

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Кафедра теоретической механики и мехатроники

На правах рукописи

Савицкий Александр Владимирович

**Динамика и алгоритмы управления мультироторным
роботом**

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
В.Е. Павловский

Москва – 2019

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи. Теоретико-механическая модель	12
2.1	Теоретико-механическая модель мультироторного робота	12
2.1.1	Основные предположения	13
2.1.2	Вычисление Лагранжиана	15
2.1.3	Модель подъемной силы и момента несущего винта	18
2.1.4	Обобщенные силы	19
2.1.5	Уравнения Лагранжа	21
2.2	Вычисление угловых скоростей винтов	23
2.2.1	Условие усреднения сил тяги	24
2.2.2	Условие маневренности	25
2.3	Теоретико-механическая модель квадрокоптера . .	27
2.3.1	Случай $n = 4$	28
2.3.2	Уравнения Лагранжа полета квадрокоптера	29
2.3.3	Общая схема алгоритма управления	32
2.4	Численное интегрирование общей задачи ($n = 4$) .	33
3	Уравнения движения по траекториям	35
3.1	Замена переменных	35
3.2	Исследование обратной задачи	38
3.3	Движение в вертикальной плоскости	41
3.3.1	Полет по окружности	42
3.3.2	«Горка»	43
3.4	Движение в горизонтальной плоскости. Полёт по окружности	45

3.5	Пространственные траектории. Движение по винтовой линии	50
3.6	Алфавит базовых траекторий движения и алгоритмы управления	53
3.6.1	Определение курса	54
3.6.2	Полет по горизонтальной прямой	56
3.6.3	Взлет-парение-посадка	57
4	Нейросетевой контроллер управления	60
4.1	Нейросетевой подход к управлению БПЛА	61
4.2	Схема нейросетевого контроллера	63
4.3	Блок нейронной сети	64
4.3.1	Построение обучающей выборки	65
4.3.2	Построение и обучение нейронной сети	67
4.4	Результаты работы нейросетевого контроллера на базовых траекториях	67
4.5	Анализ работы нейросетевого регулятора при наличии погрешности датчиков	69
5	Заключение	73
6	Список литературы	75
7	Приложения	83

1 Введение

В течение последних лет тема изучения беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) получает все большее распространение. На данный момент существует множество видов БПЛА, которые различаются по своим функциональным особенностям, а также по сферам их применения. Особый интерес вызывают мультикоптерные роботы – беспилотные летательные аппараты с дистанционным управлением, приводимые в движение несколькими воздушными винтами, расположенными в одной плоскости. Как правило, в центре корпуса таких мультикоптеров находится авионика, аккумуляторы, датчики и прочее, а из центра выходит n «лучей» (где $n > 2$), расположенных в одной плоскости в углах правильного n -угольника.

Ярким примером использования одного ротора в конструкции летательного аппарата является вертолет; его теоретико-механическая модель и динамика подробно описаны в работе И.Фантони и Р.Лозано [1]. Случай применения двухроторного летательного аппарата, в свою очередь, является наименее распространенным по причине его низких эксплуатационных характеристик, а также проблем с балансировкой. Стоит отметить, что для управления вертолетом с одним и двумя роторами используется автомат перекоса винта, который позволяет менять угол атаки каждой лопасти на протяжении одного оборота. Автомат перекоса винта является сложным инженерным устройством и применяется в основном в крупной авиации. Однако в случае мультироторных роботов можно избежать данного усложнения конструкции.

Существует два класса мультироторных роботов, каждый из которых имеет свои отличительные особенности. Для ро-

ботов первого класса характерна конструкция, где на конце каждого из «лучей» корпусной рамы находится один пропеллер. В конструкции роботов второго класса имеется два соосно закрепленных пропеллера с одинаковым вектором тяги, но вращающихся противоположных направлениях. Ввиду конструкционных особенностей, а также пересекающихся воздушных потоков результирующая сила тяги на конце одного «луча» корпусной рамы у мультироторных роботов второго класса в среднем всего в полтора раза выше, чем в аналогичном случае у первого класса. В данной работе рассмотрены более энергоэффективные летательные аппараты - мультироторные роботы первого класса. Случай использования четырех роторов в таких БПЛА, как квадрокоптер, является основным объектом исследования данной работы.

С каждым годом значительно возрастает количество областей, в которых используются БПЛА, однако наиболее востребованными отраслями на сегодняшний день являются аэрофото-съемка и мониторинг:

1. картография и топографическая съемка;
2. исследование климата и экологический мониторинг;
3. сельское хозяйство (картирование земель для целей точного земледелия, мониторинг угодий);
4. мониторинг транспортного потока;
5. борьба с пожарами и стихийными бедствиями;
6. исследование целостности и состояния зданий и сооружений, в т.ч. инфраструктурных объектов;
7. поиск полезных ископаемых;

8. профессиональная кино- и фотосъемка;
9. любительская фото- и видеосъемка и др.;

Также активно развиваются такие сферы применения, как транспортировка грузов, связь (использование БПЛА как платформ для ретрансляции сигналов), помощь в операциях по поддержанию правопорядка, поиск и спасение, охрана периметров, обработка сельскохозяйственных угодий путем внесения биопрепаратов и пестицидов и многие другие. Тем не менее существует ряд технологических барьеров, которые сдерживают темпы развития индустрии БПЛА. Часть из них связана с материальными и конструкционными вопросами: требуются силовые и энергетические установки с высокой удельной мощностью и емкостью соответственно, мощные процессоры, высокоточная система датчиков и сенсоров. Другая часть барьеров связана с программно-алгоритмическим блоком:

1. задачи оптимального управления;
2. возможность адаптации к непрогнозируемым внешним воздействиям;
3. системы машинного зрения для распознавания целевых объектов и обнаружения препятствий;
4. обработка больших данных и оптимизация вычислений и др.

Среди научных работ существует ряд статей, описывающих динамику и управление квадрокоптера с модернизированной конструкцией. Например, существуют летательные аппараты с изменяемым вектором тяги, имеющие два рабочих режима: взлет и горизонтальный полет. Данная конфигурация позволяет повысить эффективность полетов на дальние расстояния за счет уменьшения сопротивления и действия подъемной силы.

Промышленные аппараты, имеющие данную конструкцию расположения винтов, получили название конвертоплан.

Необходимо отметить, что использование стандартных датчиков позиционирования (акселерометр, гироскоп) требует проведения специальных исследований в связи с тем, что накапливаемая ошибка погрешности измерений может значительно исказить выходную информацию. Поэтому большая часть всех существующих публикаций посвящена соответствующим алгоритмам построения управлений и сравнению их эффективности, в том числе с использованием указанных датчиков. Среди них можно выделить несколько групп:

1. Метод построения управления, основанный на теории Ляпунова, позволяющий в определенной постановке достичь асимптотической устойчивости летательного аппарата [2, 3].
2. Алгоритм управления, в основе которого лежит пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор, наиболее часто встречаемый метод; его основное преимущество заключается в упрощенной реализации [4].
3. Третья группа методов - энергетические методы, применимые для пассивных систем с недостатком управляющих воздействий [1].
4. Четвертый основан на визуальном управлении на основе обработки изображений видеокамеры (видеокамер), часто используется на взлете-посадке [5, 6, 7].
5. Пятый основан на управлении с помощью нейросетевого регулятора, используемого в задачах стабилизации, при поиске оптимальных параметров регулятора [8].

6. Шестой алгоритм основан на динамической обратной связи, который позволяет разделять исследуемую систему на линейную и управляемые подсистемы.

В отдельный класс задач стоит выделить исследования, связанные с управлением роем беспилотных аппаратов. В частности, проблемы предотвращения столкновений для нескольких роботизированных систем в группе рассмотрены в работе [9]. Среди отечественных работ, посвященных теме управления группой квадрокоптеров, можно отметить работы Д. Я. Иванова из ЮФУ [10], где представлено решение строевой задачи, при которой квадрокоптеры должны сохранять заданную топологию.

Неугасающий интерес к исследованиям и разработкам беспилотных летательных средств приводит к появлению всё новых инструментов исследования динамики летательных аппаратов. Особое место занимают методы, основанные на использовании нейронных сетей. Задачи, в которых применяются нейросетевые контроллеры, можно разделить на два класса: построение управления для определенных режимов полета и отдельных траекторий и задачи стабилизации по всем или по части переменных [11].

Значимых результатов удалось достичь и команде американских ученых из Университета Миссури [12], разработавших алгоритм управления группой квадрокоптеров. Данный алгоритм содержит два двухслойных нейросетевых контроллера. Первый используется для синтеза управляющих воздействий ведущего коптера. Второй, в свою очередь, применяется для стабилизации группового полета и работает на основе данных, получаемых с беспроводных бортовых датчиков. Последний контроллер в качестве входных параметров получает состояния

системы, а на выходе выдает оптимальное управление для движения с минимальным отклонением от траектории ведущего коптера. Описанные в работе контроллеры позволяют учитывать аэродинамические эффекты и внешние возмущения. Также в этой работе представлен метод оптимизации каналов связи между квадрокоптерами, в котором используется теория графов.

Существует также ряд научных работ, посвященных применению нейросетевого метода в изучении динамики вертолета. Например, в работе из Политехнического Университета Мадрида [13] представлен гибридный контроллер, состоящий из двух нейронных сетей: Джордана и Эльмана (т.е. рекуррентных сетей с обратными связями). В работе показано, что оптимальное управление коптером изучается при отдельном рассмотрении различных этапов полета, при этом в работе не строится общее оптимальное управление для всего полета.

Использование нейросетевого контроллера для управления высотой полета описано в тезисах конференции [14]. В них представлено описание совместной работы пропорционально-интегрально-дифференциального и нейросетевого регуляторов. Следует отметить, что одной из основных особенностей полученного алгоритма является быстрая адаптация к внешним воздействиям, что является немаловажным для достижения оптимального полета БПЛА в реальных условиях.

Целью настоящей работы является моделирование динамики мультироторного летательного аппарата, описание решения прямой и обратной задач динамики, изучение базовых траекторий и некоторых фигур высшего пилотажа, построение нейросетевого контроллера для синтеза управляющих воздействий и нейро-алгоритмов управления для некоторых базовых траекторий, а

также изучение влияния погрешностей системы на действие нейросетевого контроллера.

Одной из задач контроллера будет являться адаптация к таким непрогнозируемым внешним факторам, как например погрешностям системы. Кроме того, преследуется и другая цель, которая заключается в возможности реализации быстрых вычислений, поскольку нейросетевой метод относится к параллельным методам, работающим за малое число тактов вычислений. Одним из назначений данного контроллера выступает преодоление проблемы дефицита управлений, поскольку мультироторный робот как раз является системой с их недостатком. При этом система имеет шесть степеней свободы и только четыре независимых управления (для случая $n > 3$), которыми являются комбинации скоростей вращения винтов.

В первой главе представлена теоретико-механическая модель мультироторного робота, как системы твердых тел с шестью степенями свободы и n векторами тяги. В данном разделе сформулированы основные допущения, описаны значимые аэродинамические эффекты, возникающие в процессе движения, составлены уравнения Лагранжа для общего случая с n роторами. Кроме того, показано, что количество управляющих воздействий можно свести к четырем воздействиям (сила тяги и моменты крена, тангажа и рысканья).

Рассмотрена задача о распределении управляющих воздействий в случае недоопределенной системы (для случая $n > 4$). Сформулированы критерии, с помощью которых можно доопределив систему добиться большей маневренности и управляемости БПЛА. Отдельно рассмотрен случай квадрокоптера ($n=4$) и приведено обоснование в пользу дальнейшего изучения

именно этой конфигурации. Также заданы значения основных параметров задачи и описаны инструменты численного моделирования.

Во второй главе основное внимание уделяется описанию решения обратной задачи динамики квадрокоптера. Ввиду дефицита управляющих воздействий возможно управление только по части переменных. Поэтому в данном разделе рассмотрено решение обратной задачи для некоторых групп траекторий. Подробно изучены некоторые траектории движения в вертикальной и горизонтальных плоскостях, такие как полет по вертикальной окружности, винтовая линия, «горка» и другие. Представлены графики соответствующих им управляющих воздействий.

Также в данном разделе составлен алфавит таких базовых траекторий движения, как взлет-парение-посадка, полет по отрезку и поворот на угол в горизонтальной плоскости. Комбинация данных траекторий позволяет переместиться из начала координат в произвольную точку. Приведены графики соответствующих функций управления.

Третья глава посвящена синтезу и изучению нейросетевого алгоритма управления квадрокоптером. Для этого введено понятие нейросетевого контроллера и описан метод его работы в общем случае. Описаны основные блоки нейросетевого контроллера: блока, моделирующего датчики, нейронной сети, интегратора; также описан задающий блок в котором описаны параметры задачи. Проведен анализ работы нейросетевого контроллера для таких базовых траекторий как вертикальный взлет и поворот. Введены модели позиционных датчиков, а также датчиков угла. Изучена эффективность построенного

алгоритма для случая идеально работающих датчиков и при наличии погрешности датчиков. Показана удовлетворительная работа построенного алгоритма для случая некоторых базовых траекторий при небольшой погрешности измерительного устройства.

В заключении кратко сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Результаты диссертации опубликованы в статьях [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22].

2 Постановка задачи. Теоретико-механическая модель

В данной главе описана теоретико-механическая модель мультироторного робота, построена модель внешних воздействий, описаны рассматриваемые аэродинамические эффекты.

2.1 Теоретико-механическая модель мультироторного робота

В качестве модели мультироторного робота рассмотрим плоское твердое тело, состоящее из корпуса и n пропеллеров. Как будет показано далее система имеет дефицит управляющих воздействий, в связи с чем целесообразно рассматривать мультироторные роботы с количеством винтов большим трех.

Корпусом будем считать n одинаковых стержней длины l , исходящих из некоторой точки A . Другие концы которых расположены в углах правильного n -угольника. Эти стержни будем называть «лучами». Масса каждого стержня равна m_0/n .

