t_c . Для принятой попадающей в 2036 г. в Землю орбиты Апофиса $r_{\pi 36}=2070.4$ км, при этом для выявления факта

столкновения Апофиса с Землёй в 2036 г. требуется довольно высокая точность δr_π определения перигейного расстояния, она должна удовлетворять условию

$$\delta r_\pi < R_E - r_{\pi 36} = 4307.7 \text{ км.} \quad (2.8)$$

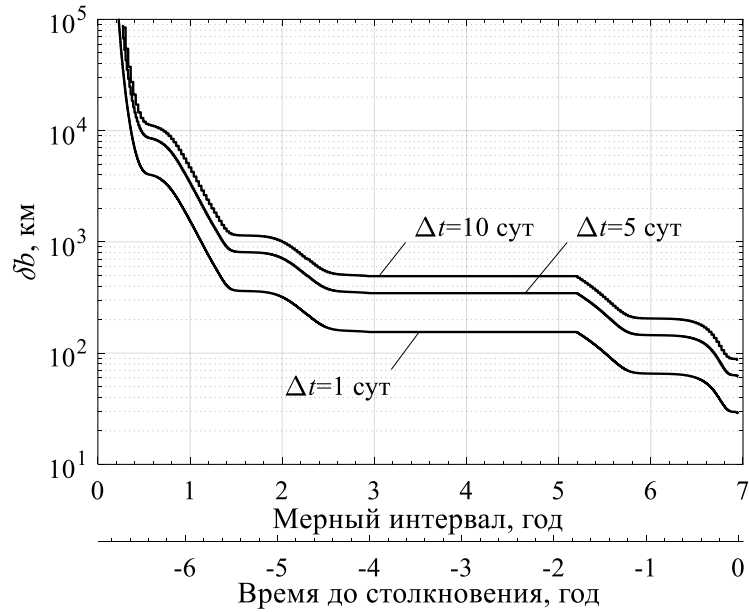


Рис. 2.25. Точность навигации δb на дальнем участке при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{н1} = 0.2''$

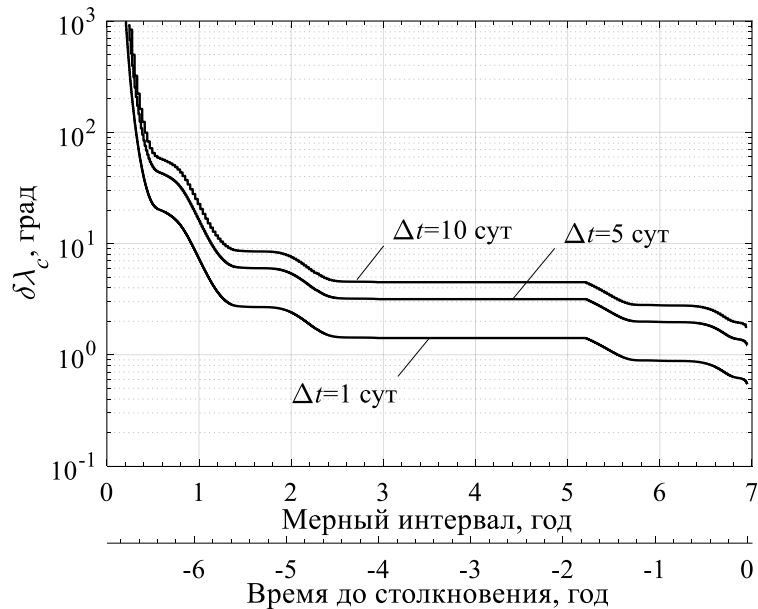


Рис. 2.26. Точность навигации $\delta \lambda_c$ на дальнем участке при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{н1} = 0.2''$

Дальний участок. Полагаем, что здесь измерения проводятся от 0 ч. 4 мая 2029 г. до столкновения Апофиса с Землёй в 2036 г., $\Delta t = 1-10$ сут, $\sigma_{н1} = 0.2''$. Для данного участка полета на рис. 2.25-2.28 приведены точности навигации по

прицельной дальности δb , по долготе $\delta \lambda_c$ и широте $\delta \varphi_c$, по времени столкновения δt_c в зависимости от мерного интервала при измерениях с КА-1 и КА-2. В начале данного участка точность навигации резко улучшается с ростом числа измерений, и через ~ 1 год измерений будет выполняться условие (2.8), при этом будет надежная информация о столкновении Апофиса с Землёй в 2036 г., при этом: $\delta \lambda_c \approx 7-22^\circ$, $\delta \varphi_c \approx 4-10^\circ$, $\delta t_c \approx 95-295$ с.

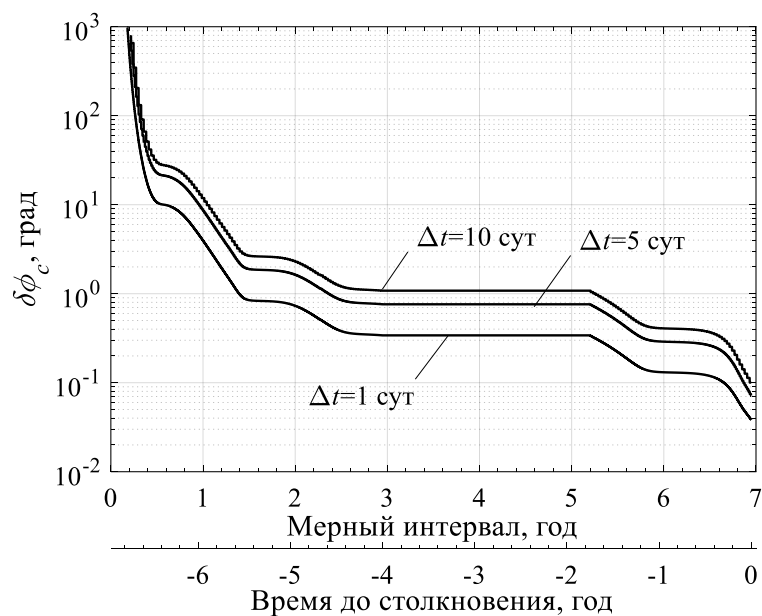


Рис. 2.27. Точность навигации $\delta \varphi_c$ на дальнем участке при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{и1} = 0.2''$

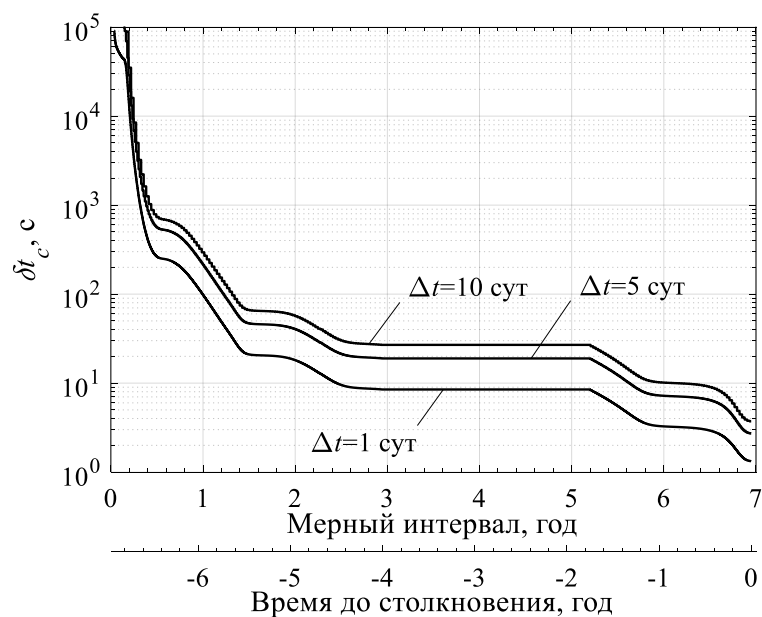


Рис. 2.28. Точность навигации δt_c на дальнем участке при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{и1} = 0.2''$

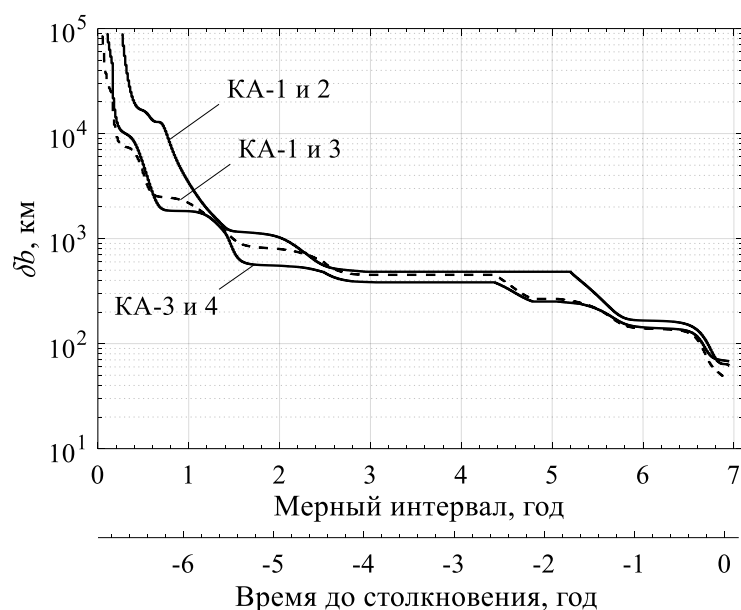


Рис. 2.29. Точность навигации δb на дальнем участке при измерениях с разных КА, $\sigma_{н1} = 0.2''$, $\Delta t = 5$ сут

На рис. 2.29 приведена точность навигации δb для случаев измерений с КА-1 и КА-3 или с КА-3 и КА-4, при $\Delta t = 5$ сут. Видно, что в начале мерной базы измерения с КА-3, 4 или с КА-1, 3 лучше, чем измерения с КА-1, 2. При увеличении времени измерений, в конце данного участка при измерениях с разных КА получаются близкие результаты. Через ~ 1 год измерений, т.е. за ~ 6 лет до столкновения для всех вариантов получается, что $\delta b < 6300$ км, при этом получается надежное предсказание столкновения с Землёй.

Средний участок. Для этого участка полагаем, что измерения выполняются с 14 июля 2034 г. через $\Delta t = 1-10$ сут. На рис. 2.30–2.33 приведены точности навигации δb , по долготе $\delta \lambda_c$ и широте $\delta \varphi_c$ точки падения на Землю, и по времени столкновения δt_c при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{н1} = 0.2''$. Через ~ 0.6 года измерений получаются: $\delta b \approx 2200-6138$ км, $\delta r_\pi \approx 200-1500$ км, $\delta \lambda_c \approx 10-30^\circ$, $\delta \varphi_c \approx 5.5-15.5^\circ$, $\delta t_c \approx 153-430$ с, по которым можно уверенно утверждать, что будет столкновение Апофиса с Землёй в 2036 г. За месяц до столкновения точности навигации становятся лучше: $\delta b \approx 50$ км, $\delta \lambda_c \approx 0.42^\circ$, $\delta \varphi_c \approx 0.24^\circ$, $\delta t_c \approx 11$ с.

Для среднего участка на рис. 2.34 приведена точность навигации δb также для случаев измерений с КА-1 и КА-3 или с КА-3 и КА-4, $\Delta t = 1$ сут. Видно, что

в начале данного участка навигации измерения с КА-1 и КА-2 хуже, чем с бортов КА-3 и КА-4. С накоплением измерений для них получаются близкие точности. Заметим, что в конце этого участка при приближении астероида Апофис к Земле, измерения с КА-1 и КА-2 намного лучше, чем с КА-3 и КА-4.

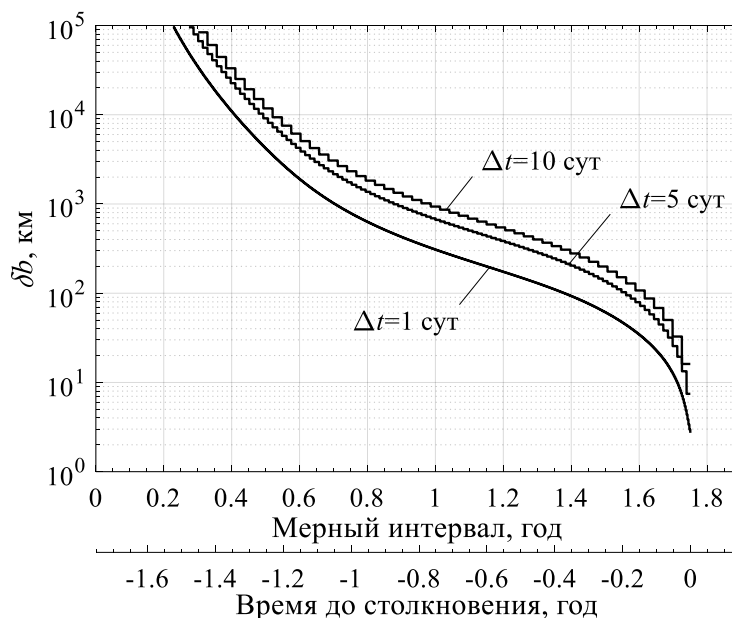


Рис. 2.30. Точность навигации δb на среднем участке при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{н1} = 0.2''$

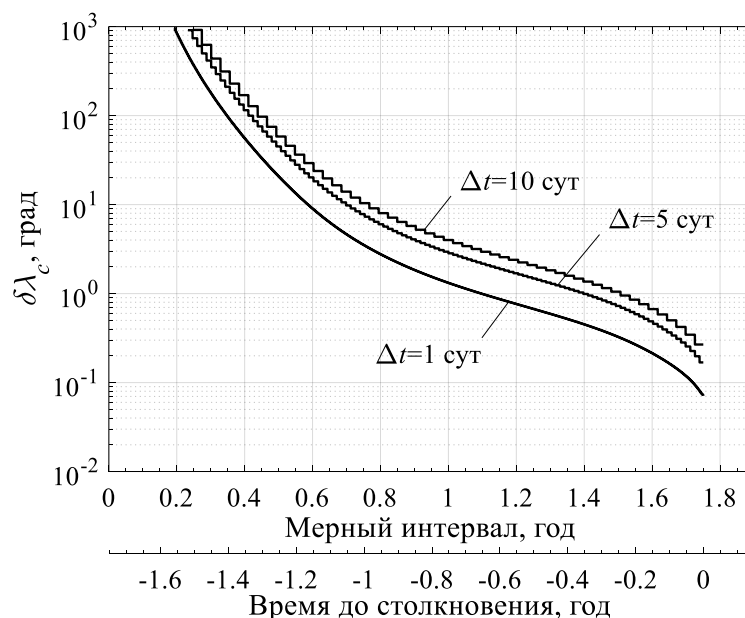


Рис. 2.31. Точность навигации $\delta \lambda_c$ на среднем участке при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{н1} = 0.2''$

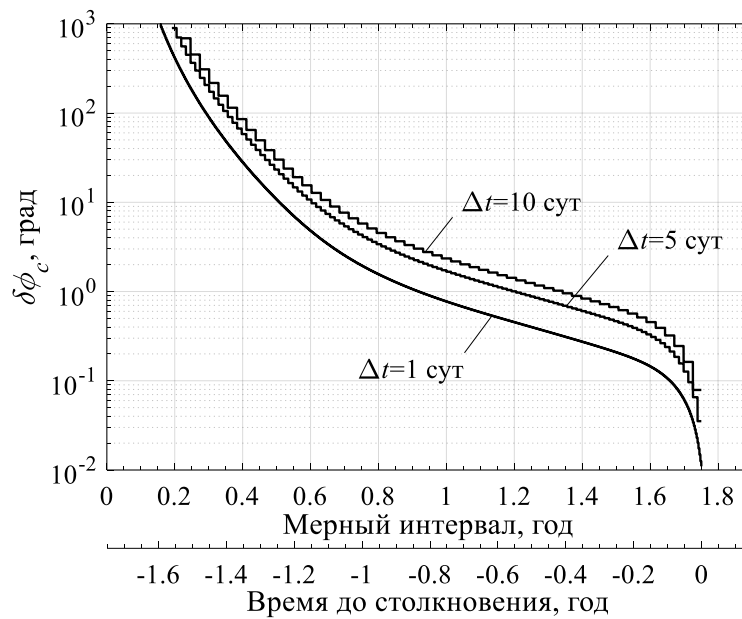


Рис. 2.32. Точность навигации $\delta\phi_c$ на среднем участке при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{н1} = 0.2''$

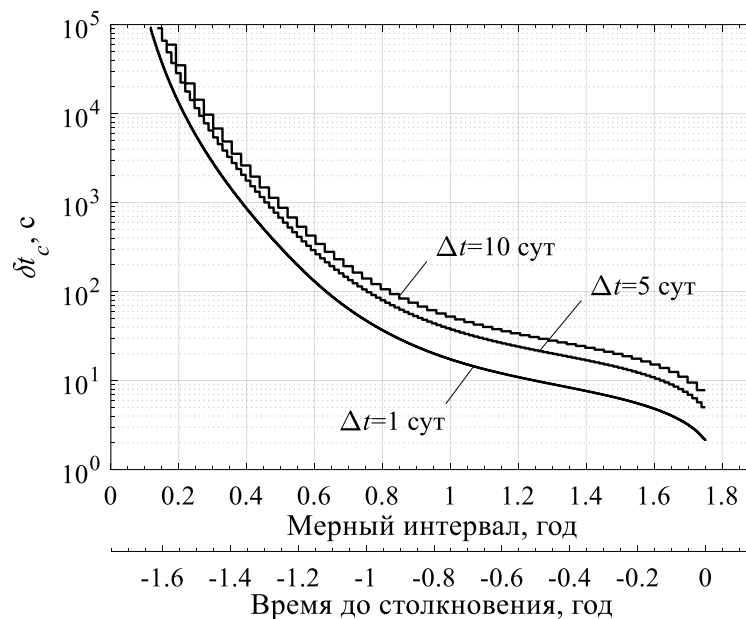


Рис. 2.33. Точность навигации δt_c на среднем участке при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{н1} = 0.2''$

Ближние участки (за месяц-неделю до столкновения). Рассмотрим два ближних участка наблюдения. Начало первого ближнего участка за месяц до столкновения, наблюдения выполняются с 14 марта 2036 г., при этом начальное расстояние от астероида до Земли составляет 16.6 млн. км. Начало второго ближнего участка за неделю до столкновения.

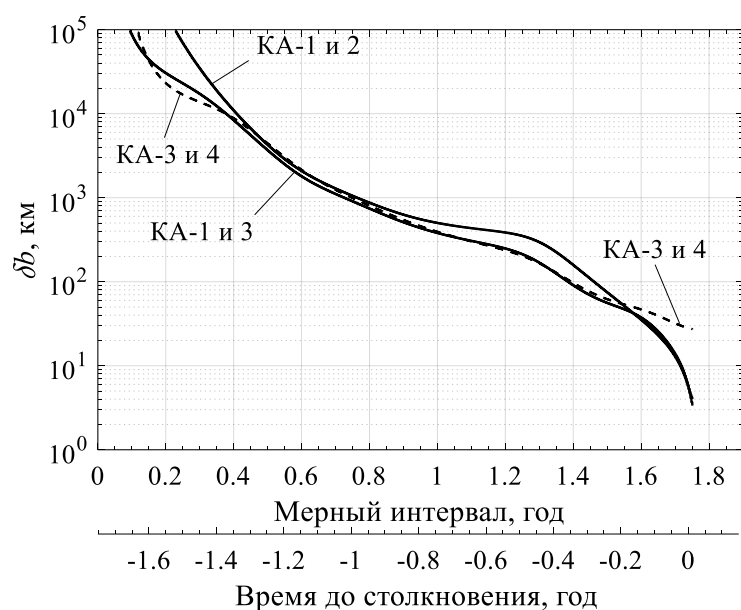


Рис. 2.34. Точность навигации δb на среднем участке при измерениях с разных КА, $\sigma_{\text{ил}}=0.2''$, $\Delta t = 1$ сут

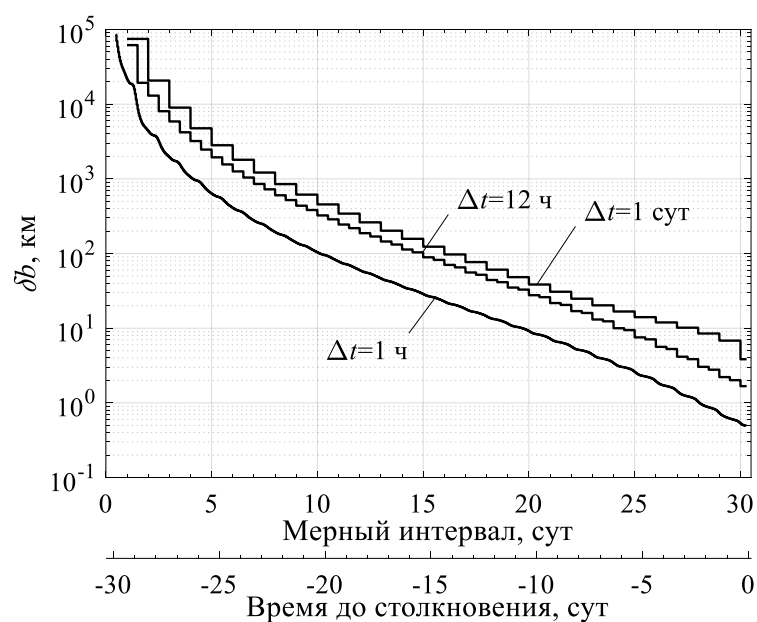


Рис. 2.35. Точность навигации δb на $1^{\text{ом}}$ ближнем участке (начало - за месяц до столкновения) при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{\text{ил}}=0.2''$

На рис. 2.35-2.38 приведены точности навигации δb , по долготе $\delta \lambda_c$ и широте $\delta \varphi_c$ точки падения на Землю и по времени столкновения δt_c на $1^{\text{ом}}$ ближнем участке навигации при измерениях с КА-1 и КА-2 через $\Delta t = 1$ ч-1 сут, $\sigma_{\text{ил}}=0.2''$. Получается, что за 5 сут измерений точность навигации будет достаточной для проверки условия (2.8). За неделю до столкновения можно

достаточно точно предсказать место и время падения на Землю, $\delta\lambda_c < 1^\circ$ (~ 100 км на поверхности Земли) и $\delta t_c \leq 3$ мин. На рис. 2.39 представлена точность навигации δb для измерений с КА-1 и КА-3 или с КА-3 и КА-4 через $\Delta t = 1$ ч. В наихудшем случае измерений, с КА-3 и КА-4, точность навигации составляет $\delta b \approx 78$ км, $\delta\lambda_c \approx 0.45^\circ$, $\delta\varphi_c \approx 0.1^\circ$, $\delta t_c \approx 1.5$ с.