При вычислении момента инерции пропеллера будем предполагать, что его тензор инерции относительно точки крепления имеет такой же вид, как у однородного диска радиуса r , массы m , закрепленного на концах стержней в точках C_1, C_2, \dots, C_n . Центр масс робота массы $M = m_0 + n m$ находится в точке A .

Пусть $Oxyz$ - система координат, в которой описывается движение робота. Будем считать, что она инерциальная, причем Oz направлена вертикально вверх. Положение центра масс тела определяется вектором $\xi = (x, y, z)$.

Пусть $Ae_1e_2e_3$ - система координат, жестко связанная с роботом. Выберем ось Ae_1 , направленную из точки A на точку C_1 , ось Ae_3 - перпендикулярно плоскости робота, а ось Ae_2 дополняет подвижную систему координат до правой тройки.

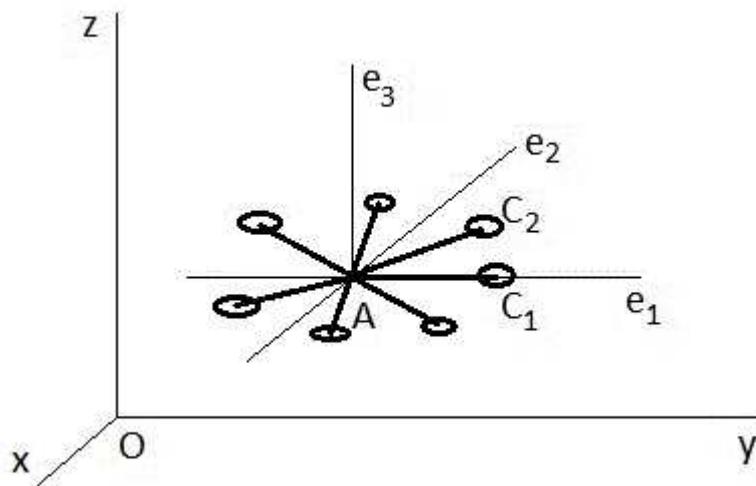


Рис. 1: Модель мультироторного робота.

2.1.1 Основные предположения

Мультироторные роботы являются сложными робототехническими устройствами, включающими в себя силовую и энергетические установки, систему сенсоров, вычислительный центр, корпус, соединительные элементы и др. В процессе полета могут возникать сложно моделируемые эффекты, например, вибрации или воздушные завихрения, связанные с особенностями роторных роботов. В данной работе будет представлено качественное исследование динамики мультироторного робота, предполагая, что робот совершает умеренные маневры и движется на достаточном удалении от внешних препятствий. Опишем это более подробно:

1) При вычислении кинетического момента и других динамических характеристик пропеллера будем предполагать, что его тензор инерции относительно точки крепления имеет такой же вид, как у однородного диска, которые назовем дисками несущего винта.

2) Будем рассматривать только умеренные маневры с небольшими ускорениями. В этом случае можно пренебречь упругостью лопастей несущего винта, и диск несущего винта считается бесконечно жестким и бесконечно тонким. Диск все время вращается в плоскости, перпендикулярной оси Ae_3 .

3) Считается, что вращение винта создает подъемную силу u_i , приложенную в точке C_i и все время направленную по оси Ae_3 и не позволяющую управлять движением робота в плоскости Ae_1e_2 .

4) Ориентация робота описывается тремя углами Крылова: крена, тангажа и рысканья.

5) Полагая, что линейная скорость мультикоптера и угловая скорость его вращения существенно меньше скорости вращения винтов, будем считать, что воздух оказывает сопротивление только на лопасти несущих винтов, создавая тем самым тормозящие вращательные моменты.

6) В силу конструктивных особенностей мультироторных роботов и для упрощения вычислительной схемы предположим, что векторы угловых скоростей винтов, расположенных в точках C_i для нечетного i , сонаправлены вектору e_3 , остальные — противонаправлены. Стоит отметить, что на практике чаще всего встречаются коптеры, для которых $n = 2k, k \in \mathbf{N}$.

2.1.2 Вычисление Лагранжиана

Мультироторный робот будем рассматривать как твердое тело, к которому приложены силы и моменты, возникающие из-за подъемной силы и момента сопротивления, связанных с вращением пропеллеров и действия силы тяжести. Конфигурационным многообразием системы является $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$. Обобщенные координаты робота имеют следующий вид:

$$\mathbf{q} = (x, y, z, \varphi, \psi, \theta),$$

где $\boldsymbol{\xi} = (x, y, z)$ - координаты центра масс системы, а $\boldsymbol{\nu} = (\varphi, \psi, \theta)$ - углы Крылова. Ориентацию осей неподвижной системы координат можно совместить с ориентацией осей неподвижной системы координат $A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ с помощью трех поворотов:

- 1) поворот на угол φ вокруг вертикальной оси Oz (угол рысканья),
- 2) поворот на угол ψ вокруг оси Oy (угол тангажа),
- 3) поворот на угол θ вокруг оси Ox (угол крена).

Пусть какой-либо вектор в проекции на подвижные оси имеет координаты $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, тогда его координаты в абсолютной системе координат $\boldsymbol{\varkappa} = (\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3)$ вычисляются по формуле $\boldsymbol{\varkappa} = R_{\boldsymbol{\varkappa}}\mathbf{v}$, где матрица перехода $R_{\boldsymbol{\varkappa}} \in SO(3)$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{R}_\varkappa = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \psi \sin \theta - \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \psi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \psi & \sin \varphi \sin \psi \sin \theta + \cos \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \psi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta \\ -\sin \psi & \cos \psi \sin \theta & \cos \psi \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Также введем углы поворота лопастей вокруг осей винтов: $\gamma_1, \gamma_2 \dots, \gamma_n$. Далее будет показано, что управляющие воздействия зависят от $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2 \dots, \dot{\gamma}_n$.

Обозначим через I_A - матрицу тензора инерции корпуса относительно точки A , выраженный в подвижной системе координат, $I_A = \text{diag}(I_1^A, I_2^A, I_3^A)$, причем в силу симметрии $I_1^A = I_2^A$; $\boldsymbol{\Omega}_A$ - угловая скорость корпуса в той же системе координат.

Робот состоит из корпуса и пропеллеров. Его кинетическая энергия представляет собой сумму кинетической энергии корпуса и кинетической энергии пропеллеров. Кинетическую энергию робота будем вычислять по формуле Кенига: $T = T_{\text{ц.м.}} + T_{\text{Кен.}}$

Кинетическая энергия центра масс робота имеет следующий вид:

$$T_{\text{ц.м.}} = \frac{M}{2}(\dot{\boldsymbol{\xi}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}).$$

Кинетическая энергия в системе Кенига имеет вид:

$$T_{\text{Кен.}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}_A, I_A \boldsymbol{\Omega}_A) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\Omega}_{C_i}; I_{C_i} \boldsymbol{\Omega}_{C_i}) \quad .$$

Угловая скорость лопастей в подвижной системе координат выражается по формуле:

$$\boldsymbol{\Omega}_{C_i} = \boldsymbol{\Omega}_A + (-1)^{i+1} \dot{\gamma}_i \mathbf{e}_3.$$

По предположению 1 несущие винты имеют диагональный тензор инерции I_C в подвижной системе координат:

$$\mathbf{I}_C = \text{diag}(I_1^c, I_2^c, I_3^c), \text{ причем в силу симметрии } I_1^c = I_2^c.$$

Таким образом, кинетическая энергия робота выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} T &= \frac{M}{2}(\dot{\boldsymbol{\xi}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}_A; I_A \boldsymbol{\Omega}_A) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\Omega}_{C_i}; I_C \boldsymbol{\Omega}_{C_i}) = \\ &= \frac{M}{2}(\dot{\boldsymbol{\xi}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}_A; (I_A + nI_C) \boldsymbol{\Omega}_A) + \frac{1}{2} I_3^c \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i^2 + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \dot{\gamma}_i (\boldsymbol{\Omega}_A; I_C \mathbf{e}_3). \end{aligned} \quad (1)$$

Считается, что робот движется в однородном поле тяжести, потенциальная энергия которого равна $U = mgz$.

Угловая скорость робота $\boldsymbol{\Omega}_A$ в подвижной системе координат имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\Omega}_A = \begin{pmatrix} \dot{\theta} - \dot{\varphi} \sin \psi \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta \\ \dot{\varphi} \cos \psi \cos \theta - \dot{\psi} \sin \theta \end{pmatrix} = W_\nu \dot{\boldsymbol{\nu}}, \quad (2)$$

где:

$$W_\nu = \begin{pmatrix} -\sin \psi & 0 & 1 \\ \cos \psi \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \cos \psi \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = W_\nu^{-1} \begin{pmatrix} \dot{\theta} - \dot{\varphi} \sin \psi \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta \\ \dot{\varphi} \cos \psi \cos \theta - \dot{\psi} \sin \theta \end{pmatrix}$$

Заметим, что $\det(W_\nu) = -\cos\psi$. Таким образом, преобразование от $\dot{\nu}$ к Ω_A будет невырожденным для всех ориентаций за исключением тех, у которых $\psi = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, то есть тангаж не равен $\pm\frac{\pi}{2}$.

Подставив (2) в (1) найдем функцию Лагранжа, которая равна:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T - U.$$

2.1.3 Модель подъемной силы и момента несущего винта

По Предположениям 3 и 5 вращение винта создает подъемную силу u_i , и воздух оказывает сопротивление на лопасти несущих винтов. Это допущение связано с тем, что скорость воздушного потока, набегающего на лопасти, значительно выше, чем скорость потока, набегающего на корпус.

В работе используется модель подъемной силы и момента несущего винта, изложенные в [23]. В этой работе изучен вертолет, установленный на экспериментальной платформе. В результате были получены следующие выражения для модуля аэродинамической силы (u_i) и момента сопротивления (M_i):

$$u_i = \frac{\rho p c a V r^2}{4} \dot{\gamma}_i$$

$$M_i = \frac{\rho p c r^4 c_d}{8} \dot{\gamma}_i^2, \text{ где}$$

- ρ - плотность воздуха,
- p - количество лопастей,
- c - ширина лопасти,
- a - угловой коэффициент кривой подъема,
- r - радиус диска винта,

V - индуцированная скорость парения,
 c_d - усредненный коэффициент сопротивления лопасти винта.

Указанные величины являются аэродинамическими константами и находятся из справочной информации или экспериментально.

Введем дополнительные обозначения:

$$k_1 = \frac{\rho p c_a V r^2}{4},$$

$$k_2 = \frac{\rho p c c_d r^4}{8},$$

Таким образом:

$$u_i = k_1 \dot{\gamma}_i,$$

$$M_i = k_2 \dot{\gamma}_i^2.$$

2.1.4 Обобщенные силы

В соответствии с Предположением 3 к корпусу аппарата приложено n подъемных сил (сил тяги), создаваемых винтами, и все они направлены вдоль оси $A\mathbf{e}_3$. Следовательно, направление суммарной силы, приложенной к корпусу, в абсолютном пространстве определяется его ориентацией. В абсолютной системе координат направление силы тяги задается вектором Υ :

$$\Upsilon = \mathbf{R}_x \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \psi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \psi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \psi \cos \theta \end{pmatrix}$$

Поскольку сила тяги каждого винта равна u_i , то суммарную силу тяги, рассматриваемую в качестве управления, можно выразить в абсолютной системе отсчета следующим образом:

$$\mathbf{U}_\xi := \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{r}_i.$$

Получаем обобщенные силы, отвечающие координатам $\xi = (x, y, z)$:

$$U_x = (\cos \varphi \sin \psi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta) \sum_{i=1}^n u_i,$$

$$U_y = (\sin \varphi \sin \psi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta) \sum_{i=1}^n u_i$$

$$U_z = \cos \psi \cos \theta \sum_{i=1}^n u_i.$$

Для того, чтобы вычислить момент \mathbf{G}_1 , который позволяет управлять вращением вокруг оси \mathbf{e}_1 , необходимо найти суммарную проекцию моментов всех сил на данную ось (рисунок 2). Аналогичным образом вычисляется момент \mathbf{G}_2 . Также введем дополнительное обозначение:

$\alpha = \frac{2\pi}{n}$ - угол между двумя соседними стержнями.

Таким образом, моменты \mathbf{G}_1 и \mathbf{G}_2 , которые позволяют управлять вращением корпуса, выглядят следующим образом:

$$\mathbf{G}_1 = \sum_{i=1}^n u_i \sin((i-1)\alpha) l \mathbf{e}_1,$$

$$\mathbf{G}_2 = \sum_{i=1}^n u_i \cos((i+1)\alpha) l \mathbf{e}_2,$$

В силу Предположений 5 и 6 суммарный момент сопротивления, создаваемый аэродинамическими силами и воздействующий

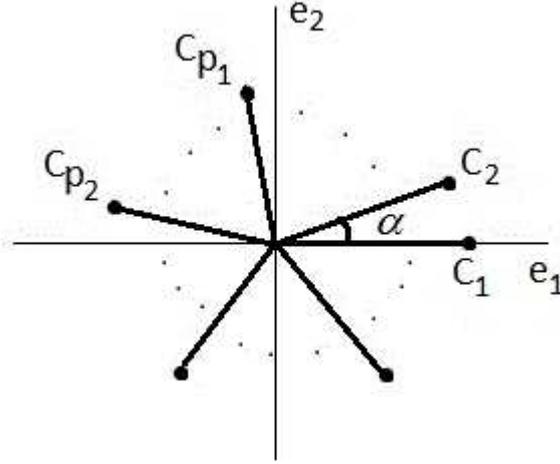


Рис. 2: Пояснения к вычислению \mathbf{G}_1 и \mathbf{G}_2 .

на вращение винтов имеет следующий вид:

$$\mathbf{G}_3 = \sum_{i=1}^n (-1)^i M_i \mathbf{e}_3.$$

Обобщенные силы, соответствующие координатам $\boldsymbol{\nu} = (\varphi, \psi, \theta)$, имеют вид:

$$\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{\nu}} := \begin{pmatrix} \tau_{\varphi} \\ \tau_{\psi} \\ \tau_{\theta} \end{pmatrix} = \mathbf{W}_{\boldsymbol{\nu}}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_3 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{\varphi} = \frac{\sin \theta}{\cos \psi} \sum_{i=1}^n u_i \cos((i+1)\alpha)l + \frac{\cos \theta}{\cos \psi} \sum_{i=1}^n (-1)^i M_i,$$

$$\tau_{\psi} = \cos \theta \sum_{i=1}^n u_i \cos((i+1)\alpha)l - \sin \theta \sum_{i=1}^n (-1)^i M_i.$$

$$\tau_{\theta} = \sum_{i=1}^n u_i \sin((i-1)\alpha)l + \frac{\sin \psi \sin \theta}{\cos \psi} \sum_{i=1}^n u_i \cos((i+1)\alpha)l +$$

$$\frac{\sin \psi \cos \theta}{\cos \psi} \sum_{i=1}^n (-1)^i M_i.$$

2.1.5 Уравнения Лагранжа

Для упрощения выкладок введем обозначения:

$$A := I_1^a + 4I_1^c$$

$$D := I_3^a + 4I_3^c$$

Уравнения Лагранжа в общем виде записываются следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad (3)$$

где $\mathbf{Q} = (\mathbf{U}_\xi, \boldsymbol{\tau}_\nu)^T = (U_x, U_y, U_z, \tau_\varphi, \tau_\psi, \tau_\theta)^T$ - вектор обобщенных сил, а L - функция Лагранжа, имеющая следующий вид:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_{trans} + T_{rot} - U = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \psi - 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi \sin^2 \theta + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta \sin \theta \cos \psi) + \frac{1}{2}D(\dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi \cos^2 \theta + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta - 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta \sin \theta \cos \psi) + \frac{1}{2}I_3^c \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i^2 + I_3^c \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \dot{\gamma}_i (\dot{\varphi} \cos \psi \cos \theta - \dot{\psi} \sin \theta) - Mgz.$$

Подставляя в выражение для $U_x, U_y, U_z, \tau_\varphi, \tau_\psi, \tau_\theta$ полученные в пункте 2.1.3 выражения для u_i и M_i , получим следующий вид обобщенных сил:

$$U_x = k_1 (\cos \varphi \sin \psi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta) \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i,$$

$$U_y = k_1 (\sin \varphi \sin \psi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta) \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i,$$

$$U_z = k_1 \cos \psi \cos \theta \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i,$$

$$\tau_\varphi = k_1 l \frac{\sin \theta}{\cos \psi} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i \cos((i+1)\alpha) + k_2 \frac{\cos \theta}{\cos \psi} \sum_{i=1}^n (-1)^i \dot{\gamma}_i^2,$$

$$\tau_\psi = k_1 l \cos \theta \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i \cos((i+1)\alpha) - k_2 \sin \theta \sum_{i=1}^n (-1)^i \dot{\gamma}_i^2,$$

$$\tau_\theta = k_1 l \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i \sin((i-1)\alpha) + k_1 l \frac{\sin \psi \sin \theta}{\cos \psi} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i \cos((i+1)\alpha) +$$

$$k_2 \frac{\sin \psi \cos \theta}{\cos \psi} \sum_{i=1}^n (-1)^i \dot{\gamma}_i^2.$$

В полученных уравнениях величины $\dot{\gamma}_i$ являются управляющими параметрами.

Полная система уравнений движения (3), описывающая динамику мультироторного робота, приведена в Приложении 1.

Полученную систему шести дифференциальных уравнений второго порядка можно представить в виде $K\ddot{\mathbf{q}} = N$, где K - симметрическая матрица, N - некоторая векторная функция от обобщенных координат и $\dot{\gamma}_i$. Стоит отметить, что определитель матрицы K равен $A^2 D \cos^2 \psi$ и не равен нулю, так как мы рассматриваем случай $\psi \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, то есть угол тангажа не равен $\pm \frac{\pi}{2}$ (для случаев $\psi = \frac{\pi}{2} + \pi k$ требуется выбор других локальных координат). Следовательно, существует обратная матрица K^{-1} . Далее это будет использовано для приведения полученной системы дифференциальных уравнений к виду Коши и численного интегрирования.

2.2 Вычисление угловых скоростей винтов

Большая часть существующих мультироторных роботов являются пилотируемыми аппаратами, управление которых осуществляется путем задания четырех величин: модуля суммарной силы тяги и трех вращательных моментов (крена, тангажа и рысканья). Встроенный микропроцессор осуществляет пересчет этих величин в напряжения, подаваемые на каждый из винтов, создавая требуемую угловую скорость вращения. Работа микропроцессора в данной работе не рассматривается.

Рассмотренная модель мультироторного робота является системой с n управлениями, которые равны угловым скоростям вращения винтов $\dot{\gamma}_i$. Однако в уравнения динамики они

входят в виде четырех функций: модуля суммарной силы тяги и трех вращательных моментов, которые выражаются через комбинации $\dot{\gamma}_i$. Причем в выражения для модуля суммарной силы тяги и моментов крена и тангажа управления $\dot{\gamma}_i$ входят в виде линейных комбинаций, а в момент рысканья — в виде квадратичной.

Если задан закон движения мультироторного робота и найдены соответствующие функции управления (модуль суммарной силы тяги и три вращательных момента), то нам необходимо найти закон преобразования этих функций в $\dot{\gamma}_i$. Для случая $n > 4$ мы получаем недоопределенную систему уравнений, и для однозначного нахождения всех угловых скоростей необходимо ввести дополнительные условия.

2.2.1 Условие усреднения сил тяги

На систему действует только сила тяжести, направленная вертикально вниз, и подъемная сила винтов, направленная вдоль оси \mathbf{e}_3 подвижной системы координат. В положении равновесия углы крена и тангажа равны нулю, а ось \mathbf{e}_3 совпадает с вертикалью. При этом суммарная сила тяги винтов равна по модулю $U_0 = Mg$.

Для того, чтобы однозначно выбрать управления при $n > 4$, реализующие некоторое заданное движение, введем функционал

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{U_0}{n} - k_1 \dot{\gamma}_i \right)^2}$$

и будем выбирать угловые скорости винтов таким образом, чтобы

$$\Delta \rightarrow \min.$$

Суть этого условия заключается в том, что необходимо минимизировать среднеквадратичное отклонение силы тяги каждого винта ($u_i = k_1 \dot{\gamma}_i$) от значения $\frac{U_0}{n}$, которое соответствует равномерному распределению сил тяги всех винтов в положении равновесия (зависание или парение). В частности, при реализации положения равновесия указанный выбор управлений приведет к равномерному выбору усилий на каждый из винтов.

Стоит отметить, что вариационная задача поиска $\min(\Delta)$ должна рассматриваться при условии выполнения четырех соотношений: на модуль суммарной силы тяги и три вращательных момента, найденных из решения обратной задачи. Эти соотношения состоят в том, что обобщенные силы, которые появляются в правых частях уравнения движения, куда подставлено программное движение, должны совпадать с теми обобщенными силами, которые получаются при выбранных управлениях. Иначе говоря, они вычисляются при подстановке программного движения в уравнения из Приложения 1.

2.2.2 Условие маневренности

Вместо минимизации отклонений сил тяги винтов от некоторого оптимального значения можно предложить другой способ доопределения системы, связанный с повышением маневренности за счет более эффективного распределения сил тяги. Он основан на том факте, что величина момента, создаваемого силой, увеличивается при увеличении расстояния до оси вращения.

Поскольку при $n > 4$ один и тот же момент может быть создан разным распределением скоростей винтов, то мы можем выбрать такое распределение скоростей, при котором целесообразным является придавать большую угловую скорость наиболее удаленному от данной оси винту.

Чтобы пояснить этот способ для начала рассмотрим случай, когда необходимо совершить поворот вокруг оси \mathbf{e}_2 , изменив угол тангажа. В соответствии с указанным принципом целесообразнее всего это сделать за счет увеличения силы тяги u_1 , которая приложена к наиболее удаленной точке C_1 в правой полуплоскости подвижной системы координат $A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Схематично данный принцип показан на рисунке 3.

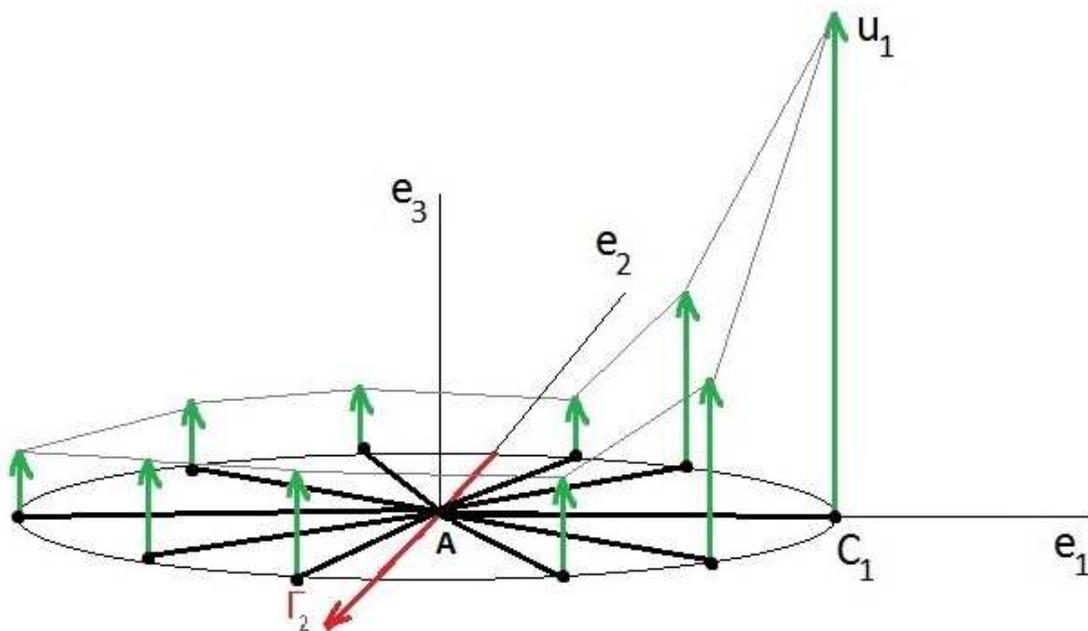


Рис. 3: Распределение сил тяги при повороте вокруг оси \mathbf{e}_2 .

Ведем функцию $g_{12}(\hat{x})$, определенную на отрезке $[-l, l]$. Назовем профилем распределения сил тяги график функции $g_{12}(\hat{x})$ в плоскости $A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$, где ось абсцисс соответствует ось $A\mathbf{e}_1$, а значению функции в некоторой точке \hat{x}_0 соответствует сила

тяги, создаваемая винтом, находящимся на расстоянии \hat{x}_0 от оси Ae_2 .

В случае поворота на угол тангажа в качестве целевого профиля распределения сил u_i можно выбрать, например, монотонно возрастающую на отрезке $[-l, l]$ функцию и сформулировать условие таким образом: необходимо минимизировать среднеквадратичное отклонение сил тяги от заданного целевого профиля.

В случае, если необходимо реализовать комбинацию поворотов, задача сводится к повороту вокруг некоторого вектора \mathbf{G}_{12} , соответствующего проекции вектора угловой скорости робота на плоскость Ae_1e_2 . Аналогичным образом подбирается целевой профиль в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{G}_{12} . В данном случае наибольшую силу тяги будет иметь винт, наиболее удаленный от оси \mathbf{G}_{12} .

Полученная вариационная задача поиска также должна рассматриваться при условии выполнения четырех соотношений: на модуль суммарной силы тяги и три вращательных момента, найденных из решения обратной задачи. А именно, соотношения должны быть учтены при составлении целевого профиля распределения сил (например, при вычислении коэффициентов для случая полиномиальной функции профиля).

2.3 Теоретико-механическая модель квадрокоптера

Дальнейшие исследования динамики, качественный анализ базовых траекторий и построение алгоритмов управления предлагается рассматривать для частного случая мультироторного

робота - квадрокоптера при $n=4$.

2.3.1 Случай $n = 4$

Квадрокоптеры являются одними из наиболее распространенных типов мультироторных роботов. В первую очередь это связано с тем, что, имея шесть степеней свободы, максимальное количество управляющих воздействий для любого мультироторного робота составляет четыре, а именно: подъемная сила, моменты крена, рысканья и тангажа.

Причем в случае квадрокоптера четыре силы тяги винтов создают четыре управляющих функции (суммарная сила тяги и три момента) следующим образом:

1) подъемная сила всегда направлена перпендикулярно плоскости робота и равна сумме сил тяги всех винтов,

2) момент рысканья, который зависит от векторной суммы угловых скоростей всех винтов (если векторная сумма всех винтов равна нулю, то угол рысканья не меняется),

3) момент крена, который зависит от разности угловых скоростей четвертого и второго винтов,

4) момент тангажа, который зависит от разности угловых скоростей первого и третьего винтов.

Мультикоптеры с меньшим количеством винтов мало распространены из-за большего дефицита управляющих воздействий. С другой стороны, несмотря на то, что у роботов с большим

количеством винтов также четыре независимых управляющих воздействия, они имеют некоторые практические преимущества, в частности, большую грузоподъемность. Кроме того, они менее подвержены потере управления в случае отказа или поломки одного из винтов. Существует ряд научных групп [45], занимающихся разработкой и испытаниями адаптивных алгоритмов в случае частичного разрушения пропеллера или части крыла. Среди используемых методов также встречаются также алгоритмы, основанные на нейронных сетях [44].