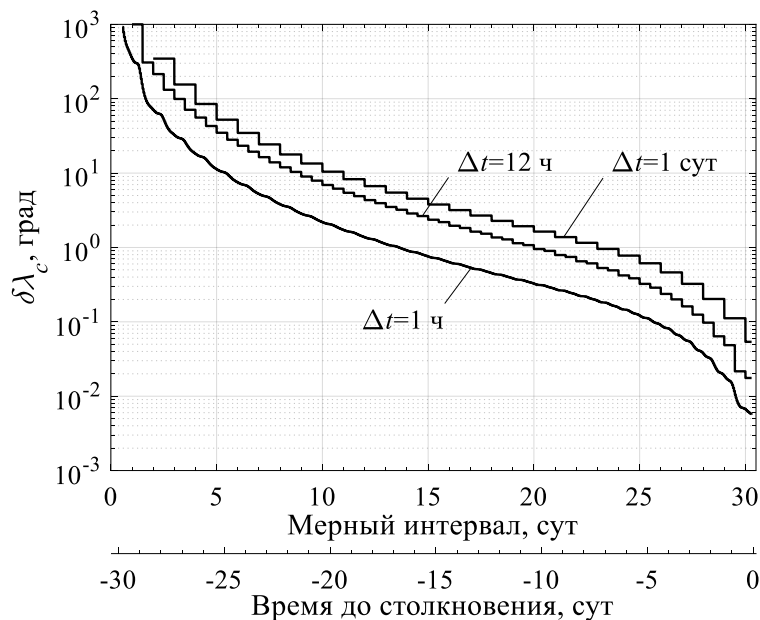


Рис. 2.36. Точность навигации $\delta\lambda_c$ на 1^{ом} ближнем участке (начало - за месяц до столкновения) при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{ил} = 0.2''$

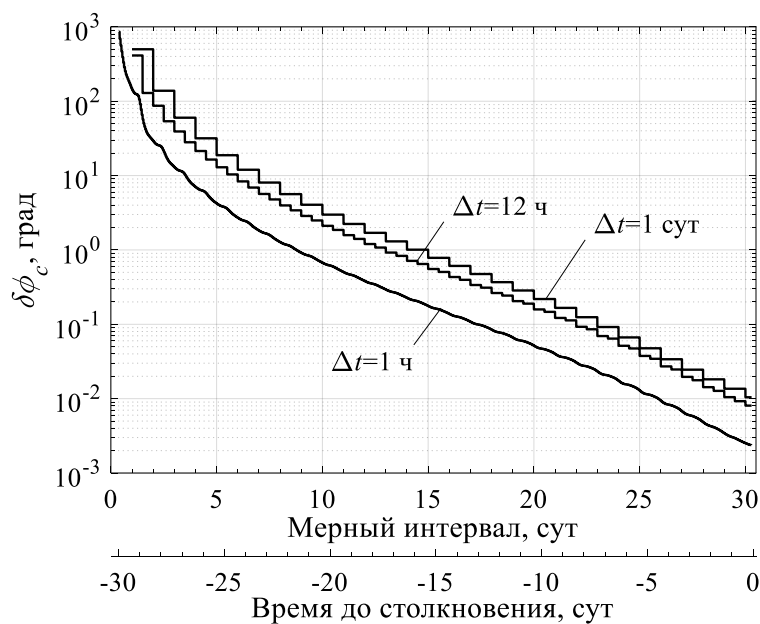


Рис. 2.37. Точность навигации $\delta\varphi_c$ на 1^{ом} ближнем участке (начало - за месяц до столкновения) при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{ил} = 0.2''$

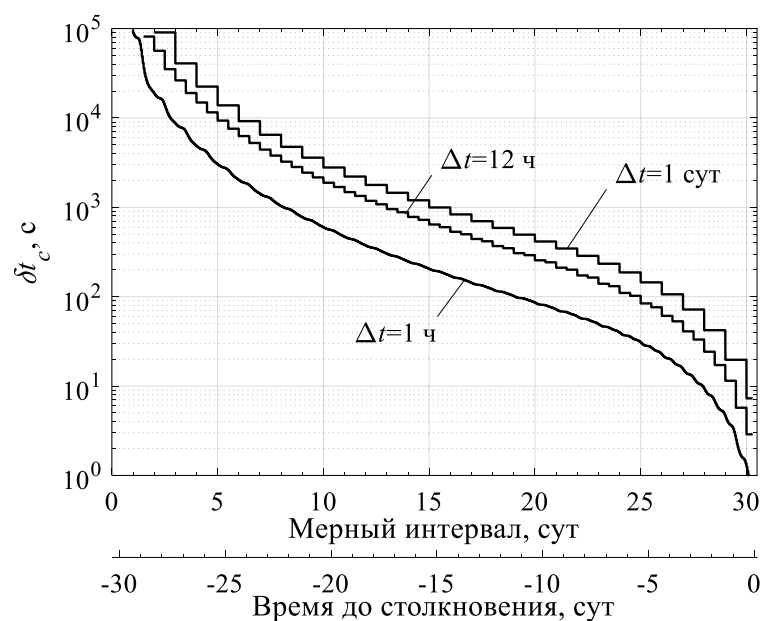


Рис. 2.38. Точность навигации δt_c на 1^{ом} ближнем участке (начало - за месяц до столкновения) при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{ил} = 0.2''$

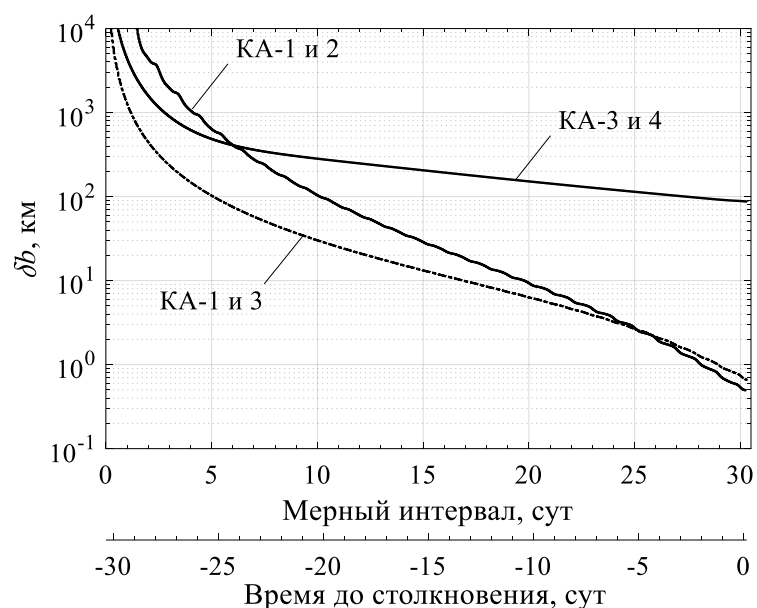


Рис. 2.39. Точность навигации δb на 1^{ом} ближнем участке (начало - за месяц до столкновения) при измерениях с разных КА, $\sigma_{ил}=0.2''$, $\Delta t = 1$ ч

Аналогично исследована точность навигации для 2^{ого} ближнего участка навигации (начало - за неделю до столкновения) для случая $\sigma_{ил}=0.2''$, $\Delta t = 1$ ч-12 ч, результаты приведены на рис. 2.40-2.44. При измерениях с КА-1 и КА-2 получаются достаточно высокие точности навигации. Так, за 2 сут до столкновения: $\delta b \approx 2-8$ км, $\delta \lambda_c \approx 0.06-0.1^\circ$, $\delta \varphi_c \approx 0.008-0.03^\circ$, $\delta t_c \approx 10-26$ с. Для

подтверждения факта столкновения с Землёй требуются лишь 2-3 часа измерений, чтобы точность определения параметров орбиты Апофиса удовлетворяла условию (2.8).

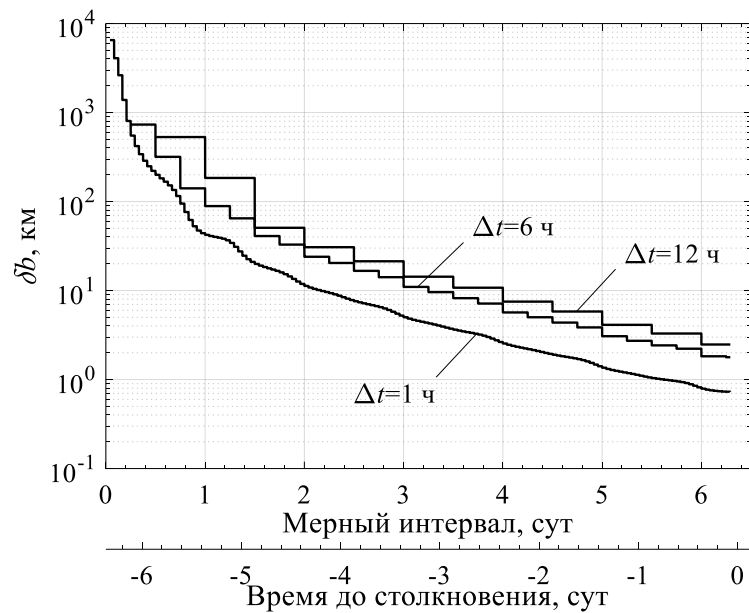


Рис. 2.40. Точность навигации δb на 2^{ом} ближнем участке (начало - за неделю до столкновения) при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{и1}=0.2''$

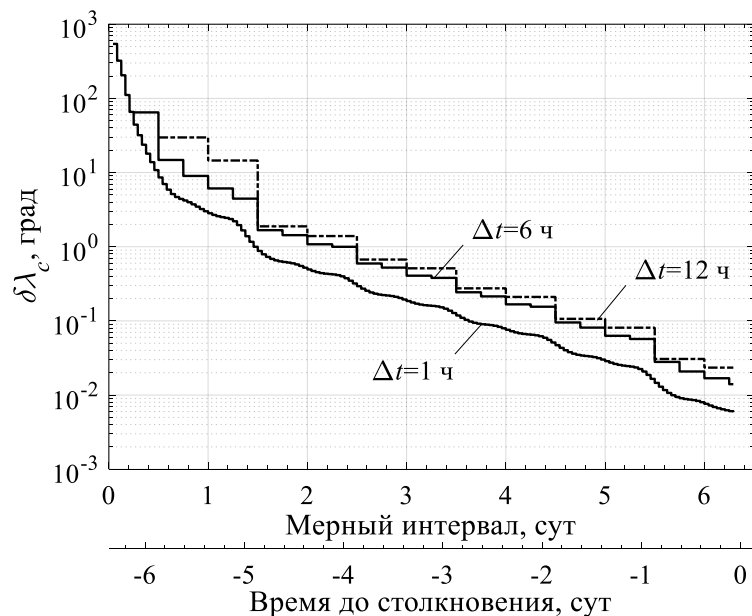


Рис. 2.41. Точность навигации $\delta \lambda_c$ на 2^{ом} ближнем участке (начало - за неделю до столкновения) при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{и1}=0.2''$

Для варианта измерений с КА-1 и КА-3 на втором ближнем участке, при $\Delta t=1$ ч, точность навигации δb перед столкновением не хуже 1 км (см. рис. 2.44),

точности по географическим координатам точки падения на Землю составляют $\delta\lambda_c \approx 0.006^\circ$, $\delta\varphi_c \approx 0.005^\circ$, по времени $\delta t_c \approx 0.8$ с. А при измерениях с борта КА-3 и КА-4 на этом же участке через $\Delta t = 1$ ч, точности навигации намного хуже, они составляют $\delta b \approx 230$ км, $\delta\lambda_c \approx 1.3^\circ$, $\delta\varphi_c \approx 0.4^\circ$, $\delta t_c \approx 5$ с.

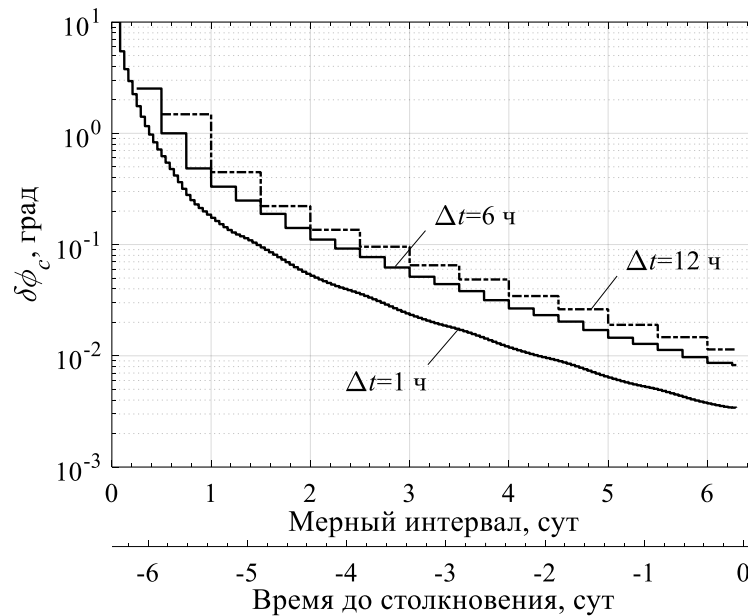


Рис. 2.42. Точность навигации $\delta\varphi_c$ на 2^{ом} ближнем участке (начало - за неделю до столкновения) при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{и1}=0.2''$

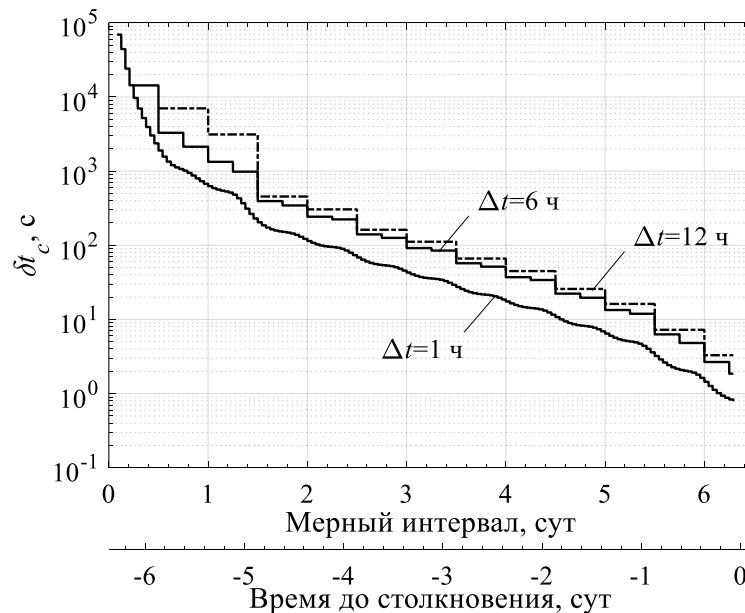


Рис. 2.43. Точность навигации δt_c на 2^{ом} ближнем участке (начало - за неделю до столкновения) при измерениях с КА-1 и КА-2, $\sigma_{и1}=0.2''$

Таким образом, проведенный сравнительный анализ точности навигации

при измерениях с бортов КА-1 и КА-2 или КА-1 и КА-3 или КА-3 и КА-4 на дальнем, среднем и ближних участках показывает, что измерения с КА-3 и КА-4 на дальнем участке лучше, чем с КА-1 и КА-2, а для ближних участков измерения с КА-1 и КА-2 лучше, чем с КА-3 и КА-4.

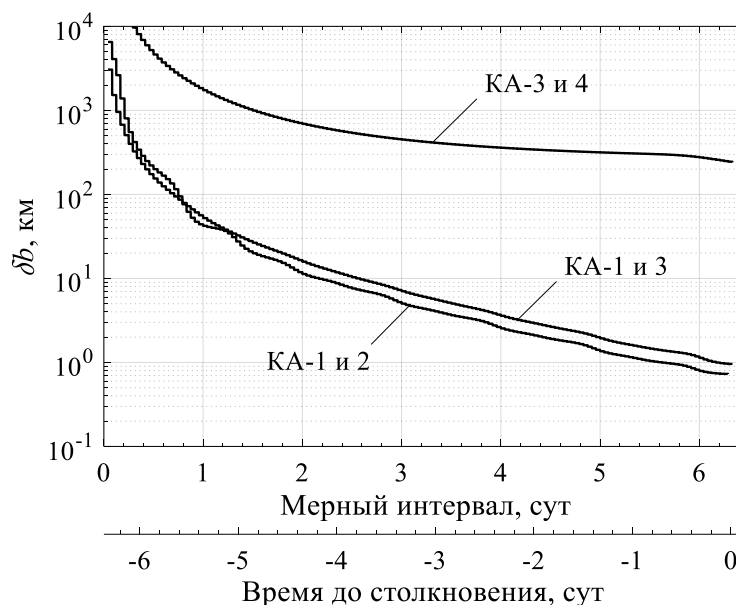


Рис. 2.44. Точность навигации δb на 2^{ом} ближнем участке (начало - за неделю до столкновения) при измерениях с разных КА, $\sigma_{\text{ил}}=0.2''$, $\Delta t=1$ ч

2.1.6. Выводы по разделу 2.1

Выполнен анализ навигационных характеристик при космических измерениях астероида Апофис с помощью системы «Небосвод», как для пролетного, так и для попадающего в 2036 г. в Землю вариантов орбиты. Анализ видимости Апофиса показал, что она значительно ограничена засветкой Солнцем, на участке полета Апофиса в 2028-2029 гг. для каждого КА системы «Небосвод» присутствует зона невидимости продолжительностью примерно месяц, а на участке его полета в 2029-2036 гг. для каждого КА есть зона невидимости в течение ~ 2.25 года в 2032-2034 гг. из-за засветки Солнцем.

Рассмотрены два метода обработки навигационных измерений – классический метод наименьших квадратов без уточнения мешающих параметров, и метод мешающих параметров с их уточнением. Для каждого из этих методов обработки измерений использованы два метода оценки точностей

определения орбиты астероида: аналитический метод ковариационного анализа, и численный метод Монте-Карло. Оценка точностей навигации получена для трёх угловых точностей 1", 0.2" и 0.02". Получено, что точности навигации для аналитического метода и метода Монте-Карло близки друг к другу.

Проанализировано влияние на точность навигации ошибок измерений и ряда мешающих факторов, в том числе систематических ошибок измерений, ошибок модели движения астероида, ошибок обновления состояния КА, а также априорной информации о начальном состоянии астероида. Показано, что применение уточнения мешающих параметров позволяет уменьшить влияние исходных ошибок знания этих параметров на точность навигации по сравнению со случаем без их уточнения.

Для астероида Апофис получены оценки точностей навигации – по прицельной дальности, перигейному расстоянию и времени прохождения перигея, а также по географическим координатам (долготе и широте) точки падения на Землю, времени столкновения для случая наличия ошибок измерений и мешающих параметров. Получаются довольно хорошие точности навигации системой «Небосвод» на разных участках измерений Апофиса. Так, для модельной столкновительной орбиты астероида Апофис после измерений в течение 1 года с помощью системы «Небосвод», уже за ~ 6 лет до подлета к Земле будем иметь надежную информацию о столкновении Апофиса с Землёй.

Выполнен сравнительный анализ точности навигации при разных наборах измерений: с КА-1, 2 или КА-1, 3, или КА-3, 4; Измерения с КА-3 и КА-4 на дальнем от Земли участке движения астероида дают лучшую точность навигации, чем с КА-1 и КА-2. Для ближних к Земле участков измерения с КА-1 и КА-2 лучше по точности навигации, чем измерения с КА-3 и КА-4.

2.2. Анализ задачи навигации при наблюдении астероида 2008 TC3

Большинство падающих в настоящее время на Землю небесных тел имеют более мелкие размеры, чем Апофиса. Для выявления возможности обнаружения

и наблюдения таких слабых объектов с помощью системы «Небосвод» в данной работе также рассмотрена задача навигации упавших на Землю астероида 2008 TC3 и Челябинского метеороида. На основании опубликованных данных об орбитах и физических свойствах обоих объектов, сделан расчет номинальных орбит и моделирование их наблюдения с борта КА системы «Небосвод». Ниже представлены результаты по анализу навигации при приближении к Земле астероида 2008 TC3 (см. п. 2.2) и Челябинского метеороида (см. п. 2.3).

2.2.1. Анализ номинального движения астероида 2008 TC3

Астероид 2008 TC3 стал первым небесным телом, чье падение на Землю было предсказано [71, 87, 89]. Он был открыт в обсерватории Маунт-Леммон в Аризоне (UTC–7:00) США, в 6:39 UTC, 6 октября 2008 г. (~ за 20 часов до столкновения) и затем был обнаружен астрономами в 26 обсерваториях мира. Последние наблюдения астероида 2008 TC3 проводились перед его входом в тень Земли от Солнца, за час до столкновения. Утром, около 5 часов по местному времени 7 октября астероид 2008 TC3 вошел в атмосферу и разрушился в Судане (UTC+2:00) в Восточной Африке [71, 87, 89]. В этот период, за ~19 часов астрономами получены более 840 наблюдений, среди них около 560 наблюдений получены из США, а около 260 – из ГАО РАН [71].

По результатам наблюдений астрономами были определены его орбита, а также физические свойства (см. табл. 2.4). Первоначальные результаты изучения астероида 2008 TC3 были представлены в работе [87], в которой даны элементы его гелиоцентрической орбиты перед столкновением. На рис. 2.45 приведены расчетные орбиты астероида 2008 TC3 и Земли в 2005-2008 гг. По характеристикам орбиты астероид 2008 TC3 принадлежит к группе Аполлона [71]. Масса астероида оценена в ~ 80 тонн, диаметр ~5 м, плотность $\rho_A \sim 1.5$ г/см³, альбеда $A_g \sim 0.1 \pm 0.03$, абсолютная зв.в. $m_a \sim 30.4^m \pm 0.03^m$ [87]. В таблице 2.5 приведены рассчитанные нами элементы геоцентрической орбиты и параметры движения астероида 2008 TC3 при приближении к Земле и столкновении с поверхностью Земли (без учета атмосферы). На рис. 2.46

приведена трасса астероида 2008 TC3 при подлете к Земле.

Таблица 2.4. Физические параметры и элементы достолкновительных орбит астероида 2008 TC3 и Челябинского метеороида

Параметры	2008 TC3		ЧМ	
a , а.е.	1.308201 ± 0.000009	[87]	1.8804986 ± 0.068	[24, 80]
e	0.312065 ± 0.0000057		0.608988648 ± 0.017	
i , °	2.54220 ± 0.000041		5.938266 ± 0.427	
ω , °	234.44897 ± 0.000076		108.926276 ± 0.536	
Ω , °	194.101138 ± 0.0000018		326.445884 ± 0.002	
M_0 , °	330.7541 ± 0.00014		16.872985 ± 1.069	
T_0	2008.10.07.0 ТТ		2013.02.15.0 ТТ	
T , г.	~ 1.50		~ 2.58	
$2R_A$, м	4.8 ± 0.8	[71, 87, 89]	~ 19.8	[24, 74, 80, 97]
ρ_A , г/см ³	~ 1.5		~ 3.1	
m , кг	$\sim 8 \times 10^4$		$\sim 1.3 \times 10^7$	
A_g	0.1 ± 0.03		—	
m_a	$30.4^m \pm 0.03$		—	
t_c , UTC	$\sim 02:46$, 7.10.2008 г.		$\sim 3:20$, 15.02.2013 г.	

Таблица 2.5. Расчетные параметры и элементы геоцентрических орбит астероида 2008 TC3 и Челябинского метеороида

Параметры	2008 TC3	ЧМ
p , км	14929.3183140273	34944.5118387035
e	1.58538486237278	4.80433591191573
i , °	23.4201053406622	124.695315511901
ω , °	148.698137358548	104.337317967295
Ω , °	330.066135194448	334.186497898041
t_π , ТТ	2:50:57.563, 07.10.2008 г.	3:23:40.367, 15.02.2013 г.
r_π , км	5774.5	6020.4
b_0 , км	12135.5	7436.4
$b_{\text{пред}}$, км	12899.0	7801.9
V_∞ , км/с	6.36	15.87
t_c , ТТ	2:46:37.715, 07.10.2008 г.	3:21:44.640, 15.02.2013 г.
(λ_c, φ_c) , °	(31.19, 20.97)	(60.05, 54.95)
V_c , км/с	12.46	19.93
$A_z(t_c)$, °	101.3	279.0

$t_c - t_{\text{атм}}, \text{с}$	22.2	16.4
$V_{\text{атм}}, \text{км/с}$	12.38	19.88
$A_z(t_{\text{атм}}), ^\circ$	100.4	282.6
$\theta_{\text{атм}}, ^\circ$	-22.0	-19.0

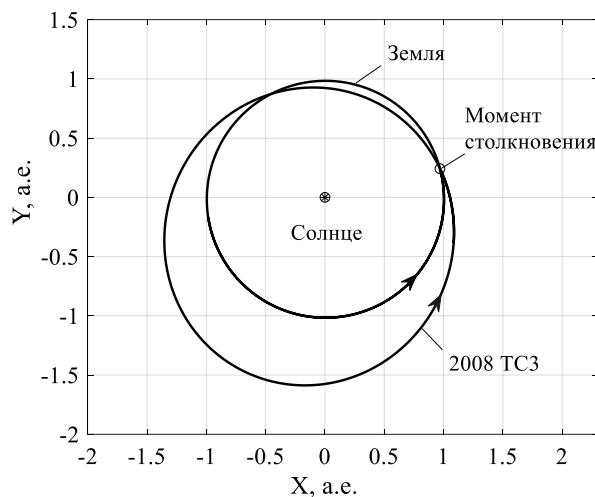


Рис. 2.45. Орбиты астероида 2008 ТС3 и Земли в 2005-2008 гг.