Но также стоит отметить, что задача повышения грузоподъемности имеет ограничения, связанные с технологическими барьерами аккумулирования электроэнергии: масса бортового аккумулятора зависит от его мощности и емкости. Объектом исследований и численных экспериментов данной работы выбран квадрокоптер, так как простота его конструкции наиболее хорошо подходит для качественного анализа динамики и методов управления.

2.3.2 Уравнения Лагранжа полета квадрокоптера

Для случая $n = 4$ суммарную силу тяги, рассматриваемую в качестве управления, можно выразить в инерциальной системе отсчета следующим образом:

$$\mathbf{U}_\xi = \sum_{i=1}^4 u_i \mathbf{\Upsilon} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 u_i (\cos \varphi \sin \psi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta) \\ \sum_{i=1}^4 u_i (\sin \varphi \sin \psi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta) \\ \sum_{i=1}^4 u_i \cos \psi \cos \theta \end{pmatrix}$$

Моменты $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$, выглядят следующим образом:

$$\mathbf{G}_1 = (u_2 - u_4)l\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{G}_2 = (u_3 - u_1)l\mathbf{e}_2$$

$\mathbf{G}_3 = \sum_{i=1}^n (-1)^i M_i \mathbf{e}_3$, где M_i - момент сопротивления i -того винта.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_\nu &:= \begin{pmatrix} \tau_\varphi \\ \tau_\psi \\ \tau_\theta \end{pmatrix} = \mathbf{W}_\nu^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sin \theta}{\cos \psi} (u_3 - u_1)l + \frac{\cos \theta}{\cos \psi} \sum_{i=1}^4 (-1)^i M_i \\ \cos \theta (u_3 - u_1)l - \sin \theta \sum_{i=1}^4 (-1)^i M_i \\ (u_2 - u_4)l + \frac{\sin \psi}{\cos \psi} (\sin \theta l (u_3 - u_1) + \cos \theta \sum_{i=1}^4 (-1)^i M_i) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Лагранжиан построенной системы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}) &= T_{trans} + T_{rot} - U = \frac{M}{2}(\dot{x} + \dot{y} + \dot{z}) + \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \psi - \\ &- 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi \sin^2 \theta + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta \sin \theta \cos \psi) + \\ &+ \frac{1}{2}D(\dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi \cos^2 \theta + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta - 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta \sin \theta \cos \psi) + \frac{1}{2}I_3^c(\dot{\gamma}_1^2 + \\ &+ \dot{\gamma}_2^2 + \dot{\gamma}_3^2 + \dot{\gamma}_4^2) + I_3^c(\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_4)(\dot{\varphi} \cos \psi \cos \theta - \dot{\psi} \sin \theta) - Mgz. \end{aligned}$$

Исходя из построенной модели получаем уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned}
M\ddot{x} &= k_1(\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3 + \dot{\gamma}_4)(\cos \varphi \sin \psi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta), \\
M\ddot{y} &= k_1(\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3 + \dot{\gamma}_4)(\sin \varphi \sin \psi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta), \\
M\ddot{z} &= -Mg + k_1(\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3 + \dot{\gamma}_4) \cos \psi \cos \theta \\
\ddot{\varphi}(A \sin^2 \psi + A \cos^2 \psi \sin^2 \theta + D \cos^2 \psi \cos^2 \theta) &+ \ddot{\psi} \cos \theta \sin \theta (A - D) - \\
-A\ddot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin 2\psi \cos^2 \theta (A - D) &+ \\
+\dot{\varphi} \dot{\theta} \sin 2\theta \cos^2 \psi (A - D) + \dot{\psi}^2 \sin \psi \cos \theta \sin \theta (D - A) &+ \\
+\dot{\psi} \dot{\theta} \cos \psi (-2A \sin^2 \theta - D \cos 2\theta) &= -I_3^c (\ddot{\gamma}_1 - \ddot{\gamma}_2 + \ddot{\gamma}_3 - \ddot{\gamma}_4) \cos \psi \cos \theta + \\
+I_3^c (\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_4) (\dot{\psi} \sin \psi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \psi \sin \theta) &+ \frac{\sin \theta}{\cos \psi} k_1 l (\dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_1) + \\
+\frac{\cos \theta}{\cos \psi} k_2 (-\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 + \dot{\gamma}_4^2), & \\
\ddot{\varphi} \cos \psi \sin \theta \cos \theta (A - D) + \ddot{\psi} (A \cos^2 \theta + D \sin^2 \theta) &+ \\
+\dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \psi (2A \cos^2 \theta - D \cos 2\theta) + \dot{\varphi}^2 \sin \psi \cos \psi \cos^2 \theta (D - A) &+ \\
+\dot{\psi} \dot{\theta} \sin 2\theta (D - A) = I_3^c \sin \theta (\ddot{\gamma}_1 - \ddot{\gamma}_2 + \ddot{\gamma}_3 - \ddot{\gamma}_4) &+ \\
+I_3^c \cos \theta (\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_4) (\dot{\theta} - \dot{\varphi} \sin \psi) + \cos \theta k_1 l (\dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_1) &- \\
-\sin \theta k_2 (-\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 + \dot{\gamma}_4^2), & \\
-A\ddot{\varphi} \sin \psi + A\ddot{\theta} + \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \psi (D \cos 2\theta - 2A \cos^2 \theta) &+ \\
+\dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi \sin \theta \cos \theta (D - A) + \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta (A - D) = & \\
= I_3^c (\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_4) (-\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\psi} \cos \theta) + k_1 l (\dot{\gamma}_2 - \dot{\gamma}_4) &+ \\
+tg\psi [lk_1 \sin \theta (\dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_1) + \cos \theta k_2 (-\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 + \dot{\gamma}_4^2)]. &
\end{aligned}$$

Полученная система шести дифференциальных уравнений с шестью неизвестными функциями $(x, y, z, \varphi, \psi, \theta)$ будет взята за основу дальнейшего исследования.

2.3.3 Общая схема алгоритма управления

Для построенной модели необходимо исследовать обратную задачу динамики. Верификация найденных решений будет осуществлена путем решения прямой задачи динамики, в том числе с помощью методов численного моделирования. Кроме того, необходимо составить алфавит базовых траекторий, изучить движения квадрокоптера по некоторым сложным траекториям, найти соответствующие управляющие воздействия.

Далее будет построен адаптивный алгоритм управления, позволяющий удовлетворительно работать в условиях внешних непрогнозируемых факторов, погрешности датчиков и ограниченном быстродействии вычислительного блока. Для этого будет построен нейросетевой регулятор управления полетом для базовых траекторий. Данный алгоритм на входе получает целевые параметры движения и характеристики текущего состояния системы, а на выходе выдает управляющие воздействия. Для создания данного регулятора будет построена обучающая выборка на основании частных аналитических решений полученной системы уравнений.

Для построенного алгоритма необходимо изучить эффективность его работы в зависимости от внешних факторов, провести сравнение результатов работы для ряда значений погрешности измерительных устройств.

2.4 Численное интегрирование общей задачи ($n = 4$)

Ввиду громоздкости полученных уравнений динамики представляется сложным найти аналитическое решение в общем виде. В связи с этим часть исследований опирается на результаты численного моделирования. Полученную систему уравнений движения робота для прямой задачи динамики можно интерпретировать как систему второго порядка с шестью неизвестными, при заданных $\dot{\gamma}_i(t)$.

Ввиду дефицита управляющих воздействий не каждая траектория в конфигурационном пространстве может быть достижима. Для обратной задачи динамики - получаем систему на $\dot{\gamma}_i(t)$ при задании некоторых компонент вектора \mathbf{q} .

Численное интегрирование системы осуществлялось с помощью программы MATLAB R2013a методом Рунге-Кутты. Приведенная к виду Коши система уравнений первого порядка состоит из двенадцати уравнений и двенадцати неизвестных (для случая прямой задачи динамики).

Как показано ниже, решение обратной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка и двух алгебраических. Параметры рассматриваемого квадрокоптера и взятые из справочников аэродинамические характеристики приведены в Таблице 1.

Таблица 1. Параметры задачи

Характеристика	Значение
M	1 кг
m_i	0.1 кг
l	0.4 м
p	4
r	0.05 м
c	0.01 м
ρ	1.3 кг/м ³
V	2 м/с
c_d	50

Таким образом, в данной главе построена теоретико-механическая модель мультироторного робота, учитывающая основные аэродинамические эффекты. Составлены уравнения, описывающие его динамику. Для общего случая при $n > 4$ предложены условия распределения силы тяги несущих винтов для доопределения системы. Отдельно рассмотрен случай $n = 4$.

3 Уравнения движения по траекториям

Как было описано выше, построенная модель квадрокоптера является системой с шестью степенями свободы и четырьмя независимыми управлениями. Возникающий дефицит управляющих воздействий приводит к ограничениям на пространство возможных движений. В данном разделе будет описано решение обратной задачи динамики, будут найдены функции управления для движения по некоторым траекториям. Также аналитически будут представлены базовые траектории, составляющие алфавит траекторий.

3.1 Замена переменных

Для упрощения дальнейших рассуждений введем новые переменные функций управления $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F)$, вместо $(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3, \dot{\gamma}_4)$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ F \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \\ \dot{\gamma}_3 \\ \dot{\gamma}_4 \end{pmatrix},$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -k_1 l & 0 & k_1 l & 0 \\ 0 & k_1 l & 0 & -k_1 l \\ I_3^c & -I_3^c & I_3^c & -I_3^c \\ \frac{k_1}{M} & \frac{k_1}{M} & \frac{k_1}{M} & \frac{k_1}{M} \end{pmatrix}$$

В связи с тем, что $\det(\Lambda) = \frac{-8k_1^3 l^2 I_3^c}{M} \neq 0$, данная замена является невырожденной.

Также введем дополнительное обозначение для суммарного момента сопротивления:

$$S = k_2(-\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 + \dot{\gamma}_4^2).$$

Отметим, что S однозначно выражается через переменные $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F$:

$$S(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F) = \frac{k_2}{2k_1} \left(-\frac{F\Gamma_3 M}{I_3^c} + \frac{\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2}{k_1 l^2} \right).$$

В результате получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\ddot{x} = F(\cos \varphi \sin \psi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta), \\
\ddot{y} = F(\sin \varphi \sin \psi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta), \\
\ddot{z} = -g + F \cos \psi \cos \theta \\
\ddot{\varphi}(A \sin^2 \psi + A \cos^2 \psi \sin^2 \theta + D \cos^2 \psi \cos^2 \theta) + \ddot{\psi} \cos \theta \sin \theta (A - D) - \\
-A \ddot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin 2\psi \cos^2 \theta (A - D) + \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin 2\theta \cos^2 \psi (A - D) + \\
+\dot{\psi}^2 \sin \psi \cos \theta \sin \theta (D - A) + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \psi (-2A \sin^2 \theta - D \cos 2\theta) = \\
= -\dot{\Gamma}_3 \cos \psi \cos \theta + \Gamma_3 (\dot{\psi} \sin \psi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \psi \sin \theta) + \frac{\sin \theta}{\cos \psi} \Gamma_1 + \frac{\cos \theta}{\cos \psi} S, \\
\ddot{\varphi} \cos \psi \sin \theta \cos \theta (A - D) + \ddot{\psi} (A \cos^2 \theta + D \sin^2 \theta) + \\
+\dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \psi (2A \cos^2 \theta - D \cos 2\theta) + \dot{\varphi}^2 \sin \psi \cos \psi \cos^2 \theta (D - A) + \\
+\dot{\psi} \dot{\theta} \sin 2\theta (D - A) = \dot{\Gamma}_3 \sin \theta + \Gamma_3 \cos \theta (\dot{\theta} - \dot{\varphi} \sin \psi) + \cos \theta \Gamma_1 - \\
-S \sin \theta, \\
-A \ddot{\varphi} \sin \psi + A \ddot{\theta} + \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \psi (D \cos 2\theta - 2A \cos^2 \theta) + \\
+\dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi \sin \theta \cos \theta (D - A) + \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta (A - D) = \\
= \Gamma_3 (-\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\psi} \cos \theta) + \Gamma_2 + tg\psi [\Gamma_1 \sin \theta + S \cos \theta].
\end{array} \right.$$

Рассмотрим обратную задачу в следующей формулировке: найти функции управления $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F$ для заданной траектории движения $x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$ и дополнительного соотношения на φ, ψ, θ . При этом функции $(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3, \dot{\gamma}_4)$, как было отмечено выше, находятся однозначно.

Перепишем первые три уравнения Лагранжа в следующем виде:

$$\begin{cases} \ddot{x} = Fa_{13}, \\ \ddot{y} = Fa_{23}, \\ \ddot{z} + g = Fa_{33}, \end{cases}$$

где $a_{13} = \cos \varphi \sin \psi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta$, $a_{23} = \sin \varphi \sin \psi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta$, $a_{33} = \cos \psi \cos \theta$.

Компоненты a_{i3} ($i = 1, 2, 3$) являются элементами третьего столбца матрицы \mathbf{R}_z , поэтому выполнено соотношение:

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1.$$

Используя это соотношение, возведем в квадрат первые три уравнения Лагранжа и сложим их. В результате имеем следующее соотношение:

$$F^2 = \dot{f}_1^2(t) + \dot{f}_2^2(t) + (\dot{f}_3(t) + g)^2$$

Таким образом, допустимы только те законы движения, для которых выполнено данное условие. Это значит, что результирующее ускорение робота ограничено суммарной силой тяги всех винтов.

3.2 Исследование обратной задачи

Далее опишем решение обратной задачи для общего случая, учитывая, что из-за дефицита управляющих воздействий в конфигурационном пространстве достижима не любая траектория. Имея шесть уравнений и десять неизвестных (четыре

управляющих воздействия и шесть координат), в общем случае необходимо минимум четыре дополнительных соотношения для разрешения системы. С другой стороны, в подсистему из первых трех уравнений входит управляющее воздействие F и шесть координат $(x, y, z, \varphi, \psi, \theta)$. Поэтому при задании любых четырех координат остается три уравнения и три неизвестных, что в общем случае делает подсистему разрешимой.