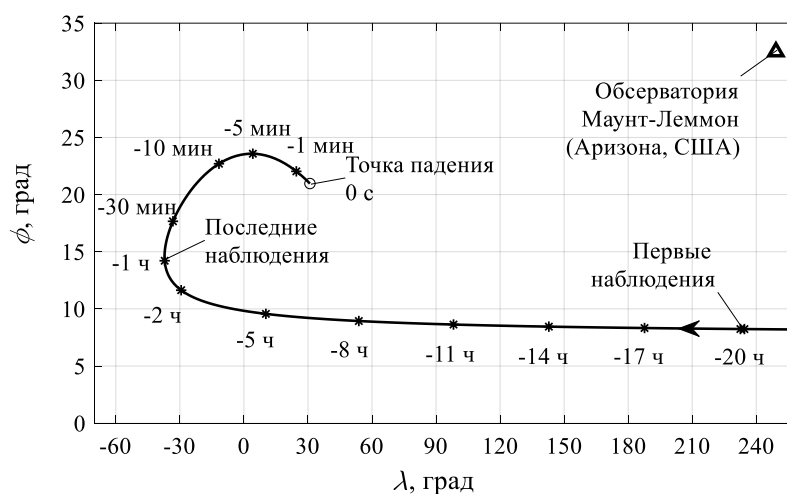


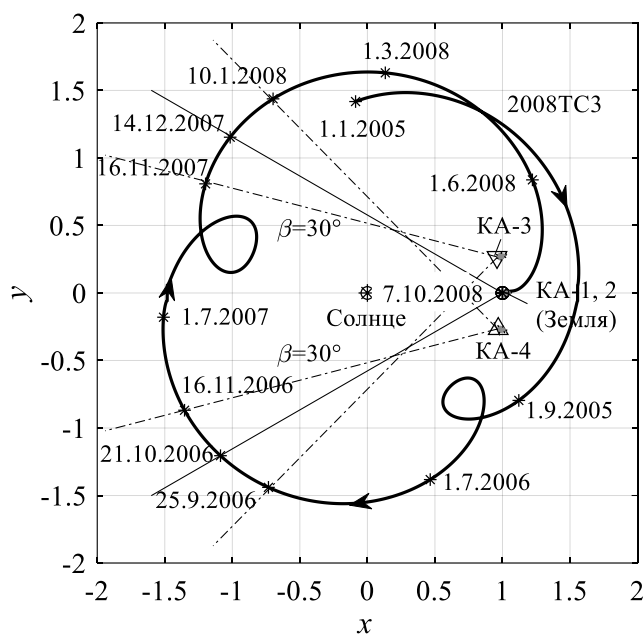
Рис. 2.46. Трасса астероида 2008 ТС3 при подлете к Земле

2.2.2. Анализ видимости при наблюдении астероида 2008 ТС3

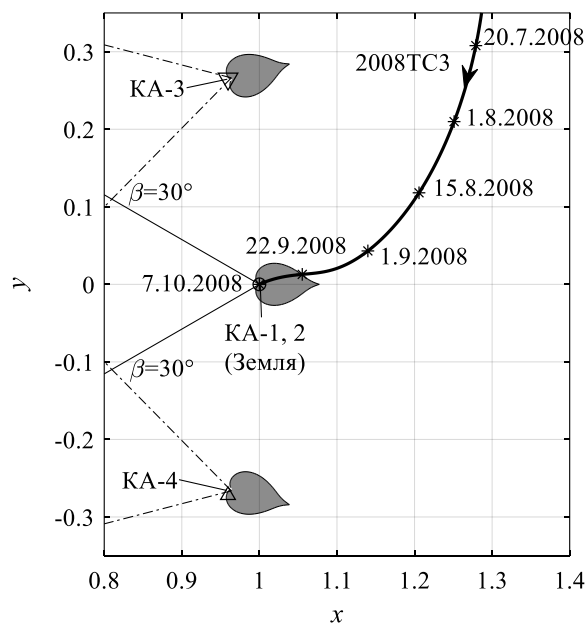
При анализе видимости астероида 2008 ТС3 с помощью системы «Небосвод» сначала определяем доступную область его наблюдения в окрестности каждого КА, для которого проникающая сила телескопов принята $m_{\text{пред}}=25^{\text{m}}$. Абсолютная зв.в. астероида 2008 ТС3 принята $m_a=30.4^{\text{m}}$.

На рис. 2.47а приведена орбита астероида 2008 ТС3 относительно системы Солнце-Земля во вращающейся СК с 01.01.2005 г. до его столкновения в

течение ~ 3.8 года (2005-2008 гг.). Здесь также указаны линии визирования из КА при $\beta=30^\circ$, они выделяют зоны невидимости из-за засветки Солнцем. Часть рис. 2.47а, в увеличенном масштабе, представлена на рис. 2.47б. Здесь теневые области соответствуют доступным зонам наблюдения с борта КА системы «Небосвод». Доступная область для каждого КА имеет форму «сердца». Предельная дальность наблюдения $r_{\max} \sim 11.5$ млн км (0.077 а.е.). На этом рис. 2.47б представлена орбита астероида за последние ~ 3 месяца его полета до столкновения с Землёй. Видим, что астероид 2008 ТС3 приближается к Земле с её теневой стороны и за последние ~ 15 суток он входит в доступную зону видимости для КА-1 и КА-2 системы «Небосвод», и проходит далеко от доступных зон видимости для КА-3 и КА-4.



(а). 2005-2008 гг.



(б). за ~ 3 месяца до столкновения

Рис. 2.47. Орбита астероида 2008 ТС3 и теневые зоны видимости КА

Зоны видимости для КА-1 и КА-2 близки друг к другу, для КА-1 – с 10:30, 22.09.2018 г. до столкновения, а для КА-2 – с 8:00, 22.09.2018 г. до столкновения. Длительность сеанса ~ 14.7 сут. В начале сеанса наблюдения расстояние от астероида до Земли составляет ~ 8.3 млн км (~ 0.055 а.е.). В этих сеансах наблюдения существуют зоны невидимости из-за затенения Землёй – каждый день. Продолжительностью каждой зоны меньше 1 часа, для КА-1 они

расположены в диапазоне времени с 8:30 до 10:30. А для КА-2 зоны невидимости из-за затенения Землёй присутствуют с 2:00 до 4:00.

Минимальное расстояние от астероида 2008 TC3 до КА-3 и КА-4 в течение ~4 лет (2005-2008 гг.) составляет ~40 млн км (0.267 а.е.), что значительно превышает их предельную дальность наблюдения $r_{\max}$ (~11.5 млн км), при этом нет видимости астероида 2008 TC3 для КА-3 и КА-4. Несомненно, что, если у астероида 2008 TC3 был бы больше размер, тогда было бы доступно наблюдение с борта КА-3 или КА-4. По расчетам, для того, чтобы была видимость для КА-3, астероид 2008 TC3 должен был иметь абсолютную зв.в. менее 26.2^m , и его диаметр должен бы более 24 м. Аналогично, при наблюдении астероида с борта КА-4 астероид 2008 TC3 должен был иметь размер более 38 м, абсолютная зв.в. при этом менее 25.2^m .

2.2.3. Оценка точностей навигации для астероида 2008 TC3

В соответствии с анализом видимости при наблюдении астероида 2008 TC3 с помощью системы «Небосвод», существуют зоны видимости за последние ~14.7 сут. до столкновения - для КА-1 и КА-2. Рассмотрим точность навигации на данном мерном интервале. При этом полагаем, что измерения проводятся с бортов КА-1 и КА-2 с начального момента входа астероида в зону видимости, через $\Delta t=1$ ч; 6 ч; 12 ч. На каждый момент измерения есть ошибки положения КА-1 и КА-2, со СКО $\sigma_r=1$ км, угловая точность измерения $\sigma_{\text{ил}}=0.2''$. Предполагается наличие также систематических ошибок измерений ($\sigma_{\mu\alpha}=\sigma_{\mu\delta}=\sigma_{\text{ил}}$) и ошибок модели движения астероида. Уточняются мешающие параметры. Методом ковариационного анализа получены оценки точностей навигации по прицельной дальности δb , по координатам точки падения $\delta\lambda_c$, $\delta\varphi_c$ и по времени столкновения δt_c , приведенные на рис. 2.48-2.51. Требуемая точность определения перигейного расстояния астероида 2008 TC3 для выявления факта его столкновения с Землёй, с учетом r_π (Табл. 2.5), составляет:

$$\delta r_\pi < R_E - r_\pi = 603.6 \text{ км.} \quad (2.9)$$

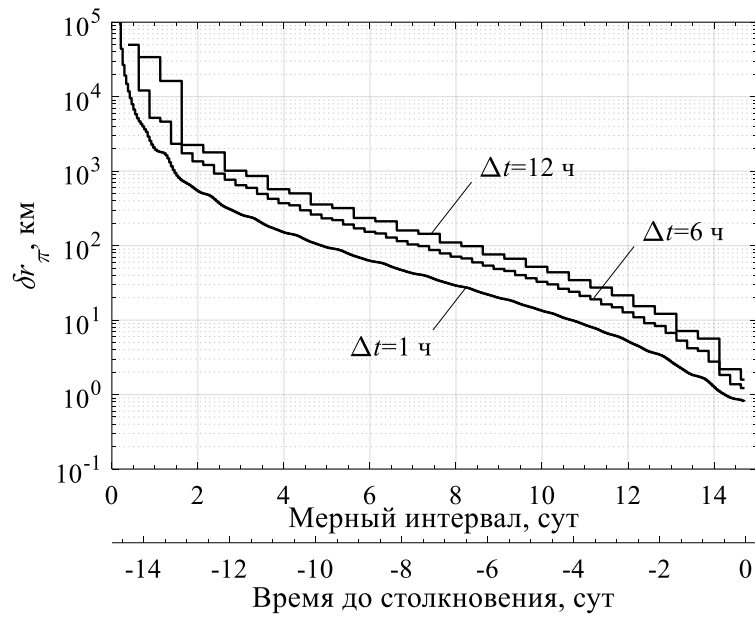


Рис. 2.48. Точность навигации δr_π при измерениях астероида 2008 TC3 с КА-1 и КА-2, $\sigma_{и1}=0.2''$

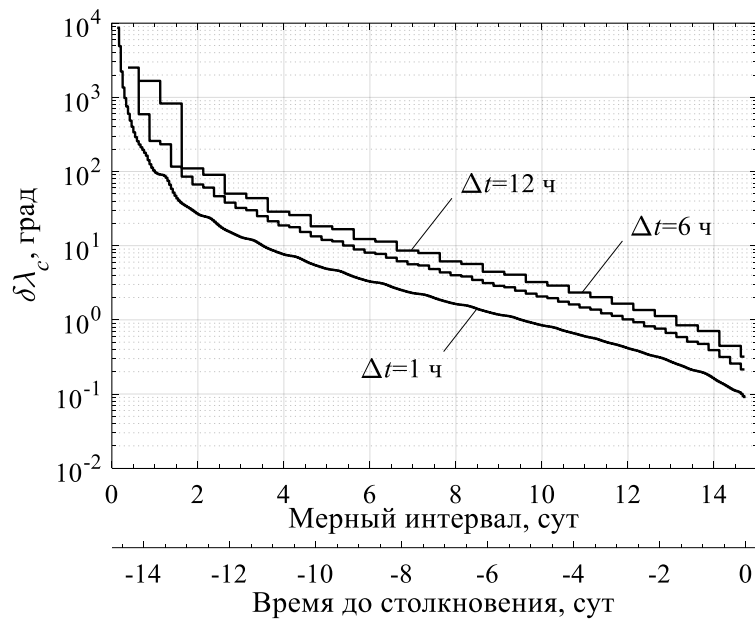


Рис. 2.49. Точность навигации $\delta \lambda_c$ при измерениях астероида 2008 TC3 с КА-1 и КА-2, $\sigma_{и1}=0.2''$

Как видно из рис. 2.48, условие (2.9) будет выполняться после обработки измерений с КА-1 и КА-2 в течение первых 4 сут, т.е. необходимо не более 4 сут измерений с помощью системы «Небосвод», чтобы уверенно утверждать, что астероид 2008 TC3 столкнётся с Землёй. Получены точности навигации за 1 сут до столкновения: $\delta r_\pi \approx 1-6$ км, $\delta \lambda_c \approx 0.2-0.8^\circ$, $\delta \rho_c \approx 0.01^\circ$ и $\delta t_c \approx 2-12$ с, т.е. можно

достаточно точно прогнозировать место и время падения данного астероида на Землю. Отметим, что, для точностей оценки параметров орбиты астероида 2008 TC3 на основе фактических наземных наблюдений астрономов (см. табл. 2.4) за последние 20 ч до столкновения, получается $\delta r_{\pi} \approx 1300$ км, что хуже, чем точность навигации с помощью системы «Небосвод».

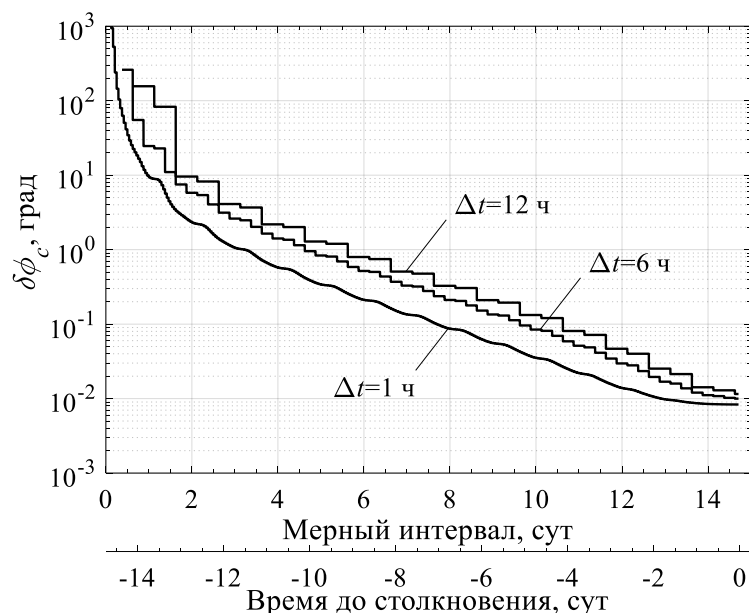


Рис. 2.50. Точность навигации $\delta\phi_c$ при измерениях астероида 2008 TC3 с КА-1 и КА-2, $\sigma_{ил}=0.2''$

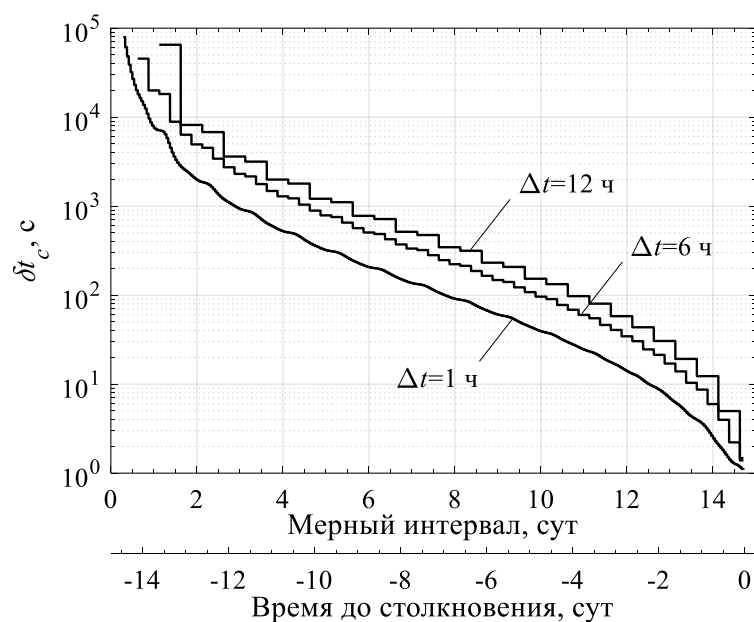


Рис. 2.51. Точность навигации δt_c при измерениях астероида 2008 TC3 с КА-1 и КА-2, $\sigma_{ил}=0.2''$

2.2.4. Выводы по разделу 2.2

Выполнен анализ видимости и точности навигации при наблюдении астероида 2008 TC₃ с борта КА системы «Небосвод». Анализ видимости показывает, что для наблюдения астероида 2008 TC₃ доступная предельная дальность с бортов КА-1 и КА-2 системы «Небосвод» составляет примерно 0.077 а.е. Астероид 2008 TC₃ приближает к Земле с её теневой стороны, для КА-1 и КА-2 существуют зоны видимости на последних ~15 сут до столкновения, а для КА-3 и КА-4 нет видимости на рассмотренном мерном интервале в 2005-2008 гг. Для того, чтобы была видимость для КА-3 и КА-4, соответственно размер астероида 2008 TC₃ должен бы более 24 м и 38 м.

Анализ показывает, что за последние ~15 сут наблюдения астероида 2008 TC₃ с бортов КА-1 и КА-2 получается довольно высокая точность навигации при угловой точности $\sigma_{ил}=0.2''$. Для того, чтобы уверенно утверждать, что астероид 2008 TC₃ столкнётся с Землёй, достаточно не более 4 сут измерений системой «Небосвод».

2.3. Анализ задачи навигации для Челябинского метеороида

Челябинский метеороид (ЧМ) неожиданно вошел в атмосферу около 8 часов утра по местному времени (UTC+5:00) 15 февраля 2013 года, имея вид яркого болида и сопровождаясь взрывом [24, 74, 80, 97]. Мощность взрыва оценивалась в 300-500 килотонн ТНТ, диаметр ЧМ – в 19.8 м. Падение Челябинского метеороида считается самым крупным за последние 100 лет после Тунгусского события (1908 г.). Челябинское событие привлекло к себе большое внимание, поскольку впервые столкновение с довольно крупным небесным телом было детально задокументировано. Данное событие имеет важное значение с точки зрения оценки астероидно-кометной опасности, поиска средств и методов противодействия. Предварительное исследование падения Челябинского метеороида изложено в специальном сборнике научных трудов института динамики геосфер (ИДГ) РАН [24] и в работах [74, 80, 97].

2.3.1. Номинальная траектория Челябинского метеороида

Наши расчеты опираются на основные факты о Челябинском метеороиде, которые приведены выше в таблице 2.4, включая полученную астрономами орбиту ЧМ. На основе этих данных была вычислена траектория ЧМ. На рис. 2.52 показаны гелиоцентрические орбиты Челябинского метеороида и Земли в 2010-2013 гг. В таблице 2.5 приведены расчетные параметры геоцентрического движения ЧМ, в том числе элементы геоцентрической орбиты, время и скорость столкновения с Землёй, координаты условной точки падения и др. Время прохождения перигея $t_\pi=3:23:40.367$ (ТТ). Номинальное перигейное расстояние составляет $r_\pi=6020.4$ км.

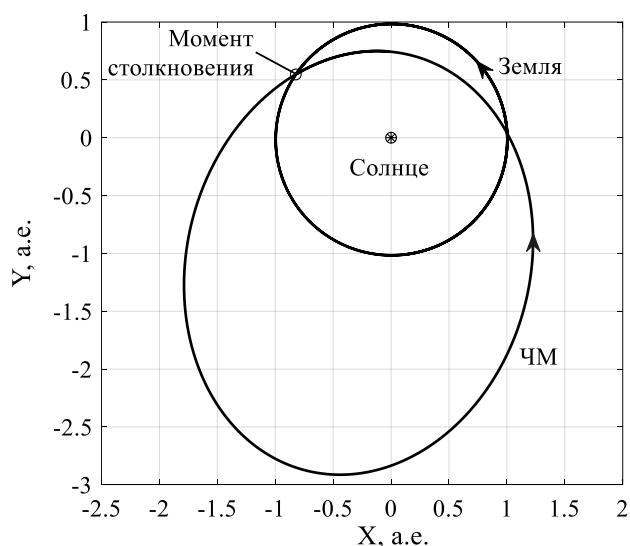


Рис. 2.52. Орбиты Челябинского метеороида и Земли в 2010-2013 гг.

На рис. 2.53 и рис. 2.54 приведена условная трасса подлета ЧМ к Земле (без учета атмосферы). Видно, что метеороид пролетает мимо г. Челябинск с минимальным расстоянием ~ 40 км. Расчетные географические координаты (долгота λ_c и широта φ_c) условной точки падения Челябинского метеороида на поверхности Земли составляют $\lambda_c=60.05^\circ$, $\varphi_c=54.95^\circ$. Эта условная точка падения находится на западе от реальной точки падения, в озере Чебаркуль, на расстоянии 27 км. Так как не учтено влияние атмосферы на движение ЧМ, то расчетная (условная) точка падения немного отличается от реальной (в озере Чебаркуль), отмеченной звездочкой на рис. 2.54.

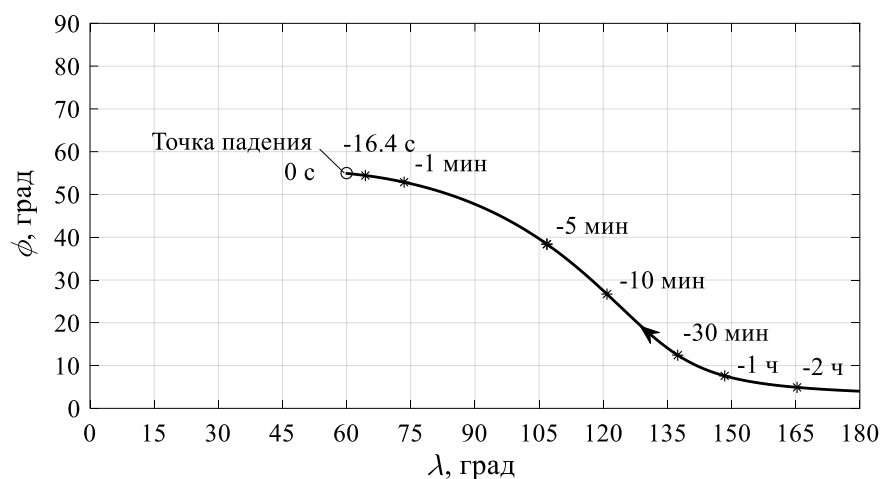


Рис. 2.53. Трасса подлета ЧМ к Земле



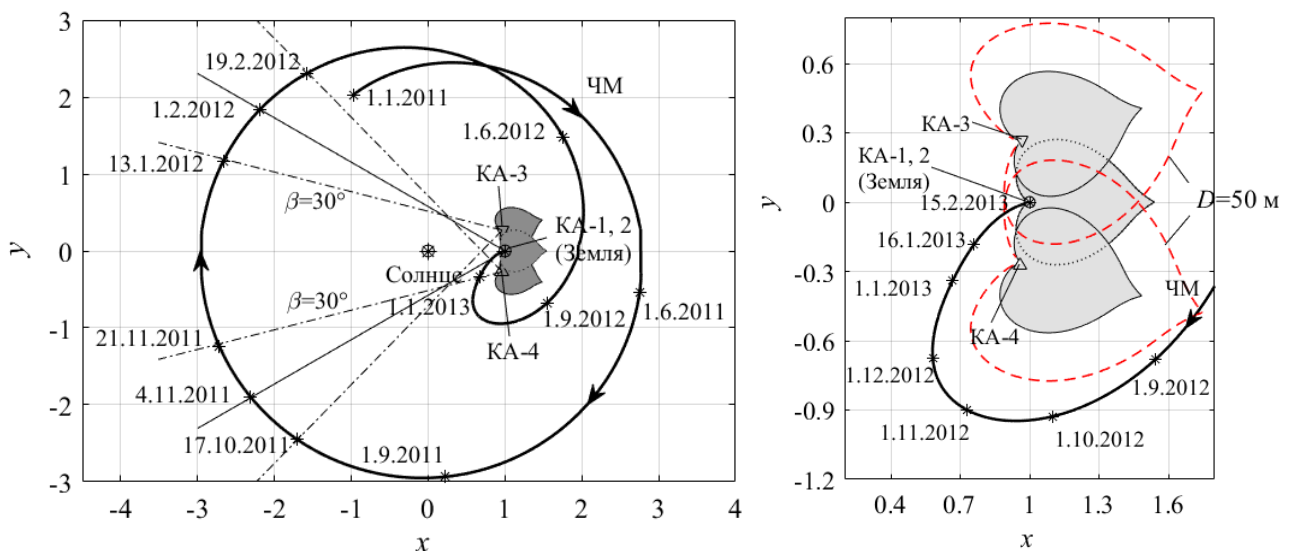
Рис. 2.54. Трасса подлета ЧМ к Земле на карте мира

2.3.2. Анализ видимости при наблюдении Челябинского метеороида

Для расчета видимости, альбедо A_g Челябинского метеороида взято 0.3, диаметр ЧМ принят 19.8 м, при этом абсолютная звездная величина составляет 25.4^m. Доступные для наблюдения ЧМ области КА системы «Небосвод» приведены на рис. 2.55а и 2.55б. Они имеют форму теневого «сердца» во вращающейся СК, предельная дальность $r_{\max}$ для наблюдения ЧМ с борта КА системы «Небосвод» составляет ~80.6 млн км (0.54 а.е.). На рис. 2.55а и 2.55б также построена орбита ЧМ относительно системы Солнце-Земля на интервале времени с 01.01.2011 г. до столкновения с Землёй 15.02.2013 г. Орбита ЧМ на рис. 56б соответствует заключительному участку его полета - за 6 месяцев до столкновения. Видим, что ЧМ приближает к Земле со стороны Солнца и на

конечном участке он входит в зону невидимости из-за засветки Солнцем для всех КА-1-4. Т.е. на рассмотренном мерном интервале нет видимости для КА системы «Небосвод», это соответствует реальному случаю, когда перед входом ЧМ в атмосферу никакими наземными средствами он не наблюдался.

По расчетам, для того чтобы была видимость для КА-1 или КА-2, ЧМ должен иметь абсолютную зв.в. не более 23.45^m , и его диаметр должен быть более 40 м. Аналогично для наблюдения с КА-3 и КА-4 диаметр ЧМ должен превышать 24.4 м и 38.7 м соответственно. Штриховые кривые на рис. 20б соответствуют диаметру ЧМ $D=50$ м. Видим существенное улучшение условий наблюдения ЧМ и возможность его наблюдения за последние ~14 сут с КА-3 и КА-4 для этого размера астероида. Анализ показывает также улучшение условий наблюдения, если уменьшить расстояние от КА до Земли до ~4 млн км. Однако здесь велики расходы топлива на поддержание КА на орбите Земли.



(а). 2011-2013 гг.