Предположим, необходимо найти управления $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F$ для заданного закона движения: $x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$. Для начала рассмотрим первые три уравнения Лагранжа общей системы:

$$\begin{cases} \ddot{x} = F(\cos \varphi \sin \psi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta), \\ \ddot{y} = F(\sin \varphi \sin \psi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta), \\ \ddot{z} + g = F \cos \psi \cos \theta. \end{cases}$$

Слева от знака равенства стоят заданные функции времени, отсюда находим управляющее воздействие F , которое по Предположению 3 не меньше нуля:

$$F = \sqrt{\ddot{f}_1^2(t) + \ddot{f}_2^2(t) + (\ddot{f}_3(t) + g)^2}.$$

В результате остаются два независимых уравнения на углы и три последних уравнения общей системы дифференциальных уравнений. Но система является остается недоопределенной, следовательно, необходимо добавить еще одно соотношение на углы. После этого получаем замкнутую систему для нахождения всех оставшихся углов. В результате чего остается система из трех уравнений на три неизвестных управления.

Стоит отметить, что последнее уравнение не является дифференциальным, и из него явно можно выразить Γ_2 через Γ_1, Γ_3 и углы, которые представляют из себя уже найденные функции времени.

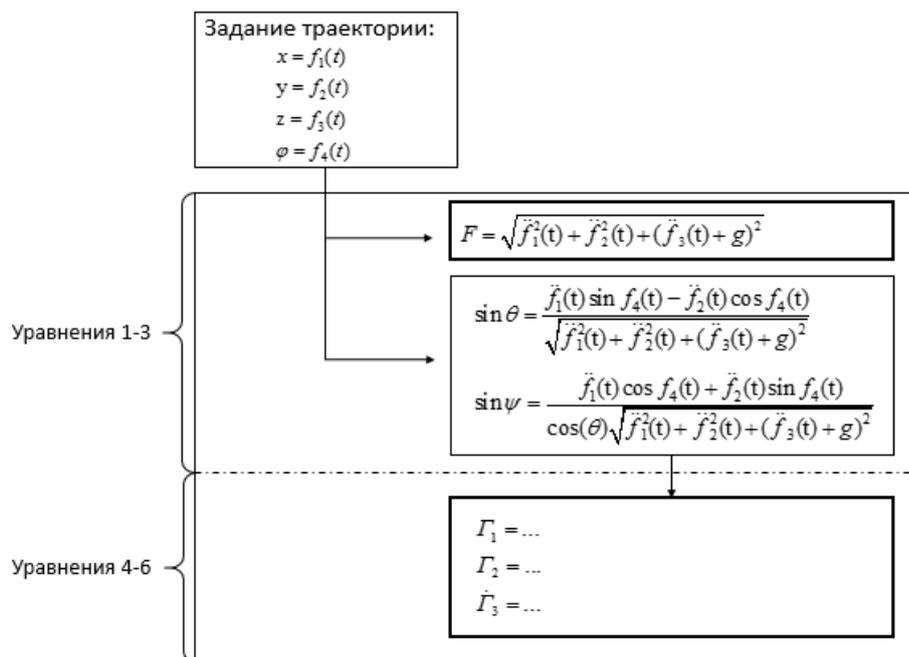


Рис. 4: Схема решения обратной задачи динамики.

Кроме того, оставшиеся первые два уравнения являются дифференциальными только относительно Γ_3 . Поэтому при рассмотрении некоторых движений решение обратной задачи будет сводиться к решению одного дифференциального и двух алгебраических уравнений.

На рисунке 4 показана последовательность решения обратной задачи динамики для случая, когда кроме заданных функций трех позиционных координат задана также функция $\varphi = f_4(t)$. Аналогично проводятся вычисления для случаев, когда вместо φ задана функция ψ или θ . Далее изучим некоторые траектории.

3.3 Движение в вертикальной плоскости

Для нахождения закона движения в вертикальной плоскости без ограничения общности будем считать, что $x \equiv 0$. Кроме того, предположим, что $\varphi \equiv 0$. Тогда из первого уравнения общей системы дифференциальных уравнений следует, что $\psi \equiv 0$. В результате имеем следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y} = -F \sin \theta, \\ \ddot{z} + g = F \cos \theta, \\ -\dot{\Gamma}_3 \cos \theta + \Gamma_3 \dot{\theta} \sin \theta + \Gamma_1 \sin \theta + S \cos \theta = 0, \\ \dot{\Gamma}_3 \sin \theta + \Gamma_3 \dot{\theta} \cos \theta + \Gamma_1 \cos \theta - S \sin \theta = 0, \\ A\ddot{\theta} = \Gamma_2. \end{array} \right.$$

Третье и четвертое уравнения можно преобразовать, поочередно домножая их на $\sin \theta$ и $\cos \theta$. В итоге имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y} = -F \sin \theta, \\ \ddot{z} + g = F \cos \theta, \\ \Gamma_3 \dot{\theta} + \Gamma_1 = 0, \\ \dot{\Gamma}_3 - S(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F) = 0, \\ A\ddot{\theta} = \Gamma_2. \end{array} \right.$$

Таким образом, из первых двух уравнений находим θ и F , а выражения для Γ_1 и Γ_2 из третьего и пятого уравнений соответственно подставляем в четвертое и получаем дифференциальное

уравнение на Γ_3 , что позволяет найти все управляющие воздействия $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F$.

Для верификации найденных функций управления подставим полученные управления в исходную систему и решим прямую задачу динамики. Ввиду сложности рассматриваемых систем в данной работе было задействовано численное моделирование. Суть проверки заключается в решении задачи Коши из двенадцати уравнений первого порядка для определенных начальных условий и найденных функций управления $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F$. Начальные условия находятся из уравнений, задающих целевую траекторию. Далее будут рассмотрены некоторые частные траектории.

3.3.1 Полет по окружности

Рассмотрим случай движения по окружности радиуса R_1 в вертикальной плоскости. Запишем закон движения следующим образом:

$$\begin{cases} y = R_1 - R_1 \cos \alpha_1(t), \\ z = R_1 \sin \alpha_1(t), \end{cases}$$

где $\alpha_1(t) = \alpha_0 \sin^2(\omega t)$, α_0 и ω - параметры скорости движения по окружности. Параметр $\alpha_1(t)$ выбран таким образом, чтобы в начальный момент времени были выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ z(0) &= 0 \\ \dot{y}(0) &= 0 \\ \dot{z}(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$y(T_{max}) = 0$$

$$z(T_{max}) = 0$$

$$\dot{y}(T_{max}) = 0$$

$$\dot{z}(T_{max}) = 0$$

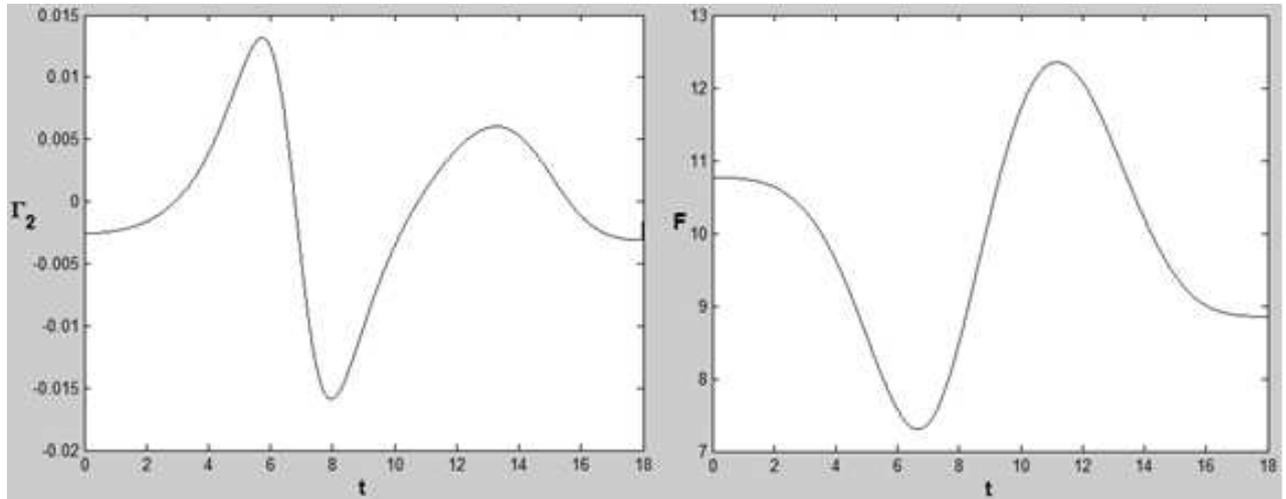


Рис. 5: Функции управления Γ_2 и F для полёта по окружности в плоскости Oyz .

Пусть $\alpha_0 = 2\pi$, $R_1 = 10$ м и $\omega = \frac{\pi}{2T_{max}}$, $T_{max} = 18$ с – время одного полного оборота. С помощью численного интегрирования находим управляющие воздействия (рис. 5).

На рисунках 6 и 7 показана траектория движения, которой соответствует найденные функции управлений, причем на рисунке 6 схематично изображен квадрокоптер, летящий по вертикальной окружности, и график найденной координаты $\theta(t)$.

3.3.2 «Горка»

Аналогично рассмотрим такую траекторию, как «горка» высоты z_m . Запишем закон движения следующим образом:

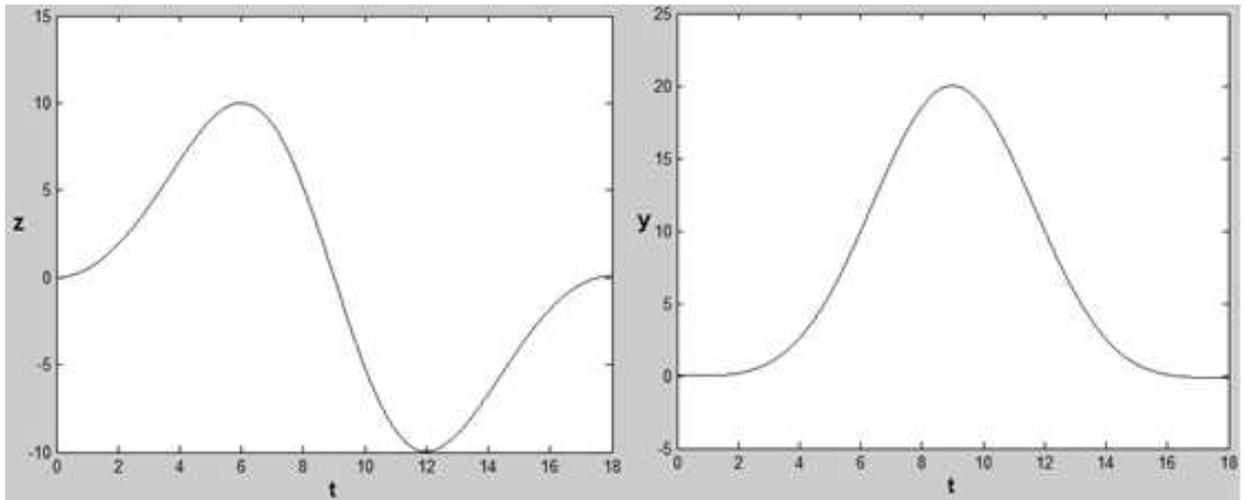


Рис. 6: Функции $z(t)$ и $y(t)$ для полёта по окружности в плоскости Oyz .

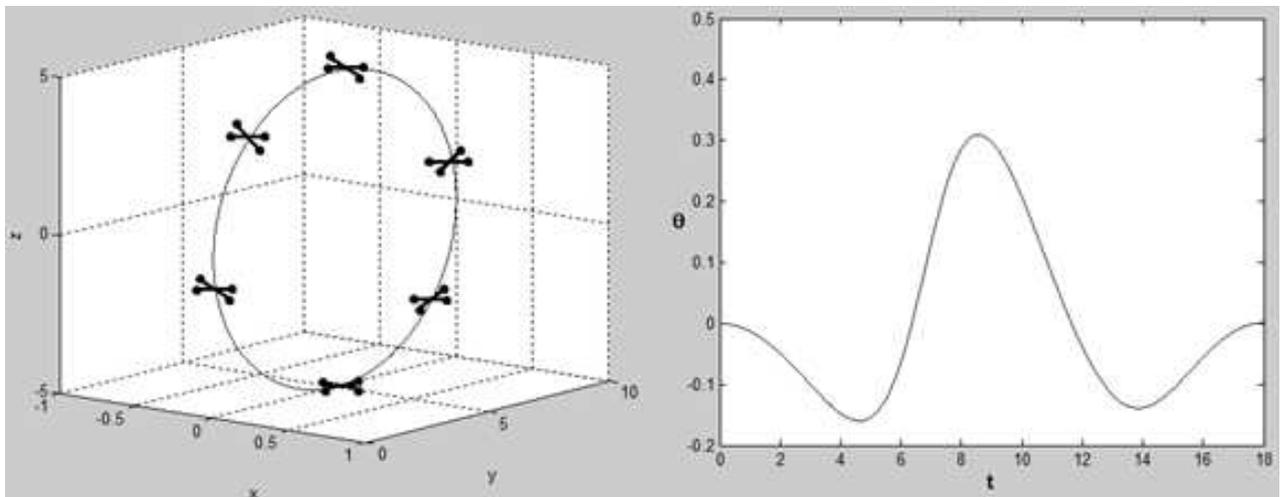


Рис. 7: Функции $z(x, y)$ и $\theta(t)$ для полёта по окружности в плоскости Oyz .

$$\begin{cases} y = \alpha_2(t), \\ z = z_m \sin^2 \alpha_2(t), \end{cases}$$

где параметр $\alpha_2(t)$ выбран таким же образом, как и в предыдущем случае. Аналогично с помощью численного интегрирования находим управляющие воздействия (рис. 8). На рисунках 9 и 10 показаны графики $z(t)$, $y(t)$, $z(y)$ и $\theta(t)$ для маневра «горка».