(б). за 6 месяцев до столкновения

Рис. 2.55. Орбита ЧМ и теневые зоны видимости системы «Небосвод»

2.3.3. Оценка точностей навигации для Челябинского метеороида

Рассмотрим точность навигации при наблюдении модельного ЧМ для $D=50$ м с бортов КА-3 и КА-4 системы «Небосвод» на последних ~14 сут его полета до столкновения с Землёй. При этом полагаем, что $\sigma_{ил}=0.2''$, измерения проводятся с начального момента входа астероида в зону видимости КА-3 и

КА-4 и через $\Delta t=1$ ч; 6 ч; 12 ч., на каждый момент измерения есть ошибки положения КА-3 и КА-4 со СКО 5 км по координатам, и есть систематические ошибки измерений ($\sigma_{\mu\alpha}=\sigma_{\mu\delta}=\sigma_{\text{ил}}$), уточняются все мешающие параметры.

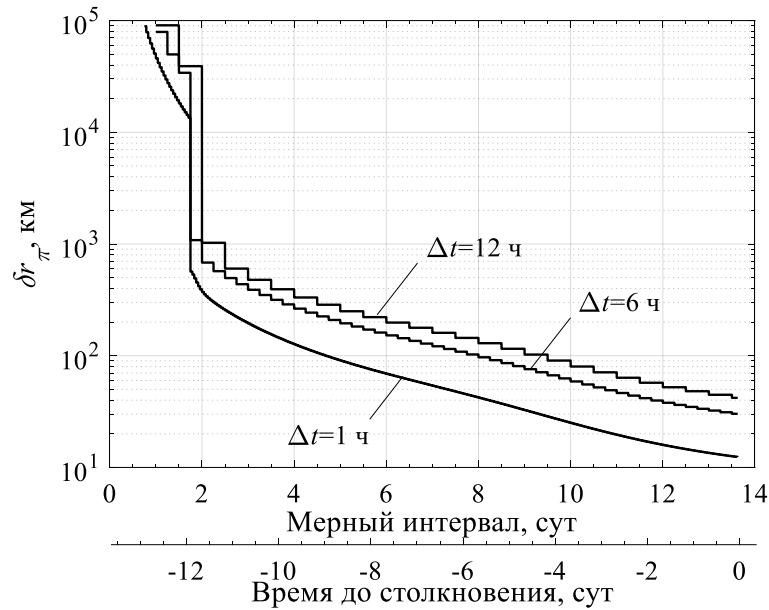


Рис. 2.56. Точность навигации δr_{π} при измерениях ЧМ с КА-3 и КА-4, $\sigma_{\text{ил}}=0.2''$

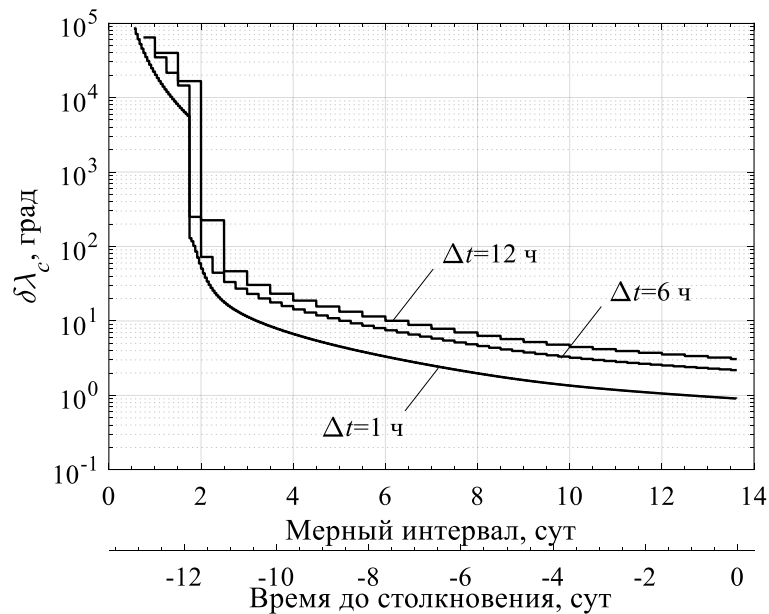


Рис. 2.57. Точность навигации $\delta \lambda_c$ при измерениях ЧМ с КА-3 и КА-4, $\sigma_{\text{ил}}=0.2''$

Методом ковариационного анализа получены точности навигации по перигейному расстоянию δr_{π} , по координатам точки падения $\delta \lambda_c$, $\delta \rho_c$, и по времени столкновения δt_c в зависимости от мерного интервала. Они приведены на рис. 2.56-2.59. Отметим, что в течение первых 2 сут есть видимость ЧМ

только для КА-4, после этого будет видимость ЧМ для обоих КА-3 и КА-4, при этом на этих рисунках существуют резкие улучшения точности навигации за счет добавления измерений с КА-3.

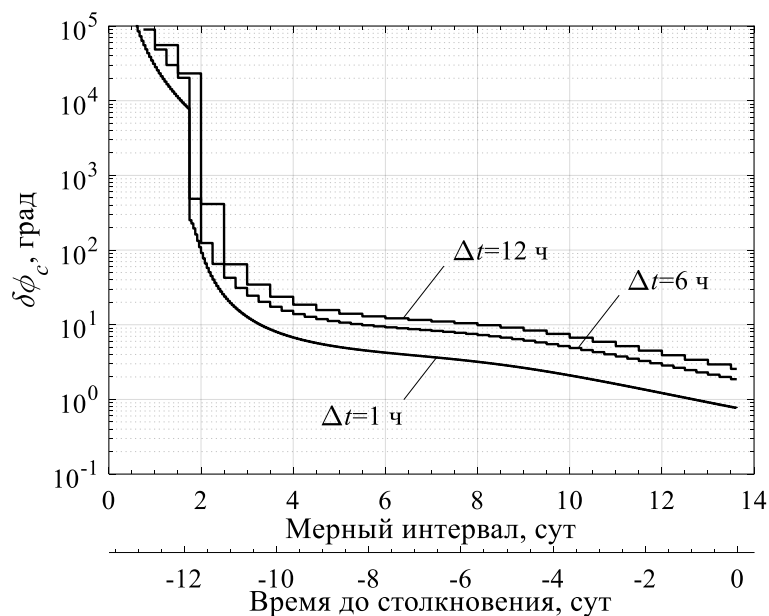


Рис. 2.58. Точность навигации $\delta\phi_c$ при измерениях ЧМ с КА-3 и КА-4, $\sigma_{и1}=0.2''$

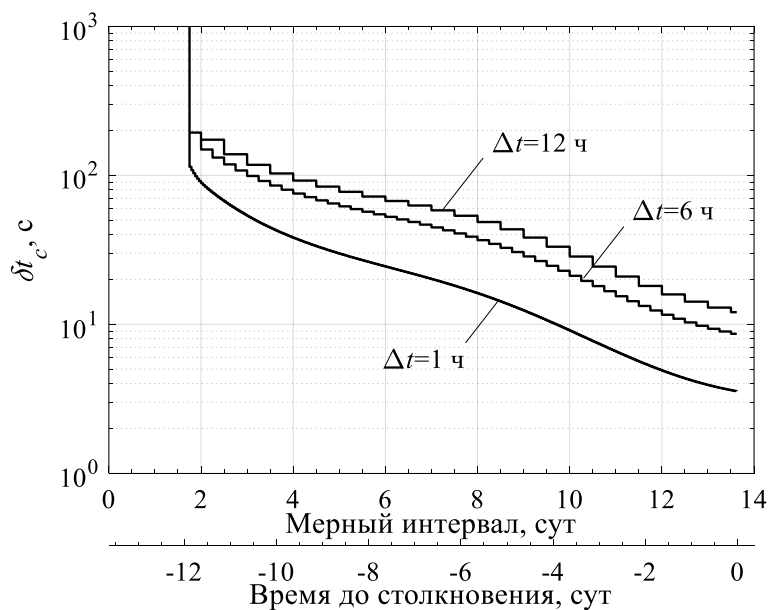


Рис. 2.59. Точность навигации δt_c при измерениях ЧМ с КА-3 и КА-4, $\sigma_{и1}=0.2''$

Для выявления факта столкновения Челябинского метеороида с Землёй в 2013 г. требуется точность определения перигейного расстояния:

$$\delta r_\pi < R_E - r_\pi = 357.7 \text{ км}, \quad (2.10)$$

при этом, согласно полученным результатам (рис. 2.56), через 2-3 сут

измерений будет выполняться (2.10), и можно уверенно утверждать, что будет столкновение ЧМ с Землёй. За 1 сут до его столкновения получаются хорошие точности навигции: $\delta r_{\pi} \approx 14-50$ км, по координатам точки падения $\delta \lambda_c \approx 1-3.4^\circ$, $\delta \varphi_c \approx 1-3.4^\circ$, и по времени столкновения $\delta t_c \approx 4-14$ с.

2.3.4. Выводы по разделу 2.3

Выполнен анализ видимости и точности навигации при наблюдении Челябинского метеороида с борта КА системы «Небосвод». Анализ показал, что видимость при наблюдении сближающегося с Землёй дневного ОНТ типа Челябинского метеороида с помощью системы «Небосвод» в значительной степени ограничивается засветкой Солнцем и видимой звездной величиной.

Показана вероятная возможность наблюдения Челябинского метеороида, если его размер был бы 50 м, тогда была бы видимость за последние ~ 14 сут до столкновения при наблюдении с помощью КА-3 и КА-4 системы «Небосвод». Для этого случая получается достаточно хорошая точность определения его орбиты. Так, чтобы уверенно предсказать столкновение с Землёй, необходимо лишь 2-3 сут измерений системой «Небосвод».

2.4. Выводы по второй главе

На основе методики и алгоритмов первой главы разработаны программно-вычислительный комплекс для определения орбиты опасного астероида и для оценки точности определения его орбиты по измерениям системы «Небосвод» с учетом как случайных и систематических ошибок измерений, так и априорной информации, а также ряда мешающих факторов, таких как ошибки модели движения астероида, а также ошибки обновления и прогнозирования вектора состояния КА.

Выполнен анализ точностей навигации системы «Небосвод» при измерениях астероидов Апофис, 2008 TC3 и Челябинского метеороида на разных участках полёта с учётом уточнения мешающих параметров и практических ограничений работы системы «Небосвод». Получены оценки

точностей навигации: по прицельной дальности, перигейному расстоянию и времени прохождения перигея, а также по географическим координатам (долготе и широте) условной точки падения на Землю, времени столкновения.

Показано, что система «Небосвод» позволяет потенциально наблюдать и довольно точно определить орбиту не только крупных астероидов, но и средних астероидов типа Апофиса (~320 м), а также более мелких (до 4...50 м) небесных тел, приближающихся к Земле, в том числе и дневных астероидов размером ~ 50 м и более.

Показано, что применение уточнения мешающих параметров позволяет заметно уменьшить влияние ошибок этих параметров на точность навигации по сравнению со случаем без их уточнения. Введенный аналог коэффициента «отношение сигнала к шуму» позволяет эффективно оценить влияние ошибок мешающих параметров на точность оценивания.

ГЛАВА III

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ВЕРОЯТНОЙ ОБЛАСТИ СОУДАРЕНИЯ АПОФИСА С ЗЕМЛЁЙ В 2036 Г.

В данной главе определена и исследована возможная область соударения опасного астероида Апофис с Землёй в 2036 г. Задача выполнялась в два этапа. На первом этапе работы разработаны соавтором Стихно К.А. алгоритмы для поиска траекторий опасного астероида Апофис, попадающих в Землю в 2036 г. Произведен поиск нескольких семейств попадающих в Землю траекторий Апофиса, для каждого из которых перигейное расстояние траектории близко к некоторому фиксированному перигейному расстоянию из диапазона $r_{\pi}=\{2069\pm 2100; 2500\pm 1; 3000\pm 1; \dots; 6360\pm 1; 6375\pm 1\}$ км – от минимального, ~ 2069 км, до максимального, ~ 6376 км. Далее, на втором этапе, выполненном автором диссертации, определено множество точек пересечения этих траекторий с поверхностью Земли и на основе этого построена столкновительная полоса на карте мира. Исследованы геометрические, временные и энергетические характеристики столкновительных траекторий Апофиса и полосы точек соударения астероида с Землёй на её поверхности, в частности, ее длина и ширина, ориентация в пространстве, углы входа астероида в атмосферу, время и скорость столкновения, направление подлета астероида к Земле. Выполнено сравнение с результатами других авторов по данной проблеме. Полученные результаты изложены в [17, 36, 37, 61, 86].

3.1. Поиск попадающих в Землю траекторий астероида Апофис

Для полноты кратко представим разработанные соавтором Стихно К.А. алгоритмы для поиска попадающих в Землю траекторий астероида Апофис с помощью методов Монте-Карло и градиентного спуска и построения множества попадающихся траекторий Апофиса с заданными значениями

перигейного расстояния r_{π} . При этом траектории Апофиса определялись численным интегрированием уравнений движения астероида (1.1) при варьировании начальных данных в допустимом множестве [70]. В качестве номинальных начальных данных для уравнений движения на начальный момент t_0 в эпоху JD2453400.5 (30.0 января 2005) и их возможных отклонений были использованы результаты ИПА РАН по обработке оптических и радиолокационных наблюдений астероида Апофис [70], причем:

$$3\sigma_0(x, y, z)=3 \text{ км}, 3\sigma_0(v_x, v_y, v_z)=2 \text{ мм/с}, \quad (3.1)$$

где $\sigma_0(x, y, z)$, $\sigma_0(v_x, v_y, v_z)$ – СКО по компонентам начальных радиус-вектора $\mathbf{r}_0$ и вектора скорости $\mathbf{v}_0$ астероида. На первом этапе поиска столкновительных с Землёй в 2036 г. траекторий с помощью метода Монте-Карло на множестве начальных данных было найдено несколько десятков траекторий, пересекающих в 2036 г. сферу действия Земли. Затем для этих траекторий их перигейное расстояние в 2036 г. рассматривалось как минимизируемый параметр, зависящий от начального состояния астероида, и методом градиентного спуска было получено несколько десятков траекторий с перигейным расстоянием меньше радиуса Земли, образовавших множество M_1 «столкновительных», «попадающих» траекторий. Для начальных состояний, найденных на этом первом этапе, для траекторий из M_1 , был определен диапазон гелиоцентрической константы энергии.

На втором этапе снова методом Монте-Карло проводился перебор достаточно большого множества траекторий (порядка 10^7) из начального эллипсоида (3.1) и выбирались траектории с величиной интеграла энергии в начальный момент времени, близкой к его значениям в указанном диапазоне для определенных выше столкновительных траекторий. Последующее проверочное интегрирование до 2036 года проводилось только в том случае, когда интеграл энергии исследуемой траектории не выходил далеко за рамки диапазона, задаваемого ранее найденными попадающими траекториями. Так было найдено уже ~ 5000 траекторий с пролетом внутри сферы действия Земли. Для получившегося множества траекторий снова варьированием начального

состояния и минимизацией перигейного расстояния в 2036 году найдено значительно бóльшее множество ($\sim 50\,000$) попадающих траекторий, значительно разбросанных вдоль эллипса рассеивания (3.1). Это - множество M_2 .

На третьем этапе, на основе данного множества попадающих траекторий M_2 , было построено 20 семейств таких траекторий, упорядоченных по перигейному расстоянию, которое меняется в диапазоне от минимального значения, равного ~ 2070 км [32-34] до максимального, соответствующего предельной величине для «касания» траекторией Земли, ~ 6376 км. Так были получены 20 семейств попадающих траекторий A_n ($n=0, 1, \dots, 9$), B_n ($n=1, 2, \dots, 10$), для каждого из которых значение перигейного расстояния меняется в некотором диапазоне из множества: $A_0=\{r_\pi: 2069\div 2100 \text{ км}\}$, $(A_1, B_1)=\{r_\pi: 2500\pm 1 \text{ км}\}$, $(A_2, B_2)=\{r_\pi: 3000\pm 1 \text{ км}\}$, $(A_3, B_3)=\{r_\pi: 3500\pm 1 \text{ км}\}$, $(A_4, B_4)=\{r_\pi: 4000\pm 1 \text{ км}\}$, $(A_5, B_5)=\{r_\pi: 4500\pm 1 \text{ км}\}$, $(A_6, B_6)=\{r_\pi: 5000\pm 1 \text{ км}\}$, $(A_7, B_7)=\{r_\pi: 5500\pm 1 \text{ км}\}$, $(A_8, B_8)=\{r_\pi: 6000\pm 1 \text{ км}\}$, $(A_9, B_9)=\{r_\pi: 6360\pm 1 \text{ км}\}$, $(B_{10})=\{r_\pi: 6375\pm 1 \text{ км}\}$. Для каждой попадающей траектории получены также векторы состояния на момент прохождения условного перигея в 2036 г., которые использовались как начальные условия для интегрирования уравнений движения Апофиса на следующем этапе анализа.

3.2. Анализ характеристик столкновительных траекторий и зоны соударения с Землёй астероида Апофис

Далее исследована задача отображения множества сталкивающихся траекторий Апофиса на поверхность Земли в момент столкновения. Анализируются характеристики множества точек соударения астероида Апофис, в том числе, зоны падения, угол входа в атмосферу, время и скорость столкновения, а также характеристики столкновительной полосы на Земле. На данном этапе анализа нами не учитывалось влияние атмосферы Земли на точки падения астероида (некоторые вопросы анализа характеристик движения астероида типа Апофис после его входа в атмосферу Земли ранее изучены в работе [90]).

3.2.1. Построение столкновительной полосы на поверхности Земли

Для каждой траектории из всех указанных семейств A_n , B_n находится условная точка падения астероида на Землю. Для этого делается переход от геоэкваториальной инерциальной СК на эпоху $J2000$ к гринвичской СК текущего момента с помощью модели преобразования координат точки с учетом прецессии и нутации Земли (п. 1.1.3). На основании этой методики выполнен численный анализ определения координат точек падения Апофиса.

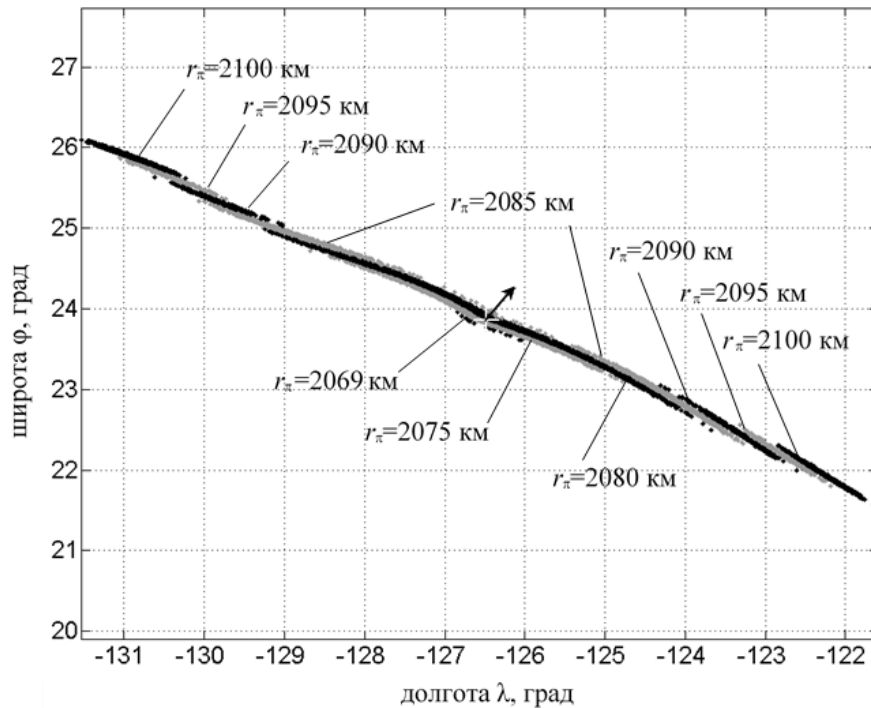


Рис. 3.1. Точки соударения с Землёй астероида Апофис в области A_0

На рис. 3.1 в плоскости географических углов (φ, λ) приведена область точек падения астероида для попадающих траекторий семейства A_0 с перигейным расстоянием r_π из диапазона $[2069; 2100]$ км. Центр этой области (ее также обозначим через A_0) отмечен крестиком. При этом связана только часть семейства $A_0 = \{r_\pi: 2069 \text{ км} \leq r_\pi \leq 2100 \text{ км}\}$, примыкающего к орбите T_0 с минимальным r_π , для этой части $2069 \text{ км} \leq r_\pi \leq 2085 \text{ км}$. При $r_\pi > 2085 \text{ км}$ множества $\{r_\pi = \text{const}\}$ несвязны, они состоят из двух подмножеств. Для одного: точки падения лежат правее центра области A_0 , оно соответствует уменьшению гелиоцентрической энергии h до соударения по сравнению с траекторией T_0 . Для другого: точки падения лежат левее области A_0 , оно соответствует

увеличению энергии по сравнению с траекторией T_0 .

В качестве примера на рис. 3.2 приведены области точек падения астероида для семейств A9 и B9 с r_π из диапазона $[6360 \pm 1]$ км на плоскости $(\delta\lambda \cos \varphi_0, \delta\varphi)$, где $\delta\lambda$, $\delta\varphi$ – долгота и широта точки падения относительно координат (λ_0, φ_0) центра этой области падения. Здесь же указаны изолинии $r_\pi = \text{const}$. Каждая область падения A9 и B9 разделена этими изолиниями на четыре подмножества по перигейному расстоянию r_π , так что на каждом из этих подмножеств r_π меняется на 0.5 км. Например, для крайних темных областей r_π меняется в диапазоне $[6360.5; 6361]$ км.

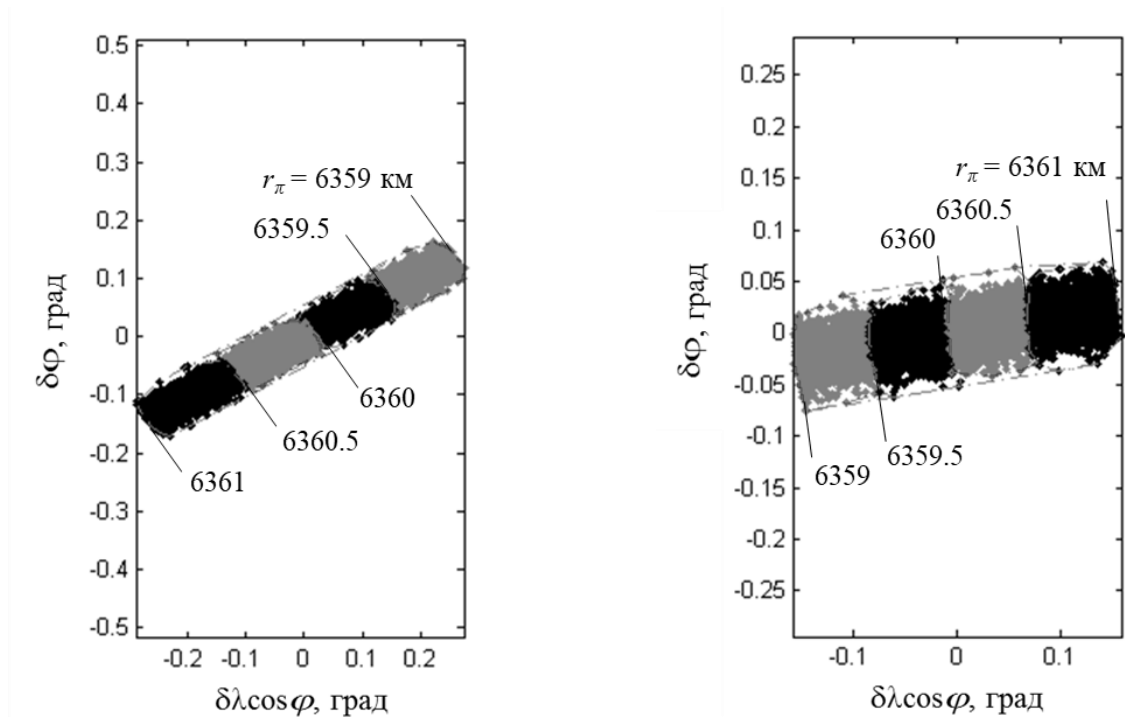


Рис. 3.2. Точки падения астероида для областей A9 (слева) и B9 (справа)

Все множество столкновительных орбит астероида порождает столкновительную полосу на Северном полушарии Земли. Она приведена на рис. 3.3 и 3.4. Для удобства анализа полосы падения астероида полученные результаты сохранены в файле формата «*kml*», который позволяет наглядно отображать трёхмерные геопространственные данные и другую полезную информацию в программе «*Google Earth*», а также на карте мира с помощью системы «*Google my maps*». На рис. 3.4 приведена эта полоса на карте мира, её можно посмотреть на сайте по ссылке [108]. Увеличивая масштаб этого изображения,

можно просмотреть все точки данной полосы. Ее начало (Start, семейство A9) – вблизи Омска, Томска, Новосибирска. Далее она последовательно проходит через Красноярский край, Якутию, Дальний восток и Камчатку России, вблизи Алеутских островов, через Тихий океан, Центральную Америку, Южную Америку (Колумбия, Венесуэла), и уходит дальше в Атлантику, до конца (The End, семейство B10) у западного побережья Африки, вблизи Дакара.