Отметим, что параметры горки выбраны следующим образом: высота $z_m = 5$ м, ширина $\alpha_0 = \pi$ м.

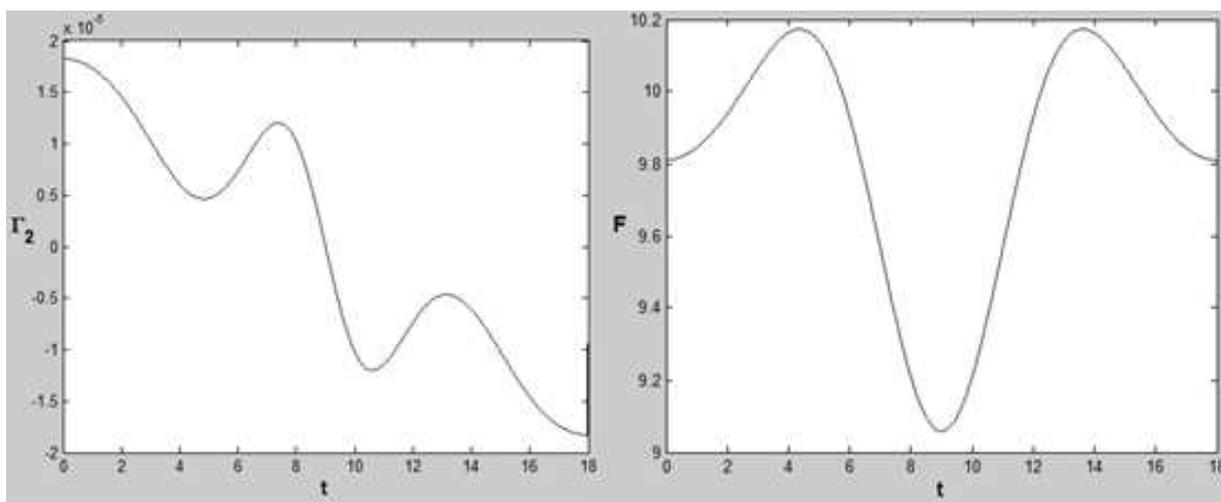


Рис. 8: Функции управления Γ_2 и F для маневра «горка».

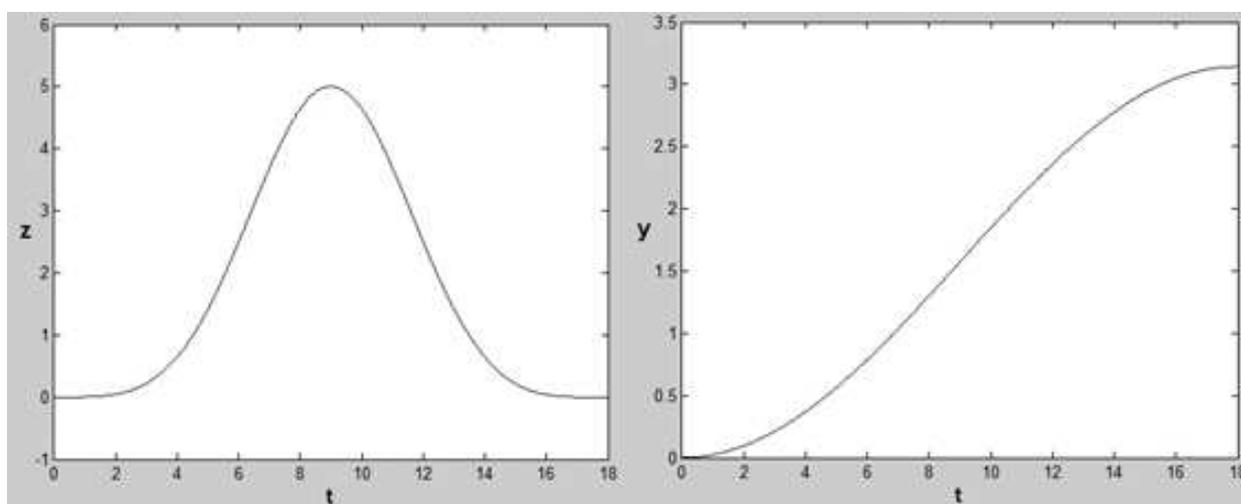


Рис. 9: Функции $z(t)$ и $y(t)$ для маневра «горка».

3.4 Движение в горизонтальной плоскости. Полёт по окружности

Для нахождения закона движения в горизонтальной плоскости без ограничения общности будем считать, что $z \equiv 0$. Кроме того, предположим, что $\psi \equiv 0$. В результате имеем следующую систему уравнений:

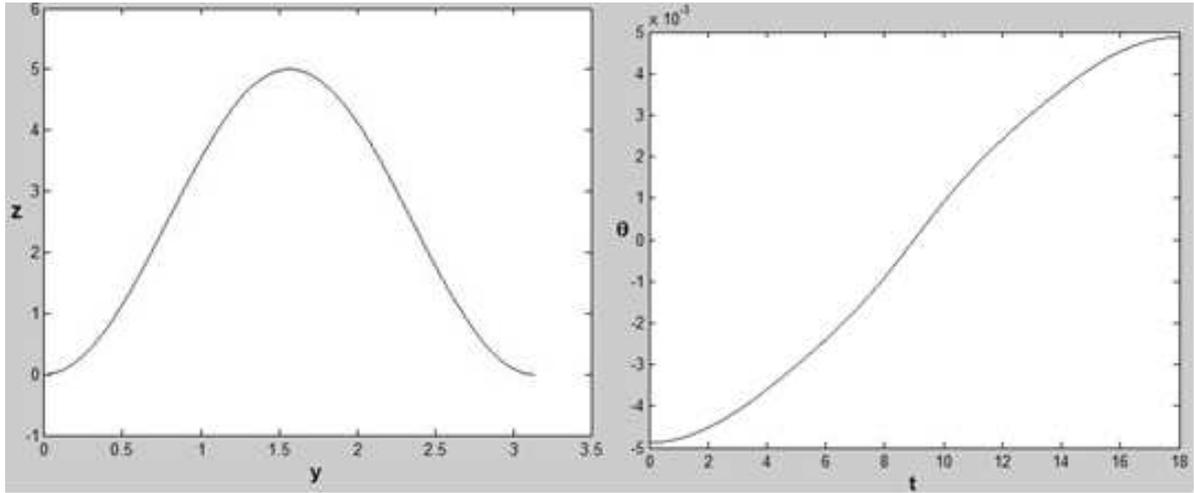


Рис. 10: Функции $z(y)$ и $\theta(t)$ для маневра «горка».

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = F \sin \varphi \sin \theta, \\ \ddot{y} = -F \cos \varphi \sin \theta, \\ 0 = -g + F \cos \theta, \\ \ddot{\varphi}(A \sin^2 \theta + D \cos^2 \theta) + \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin 2\theta (A - D) = -\dot{\Gamma}_3 \cos \theta + \Gamma_3 \dot{\theta} \sin \theta + \\ + \sin \theta \Gamma_1 + \cos \theta S, \\ \ddot{\varphi} \sin \theta \cos \theta (A - D) + \dot{\varphi} \dot{\theta} (2A \cos^2 \theta - D \cos 2\theta) = \dot{\Gamma}_3 \sin \theta + \\ + \Gamma_3 \cos \theta \dot{\theta} + \cos \theta \Gamma_1 - S \sin \theta, \\ A \ddot{\theta} + \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta (D - A) = -\Gamma_3 \dot{\varphi} \sin \theta + \Gamma_2. \end{array} \right.$$

Из первых трех уравнений в явном виде могут быть выражены оставшиеся координаты φ и θ а также функция управления F . Аналогично, домножая третье и четвертое уравнения на $\sin \theta$ и $\cos \theta$ соответственно и складывая их, получаем одно дифференциальное уравнение на Γ_3 , после чего в явном виде выражаются функции Γ_1 и Γ_2 .

Случай движения по горизонтальной окружности описывается следующим соотношением:

$$\begin{cases} x = R_1 - R_1 \cos \alpha_3(t), \\ y = R_1 \sin \alpha_3(t). \end{cases}$$

На рисунках 11 и 12 показаны графики управляющие воздействия, а на рисунках 13, 14 и 15 оставшиеся два угла и графики самих траекторий.

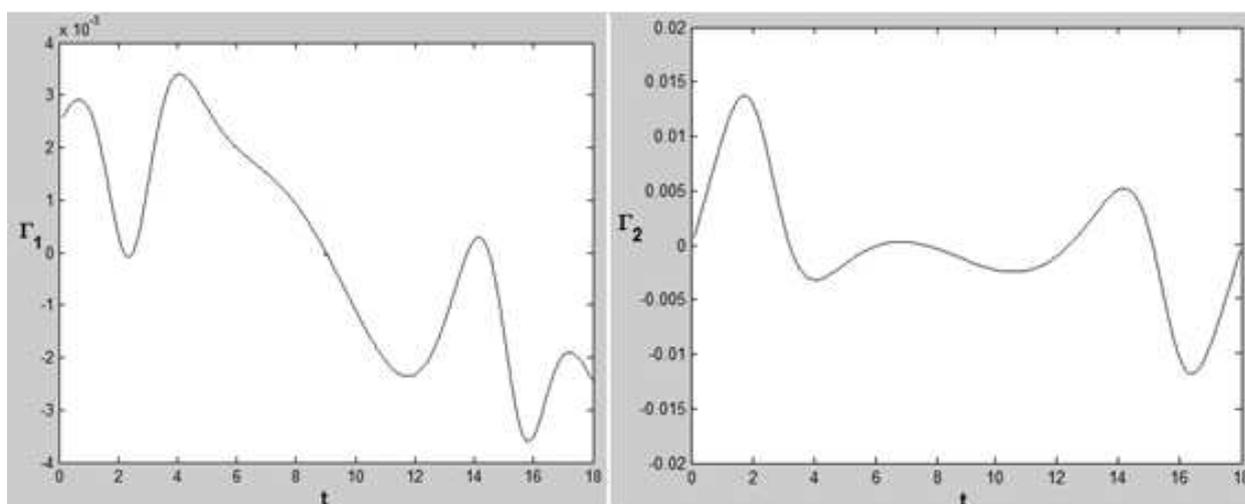


Рис. 11: Функции управлений Γ_1 и Γ_2 для полёта по горизонтальной окружности.

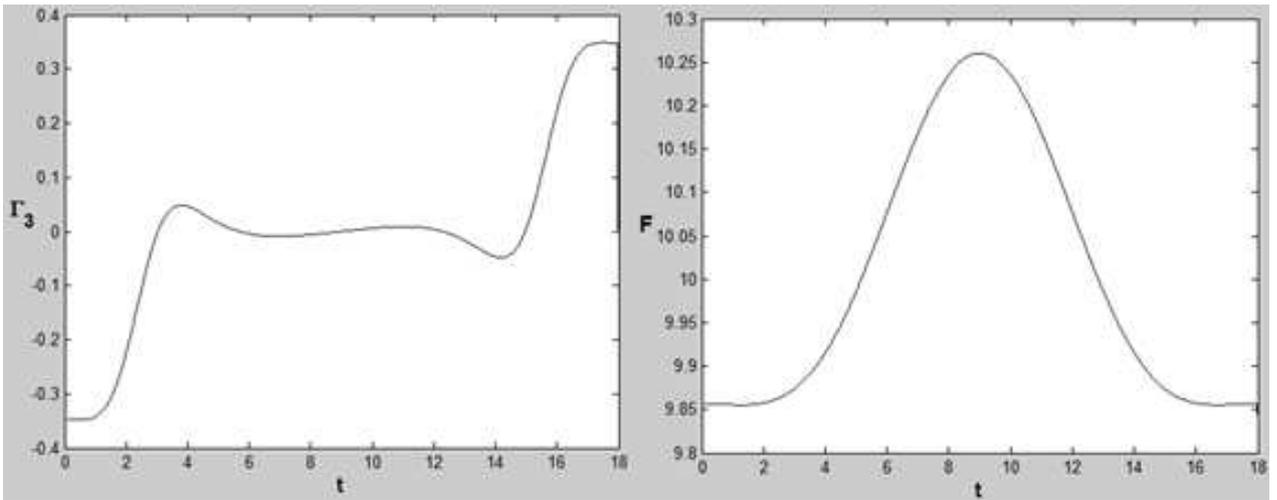


Рис. 12: Функции управлений Γ_3 и F для полёта по горизонтальной окружности.

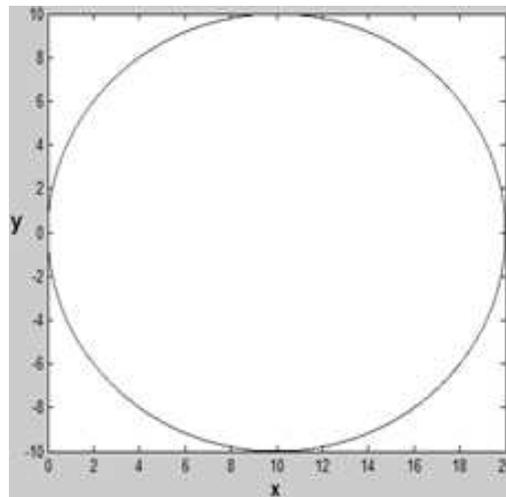


Рис. 13: Траектория $y(x)$ полёта по горизонтальной окружности.

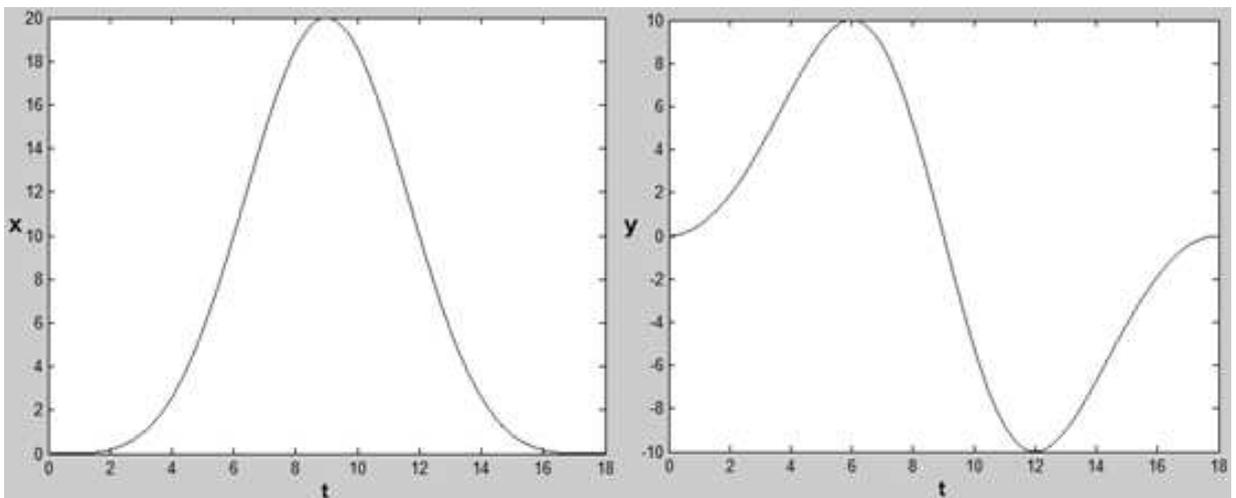


Рис. 14: Функции $x(t)$ и $y(t)$ для полёта по горизонтальной окружности.

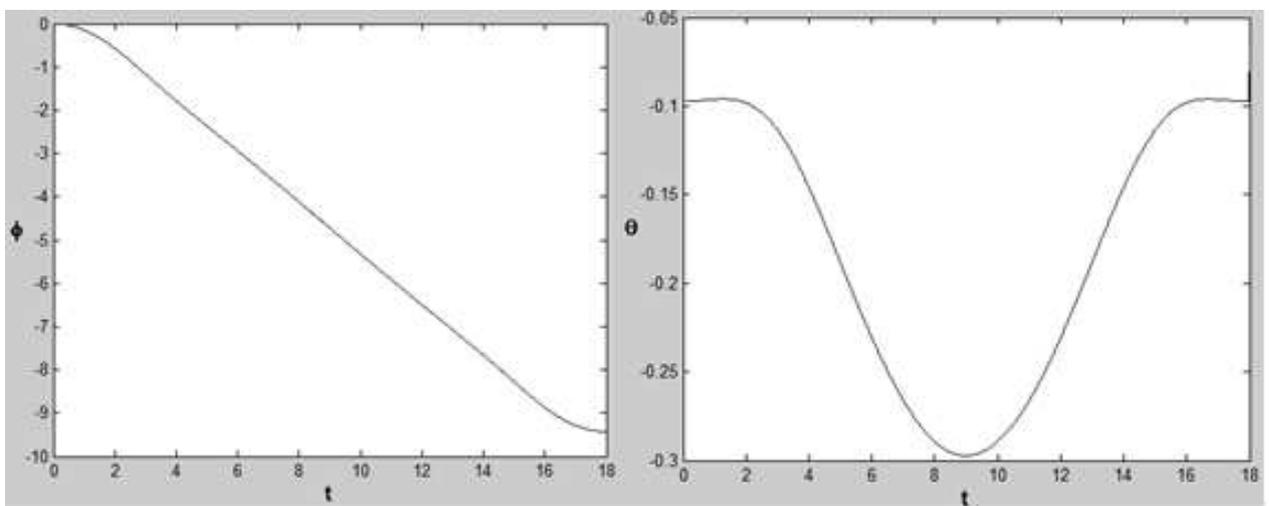


Рис. 15: Функции $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ для полёта по горизонтальной окружности.

3.5 Пространственные траектории. Движение по винтовой линии

Описанный принцип решения обратной задачи динамики применим и для более сложных траекторий. Например, рассмотрим задачу вычисления управляющих воздействий, необходимых для полета по винтовой линии. Ее можно описать следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = R_1 - R \cos \alpha_4(t), \\ y = R_1 \sin \alpha_4(t). \\ z = z_0 \sin^2(\omega_z t). \end{cases}$$

где z_0 и ω_z - параметры скорости подъема. Также, как и в случае окружности в горизонтальной плоскости, предположим, что $\psi \equiv 0$. Так как координата z входит только в третье уравнение, то все остальные будут такими же, как и в предыдущем случае. В результате получаем законы управления, показанные на рисунках 16 и 17, и траекторию, изображенную на рисунках 18, 19 и 20 (функции $x(t)$ и $y(t)$ совпадают со случаем горизонтальной окружности).

В настоящем разделе было предложено решение обратной задачи динамики и представлен алгоритм вычисления управляющих воздействий. Отдельно было рассмотрено движение в горизонтальной и вертикальных плоскостях, построены графики управлений для полета по вертикальной и горизонтальным окружностям, «горке» и винтовой линии.

Также для верификации найденных управлений была решена прямая задача динамики. При этом полученные результаты

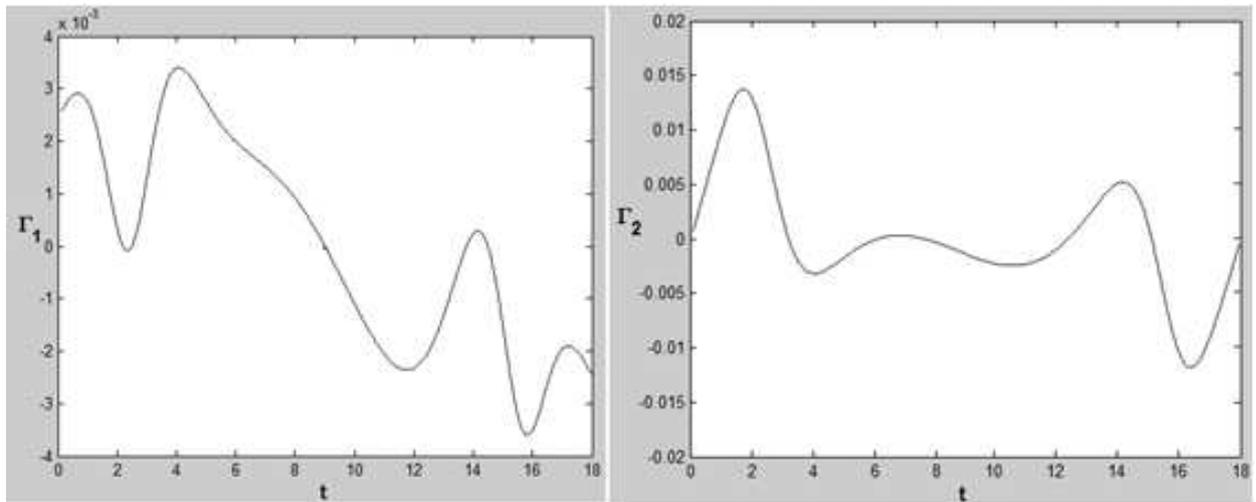


Рис. 16: Функции управления Γ_1 и Γ_2 для полёта по винтовой линии.

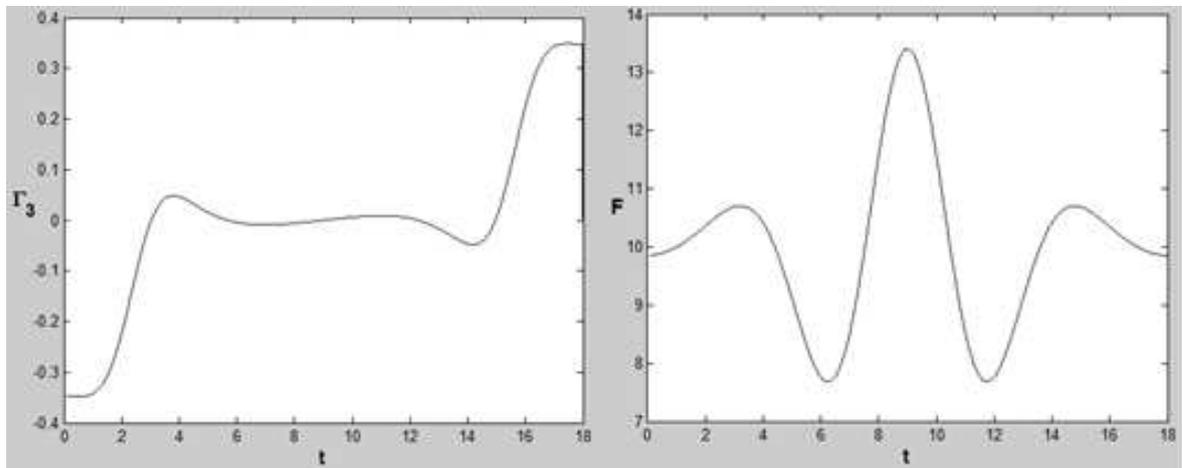


Рис. 17: Функции управления Γ_3 и F для полёта по винтовой линии.

полностью соответствовали требуемым траекториям. Аналогичным образом возможно вычислять управления для любой кусочно-гладкой траектории.

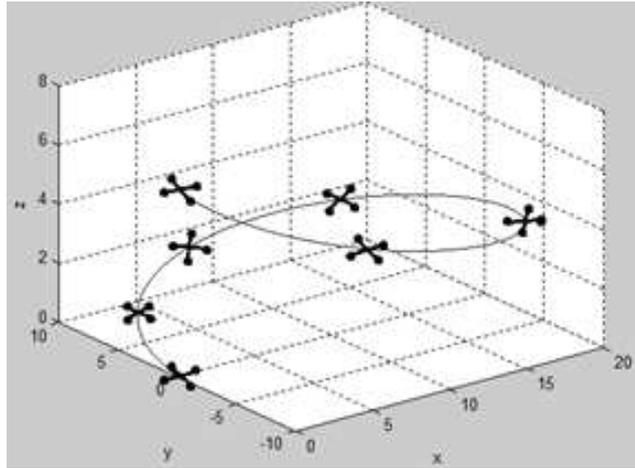


Рис. 18: Траектория $z(x, y)$ полёта по винтовой линии.

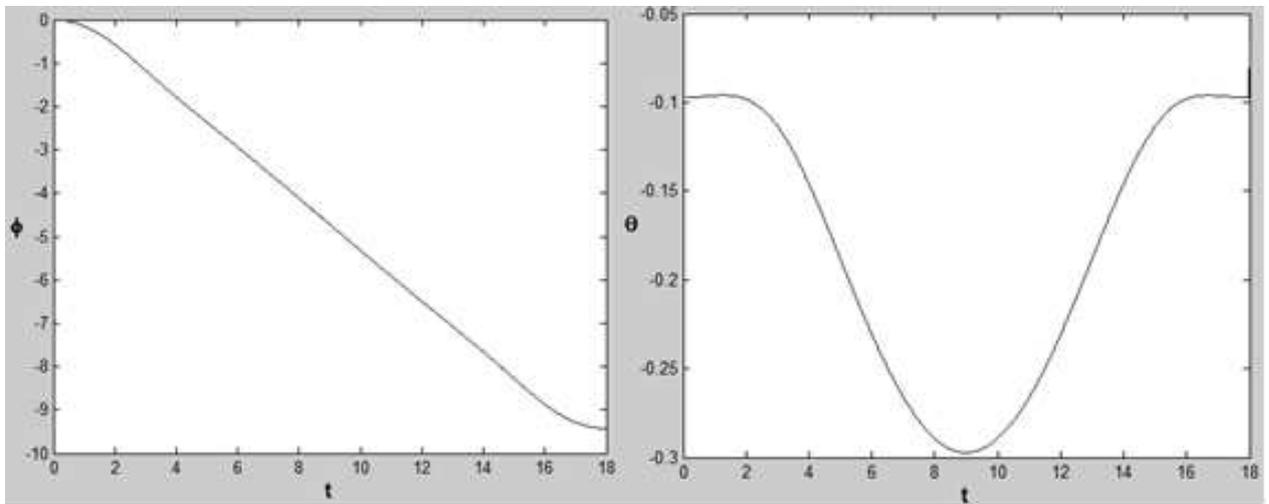


Рис. 19: Функции $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ для полёта по винтовой линии.

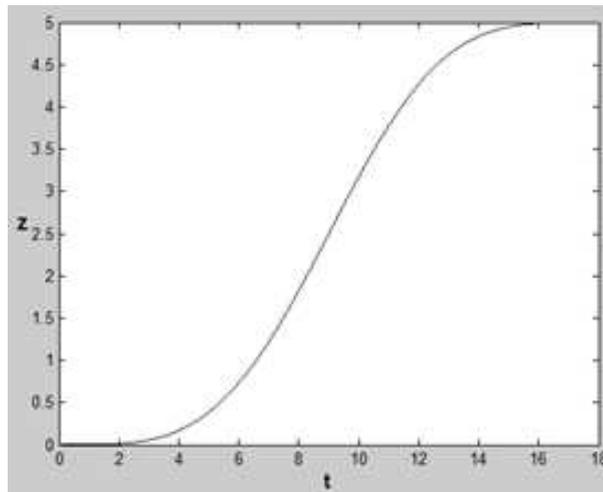


Рис. 20: Функция $z(t)$ для полёта по винтовой линии.

3.6 Алфавит базовых траекторий движения и алгоритмы управления

В данном подразделе описан алфавит базовых траекторий движения квадрокоптера, многократное комбинирование которых позволит с некоторой точностью аппроксимировать желаемую кривую-траекторию. Поэтому первым делом необходимо выделить минимальный набор элементов данного алфавита.