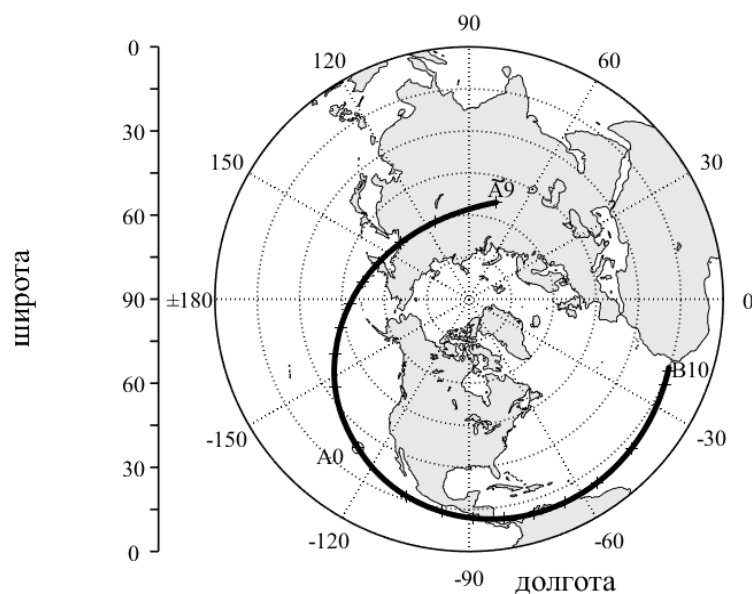


Рис. 3.3. Вероятная столкновительная полоса Апофиса
на Северном полушарии Земли

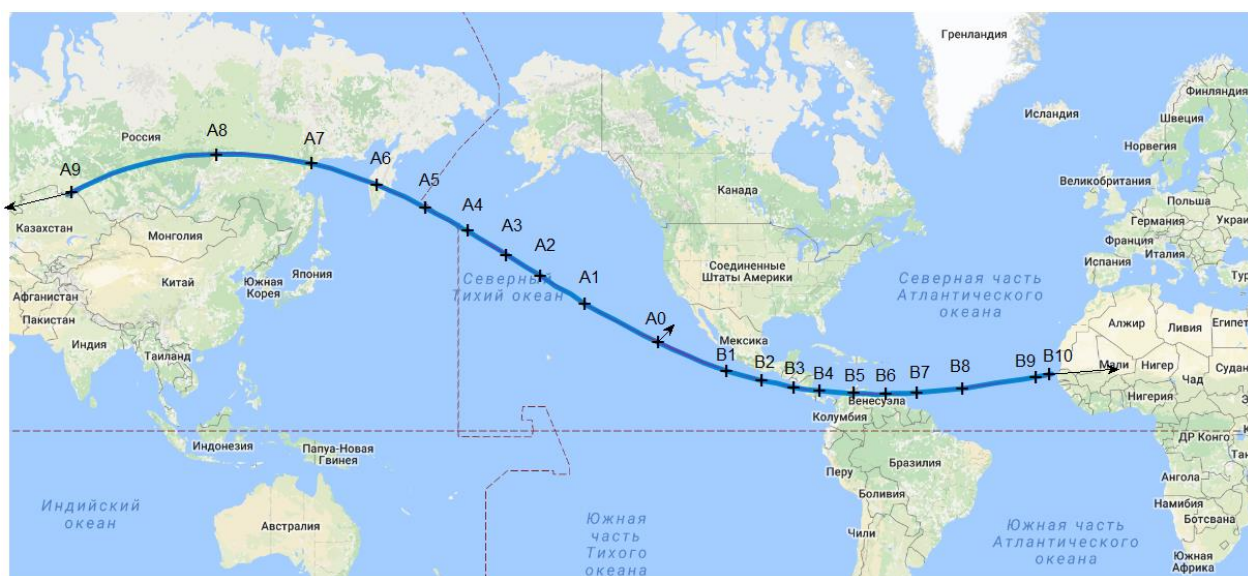


Рис. 3.4. Вероятная столкновительная полоса Апофиса на поверхности Земли

Таблица 3.1. Географические координаты точки падения и соответствующее название места падения

Область падения	φ_c , град	λ_c , град	Название места падения
A9	54.3	75.2	Омская обл, ~30 км от г. Черлак, ~ 100 км от Омска
A9-A8			~100 км севернее Томска, р. Ангара
A8	60.0	114.6	г. Хамра, р. Лена (Якутия, Сибирь)
A7	58.5	140.7	г. Курун-Урях (Хабаровский край, Дальний Восток)
A6	55.3	158.3	Камчатский край РФ, ~300 км от Петропавловска-Камчатского
A5	51.6	171.7	Северная часть Тихого океана, ~100-200 км к югу от Алеутских островов
A4	47.6	-177.2	
A3	43.3	-167.1	
A2	38.7	-157.3	Северная часть Тихого океана, к югу от Аляски, у Западного побережья США
A1	33.2	-146.1	
A0	23.7	-126.3	Тихий океан, 1000 км от западного побережья Мексики
B1	16.3	-106.8	Тихий океан между Гавайскими островами и Центральной Америкой
B2	13.5	-96.8	
B3	11.8	-88.4	
B3-B4			Пересекает Центральную Америку по Никарагуа, вблизи Манагуа
B4	10.7	-80.6	Карибское море
B5	10.1	-72.7	г. Агустин Кодасси (Колумбия)
B6	10.0	-64.4	Венесуэла, г. Барселона, ~100 км от Каракаса
B7	10.4	-54.8	Атлантический океан
B8	11.7	-42.3	
B9	14.5	-23.4	г. Прая (Кабо-Верде), острова Зеленого Мыса
B10	15.1	-19.4	Атлантический океан, вблизи от Дакара (Сенегал, Западная Африка)

В табл. 3.1 приведены географические широта и долгота точки падения Апофиса в центрах областей падения астероида Апофис на Землю с учетом прецессии и нутации, также указаны местонахождение на Земле центров областей падения A_n , B_n . Область падения для траекторий семейства A0 с

наименьшими значениями r_π находится примерно в центре столкновительной полосы – в Тихом океане, в 1000 км от западного побережья Мексики. Для каждого семейства (A_n , B_n) при $2085 \text{ км} < r_\pi < 6364 \text{ км}$ получим две области падения, находящиеся примерно симметрично относительно центра области A_0 , к западу (A_n) и востоку (B_n) от него, см. рис. 3.3 и 3.4. Отметим, что ранее эту столкновительную полосу привели R. Schweickart, et al. [99], D.B. Gennery [84]. Сравнение данных [84, 99] с нашими результатами показывает, что они практически полностью совпадают, что говорит, в частности, о совпадении отечественных и зарубежных результатов в определении орбиты Апофиса и в его модели движения.

3.2.2. Анализ характеристик столкновительной полосы

На рис. 3.5 приведены некоторые энергетические, временные и геометрические характеристики столкновительных траекторий для центров областей падения A_n , B_n . Области A_n порождаются орбитами астероида с большей энергией перед соударением, чем в области A_0 , $h \in (-799.7689, -799.7554] \text{ км}^2/\text{с}^2$, здесь большая полуось $a \in (a_0, a_0 + 2784] \text{ км}$, $a_0 \approx 165\,938\,501 \text{ км} \approx 1.1092 \text{ а.е.}$, см. рис. 3.5, кривая $h(\lambda)$. Области B_n порождаются орбитами с меньшей энергией, $h \in [-799.7824, -799.7689) \text{ км}^2/\text{с}^2$, $a \in [a_0 - 2817, a_0) \text{ км}$. Из-за несферичности Земли и наклонности траекторий и полосы к экватору, расстояния от центра Земли до центров областей A_9 и B_9 различны и составляют $\sim 6364 \text{ км}$ и $\sim 6376 \text{ км}$, т.е. траектории астероида из семейства A_9 почти касаются поверхности Земли, а траектории из семейства B_9 еще не касаются Земли, так как в этих областях $r_\pi = 6360 \pm 1 \text{ км}$. Поэтому построено еще семейство B_{10} с r_π из диапазона $6375 \pm 1 \text{ км}$, создающее восточную область B_{10} .

Для кривой времени $t_c - t_{c0}(\lambda)$ на рис. 3.5 опорное время $t_{c0} = 9 \text{ ч}$, 13 апреля 2036 г., это, примерно, среднее время падения. Для всего множества траекторий время столкновения t_c находится в диапазоне от $t_{c0} - 17 \text{ мин}$ до $t_{c0} + 13.8 \text{ мин}$, см. рис. 3.5, кривая $t_c - t_{c0}(\lambda)$. Абсолютная скорость столкновения астероида с Землей составляет $V_{ca} \approx 12.6 \text{ км/с}$, аналогично [84]. Учет вращения Земли

приводит к увеличению скорости соударения в западной части полосы до ~ 12.9 км/с и к ее уменьшению на восточной части до ~ 12.2 км/с, рис. 3.5, кривая $v_{cr}(\lambda)$. На рис. 3.1 и рис. 3.4 для областей A9, A0 и B10 показаны скорости, дающие направления подлета астероида к Земле.

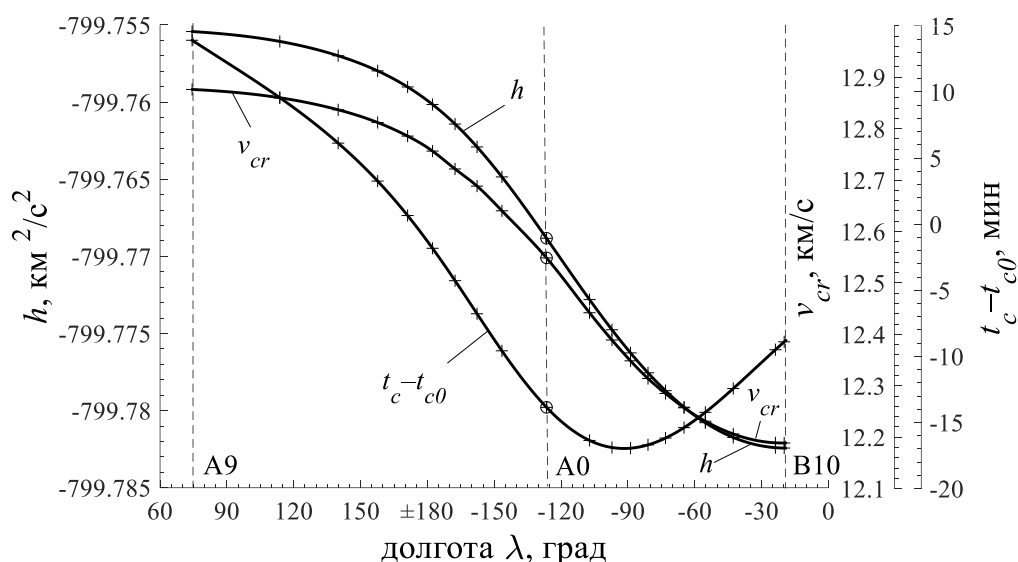


Рис. 3.5. Характеристики столкновения астероида с Землёй в 2036 г. в зависимости от долготы точки соударения

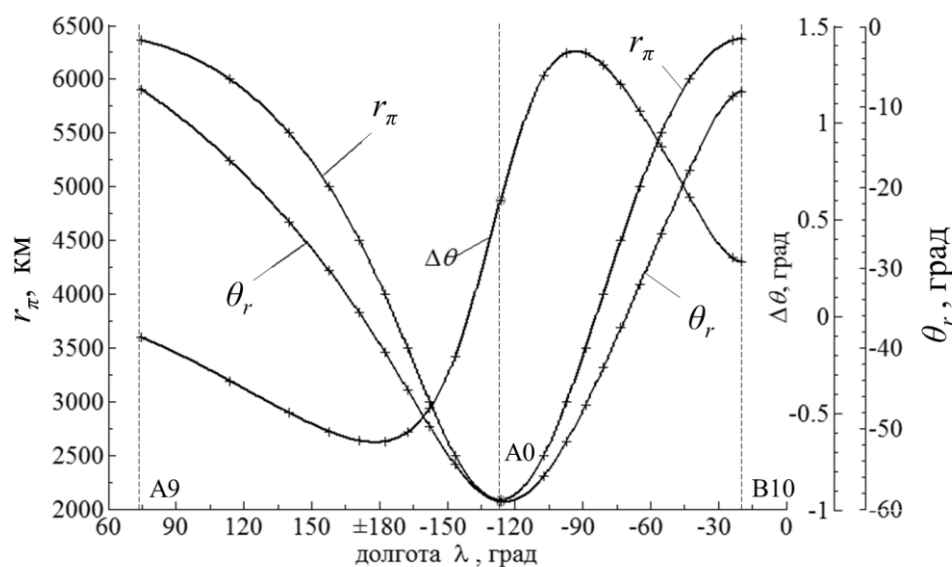


Рис. 3.6. Угол входа астероида в атмосферу θ_r , $\Delta\theta$ и перигейное расстояние r_π орбиты астероида в зависимости от долготы точки соударения

На рис. 3.6 приведены угол входа астероида в атмосферу θ_r , $\Delta\theta = \theta_a - \theta_r$ и перигейное расстояние r_π в зависимости от долготы центров областей падения

A_n, B_n ; где $\Delta\theta$ – разность углов входа в атмосферу для абсолютной и относительной скоростей. Наибольший угол входа, около -60 град., – в области A_0 . С увеличением r_π угол входа монотонно уменьшается, до -8 град для областей A_9 и B_{10} .

Рассмотрим геометрию столкновительной полосы в гринвичской вращающейся СК. Радиус-векторы центров трёх областей падения A_i, A_0 и B_i ($i=1, \dots, 9$) задают в этой СК плоскости Π_i с векторами нормали к ним $\mathbf{n}_i$. Углы между этими векторами $\mathbf{n}_j$ ($j=1, \dots, 8$) и $\mathbf{n}_9=[0.1909, -0.3842, 0.9033]^T$ малы, до 2.7 град. Поэтому можно считать, что полоса столкновений лежит примерно в одной плоскости Π_9 . Угол наклона вектора $\mathbf{n}_9$ к плоскости экватора Земли составляет 64.6° , и 87.6° – к плоскости эклиптики (в момент t_{c0}), т.е. плоскость полосы примерно параллельна плоскости эклиптики в этот момент.

Выполнен анализ по оценке длины и ширины полосы на поверхности Земли. Считаем приближенно, что пересечение плоскости полосы и Земного шара является окружностью, ее радиус $R_\Pi=5370$ км. Тогда центральный угол полосы $\phi \approx 4.534$ рад = 259.8 град, а ее длина $L_\Pi \approx \phi R_\Pi = 24347$ км. Для оценки ширины столкновительной полосы построены системы координат $o_i x_i y_i z_i$, начало каждой системы находится в центре ее области падения. При этом ось $o_i x_i$ направлена вдоль продольной оси полосы на восток, и ось $o_i z_i$ направлена по нормали к местному горизонту. Ось $o_i y_i$, направленная «поперек» полосы, дополняет СК до правой. Плоскость $o_i x_i y_i$ соответствует местному горизонту. Преобразуя координаты точек падения в СК $o_i x_i y_i$, и определяя диапазон координаты y_i для точек области, получим оценку ширины полосы в этой области. Ширина области A_0 максимальна, она оценена в ~ 27 км. Для областей A_i и B_i ($i \geq 1$) ее оценка дала 10-22 км. В среднем, ширина полосы составляет ~ 20 км. Отметим, что ранее ширина полосы падения Апофиса оценивалась в 30-50 км [102], т.е. близко.

Выявлено, что ширина полосы зависит от принятых разбросов начального вектора состояния. Для анализа этого фактора рассмотрены СКО начального состояния, в два раза большие и в два раза меньшие прежних значений (3.1),

для множества траектории с $r_{\pi}=6000\pm 1$ км, А8 и В8. Анализ показал, что ширина полосы примерно прямо пропорциональна СКО начального состояния.

Определена также ориентация продольной оси полосы вдоль всей зоны падения. Угол χ наклона продольной оси полосы относительно восточной параллели меняется в диапазоне от +26 град., для семейства А9 (+ соответствует повороту вокруг оси $+o_i z_i$ против часовой стрелки) до – 32 град., для семейств А2, А3, т.е. продольная ось полосы близка к параллели (рис. 3.7).

Таблица 3.2. Ширина зоны падения для семейств траекторий А8, В8 с $r_{\pi}=6000\pm 1$ км в зависимости от СКО начального состояния

СКО начального состояния	Ширина зоны падения, км	
	А8	В8
$\sigma=\sigma_0/2$	7.21	7.51
$\sigma=\sigma_0$	14.32	14.96
$\sigma=2\sigma_0$	28.22	29.52

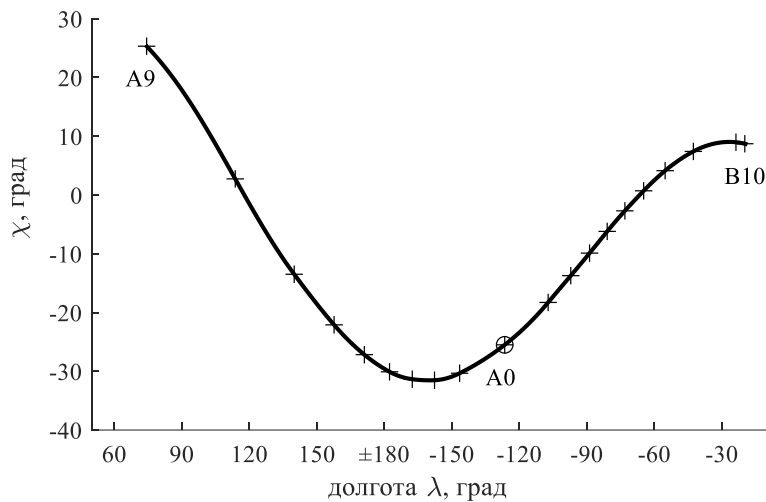


Рис. 3.7. Угол ориентации продольной оси полосы относительно параллели в зависимости от географической долготы λ

3.2.3. Качественный анализ траекторий подлета Апофиса к Земле

Чтобы лучше понять качественные особенности множества орбит соударения астероида с Землёй, рассмотрим векторы прицельной дальности $\mathbf{b}$ и векторы скорости «на бесконечности» $\mathbf{v}_{\infty}$ гиперболических орбит Апофиса перед столкновением с Землёй. Численный анализ показал, что для всех

столкновительных орбит Апофиса концы векторов $\mathbf{b}$, отложенных из одной точки, лежат практически на одной прямой L , единичный вектор направления которой $\mathbf{L}^0 = [-0.2443, 0.8776, 0.4124]^T$. Векторы $\mathbf{v}_\infty$ почти постоянны и образуют практически плоскость, проходящую через L , она переходит затем в плоскость полосы. Среднее значение векторов $\mathbf{v}_\infty$ составляет вектор $\mathbf{v}_\infty = [5.5849, 0.7923, 1.6077]^T$ км/с, $|\mathbf{v}_\infty| = 5.87$ км/с.

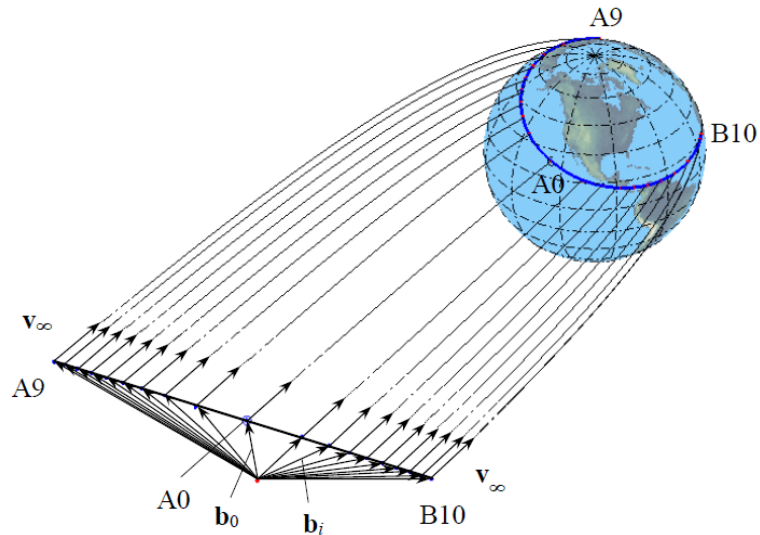


Рис. 3.8. Вероятное множество геоцентрических траекторий астероида Апофис при падении на Землю в 2036 г.

На рис. 3.8 показано геоцентрическое движение астероида Апофис для всего множества траекторий столкновения с Землёй в 2036 г. Здесь приведены векторы прицельной дальности и векторы скорости «на бесконечности», а также столкновительная полоса на поверхности Земли. Изолинии $r_\pi = \text{const}$ будут примерно перпендикулярны соответствующему вектору $\mathbf{b}$. Так, для области A0, при $r_\pi \approx r_{\pi \min} \approx 2069$ км изолиниями $r_\pi = \text{const}$ будут дуги, идущие вдоль оси полосы (см. на рис. 3.1), примерно перпендикулярно среднему для области A0 вектору прицельной дальности $\mathbf{b}_0$. С увеличением перигейного расстояния $r_{\pi i}$ векторы $\mathbf{b}_i$ поворачиваются, поэтому наклон изолиний $r_{\pi i} = \text{const}$ к продольной оси столкновительной полосы монотонно возрастает. На рис. 3.1 виден небольшой начальный поворот этих изолиний при смещении от центра A0. На краях полосы, в областях A9, B9, B10, изолинии, будучи перпендикуляр-

рными к вектору $\mathbf{b}_i$, становятся почти перпендикулярными к оси полосы, что видно на рис. 3.2. Для других областей эти повороты изолиний можно проследить на рис. 3.4 при увеличении его масштаба с помощью системы “Google my maps” по ссылке [108].

3.3. Выводы по третьей главе

Разработаны методика и алгоритмы определения характеристик падения астероида на Землю. Построена вероятная область падения астероида Апофис в 2036 г., имеющая вид узкой длинной полосы на поверхности Земли. Она лежит на Северном полушарии Земли. Исследованы геометрические, временные и энергетические характеристики столкновительных траекторий Апофиса и полосы точек соударения астероида с Землёй, в частности, ее ширина и длина, ориентация в пространстве, угол и скорость входа астероида в атмосферу, время и скорость столкновения, направление подлета астероида к Земле.

Среднее время столкновения составляет примерно 9 ч, 13 апреля 2036 г. Скорость столкновения Апофиса с Землёй ~ 12.6 км/с. Плоскость полосы на земном шаре примерно параллельна плоскости эклиптики в момент столкновения. Длина полосы составляет ~ 24347 км. Оценка ширины полосы дала 10-27 км, в среднем, ~ 20 км.

ГЛАВА IV

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ СОЗДАНИЯ СТАБИЛЬНОГО СПУТНИКА АСТЕРОИДА АПОФИС КАК ОДНОРОДНОГО ТРЁХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Исследование характеристик движения КА вблизи малого тела является важной задачей в проблеме обеспечения астероидно-кометной безопасности Земли. Осуществлен ряд проектов полётов к малым небесным телам с созданием спутника этих тел, например, к астероиду 433 Eros (проект “NEAR Shoemaker”), к комете 67P/Churyumov-Gerasimenko (проект “Rosetta”) и к астероидам 25143 Itokawa (проект “Hayabusa”) и 162173 Ryugu (проект “Hayabusa-2”). В данной главе исследована задача создания стабильной орбиты спутника астероида Апофис. Это может быть использовано для детального изучения характеристик астероида и уточнения орбиты астероида Апофис по радиотехническим наземным измерениям параметров движения спутника, снабженного радиомаяком. Основной трудностью решения этой задачи является вычисление гравитационного потенциала и силы тяготения тела.

Чаше всего, они определяются путем разложения потенциала в ряд по сферическим функциям [25, 26, 72, 92 и др.]. Однако, при сильной несферичности тела этот классический способ может оказаться недостаточно точным, в частности, при определении потенциала в точке, близкой к поверхности притягивающего тела. Поэтому предлагаются и другие способы: способ разложения потенциала тела по эллипсоидальным функциям [82, 83], метод точечных масс [31] – представление модели тела в виде совокупности массива точечных масс, представление модели тела в виде совокупности небольших однородных многогранников [82, 109], для последних двух способов требуется достаточно точная модель формы тела. Кроме того, так как характеристики гравитационного поля эллипсоида хорошо изучены в теории

притяжения [25, 26, 42, 92], в качестве приближенной модели малое небесное тело часто геометрически и динамически аппроксимируется однородным эллипсоидом. Например, астероид 433 Eros хорошо аппроксимируется трёхосным эллипсоидом с полуосями 17.9 км, 9.2 км и 7.9 км [83]. В работе [100] применена модель однородного трёхосного эллипсоида к анализу спутников астероидов Vesta, Eros, Ida. По данным обработки наблюдений Апофиса, средняя полуось его аппроксимирующего эллипсоида оценивалась довольно близкой к малой, поэтому при изучении возмущенного пассивного движения КА вблизи астероида Апофис в работах Ивашкина В.В. и Лан А. [38, 39, 46] принята приближенная модель вытянутого эллипсоида вращения. Для этой модели изучено движение КА вокруг Апофиса с учетом возмущений от несферичности астероида, притяжения больших планет и Луны и давления солнечного света, выполнен анализ стабильности движения КА вокруг Апофиса с точки зрения «времени жизни» КА и выявлено, что можно построить довольно стабильную орбиту спутника в окрестности Апофиса в течение несколько лет, до тесного сближения астероида Апофис с Землёй в 2029 г. В развитии этих работ нами принята более точная модель астероида Апофис как однородного трёхосного эллипсоида. Для этой модели нами выполнено исследование возмущенного пассивного движения КА вокруг астероида и показано, что в случае Апофис как трёхосного эллипсоида также есть возможность создать длительную стабильную орбиту спутника астероида.

4.1. Модель движения КА вокруг астероида Апофис как однородного трёхосного эллипсоида

Аналогично [38, 39, 46], нами принята модель возмущенного движения КА в астероидоцентрической геоэкваatorialной прямоугольной инерциальной системе координат (СК) с учетом вышеупомянутых возмущений. При этом уравнения движения КА имеют вид:

$$d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}, \quad d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ – астероидоцентрические радиус-вектор и вектор скорости КА; $\mathbf{a}_1$ –

ускорение от притяжения астероида как трёхосного эллипсоида; $\mathbf{a}_2$ – возмущающее ускорения от притяжения небесных тел (Солнце, Земля, Луна, Юпитер и др.); $\mathbf{a}_3$ – возмущающее ускорение от давления солнечного света.

Ускорение $\mathbf{a}_1$ от притяжения эллипсоида определяется по формуле Дирихле, содержащей эллиптические интегралы [25, 26, 42, 92]. В частных случаях эллипсоидов вращения эти интегралы имеют аналитическое решение, при этом формулу Дирихле можно выразить через простые элементарные функции. Однако, в общем случае трёхосного эллипсоида задача сложнее, так как эллиптические интегралы выражаются через специальные функции: в работе [42] – через стандартные неполные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода, а в работе [92] – через эллиптические функции Якоби. Кроме того, часто применяется разложение силовой функции в ряд по сферическим функциям, при этом коэффициенты, характеризующие гравитационное поле однородного эллипсоида, вычисляются по известным формулам, которые даны в [110] и др.

Для анализа этой задачи в нашей работе [18] построено три алгоритма вычисления потенциала и силы притяжения трёхосного эллипсоида. Это, во-первых, алгоритм приближенного определения потенциала, использующий его обычное разложение в ряд по сферическим функциям с учетом гармоник до 4 порядка включительно. Два других алгоритма определяют потенциал с помощью формулы Дирихле. Один вычисляет интегралы в формуле Дирихле численно по квадратурным формулам. Другой, аналитический, использует разложения интегралов в быстро сходящиеся ряды.

Рассмотрим потенциальное поле тяготения однородного эллипсоида в связанной системе координат, оси которой направлены по главным осям эллипсоида. Обозначим через a, b, c – малую, среднюю и большую полуоси эллипсоида, $a \leq b \leq c$. Силовая функция U выражается по формуле Дирихле, содержащей эллиптические интегралы в $\bar{U}_i, i = 0, \dots, 3$ [18]:

$$U(x, y, z) = 3\mu_A \{ \bar{U}_0(\gamma) + \bar{U}_1(\gamma)x^2 + \bar{U}_2(\gamma)y^2 + \bar{U}_3(\gamma)z^2 \}, \quad (4.2)$$

$$\bar{U}_0(\gamma) = \frac{1}{4} \int_{\gamma}^{\infty} \frac{ds}{R(s)}, \quad \bar{U}_1(\gamma) = -\frac{1}{4} \int_{\gamma}^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s)R(s)}, \quad (4.3)$$

$$\bar{U}_2(\gamma) = -\frac{1}{4} \int_{\gamma}^{\infty} \frac{ds}{(b^2 + s)R(s)}, \quad \bar{U}_3(\gamma) = -\frac{1}{4} \int_{\gamma}^{\infty} \frac{ds}{(c^2 + s)R(s)}, \quad (4.4)$$

$$R(s) = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}, \quad (4.5)$$

где $\mu_A = fM$ – гравитационный параметр эллипсоида, f – постоянная тяготения, M – масса эллипсоида; γ является наибольшим положительным корнем уравнения софокусного эллипсоида относительно s :

$$\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z^2}{c^2 + s} = 1. \quad (4.6)$$

Из (4.2) получаются формулы для определения составляющих силы притяжения $F(F_x, F_y, F_z)$, действующей на внешнюю точку (x, y, z) [25, 26, 42]:

$$\begin{cases} F_x = \partial U / \partial x = 6\mu_A x \bar{U}_1(\gamma), \\ F_y = \partial U / \partial y = 6\mu_A y \bar{U}_2(\gamma), \\ F_z = \partial U / \partial z = 6\mu_A z \bar{U}_3(\gamma). \end{cases} \quad (4.7)$$

Для общего случая однородного трёхосного эллипсоида, нами получены аналитические представления интегралов $\bar{U}_i, i = 0, \dots, 3$, в виде разложения в сходящиеся ряды [18]:

$$\begin{aligned} \bar{U}_0(\gamma) &= \frac{1}{2h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{l}{h}\right)^{2n} S(n, \arcsin \frac{h}{u}), \\ \bar{U}_1(\gamma) &= \frac{-1}{2h^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{l}{h}\right)^{2n} \left\{ \left(\frac{h}{u}\right)^{2n} \frac{h}{\sqrt{u^2 - h^2}} - (2n+1) S(n, \arcsin \frac{h}{u}) \right\}, \\ \bar{U}_2(\gamma) &= \frac{-1}{2h^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{l}{h}\right)^{2n} S(n+1, \arcsin \frac{h}{u}), \\ \bar{U}_3(\gamma) &= \frac{-1}{2h^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{l}{h}\right)^{2n} S(n+1, \arcsin \frac{h}{u}), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$u = \sqrt{c^2 + \gamma}, \quad h = \sqrt{c^2 - a^2}, \quad l = \sqrt{c^2 - b^2}, \quad S(n, \theta) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \bar{S}(n, \theta), \quad n \geq 0, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}\bar{S}(n, \theta) &= \theta - \sum_{m=1}^n \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!} \sin^{2m-1} \theta \cos \theta \\ &= \theta + \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^m \Lambda_{mj} \sin 2j\theta = \theta - \frac{n}{n+1} \sin 2\theta + \sum_{m=2}^n \sum_{j=2}^m \Lambda_{mj} \sin 2j\theta,\end{aligned}\quad (4.10)$$

$$\Lambda_{mj} = \frac{(-1)^j j ((m-1)!)^2}{(m-j)!(m+j)!}, 1 \leq j \leq m. \quad (4.11)$$

В работе [18] даны результаты сравнительного анализа потенциала и силы притяжения астероида Апофис для двухосного и трёхосного эллипсоидов. Выполненный с помощью численного и аналитического методов анализ показал высокую точность их вычисления, с относительной ошибкой $\sim 10^{-12}$. Сделано также сравнение с результатами вычисления силовой функции и ускорения приближенным разложением потенциала по сферическим гармоникам до 4-го порядка включительно. Показано, что при одинаковой степени приближения (4 порядка) разработанный аналитический метод эффективнее.

Ускорение $\mathbf{a}_1$ сначала определяется в астероидоцентрической связанной СК с помощью разработанного алгоритма (4.7)-(4.8). Затем оно преобразуется в инерциальную СК (4.1). Для этого принято, что астероид регулярно вращается вокруг своей малой оси с периодом $T_a \approx 30.56$ ч. Направление оси вращения постоянно в пространстве, в эклиптической системе координат оно определяется углами долготы 250° и широты -75° [98]. Гравитационный параметр Апофиса взят в диапазоне $\mu_A = 1.8 \dots 2.86$ м³/с² (масса Апофиса $2.7 \dots 4.3 \times 10^{10}$ кг). Средний радиус Апофиса принят равным 160 м. Так как оценка отношений главных осей аппроксимирующего эллипсоида для астероида Апофис дала $\alpha = c/a \approx 1.5$ (± 0.2), $\alpha_1 = b/a \approx 1.06$ (± 0.02) [98], в настоящей работе анализ выполнен для $\alpha = (1.3; 1.5; 1.7)$, $\alpha_1 = (1.04; 1.06; 1.08)$.

Возмущающее ускорение $\mathbf{a}_2$ от небесных тел вычисляется в модифицированной форме, близкой к методу Энке, аналогично [38, 39, 46]. При этом векторы положения небесных тел относительно Солнца определяются из Эфемериды DE421, вектор положения астероида вычисляется интегрированием уравнений возмущенного движения астероида вокруг Солнца в

гелиоцентрической геоэкваториальной инерциальной СК.

Возмущение $\mathbf{a}_3$ от давления солнечного света учитывает давление на КА и на панели солнечных батарей при движении вне тени Апофиса. Суммарное возмущающее ускорение $\mathbf{a}_3$ имеет вид:

$$\mathbf{a}_3 = k_s (C_{sc}F_{sc} + C_{sp}F_{sp}) (P/\tilde{d}^2)(\mathbf{d}/d)/m_{sc} - \mathbf{a}_{3a}, \quad (4.12)$$

где k_s – коэффициент тени: $k_s=1$, если КА освещен Солнцем, $k_s=0$ – в противном случае; C_{sc} , C_{sp} – коэффициенты отражения для КА и солнечных панелей; F_{sc} , F_{sp} – их миделевая средняя площадь, соответственно; $P=4.65 \times 10^{-6}$ Н/м² – солнечная постоянная; $\mathbf{d}$ – радиус-вектор КА относительно Солнца, $d=|\mathbf{d}|$, $\tilde{d}=d/1\text{a.e.}$, m_{sc} – масса КА; $\mathbf{a}_{3a}$ – ускорение, сообщаемое астероиду давлением солнечной радиации, оно мало: $|\mathbf{a}_{3a}|/|\mathbf{a}_3| \ll 1$, поэтому на данном этапе анализа членом $\mathbf{a}_{3a}$ пренебрегли. При определении коэффициента тени k_s применена цилиндрическая модель тени и учтено влияние трёхосности астероида.

Для анализа орбит спутника астероида рассмотрены два варианта КА [2, 38, 39, 46]. Для главного варианта, соответствующего указанному выше эксперименту с длительным пассивным движением спутника у астероида и последующим уточнением орбиты астероида, рассмотрен мини-КА с радиомаяком. Принято, что этот мини-КА имеет форму шара с диаметром 40 см, массой $m_{sc}=10$ кг, для него $C_{sc}=1.4$, $F_{sp}=0$. Рассмотрен также вариант основного для экспедиции к астероиду КА с кратковременным (до 4 месяцев) пребыванием у астероида и последующим его возвращением к Земле. Для этого КА принято: масса $m_{sc}=600$ кг, $F_{sc}=5$ м², $F_{sp}=10$ м², $C_{sp}=1.1$, $C_{sc}=1.4$.

С точки зрения анализа времени существования T КА на орбите спутника Апофиса, в течение этого времени T КА не должен столкнуться с поверхностью астероида и не должен отлететь далеко от него, вне сферы действия относительно Солнца с радиусом ~ 2 км. Для определенности в качестве критерия стабильности движения КА принято, что его высота H полета над поверхностью астероида должна меняться в диапазоне $0 < H < 5$ км.

Орбита КА вычисляется путем совместного интегрирования уравнений

движения астероида вокруг Солнца и КА вокруг астероида. Начальной датой t_0 движения КА и астероида выбрано 23.04.2020 г., это соответствует дате полета к Апофису для оптимальной траектории полета к Апофису с возвращением к Земле [38, 39, 46]. Начальная орбита КА бралась круговой с радиусом r_0 в диапазоне 0.5-2 км. Начальная ориентация плоскости орбиты определялась наклоном $i_0=90^\circ$ и долготой восходящего узла $\Omega_0=90^\circ$. При этом начальная плоскость орбиты КА примерно ортогональна солнечным лучам, что, как было показано, необходимо для стабильности орбиты КА [38, 39, 46]. Для мини-КА с радиомаяком необходимо быть несколько лет вблизи Апофиса при пассивном движении, чтобы обеспечить длительное слежение за спутником Апофиса с помощью наземных радиотехнических средств.

4.2. Выявление стабильных орбит спутника Апофиса

Для получения надежных характеристик орбитального движения спутника астероида был выполнен обширный комплекс расчетов, позволивших промоделировать особенности этого движения для широкого диапазона основных параметров задачи ($\mu_A=1.8-2.86 \text{ м}^3/\text{с}^2$, $\alpha=1.3-1.7$, $\alpha_1=1.04-1.08$, $r_0=0.5-2 \text{ км}$). Приведем основные результаты этого анализа.

Сначала приведем результаты для мини-КА при учете всех возмущений на его движение. Главный результат анализа заключается в том, что показана возможность создания стабильной орбиты мини-спутника астероида Апофис как трёхосного эллипсоида. Можно выбрать начальные элементы орбиты КА, чтобы получить стабильную орбиту спутника астероида Апофис в течение нескольких лет, – до тесного сближения астероида с Землёй в 2029 г. Для того, чтобы создать "устойчивое", с точки зрения «времени жизни», движение мини-КА вокруг астероида в течение нескольких (до 9) лет, можно взять начальную плоскость орбиты примерно ортогонально солнечным лучам (например, для принятой здесь начальной даты 23.04.2020 г. взять начальную круговую орбиту с параметрами $i_0 \approx \Omega_0 \approx 90^\circ$) и «рациональный» начальный радиус орбиты ($r_0 \approx 1.5 \text{ км}$ при $\mu_A=1.8-2.86 \text{ м}^3/\text{с}^2$, $\alpha=1.3-1.7$, $\alpha_1=1.04-1.08$).

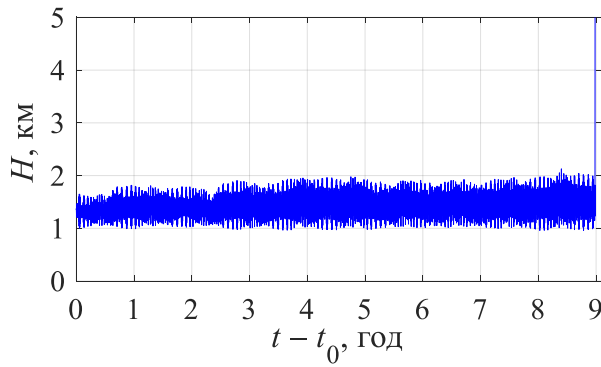


Рис. 4.1. Эволюция высоты мини-КА над поверхностью Апофиса

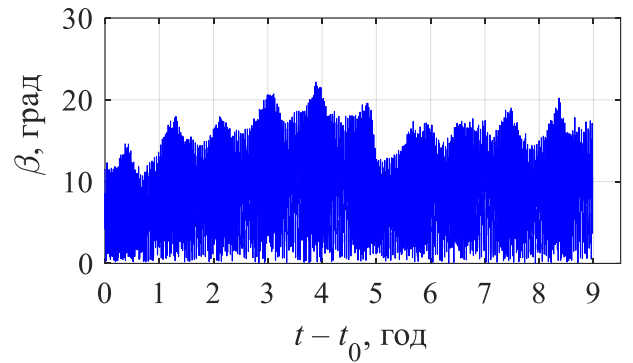


Рис. 4.2. Эволюция угла β между нормалью к плоскости орбиты мини-КА и направлением астероид-Солнце

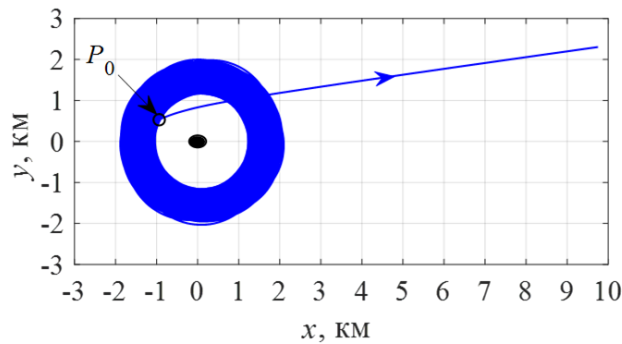


Рис. 4.3. Орбитальное движение мини-КА в плоскости, ортогональной направлению астероид-Солнце

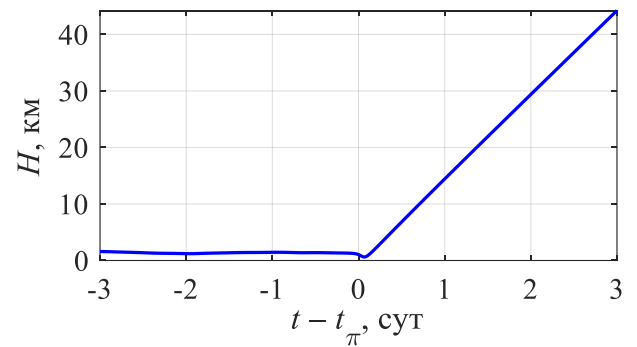


Рис. 4.4. Эволюция высоты мини-КА над поверхностью астероида Апофис по времени $t - t_\pi$

На рис. 4.1 для данного случая астероида как трёхосного эллипсоида показана эволюция высоты H мини-спутника над поверхностью Апофиса для одного типичного варианта значений основных параметров ($\mu_A = 2.86 \text{ м}^3/\text{с}^2$, $i_0 = \Omega_0 = 90^\circ$, $r_0 = 1.5 \text{ км}$, $\alpha = 1.5$, $\alpha_1 = 1.06$), соответствующих начальной ориентации орбиты КА, близкой к ортогональной к направлению астероид-Солнце. Видно, что мини-спутник стабильно держится вблизи Апофиса в течение ~ 9 лет – до тесного сближения с Землёй в 2029 г. При этом высота мини-спутника над поверхностью Апофиса меняется в диапазоне 1 ... 2 км. Лишь через ~ 9 лет после начала полета, в 2029 г., когда астероид Апофис подлетает к Земле на минимальное расстояние до Земли ~ 38 тыс. км, спутник улетает от астероида.

На рис. 4.2 показана эволюция угла β между нормалью к плоскости орбиты мини-спутника и направлением астероид-Солнце для этого же варианта. При

этом угол β остается малым, меняется от 11° в диапазоне $0 \dots 22^\circ$: орбита спутника прецессирует, оставаясь примерно ортогональной направлению Солнце-астероид, при этом линейные размеры орбиты меняются мало, в основном меняется ориентация плоскости орбиты.

На рис. 4.3 приведена картина орбитального движения мини-спутника в плоскости, ортогональной текущему направлению астероид-Солнце, в течение 9 лет полета, для прежнего случая. Здесь ось x направлена по нормали к плоскости орбиты астероида, ось y – по текущей трансверсали движения астероида. В центре этой картины показан астероид. При этом все время спутник остается в близкой окрестности астероида. Он улетает от астероида лишь в конце движения, при тесном сближении Апофиса с Землей в 2029 г. под влиянием сильного возмущения от Земли. Точка P_0 соответствует началу отлета спутника от астероида. Для этой заключительной фазы полета спутника астероида на рис. 4.4 приведена зависимость высоты H мини-КА от времени, отсчитываемого от момента t_π прохождения астероида через перигей в 2029 г.

Для выявления допустимых значений начального радиуса круговой орбиты спутника, обеспечивающего стабильное движение в течение 9 лет (2020-2029 гг.), варьировался начальный радиус r_0 орбиты мини-КА в широком диапазоне. Этот анализ позволил выявить «оптимальной» диапазон значений начального радиуса r_0 , для которого при начальной плоскости орбиты мини-КА, ортогональной к солнечным лучам, мини-КА в течение указанных 9 лет будет оставаться около астероида Апофис. При $\mu_A = 2.86 \text{ м}^3/\text{с}^2$, $\alpha = 1.3-1.7$, $\alpha_1 = 1.04-1.08$, этот диапазон составляет $r_0 \approx 1.2-2$ км. Если радиус r_0 увеличить до 2.1 км, то «время жизни» T резко уменьшится до 140 сут. Если радиус r_0 уменьшить до 1.1 км, то «время жизни» T также заметно уменьшится, до ~ 7 лет. Для более легкого астероида $\mu_A = 1.8 \text{ м}^3/\text{с}^2$ «оптимальный» диапазон составляет $r_0 \approx 1.25-1.64$ км. Отметим, что, когда начальный радиус r_0 меньше значений в указанных «оптимальных» диапазонах, КА обычно сталкивается с астероидом, а для высоких орбит, когда r_0 более значения из «оптимальных» диапазонов, КА быстро улетает от астероида из-за слабого притяжения астероида и сильного

влияния давления солнечного света, т.е. давление солнечного света как бы «выдувает» спутник из близкой окрестности астероида. Некоторые результаты этого анализа даны в табл. 4.1.

Таблица 4.1. «Время жизни» T мини-КА при разных значениях параметров μ_A , α , α_1 и r_0 для случая начальной круговой орбиты при $i_0=\Omega_0=90^\circ$

μ_A , $\text{м}^3/\text{с}^2$	α	T , сут $r_0=0.5$ км, $\alpha_1=1.04-1.06-1.08$	T , сут $r_0=1$ км, $\alpha_1=1.04-1.06-1.08$	T , сут $r_0=1.5$ км, $\alpha_1=1.04-1.06-1.08$	T , сут $r_0=2$ км, $\alpha_1=1.04-1.06-1.08$
1.8	1.3	52; 306; 160	3278; 3278; 3278	3278; 3279; 3279	84; 84; 84
	1.5	74; 93; 156	2036; 3060; 3087	3279; 3284; 3278	84; 84; 84
	1.7	211; 67; 44	2407; 2074; 2417	3279; 3278; 3278	84; 84; 84
2.86	1.3	66; 65; 64	575; 789; 1041	3278; 3282; 3279	3278; 3279; 3278
	1.5	63; 62; 61	1260; 511; 1096	3279; 3278; 3278	3279; 3278; 3279
	1.7	34; 46; 64	228; 820; 570	3278; 3278; 3278	3278; 3278; 3279

Таблица 4.2. «Время жизни» T основного КА при разных значениях параметров μ_A , α , α_1 и r_0 для случая начальной круговой орбиты при $i_0=\Omega_0=90^\circ$

μ_A , $\text{м}^3/\text{с}^2$	α	T , сут $r_0=0.5$ км, $\alpha_1=1.04-1.06-1.08$	T , сут $r_0=1$ км, $\alpha_1=1.04-1.06-1.08$	T , сут $r_0=1.5$ км, $\alpha_1=1.04-1.06-1.08$	T , сут $r_0=2$ км, $\alpha_1=1.04-1.06-1.08$
1.8	1.3	184; 70; 47	769; 3278; 3278	90; 90; 90	5; 5; 5
	1.5	64; 35; 25	1082; 2045; 2387	90; 90; 90	5; 5; 5
	1.7	43; 60; 54	791; 722; 1095	90; 90; 90	5; 5; 5
2.86	1.3	69; 59; 48	1538; 3281; 3278	3278; 3278; 3279	77; 77; 77
	1.5	47; 45; 44	1305; 598; 966	1755; 3317; 3279	77; 77; 77
	1.7	309; 96; 46	460; 463; 350	1760; 2725; 2067	77; 77; 77

Выполнен также анализ «времени жизни» основного КА. Полученные результаты приведены в таблице 4.2. Здесь тоже видно малое влияние несферичности астероида на «время жизни» КА, движущегося на «высокой» орбите спутника астероида ($r_0 \geq 1.5$ км) и значительно большее влияние несферичности астероида для КА на низкой орбите спутника астероида ($r_0 \leq 1$ км). Тем не менее, при $r_0=0.5 \dots 2$ км, «время жизни» T основного КА обычно более месяца. Отметим, что для основного КА орбита может корректироваться его двигателем, и благодаря этому увеличивается его «время жизни» T .

4.3. Выводы по четвертой главе

Разработана математическая модель орбитального движения КА вокруг астероида с учетом основных возмущений от притяжения больших небесных тел, давления солнечного света, а также несферичности астероида как трёхосного эллипсоидов. Разработаны алгоритмы определения потенциала и силы притяжения астероида как однородного трёхосного эллипсоида. Разработаны численный и аналитический (в виде быстро сходящихся рядов) методы вычисления эллиптических интегралов в формуле Дирихле.

Для астероида Апофис выполнен анализ возмущенного пассивного движения спутника астероида. Анализ показал, что в случае Апофиса как трёхосного эллипсоида есть возможность обеспечить длительное стабильное движение спутника астероида. Можно так выбрать начальные элементы орбиты КА (начальный радиус орбиты $r_0 \sim 1.5$ км и ориентацию плоскости орбиты ортогонально направлению солнечных лучей), что получится стабильная орбита КА вокруг астероида Апофис с длительным, в течение нескольких лет, временем жизни – до тесного сближения астероида с Землёй в 2029 г., когда из-за сильного возмущения от Земли КА улетит от астероида. Это может быть использовано для уточнения орбиты опасного астероида.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании анализа выполненного диссертационного исследования можно сказать, что все поставленные задачи решены, и могут быть сделаны следующие основные выводы:

1. Разработаны методика и алгоритмы определения орбиты и оценки точности определения орбиты опасного астероида при оптических космических измерениях системой «Небосвод» с учетом как случайных и систематических ошибок измерений, так и априорной информации, а также ряда мешающих факторов, таких как ошибок модели движения астероида, а также модели измерительной системы. Для анализа влияния ошибок мешающих параметров на результаты обработки измерений введен аналог коэффициента «отношение сигнал-шум».

2. Получены оценки точностей навигации для оптических измерений системой «Небосвод» при определении орбит астероидов Апофис, 2008 TC₃ и Челябинского метеорита с учетом практических ограничений работы системы. Показано, что применение метода уточнения мешающих параметров позволяет заметно уменьшить влияние ошибок знания этих параметров на точность навигации по сравнению со случаем без их уточнения.

3. Показана потенциальная возможность наблюдений системой «Небосвод» и высокоточного определения орбит не только крупных и средних астероидов типа Апофиса (~320 м), но и также более мелких (до 4-50 м) тел, приближающихся к Земле, в том числе и дневных астероидов размером ~ 50 м и более.

4. Разработаны методика и алгоритмы определения характеристик падения астероида на Землю. Получена вероятная область падения астероида Апофис на поверхность Земли в 2036 г., исследованы геометрические, временные и энергетические характеристики столкновительных траекторий и вероятной полосы соударения астероида с Землёй.

5. Разработана механико-математическая модель орбитального движения

КА вокруг астероида с учетом возмущений от притяжения небесных тел, давления солнечного света и несферичности астероида как однородного трёхосного эллипсоида. Разработаны методика и алгоритмы определения потенциала и ускорения притяжения астероида как однородного трёхосного эллипсоида. Получено аналитическое представление для эллиптических интегралов в формуле Дирихле, выраженное в виде быстро сходящихся рядов.

6. Исследовано пассивное возмущенное движение спутника астероида Апофис как трёхосного эллипсоида. Показана возможность обеспечения длительного (до 9 лет) стабильного движения КА вокруг астероида Апофис. Выявлены условия стабильности: начальная плоскость орбиты КА должна быть примерно ортогональна солнечным лучам и начальный радиус орбиты ~ 1.5 км. Это может быть использовано для уточнения орбиты опасного астероида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абалакин В.К., Аксенов Е.П. и др. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Изд. 2. М.: Наука, 1976. 864 с.
2. Автоматические космические аппараты для фундаментальных и прикладных научных исследований / Под общей редакцией проф. Г.М. Полищука и проф. К.М. Пичхадзе. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. 660 с.
3. Аджян А.П., Аким Э.Л., Алифанов О.М. и др. Ракетно-космическая техника. Машиностроение. Энциклопедия. Т. IV-22 / под ред. Легостаева В.П. В 2 кн. Кн.1. М.: Машиностроение, 2012. С. 15–26.
4. Адушкин В.В., Бакланов О.Д., Бармин И.В. и др. Международная Система планетарной защиты «ЦИТАДЕЛЬ». Концепция создания. М. 2012. 24 с.
5. Аким Э.Л., Энеев Т.М. Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений // Космические исследования. 1963. Т. 1. Вып. 1. С. 5–50.
6. Аксенов Е.П., Чазов В.В. Модель движения ИСЗ. Главная проблема. Основные алгоритмы. М.: ГАИШ МГУ, 2011. 188 с.
7. Бажинов И.К., Гаврилов В.П., Ястребов В.Д. и др. Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса «Салют-6»-«Союз»-«Прогресс». М.: Наука, 1985. 376 с.
8. Баландин Д.В., Коган М.М. Применение линейных матричных неравенств в синтезе законов управления. Учебно-методические материалы по специальному курсу «Управление колебаниями динамических систем». Нижний Новгород, 2010. 93 с.
9. Бахшиян Б.Ц. Оценивание и коррекция параметров движущихся систем: курс лекций. М., Серия «Механика, управление и информатика», 2012. 72 с.
10. Бахшиян Б.Ц., Суханов А.А., Федяев К.С. Оценка точности определения параметров движения астероида Апофис по результатам измерений // Космические исследования. 2010. Т.48. №5. С. 427–432.

11. Белоусов Л.Ю. Оценивание параметров движения космических аппаратов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 216 с.
12. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы: учеб. пособие. Томск: изд-во Том. ун-та, 2007. 178 с.
13. Боровин Г.К., Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В. и др. Баллистико-навигационное обеспечение полетов автоматических космических аппаратов к телам Солнечной системы / под ред. д.ф.-м.н. А.Г. Тучина. Химки: Издатель АО «НПО Лавочкина», 2018. 336 с.: ил.
14. Брумберг В.А., Глебова Н.И., Лукашова М.В. и др. Труды ИПА РАН, вып. 10, «Эфемеридная астрономия», 2004. 479 с.
15. Быкова Л.Е, Галушина Т.Ю. Эволюция вероятной области движения астероида 99942 Апофис // Материалы международной конференции «Околоземная астрономия-2007», 3-7 сентября 2007 г. п. Терскол. Нальчик: Изд. М.и В. Котляровы, 2008. С. 48–54.
16. Гуо П., Ивашкин В.В. Оценка точности определения параметров орбиты опасного астероида по оптическим измерениям комплекса «Небосвод» // Изв. вузов. Физика. 2016. Т. 59. № 10/2. С. 51–56.
17. Гуо П., Ивашкин В.В., Стихно К.А. Анализ структуры множества вероятных траекторий соударения астероида Апофис с Землёй в 2036 г. // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2017. №4. Вып. 2. С. 50–55.
18. Гуо П., Ивашкин В.В. Методы вычисления потенциала однородного трёхосного эллипсоида и их применение к анализу динамики спутника астероида // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 94. 32 с.
19. Гуо П., Ивашкин В.В. Оценка точности определения параметров движения нелинейной динамической системы по результатам измерений при наличии мешающих параметров // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 213. 36 с.
20. Гуо П., Ивашкин В.В. Оценка точности определения столкновительной с Землёй орбиты опасного астероида Апофис по оптическим измерениям

- комплекса «Небосвод» // Некоторые аспекты современных проблем механики и информатики: сб. науч. ст. М.: ИКИ РАН. 2018. С. 212–226.
21. Гуо П., Ивашкин В.В. Анализ точностей определения орбит опасных астероидов моделированием оптических измерений космической системы «Небосвод» // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 60. 32 с.
22. Гуо П., Ивашкин В.В., Кулешов Ю.П. Оценка точности определения параметров орбиты опасного астероида на основе моделирования космических оптических измерений // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 19-24 августа 2019 г. Секция I. Подсекция I-6. Механика космического полета. Сборник статей. С. 35–37.
23. Дедус Ф.Ф., Емельянов В.А. и др. «Космический барьер» оперативного обнаружения малых астероидов, не обнаруживаемых наземными телескопами // Труды конференции «Околоземная астрономия-2015», 31 августа – 5 сентября 2015 г., п. Терскол. М.: Янус-К, 2015. С. 188–194.
24. Динамические процессы в геосферах. Выпуск 5. Геофизические эффекты падения Челябинского метеороида: сборник научных трудов ИДГ РАН. Специальный выпуск. / Под. ред. Ю.И. Зецера. М.: ГЕОС, 2014. 160 с.
25. Дубошин Г.Н. Теория притяжения. М.: ГИФМЛ. 1961. 288 с.
26. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука. 2 изд. 1968. 798 с.
27. Емельянов В.А., Меркушев Ю.К. Точность определения орбит малых ОНТ с помощью двух космических телескопов, размещенных на орбите Земли. // Сб. трудов конф. «Околоземная астрономия–2005», 19–24 сентября 2005 г., г. Казань. 2005. С. 102–108.
28. Заботин А.С., Кочетова О.М., Шор В.А. Сближение малой планеты (99942) Апоphis=2004 MN4 с Землёй в 2029 г. // Материалы конференции «Астероидно-кометная опасность – 2005». 2005. С. 134–137.
29. Зайцев А.В. Система планетарной защиты "Цитадель". Концептуальный проект // НПО им. С. А. Лавочкина. 2000. 70 с.

30. Зверева М.А., Нароенков С.А., Шугаров А.С., Шустов Б.М. Космическая система обнаружения опасных небесных тел, приближающихся к Земле с дневного неба («СОДА») // Космические исследования. 2018. Том. 56. № 4. С. 300–310.
31. Ивашкин В.В. Модель орбитального движения КА вблизи ядра кометы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1998. № 60. 32 с.
32. Ивашкин В.В., Стихно К.А. О проблеме коррекции орбиты сближающегося с Землёй астероида (99942) Apophis // ДАН. 2008. Т. 419. № 5. С. 624–627.
33. Ивашкин В.В., Стихно К.А. О предотвращении возможного столкновения астероида Apophis с Землёй // Астрон. вестн. 2009. Т. 43. № 6. С. 502–516.
34. Ивашкин В.В., Стихно К.А. О применении гравитационного воздействия на астероид Apophis для коррекции его орбиты. // ДАН. 2009. Т. 424. № 5. С. 621–626.
35. Ивашкин В.В., Гуо П. Анализ точностей определения параметров орбитального движения опасного астероида по измерениям комплекса «Небосвод» // Труды международной конференции «Околоземная астрономия-2015 г.», п. Терскол. М.: Янус-К, 2015. С. 181–187.
36. Ивашкин В.В., Стихно К.А., Гуо П. О структуре множества вероятных траекторий соударения астероида Апофис с Землёй в 2036 г. // ДАН. 2017. Т. 475. № 4. С. 389–394.
37. Ивашкин В.В., Гуо П., Стихно К.А. Исследование характеристик вероятной области соударения астероида Апофис с Землёй в 2036 г. // Космические исследования, 2019 (Принята к печати).
38. Ивашкин В.В., Лан А. Анализ орбитального движения спутника астероида Апофис // Космические исследования. 2017. Т. 55. № 4. С. 268–277.
39. Ивашкин В.В., Лан А., Гуо П. Анализ динамики орбитального движения искусственного спутника астероида Апофис // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 19-24 августа 2019 г. Секция I. Подсекция I-6. Механика космического

полета. Сборник статей. С. 58–60.

40. Игнатович Е.И., Каплев С.А., Можаров И.В., Почукаев В.Н., Щекутьев А.Ф. Особенности задачи эфемеридного обеспечения навигационных космических аппаратов "ГЛОНАСС" с использованием межспутниковых измерений, методы и алгоритмы её решения. Часть I. // Космонавтика и ракетостроение, 2016. 6(91). С. 78–93.
41. Клаус А. О систематических ошибках в задачах определения траектории // Труды 1-ого симпозиума ИФАК, г. Ставангер. М.: Наука, 1968. С. 296–306.
42. Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир. 2007. 512 с.
43. Кочетова О.М., Чернетенко Ю.А., Шор В.А. Орбита астероида (99942) Апофис, основанная на наблюдениях 2004-2013 гг. // Труды ИПА РАН. 2014. Вып. 31. С. 49–58.
44. Крылов В.И. Координатно-временные преобразования в геодезии: учебное пособие. М.: Изд-во МИИГАиК, 2014. 90 с.
45. Кулешов Ю.П., Егоров В.Л., Мисник В. П. и др. Принципы и основные технические решения создания астрономического космического комплекса обнаружения и определения параметров движения опасных для Земли астероидов и комет (комплекс «Небосвод») // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2013. № 4. Т. 2. С. 89–97.
46. Лан А. Методика определения траекторий космического аппарата для экспедиции Земля-астероид-Земля с учетом выбора орбит пребывания у астероида и ее применение для экспедиции к астероиду Апофис // Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н., МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. 150 с.
47. Лидов М.Л. К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // Космические исследования. 1964. Т.2. №5.
48. Линник Ю.В. Статистические задачи с мешающими параметрами // Доклады АН СССР, 1964. Том. 157. №1. С. 49–51.
49. Лысенко Л.Н. Наведение баллистических ракет: учебное пособие. М.: Изд-

во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 445 с.

50. Медведев Ю.Д., Свешников М.Л., Сокольский А.Г., Тимошкова Е.И., Чернетенко Ю.А., Черных Н.С., Шор В.А. Астероидно-кометная опасность / Под ред. А. Г. Сокольского. ИТА, МИПАО, СПб, 1996. 244 с.
51. Назаренко А.И. Задачи стохастической космодинамики: Математические методы и алгоритмы решения. М.: Ленанд, 2018. 352 с.
52. Назиров Р.Р., Эйсмонт Н.А. Гравитационные маневры как способ направить малые астероиды на траекторию встречи с опасными околоземными объектами // Космические исследования, 2010. Т.48. №5. С. 491–496.
53. Нароенков С.А., Шустов Б.М., Медведев Ю.Д., Шор В.А., Девяткин А.В. О концепции российского информационно-аналитического центра по проблеме астероидно-кометной опасности // Астрон. вестн. 2014. Том 48. № 6. С. 473–481.
54. Патент РФ 2597028. Способ обзора космического пространства между Солнцем и Землёй, недоступного для наблюдения оптическими средствами, находящимися на Земле и на околоземных орбитах, из-за их засветки Солнцем, с космического аппарата, размещённого на орбите Земли на постоянном расстоянии от Земли.
55. Патент РФ №2610066. Космическая система обзора небесной сферы для наблюдения небесных объектов и обнаружения опасных для Земли небесных тел – астероидов и комет.
56. Рыхлова Л.В., Багров А.В. Удастся ли отразить угрозу Апофиса без труда Российских ученых и инженеров? Двадцать лет исследования проблемы // Конференция «Актуальные проблемы современной космонавтики», ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 16.11.2017.
57. Соколов Л.Л., Башаков А.А., Питьев Н.П. Особенности движения астероида 99942 Апофис // Астрон. вестн. 2008. Т. 48. № 1. С. 20–29.
58. Соколов Л.Л., Борисова Т.П., Васильев А.А., Петров Н.А. Свойства траекторий соударения астероидов с Землёй // Астрон. вестн. 2013. Т. 47.

№. 5. С. 441–447.

59. Соколов Л.Л., Кутеева Г.А. Возможные соударения астероида Апофис после уточнения его орбиты // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2015. Сер. 1. Т. 2 (60). Вып. 1. С. 148–156.
60. Степанов О.А. Методы обработки навигационной измерительной информации. СПб: Университет ИТМО, 2017. 196 с.
61. Стихно К.А., Гуо П., Ивашкин В.В. Анализ структуры вероятной зоны падения астероида Апофис на Землю в 2036 г. // Изв. вузов. Физика. 2016. Т. 59. № 10/2. С. 57–62.
62. Тучин А.Г. Баллистико-навигационное проектирование полётов к Луне, планетам и малым телам Солнечной системы // Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2010. 238 с.
63. Чубей М.С., Куприянов В.В., Львов В.Н. и др. Средства, возможности и методы решения задач астероидной и кометной опасности в проекте «Орбитальная звездная стереоскопическая обсерватория» // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2013. №4. Т.2. 154–160.
64. Шор В.А., Чернетенко Ю.А., Кочетова О.М., Железнов Н.Б. О влиянии эффекта Ярковского на орбиту Апофиса // Астрон. вестн. 2012. Т. 46. № 2. С.131–142.
65. Шугаров А.С., Шустов Б.М., Мартынов М.Б. и др. О концепции экономической космической системы обнаружения опасных небесных тел // Космические исследования. 2015. Том 53. № 2. С. 95–104.
66. Шустов Б.М., Рыхлова Л.В. Астероидно-кометная опасность: вчера, сегодня, завтра. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 384 с.
67. Шустов Б.М., Рыхлова Л.В., Кулешов Ю.П. Концепция системы противодействия космическим угрозам: астрономические аспекты // Астрон. вестн. 2013. Т. 47. № 4. С. 327–340.
68. Эльясберг П.Е. Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976. 416 с.

69. Энсеев Т.М., Ахметшин Р.З., Ефимов Г.Б. К вопросу об астероидной опасности // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М., 2011. № 35. 40 с.
70. Ягудина Э.И., Шор В.А. Орбита АСЗ (99942) Apophis = 2004 MN4 из анализа оптических и радарных наблюдений // Всероссийская конференция «Астероидно-кометная опасность–2005». Материалы конференции. СПб: ИПА РАН. 2005. С. 355–358.
71. Aleshkina E.Y., Kupriyanov V.V., et al. Astrometric and Photometric Studies of the Asteroid 2008 TC3 // *Solar System Research*, 2011. Vol. 45. №1. Pp. 34–42.
72. Balmino G. Gravitational potential harmonics from the shape of an homogeneous body // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 1994. Vol. 60. Pp. 331–364.
73. Binzel R.P., Rivkin A.S., et al. Spectral properties and composition of potentially hazardous Asteroid (99942) Apophis // *Icarus*. 2009. Vol. 200(2). Pp. 480–485.
74. Brown P.G. and 32 co-authors. A 500-kiloton airburst over Chelyabinsk and an enhanced hazard from small impactors // *Nature*. 2013. Vol. 503. Pp. 238–241.
75. Charania A.C., Schaffer M., Olds J.R., and Koeing J. Foresight: a small satellite radio tagging mission design to near Earth object Apophis // 26th International Symposium on Space Technology and Science (ISTS), Hamamatsu City, Japan, June 1-8. 2008. 10 p.
76. Chesley S.R. Potential Impact Detection for Near-Earth Asteroids: The Case of 99942 Apophis (2004 MN4) // *Proc. 229th IAU Symp.*, 2005, Ferraz Mello, S., Lazaro, D., and Fernandes, J., Eds., New York, Melbourne, Madrid: Cambridge Univ. Press. 2006. Pp. 215–228.
77. Chesley S.R., Milani A., et al. An updated assessment of the impact threat from 99942 Apophis // *DPS meeting*, 2009, #41, id.43.06.
78. Delbò M., Cellino A., Tedesco E.F. Albedo and size determination of potentially hazardous asteroids: (99942) Apophis // *Icarus*. 2007. Vol. 188. Pp. 266–269.
79. Dunham D.W., and Genova A.L. Using Venus for locating space observatories to discover potentially hazardous asteroids // *Cosmic Research*. 2010. Vol. 48. № 5. Pp. 424–429.

80. Emel'yanenko V.V., Naroenkov S.A., Jenniskens P., and Popova O.P. The orbit and dynamical evolution of the Chelyabinsk object // *Meteoritics & Planetary Science* 49, Nr 12, 2169–2174 (2014).
81. Farnocchia D., Chesley S.R., et al. Yarkovsky-driven impact risk analysis for asteroid (99942) Apophis // *Icarus*. 2013. Vol. 224. Pp. 192–200.
82. Garmier Romain and Barriot Jean-Pierre. Ellipsoidal harmonic expansions of the gravitational potential: theory and application // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2001. Vol. 79. pp. 235–275.
83. Garmier R., Barriot J.-P., et al. Modeling of the Eros Gravity Field as an Ellipsoidal Harmonic Expansion from the NEAR Doppler Tracking Data // *Geophysical Research Letters*. 2002. Vol. 29. № 8. p. 1231.
84. Gennery D.B. Scenarios for dealing with Apophis // 2007 Planetary Defense Conference. Washington, DC. 2007.
85. Giorgini J.D., Benner L., Ostro S.J., et al. Predicting the Earth encounters of (99942) Apophis // *Icarus*. 2008. Vol. 193. Pp. 1–19.
86. Guo Peng, Ivashkin V.V., Stikhno C.A. and Shkapov P.M. Determination and investigation of asteroid Apophis trajectories set potentially colliding with the Earth in 2036 // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018. Vol. 468, 012023. DOI: 10.1088/1757-899X/468/1/012023.
87. Jenniskens P., Shaddad M.H., et al. The impact and recovery of asteroid 2008 TC3 // *Nature*. 2009. Vol. 458. Iss. 7237. Pp. 485–488.
88. Kaplan G. H. The IAU Resolutions on Astronomical Reference Systems, Time Scales, and Earth Rotation Models. Explanation and Implementation. U.S. Naval Observatory. Circular N 179. Washington, D.C. 20392. 2005. 118 p.
89. Kozubal M.J., Gasdia1 F. W., et al. Photometric observations of Earth-impacting asteroid 2008 TC3 // *Meteoritics & Planetary Science* 46, Nr 4, 534–542 (2011).
90. Loic Ferrier, Jean-Luc Vérant, and Jean-Marc Moschetta. AeroThermodynamical Study for the Entry of an Apophis-Like Asteroid // 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace

- Exposition, Aerospace Sciences Meetings. AIAA 2011–1037. 21 p.
91. Lu E.T., et al. The B612 Foundation Sentinel Space Telescope // New space. 2013. Vol. 1. № 1. Pp. 42–45.
 92. MacMillan W.D. The Theory of the Potential. Dover, New York. 1958. 528 p.
 93. Milani A., and Gronchi G. Theory of orbit determination. Cambridge university press, 2010. 382 p.
 94. Near Earth Object (NEO) Analysis of Transponder Tracking and Gravity Tractor Performance, Final Report, JPL Task Plan No. 82–120022, September 22, 2008.
 95. Nikolaos K. Pavlis, Simon A. Holmes, Steve C. Kenyon, and John K. Factor. An Earth gravitational model to degree 2160: EGM2008 // EGU general assembly 2008, Vienna, Austria, April 13-18, 2008.
 96. Plescia J.B., Barnourin O., Lawrence D., et al. The Asteroid Probe Experiment (APEX) Mission // 31st Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites, SSC17-VI-05, 8 p.
 97. Popova O.P., Jenniskens P., Emel'yanenko V., et al. Chelyabinsk Airburst, Damage Assessment, Meteorite Recovery, and Characterization // Science. 2013. № 342. Pp. 1069–1073.
 98. Pravec P., et al. The tumbling spin state of (99942) Apophis // Icarus. 2014. Vol. 233. Pp. 48–60.
 99. Russell Schweickart, et al. Threat Characterization: Trajectory Dynamics (White Paper 39). B612 Foundation. 2006 // URL: <https://www.researchgate.net/publication/2176734>.
 100. Scheeres D.J. Dynamics about uniformly rotating triaxial ellipsoids: applications to asteroids // Icarus 110, 225-238 (1994).
 101. Tapley B., Schutz B., Born G. Statistical orbit determination. Elsevier Academic Press, 2004. 563 p.
 102. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/B612_Foundation
 103. URL: <https://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi?sstr=99942>
 104. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Wide-field_Infrared_Survey_Explorer

105. Vallado D.A. Fundamentals of astrodynamics and applications. 4th ed. Microcosm Press, 2013. 1106 p.
106. Vokrouhlicky D, Farnocchia D., et al. The Yarkovsky effect for 99942 Apophis // *Icarus*. 2015. Vol. 252. Pp. 277–283.
107. Wagner S., and Wie B. Robotic and human exploration/deflection mission design for asteroid 99942 Apophis // *Acta Astronautica*. 2013. V. 90. Pp. 72–79.
108. Website of the Apophis' path of risk in 2036: https://drive.google.com/open?id=1VXX1dxJO2e6hn51FFTVf_wbk9gs&usp=sharing.
109. Werner R. A., and Scheeres D. J. Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia // *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 1997. Vol. 65. Pp. 314–344.
110. William Boyce. Comment on a formula for the gravitational harmonic coefficients of a triaxial ellipsoid // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 67, 107–110, 1997.
111. Włodarczyk I. Selected OrbFit impact solutions for asteroids (99942) Apophis and (144898) 2004VD17 // *Contrib. Astron. Obs. Skalnaté Pleso*. 2007. Vol. 37. Pp. 69–82.
112. Włodarczyk I. The impact orbits of the dangerous asteroid (99942) Apophis // *Contrib. Astron. Obs. Skalnaté Pleso*. 2008. 38. 21–32.
113. Włodarczyk I. The potentially dangerous asteroid (99942) Apophis // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2013. Vol. 434. Pp. 3055–3060.
114. Zizka J., Vokrouhlicky D. Solar radiation pressure on (99942) Apophis // *Icarus*. 2011. Vol. 211. Pp. 511–518.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. Два способа решения системы нормальных уравнений для случая уточнения мешающих параметров

Способ 1 обращения матрицы $\tilde{A}$. Из (1.66) матрица частных производных $\partial\tilde{\psi}/\partial\tilde{x}$ имеет блочное разбиение 4×3 . Подставляя её в матрицу $\tilde{A}$, можем представить матрицу $\tilde{A}$ в виде блочной матрицы:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda & \beta_c & \beta_z \\ \beta_c^T & \lambda_c & \beta_{cz} \\ \beta_z^T & \beta_{cz}^T & \lambda_z \end{bmatrix}, \quad (A.1)$$

$$\lambda = P_0^{-1} + H_{x_0}^T R^{-1} H_{x_0}, \lambda_c = S^{-1} + H_c^T R^{-1} H_c, \lambda_z = Q^{-1} + H_z^T R^{-1} H_z.$$

Матрицы λ ($n \times n$), λ_c ($m \times m$) и λ_z ($qM \times qM$) являются положительно определенными и симметричными. Они определяются следующим образом:

$$\lambda = P_0^{-1} + \sum_{k=1}^N \Phi_k^T H_{xk}^T R_k^{-1} H_{xk} \Phi_k, \quad \lambda_c = S^{-1} + \sum_{k=1}^N H_{ck}^T R_k^{-1} H_{ck}, \quad (A.2)$$

$$\lambda_z = \text{diag} \{ \lambda_{z1}, \lambda_{z2}, \dots, \lambda_{zi}, \dots, \lambda_{zM} \}, \lambda_{zi} = Q_i^{-1} + \sum_{k=1}^N H_{zki}^T R_k^{-1} H_{zki}, i = 1, \dots, M.$$

Отметим, что так как здесь матрица H_{zki} (1.48) является ненулевой только тогда, когда удовлетворяется условием $t_i \leq t_k < t_{i+1}$, матрица λ_z является блочно-диагональной матрицей, т.е. все блоки λ_{zi} размерности q последовательно расположены на главной диагонали. Остальные блочные матрицы β_c ($n \times m$), β_z ($n \times qM$) и β_{cz} ($m \times qM$) в матрице $\tilde{A}$ (A.1) имеют вид:

$$\beta_c = H_{x_0}^T R^{-1} H_c, \beta_z = H_{x_0}^T R^{-1} H_z, \beta_{cz} = H_c^T R^{-1} H_z.$$

Ковариационная матрица ошибок оценки $\hat{\tilde{x}}$, т.е. обратная к матрице $\tilde{A}$, также представлена в блочном виде с как матрица с блочным разбиением 3×3 :

$$\tilde{K} = \tilde{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} & \tilde{K}_{13} \\ \tilde{K}_{12}^T & \tilde{K}_{22} & \tilde{K}_{23} \\ \tilde{K}_{13}^T & \tilde{K}_{23}^T & \tilde{K}_{33} \end{bmatrix}. \quad (A.3)$$

Разобьем матрицу $\tilde{A}$ на четыре блока следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda & \beta \\ \beta^T & \gamma \end{bmatrix}, \quad \beta = [\beta_c \quad \beta_z], \quad \gamma = \begin{bmatrix} \lambda_c & \beta_{cz} \\ \beta_{cz}^T & \lambda_z \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Применяя к матрице $\tilde{\mathbf{A}}$ (A.4) лемму обращения блочной матрицы (формулы Фробениуса) и сравнивая с (A.3), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{11} &= (\lambda - \beta \gamma^{-1} \beta^T)^{-1} = \lambda^{-1} + \lambda^{-1} \beta (\gamma - \beta^T \lambda^{-1} \beta)^{-1} \beta^T \lambda^{-1}, \\ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{12} & \tilde{\mathbf{K}}_{13} \end{bmatrix} &= -\tilde{\mathbf{K}}_{11} \beta \gamma^{-1}, \\ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{22} & \tilde{\mathbf{K}}_{23} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{23}^T & \tilde{\mathbf{K}}_{33} \end{bmatrix} &= (\gamma - \beta^T \lambda^{-1} \beta)^{-1} = \gamma^{-1} + \gamma^{-1} \beta^T (\lambda - \beta \gamma^{-1} \beta^T)^{-1} \beta \gamma^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Здесь матрицы $\lambda - \beta \gamma^{-1} \beta^T$ и $\gamma - \beta^T \lambda^{-1} \beta$ соответствуют шуровским дополнениям к подматрицам γ и λ матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$. Согласно лемме Шура [8] они должны быть положительно определенными и симметричными, так как матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ положительно определенная, симметричная. Кроме того, для их обращения по (A.5) целесообразно упростить вычислительную процедуру обращения матрицы γ , поскольку её размерность велика $(m+qM)$. При этом опять применяем формулы Фробениуса для обращения блочной матрицы. Заметим, что матрица γ положительно определенная и симметричная. Тогда её обращение в блочном виде сводится к следующим операциям:

$$\kappa = \gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{12}^T & \kappa_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{cases} \kappa_{11} = (\lambda_c - \beta_{cz} \lambda_z^{-1} \beta_{cz}^T)^{-1} = \lambda_c^{-1} + \lambda_c^{-1} \beta_{cz} (\lambda_z - \beta_{cz}^T \lambda_c^{-1} \beta_{cz})^{-1} \beta_{cz}^T \lambda_c^{-1}, \\ \kappa_{12} = -\lambda_c^{-1} \beta_{cz} \kappa_{22} = -\kappa_{11} \beta_{cz} \lambda_z^{-1}, \\ \kappa_{22} = (\lambda_z - \beta_{cz}^T \lambda_c^{-1} \beta_{cz})^{-1} = \lambda_z^{-1} + \lambda_z^{-1} \beta_{cz}^T (\lambda_c - \beta_{cz} \lambda_z^{-1} \beta_{cz}^T)^{-1} \beta_{cz} \lambda_z^{-1}. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Отсюда следует соотношение

$$\begin{cases} \kappa_{11} = \lambda_c^{-1} - \kappa_{12} \beta_{cz}^T \lambda_c^{-1}, \\ \kappa_{22} = \lambda_z^{-1} - \lambda_z^{-1} \beta_{cz}^T \kappa_{12}. \end{cases}$$

Формулы (A.7) имеют вид, аналогичный (A.5). Матрица λ_c имеет значительно меньшую размерность m , чем матрица λ_z с размерностью qM . При вычислении блоков κ_{11} , κ_{12} и κ_{22} в (A.6)-(A.7) достаточно определить обращение матрицы λ_z . Поскольку матрица λ_z (A.1) является блочно-диагональной, то,

следовательно, её обратная тоже будет блочно-диагональной и имеет вид:

$$\lambda_z^{-1} = \text{diag}\{\lambda_{z1}^{-1}, \dots, \lambda_{zi}^{-1}, \dots, \lambda_{zM}^{-1}\}, \quad \lambda_{zi}^{-1} = \left(\mathbf{Q}_i^{-1} + \sum_{k=1}^N \mathbf{H}_{zki}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_{zki} \right)^{-1}. \quad (\text{A.8})$$

Таким образом, представлен первый фундаментальный способ для определения обратной матрицы $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$ путем разбиения матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ на блоки и применения формул Фробениуса.

Систему нормальных уравнений (1.68) перепишем в виде:

$$\hat{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{11} & \tilde{\mathbf{K}}_{12} & \tilde{\mathbf{K}}_{13} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{12}^T & \tilde{\mathbf{K}}_{22} & \tilde{\mathbf{K}}_{23} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{13}^T & \tilde{\mathbf{K}}_{23}^T & \tilde{\mathbf{K}}_{33} \end{pmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}_c \\ \mathbf{B}_z \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\psi}} + \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{z}}_I \end{bmatrix} \right). \quad (\text{A.9})$$

Отсюда получим оценку вектора состояния системы в начальный момент времени и вектора мешающих параметров с учетом всей информации:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_0 = (\tilde{\mathbf{K}}_{11} \mathbf{B} + \tilde{\mathbf{K}}_{12} \mathbf{B}_c + \tilde{\mathbf{K}}_{13} \mathbf{B}_z) \bar{\boldsymbol{\psi}} + \tilde{\mathbf{K}}_{11} \mathbf{P}_0^{-1} \bar{\mathbf{x}}_0 + \tilde{\mathbf{K}}_{12} \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{K}}_{13} \mathbf{Q}^{-1} \bar{\mathbf{z}}_I, \\ \hat{\mathbf{c}} = (\tilde{\mathbf{K}}_{12}^T \mathbf{B} + \tilde{\mathbf{K}}_{22} \mathbf{B}_c + \tilde{\mathbf{K}}_{23} \mathbf{B}_z) \bar{\boldsymbol{\psi}} + \tilde{\mathbf{K}}_{12}^T \mathbf{P}_0^{-1} \bar{\mathbf{x}}_0 + \tilde{\mathbf{K}}_{22} \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{K}}_{23} \mathbf{Q}^{-1} \bar{\mathbf{z}}_I, \\ \hat{\mathbf{z}}_I = (\tilde{\mathbf{K}}_{13}^T \mathbf{B} + \tilde{\mathbf{K}}_{23}^T \mathbf{B}_c + \tilde{\mathbf{K}}_{33} \mathbf{B}_z) \bar{\boldsymbol{\psi}} + \tilde{\mathbf{K}}_{13}^T \mathbf{P}_0^{-1} \bar{\mathbf{x}}_0 + \tilde{\mathbf{K}}_{23}^T \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{K}}_{33} \mathbf{Q}^{-1} \bar{\mathbf{z}}_I. \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Для простоты здесь обозначено

$$\tilde{\mathbf{K}}_{11} \mathbf{B} + \tilde{\mathbf{K}}_{12} \mathbf{B}_c + \tilde{\mathbf{K}}_{13} \mathbf{B}_z = \tilde{\mathbf{K}}_{11} \boldsymbol{\chi}, \quad \boldsymbol{\chi} = \mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\gamma}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c \\ \mathbf{B}_z \end{bmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Тогда можем переписать уравнение (A.10) для оценки $\hat{\mathbf{x}}_0$ в виде:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \tilde{\mathbf{K}}_{11} \boldsymbol{\chi} \bar{\boldsymbol{\psi}} + \tilde{\mathbf{K}}_{11} \mathbf{P}_0^{-1} \bar{\mathbf{x}}_0 + \tilde{\mathbf{K}}_{12} \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{K}}_{13} \mathbf{Q}^{-1} \bar{\mathbf{z}}_I. \quad (\text{A.12})$$

Рассмотрим точности полученных оценок. Диагональные блочные матрицы $\tilde{\mathbf{K}}_{11}$, $\tilde{\mathbf{K}}_{22}$ и $\tilde{\mathbf{K}}_{33}$ в (A.3) соответствуют ковариационным матрицам оценки $(\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}_I)$, которые обозначаются соответственно через $\mathbf{K}_{x_0}$, $\mathbf{K}_c$ и $\mathbf{K}_z$:

$$\mathbf{K}_{x_0} = \tilde{\mathbf{K}}_{11}, \quad \mathbf{K}_c = \tilde{\mathbf{K}}_{22}, \quad \mathbf{K}_z = \tilde{\mathbf{K}}_{33}, \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{K}_{x_0} = (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\beta}^T)^{-1} = \boldsymbol{\lambda}^{-1} + \boldsymbol{\lambda}^{-1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\lambda}^{-1} \boldsymbol{\beta})^{-1} \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\lambda}^{-1}. \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_c = & \left(\lambda_c - \begin{bmatrix} \beta_c^T & \beta_{cz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \beta_z \\ \beta_z^T & \lambda_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_c^T & \beta_{cz} \end{bmatrix}^T \right)^{-1} = \lambda_c^{-1} + \\ & + \lambda_c^{-1} \begin{bmatrix} \beta_c^T & \beta_{cz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda - \beta_c \lambda_c^{-1} \beta_c^T & \beta_z - \beta_c \lambda_c^{-1} \beta_{cz} \\ \beta_z^T - \beta_{cz}^T \lambda_c^{-1} \beta_c^T & \lambda_z - \beta_{cz}^T \lambda_c^{-1} \beta_{cz} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_c^T & \beta_{cz} \end{bmatrix}^T \lambda_c^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_z = & \left(\lambda_z - \begin{bmatrix} \beta_z \\ \beta_{cz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \beta_c \\ \beta_c^T & \lambda_c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_z \\ \beta_{cz} \end{bmatrix}^T \right)^{-1} = \lambda_z^{-1} + \\ & + \lambda_z^{-1} \begin{bmatrix} \beta_z \\ \beta_{cz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda - \beta_z \lambda_z^{-1} \beta_z^T & \beta_c - \beta_z \lambda_z^{-1} \beta_{cz}^T \\ \beta_c^T - \beta_{cz} \lambda_z^{-1} \beta_z^T & \lambda_c - \beta_{cz} \lambda_z^{-1} \beta_{cz}^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_z \\ \beta_{cz} \end{bmatrix}^T \lambda_z^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Ковариационные матрицы $\mathbf{K}_{x_0}$, $\mathbf{K}_c$ и $\mathbf{K}_z$ для оценок $(\hat{x}_0, \hat{c}, \hat{z}_l)$ в (A.13)-(A.16) выражены в форме, содержащей два члена. Первые члены представляют собой обращения матриц λ , λ_c и λ_z (A.1), они характеризуют влияние априорной информации об этих оцениваемых параметрах и влияние ошибок измерений. А вторые члены матриц $\mathbf{K}_{x_0}$, $\mathbf{K}_c$ и $\mathbf{K}_z$ являются поправками к ним при учете остальных дополнительных мешающих факторов. Они увеличивают ковариационные матрицы, т.е. ухудшают точность оценки, так как эти поправки положительно определены.

Способ 2 обращения матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$. На основе (1.66) матрицу $\tilde{\mathbf{A}}$ можем записать в виде:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \text{diag} \{ \mathbf{P}_0^{-1}, \mathbf{S}^{-1}, \mathbf{Q}^{-1} \}, \quad \mathbf{H} = [\mathbf{H}_{x_0}, \mathbf{H}_c, \mathbf{H}_z], \quad (\text{A.17})$$

здесь через $\mathbf{H}$ обозначаются частные производные от вектора измерений по расширенному вектору оцениваемых параметров: $\mathbf{H} = \partial \psi / \partial \tilde{\mathbf{x}}$.

Использование матричного тождества для матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ в (A.17) позволяет получить следующие выражения:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} = \text{diag} \{ \mathbf{P}_0, \mathbf{S}, \mathbf{Q} \} - \text{diag} \{ \mathbf{P}_0, \mathbf{S}, \mathbf{Q} \} \cdot \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \cdot \text{diag} \{ \mathbf{P}_0, \mathbf{S}, \mathbf{Q} \}, \quad (\text{A.18})$$

$$\mathfrak{R} = \mathbf{R} + \mathbf{H} \cdot \text{diag} \{ \mathbf{P}_0, \mathbf{S}, \mathbf{Q} \} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{R} + \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T + \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T + \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T, \quad (\text{A.19})$$

$\mathfrak{R}$ является совместной ковариационной матрицей ошибок всей информации, включающих ошибки измерений, ошибки априорной информации о начальном

состоянии, а также ошибки мешающих параметров $\mathbf{c}$ и $\mathbf{z}_I$.

Раскрывая правую часть выражения (A.18), получим упрощенное выражение для расширенной ковариационной матрицы:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 & -\mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_c \mathbf{S} & -\mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \\ -\mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 & \mathbf{S} - \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_c \mathbf{S} & -\mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \\ -\mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 & -\mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_c \mathbf{S} & \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Подставляя матрицу $\tilde{\mathbf{K}}$ для вектора оценки в систему нормальных уравнений (A.9), после преобразования получим систему нормальных уравнений в виде:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{k}_{x_0} (\bar{\boldsymbol{\psi}} - \mathbf{H}_{x_0} \bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{H}_c \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_z \bar{\mathbf{z}}_I), \\ \hat{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{c}} + \mathbf{k}_c (\bar{\boldsymbol{\psi}} - \mathbf{H}_{x_0} \bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{H}_c \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_z \bar{\mathbf{z}}_I), \\ \hat{\mathbf{z}}_I = \bar{\mathbf{z}}_I + \mathbf{k}_z (\bar{\boldsymbol{\psi}} - \mathbf{H}_{x_0} \bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{H}_c \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_z \bar{\mathbf{z}}_I), \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

где $\mathbf{k}_{x_0}$, $\mathbf{k}_c$ и $\mathbf{k}_z$ – матричные коэффициенты усиления фильтра:

$$\mathbf{k}_{x_0} = \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1}, \mathbf{k}_c = \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \mathfrak{R}^{-1}, \mathbf{k}_z = \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \mathfrak{R}^{-1}. \quad (\text{A.22})$$

Как видно в (A.21), оценки $(\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}_I)$ строятся как взвешенное среднее по двум группам информации: *априорная* $(\bar{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{z}}_I)$ и *измерительная*. Коэффициенты усиления фильтрации характеризуют показателем ценности измерительной информации. Если они близки к нулевым, то эта информация не несет нового по сравнению с априорной информацией об оцениваемых параметрах. Диагональные блоки матрицы $\tilde{\mathbf{K}}$ в (A.22), соответствующие ковариационным матрицам векторов оценок $(\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}_I)$, тоже содержат такие две группы информации: их первые члены представляют собой заданные априорные значения, а вторые, являющиеся отрицательно определенными, за счет всей измерительной информации позволяют уменьшить значения ковариационных матриц оцениваемых параметров, т.е. при учете дополнительной навигационной информации точность оценивания улучшится.

Очевидно, что значительную сложность при определении вектора оценки и

ковариационной матрицы в данном способе по формулам (A.21)–(A.22) может представлять обращение матрицы $\mathfrak{R}$, размерность которой велика - pN . Опишем последовательную вычислительную процедуру для определения обратной матрицы $\mathfrak{R}^{-1}$ с помощью формулы Шермана-Моррисона [8].

Сначала заметим, что в соответствии с выражением (A.19) матрица $\mathfrak{R}$ содержит четыре слагаемых из неотрицательно определённых матриц. Для начала обращаем матрицу $\mathbf{R} + \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T$. Введем обозначение

$$\mathfrak{R}_z = \mathbf{R} + \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T, \quad (\text{A.23})$$

тогда

$$\mathfrak{R}_z^{-1} = \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_z \left(\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{H}_z^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_z \right)^{-1} \mathbf{H}_z^T \mathbf{R}^{-1}, \quad (\text{A.24})$$

здесь процедура обращения блочно-диагональной матрицы $\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{H}_z^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_z = \lambda_z$ приведена в (A.8). Этот шаг позволяет свести обращение матрицы $\mathfrak{R}_z$ размерности pN к обращению M матриц размерности q , что существенно упрощает вычисление.

Получив матрицу $\mathfrak{R}_z^{-1}$, затем дважды используем формулу Шермана-Моррисона для обращения матрицы. Пусть

$$\mathfrak{R}_{cz} = \mathbf{R} + \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T + \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T = \mathfrak{R}_z + \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T, \quad (\text{A.25})$$

то имеем её обращение

$$\mathfrak{R}_{cz}^{-1} = \left(\mathfrak{R}_z + \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \right)^{-1} = \mathfrak{R}_z^{-1} - \mathfrak{R}_z^{-1} \mathbf{H}_c \left(\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{H}_c^T \mathfrak{R}_z^{-1} \mathbf{H}_c \right)^{-1} \mathbf{H}_c^T \mathfrak{R}_z^{-1}. \quad (\text{A.26})$$

Далее, матрица $\mathfrak{R}$ имеет вид:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{cz} + \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T, \quad (\text{A.27})$$

её обращение определяется соотношением

$$\mathfrak{R}^{-1} = \mathfrak{R}_{cz}^{-1} - \mathfrak{R}_{cz}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \left(\mathbf{P}_0^{-1} + \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \right)^{-1} \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1}. \quad (\text{A.28})$$

В результате обращение матрицы $\mathfrak{R}$ высокого порядка pN сводится к решению значительно более простой задачи обращения нескольких матриц более низкого порядка. Кроме того, матрицы $\mathfrak{R}_z$ и $\mathfrak{R}_{cz}$ имеют практическое значение, они являются совместными ковариационными матрицами ошибок

измерений при учете соответствующих дополнительных мешающих факторов. Матрица $\mathfrak{R}_z$ – совместная ковариационная матрица ошибок измерений при учете влияния дополнительных мешающих параметров $\mathbf{z}_I$, а матрица $\mathfrak{R}_{cz}$ учитывает влияние мешающих параметров $\mathbf{z}_I$ и ошибок модели $\mathbf{c}$.

Теперь обратим внимание на вычислительные особенности при определении ковариационных матриц векторов оценки $(\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}_I)$, т.е. диагональных блоков матрицы $\tilde{\mathbf{K}}$ (A.22). Для ковариационной матрицы оценки $\hat{\mathbf{x}}_0$ имеем:

$$\mathbf{K}_{x_0} = \mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 = (\mathbf{E} - \mathbf{k}_{x_0} \mathbf{H}_{x_0}) \mathbf{P}_0. \quad (\text{A.29})$$

Она представляется в виде разности двух положительно определенных матриц и должна быть положительно определенной. Однако из-за ошибки округления при её численном вычислении, в частности, когда определитель $\det(\mathbf{P}_0)$ стремится к нулю или к бесконечности, соответственно, правая часть формулы (A.29) имеет вид $0 - 0$ или $\infty - \infty$, или матрица $\mathbf{P}_0$ плохо обусловлена, ковариационная матрица, возможно, будет терять положительную определенность или её диагональные элементы будут отрицательными. Это приводит к катастрофически неверным результатам.

В этом случае для уменьшения вычислительной ошибки и обеспечения положительно определённости ковариационной матрицы, используем матричное тождество и рассмотрим следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{x_0} &= \mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 \\ &= \left(\mathbf{P}_0^{-1} + \mathbf{H}_{x_0}^T (\mathfrak{R} - \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T)^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \right)^{-1} \\ &= \left(\mathbf{P}_0^{-1} + \mathbf{H}_{x_0}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T + \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T)^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \right)^{-1} \\ &= \left(\mathbf{P}_0^{-1} + \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Эта матрица содержит только суммы неотрицательно определенных матриц.

Аналогичные преобразования можем проводить для ковариационных матриц векторов оценки $(\hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}_I)$, т.е.

$$\begin{aligned}
K_c &= S - SH_c^T \mathfrak{R}^{-1} H_c S \\
&= \left(S^{-1} + H_c^T (\mathfrak{R} - H_c SH_c^T)^{-1} H_c \right)^{-1} \\
&= \left(S^{-1} + H_c^T (R + H_{x_0} P_0 H_{x_0}^T + H_z Q H_z^T)^{-1} H_c \right)^{-1},
\end{aligned} \tag{A.31}$$

$$\begin{aligned}
K_z &= Q - QH_z^T \mathfrak{R}^{-1} H_z Q \\
&= \left(Q^{-1} + H_z^T (\mathfrak{R} - H_z QH_z^T)^{-1} H_z \right)^{-1} \\
&= \left(Q^{-1} + H_z^T (R + H_{x_0} P_0 H_{x_0}^T + H_c SH_c^T)^{-1} H_z \right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Рассмотрим связь между ковариационной матрицей K_{x_0} вектора оценки $\hat{x}_0$ и коэффициентом k_{x_0} (A.22) усиления фильтрации. Умножая матрицу K_{x_0} (A.30) справа на обратную матрицу P_0^{-1} , получим

$$K_{x_0} P_0^{-1} = E - P_0 H_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1} H_{x_0}. \tag{A.33}$$

Отсюда следует

$$P_0 = (E - K_{x_0} P_0^{-1}) (H_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1} H_{x_0})^{-1}. \tag{A.34}$$

Поставляя её в матрицу k_{x_0} (A.22), получим

$$k_{x_0} = (E - K_{x_0} P_0^{-1}) (H_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1} H_{x_0})^{-1} H_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1}. \tag{A.35}$$

Кроме того, сравнивая формулы (A.10) и (A.21) для оценки $\hat{x}_0$ двумя видами получения алгоритмов оценивания, получим $k_{x_0} = K_{x_0} \chi$.

В связи с вторым способом можем представить иной путь обращения матрицы γ в первом способе:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \begin{bmatrix} \lambda_c & \beta_{cz} \\ \beta_{cz}^T & \lambda_z \end{bmatrix} = [H_c, H_z]^T R^{-1} [H_c, H_z] + \text{diag}\{S^{-1}, Q^{-1}\}, \\
\gamma^{-1} &= \begin{bmatrix} S - SH_c^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1} H_c S & -SH_c^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1} H_z Q \\ -QH_z^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1} H_c S & Q - QH_z^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1} H_z Q \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.36}$$

Так как $\kappa = \gamma^{-1}$ (A.4), её компоненты имеют вид:

$$\kappa_{12} = -SH_c^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1} H_z Q,$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{11} &= \mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{H}_c^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1} \mathbf{H}_c \mathbf{S} = \left(\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{H}_c^T \left(\mathfrak{R}_{cz} - \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \right)^{-1} \mathbf{H}_c \right)^{-1} \\
&= \left(\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{H}_c^T \left(\mathbf{R} + \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \right)^{-1} \mathbf{H}_c \right)^{-1},
\end{aligned} \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{22} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}\mathbf{H}_z^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1} \mathbf{H}_z \mathbf{Q} = \left(\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{H}_z^T \left(\mathfrak{R}_{cz} - \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \right)^{-1} \mathbf{H}_z \right)^{-1} \\
&= \left(\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{H}_z^T \left(\mathbf{R} + \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \right)^{-1} \mathbf{H}_z \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Таким образом, построены два способа решения системы нормальных уравнений фильтрации для совместной обработки измерений с учетом уточнения мешающих параметров.