Стоит отметить, что центр масс аппарата будет находиться в покое в некоторой точке $P = (x_0, y_0, z_0)$, если углы крена и тангажа тождественно равны нулю (функция угла рысканья φ при этом может быть любой), а результирующая сила тяги равна весу квадрокоптера. Без ограничения общности за начальное состояние системы выберем положение покоя в начале инерциальной системы координат и при $\varphi \equiv 0$.

Для перемещения из начального состояния в некоторое новое состояние покоя необходим следующий алфавит базовых траекторий:

- 1) определение курса - вращение вокруг оси Ae_3 (изменение угла рысканья φ),
- 2) полет по горизонтальному отрезку с остановкой - управление по крену или тангажу или их комбинации при условии $z \equiv 0$,
- 3) вертикальный взлет-парение-посадка - управление суммарной силой тяги.

В результате получаем один из вариантов перемещения из начального положения в новое положение покоя $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Для этого необходимо последовательно реализовать данные базовые траектории:

1) определение курса - совершить поворот на такой угол φ_1 , чтобы проекция вектора $\overrightarrow{PP_1}$ совпала по направлению с вектором Ae_2 подвижной системы координат (причем в конечный момент $\dot{\varphi} = 0$),

2) полет по горизонтальному отрезку с остановкой в точке $P'_1 = (x_1, y_1, 0)$,

3) вертикальный взлет на высоту z_1 (для случая $z_1 > 0$) и зависание в конечном положении.

В результате квадрокоптер переместится из начала координат в точку $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Далее представлено подробное описание элементов алфавита базовых траекторий.

3.6.1 Определение курса

Изучим частное подмножество решений - вращение вокруг оси Ae_3 на угол φ : пусть $\psi \equiv \theta \equiv 0$. Тогда исходная система уравнений примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} = 0, \\ \ddot{z} = -g + F, \\ D\ddot{\varphi} = -\dot{\Gamma}_3 + S(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F), \\ 0 = \Gamma_1, \\ 0 = \Gamma_2. \end{array} \right.$$

Предположим, $z \equiv 0$, тогда суммарная сила тяги $F = g$. В результате получаем, что вращение вокруг оси $A\mathbf{e}_3$ описывается третьим уравнением. После подстановки в него выражений из других уравнений оно примет следующий вид:

$$\dot{\Gamma}_3 + \frac{Mgk_2}{2k_1I_3^c}\Gamma_3 = -D\ddot{\varphi}.$$

Из этого следует, что мы можем подобрать управление таким образом, чтобы на некотором отрезке времени угол рысканья был требуемой функцией. В качестве примера для $\varphi = \varphi_1 \sin^2(\beta t)$ функция управления Γ_3 находится аналитически из решения соответствующего линейного дифференциального уравнения. При этом φ имеет нулевые производные на концах.

На рисунке 21 показан график поворота вокруг оси $A\mathbf{e}_3$ и функция соответствующего управляющего момента Γ_3 .

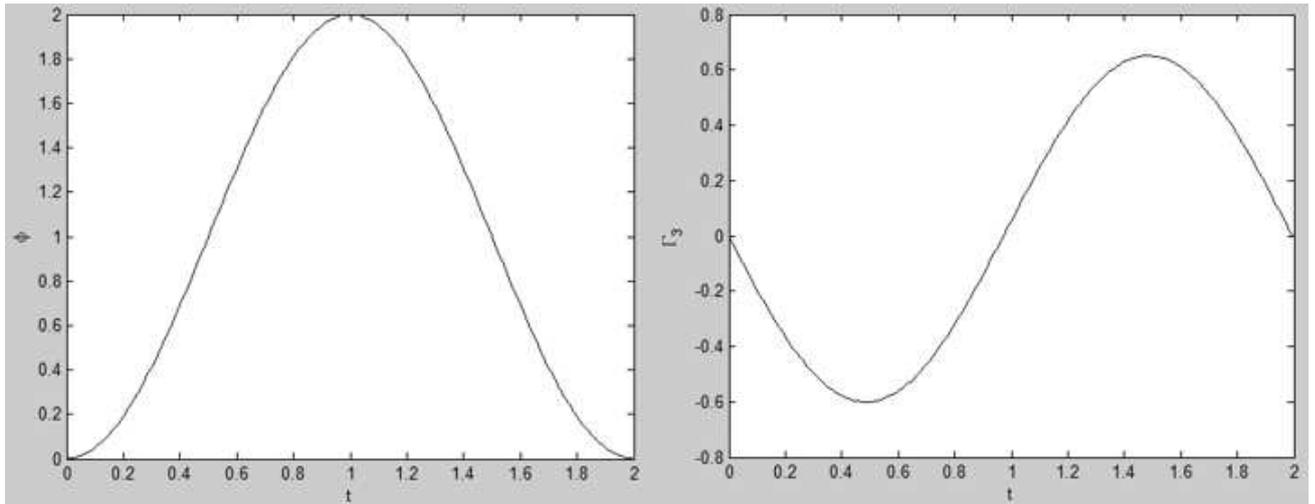


Рис. 21: Управление для поворота вокруг оси Ae_3 .

3.6.2 Полет по горизонтальной прямой

Без ограничения общности рассмотрим движение вдоль прямой $x = 0, z = 0$. Также предположим, что $\varphi \equiv 0$. Тогда из первого уравнения общей системы дифференциальных уравнений следует, что $\psi \equiv 0$. В результате имеем систему уравнений, полученную в п. 3.3:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y} = -F \sin \theta, \\ g = F \cos \theta, \\ \Gamma_3 \dot{\theta} + \Gamma_1 = 0, \\ \dot{\Gamma}_3 - S(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F) = 0, \\ A\ddot{\theta} = \Gamma_2. \end{array} \right.$$

Стоит отметить, что для случая $\theta = const, \theta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y} = -F \sin \theta, \\ F = \frac{g}{\cos \theta}, \\ \Gamma_1 = 0, \\ \dot{\Gamma}_3 + \frac{Mgk_2}{2k_1 I_3^c} \Gamma_3 = 0, \\ \Gamma_2 = 0. \end{array} \right.$$

А при условии $\Gamma_3(0) = 0$, получаем, что $\Gamma_3 = S = 0$. Тогда имеем равноускоренное движение вдоль оси Oy с ускорением $-gtg\theta$.

Для случая $\theta = \theta(t)$ решением аналогичного дифференциального уравнения на Γ_3 мы можем найти такое управление, которое позволит нам двигаться вдоль оси Oy по требуемому закону, в том числе полёт из стационарного положения с остановкой.

3.6.3 Взлет-парение-посадка

В качестве другой базовой траектории рассмотрим вертикальный взлёт-парение-посадку. В этом случае $x \equiv y \equiv \psi \equiv \theta \equiv 0$. Без ограничения общности, будем считать, что $\Gamma_3(0) = 0$ (в противном случае, будет вращение вокруг оси Ae_3 ввиду вклада момента Γ_3). Тогда из полученной в первой главе системы уравнений следует, что $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0$. Из этого следует, что угловые скорости всех четырех винтов совпадают; пусть они равны $\omega(t)$. Пусть t_1 - время взлёта, t_2 - время парения, t_3 - общее время полёта, h - конечная высота. Уравнение, связывающее координату $z(t)$ и $\omega(t)$, имеет следующий вид:

$$M\ddot{z} = -Mg + 4k_1\omega(t)$$

Таким образом, есть возможность найти такой закон управления $\omega(t)$, чтобы функция $z(t)$ для взлёта-парения-посадки была непрерывной и гладкой. Для этого разделим управление на три этапа (рис. 22):

1) при $0 \leq t < t_1$: $z_1(t)$ - полином четвертой степени, $\omega(t)$ меняется по квадратичному закону, происходит набор высоты;

2) при $t_1 \leq t < t_1 + t_2$: $z_2(t) = const$, $\omega = \frac{g}{4k_1} \approx 37.73$ рад/с - квадрокоптер зависит на высоте h ;

3) при $t_1 + t_2 \leq t < t_3$: $z_3(t)$ - полином четвертой степени, $\omega(t)$ меняется по аналогичному квадратичному закону, происходит посадка.

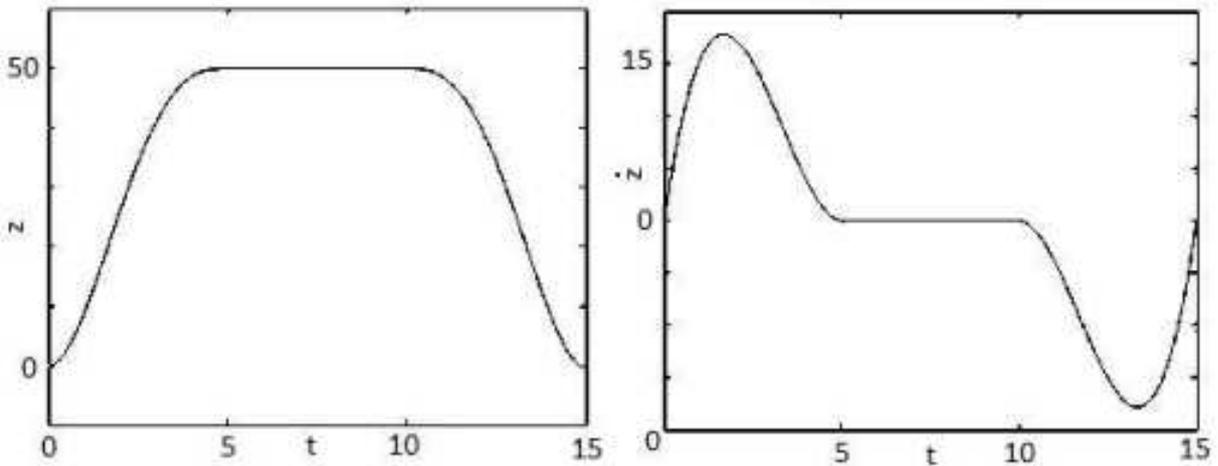


Рис. 22: График зависимости высоты и абсолютной скорости от времени при взлете-парении-посадке ($t_1 = t_2 = 5$ с, $t_3 = 15$ с, $h = 50$ м).

Отметим, что на интервалах $0 \leq t < t_1$ и $t_1 + t_2 \leq t < t_3$ функции соответствующих полиномов выбраны таким образом,

чтобы функция $z(t)$ была гладкой и непрерывной:

$$z_1(t) = a_1 t^4 + a_2 t^3 + a_3 t^2;$$

$$z_2(t) = 50;$$

$$z_3(t) = a_1 t^4 + (-4a_1 t_3 - a_2) t^3 + (6a_1 t_3^2 + 3a_2 t_3 + a_3) t^2 + (-4a_1 t_3^3 - 3a_2 t_3^2 - 2a_3 t_3) t + a_1 t_3^4 + a_2 t_3^3 + a_3 t_3^2,$$

где коэффициенты a_1, a_2, a_3 находятся из условия непрерывности и гладкости функции $z(t)$ в моменты времени t_1 и $t_1 + t_2$:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3h}{t_1^4}; \\ a_2 &= -\frac{8h}{t_1^3}; \\ a_3 &= \frac{6h}{t_1^2}. \end{aligned}$$

В результате, составлен алфавит базовых траекторий движения и в явном виде найдены соответствующие управляющие воздействия. Результаты данных вычислений будут задействованы в следующей главе для составления обучающей выборки.

4 Нейросетевой контроллер управления

Для построения алгоритма управления квадрокоптером для общего случая существует ряд подходов, наиболее распространенным из которых является использование пропорционально-дифференциального регулятора. Однако для нелинейных систем, аналогичных построенной в данной работе модели квадрокоптера, существуют другие подходы к управлению. Одним из них является использование нейронных сетей. Использование нейросетевого подхода к управлению, в том числе беспилотными летательными аппаратами описано в работах [54], [56]. Кроме того, в случае экстренного отказа или разрушения части аппарата необходима быстрая адаптация к переменным условиям, что позволяет осуществить нейросетевой контроллер.

Выбор нейросетевого метода также связан с тем, что при реальном полете мультироторного робота появляется большое количество эффектов и воздействий, которые иначе трудно математически смоделировать и парировать. Например, при быстром полете воздушный поток может вызывать осевые вибрации вращающегося винта, называемые в литературе "blade flapping". Это связано с тем, что относительная скорость воздуха для "набегающей" лопасти винта сильно отличается от скорости воздуха для противоположной - "уходящей" лопасти. Это приводит к тому, что подъемная сила каждой лопасти в течение одного оборота может меняться, вызывая тем самым колебания оси винта и соответственно воздействуя на летящий аппарат.

Также существует актуальная задача корректировки полета при появлении внешних возмущений, например, ветра. С этой задачей связано два типа проблем. Первая заключается в том, что ветер сложно измерить, а получить информацию о его воз-

действии можно с навигационных бортовых датчиков, которые имеют определенную погрешность и случайный шум. Вторая проблема связана с задержкой по времени между обнаружением отклонения и корректировкой полета. Поэтому также имеется задача оптимизации вычислительной схемы для повышения ее быстродействия.

Для решения подобных задач был построен гибридный алгоритм управления квадрокоптером, который представлен в данной главе. Также описано его применение для синтеза управляющих воздействий, показаны результаты его работы для некоторых базовых траекторий, в том числе при наличии случайного шума и погрешности датчиков.

4.1 Нейросетевой подход к управлению БПЛА

Суть нейросетевого подхода к управлению летательными аппаратами заключается в создании многоуровневого алгоритма (рис. 23), способного автономно адаптироваться к непрогнозируемым внешним возмущениям и погрешностям измерительных устройств. В самом верхнем контуре происходит формирование целей и ключевых параметров полета. Например, необходимо переместиться из точки A в точку B или следовать за подвижной целью, облетая возникающие на пути препятствия.

В следующем контуре происходит интерпретация заданных параметров в функциональные ограничения. Также на нем осуществляется планирование общей траектории полета. Оно состоит из разделения маршрута на отрезки таким образом, что на каждом из них траектория полета в требуемой степени близка к некоторому шаблонному значению. Причем это шаблонное значение задано и описано наперед и реализуется с высокой

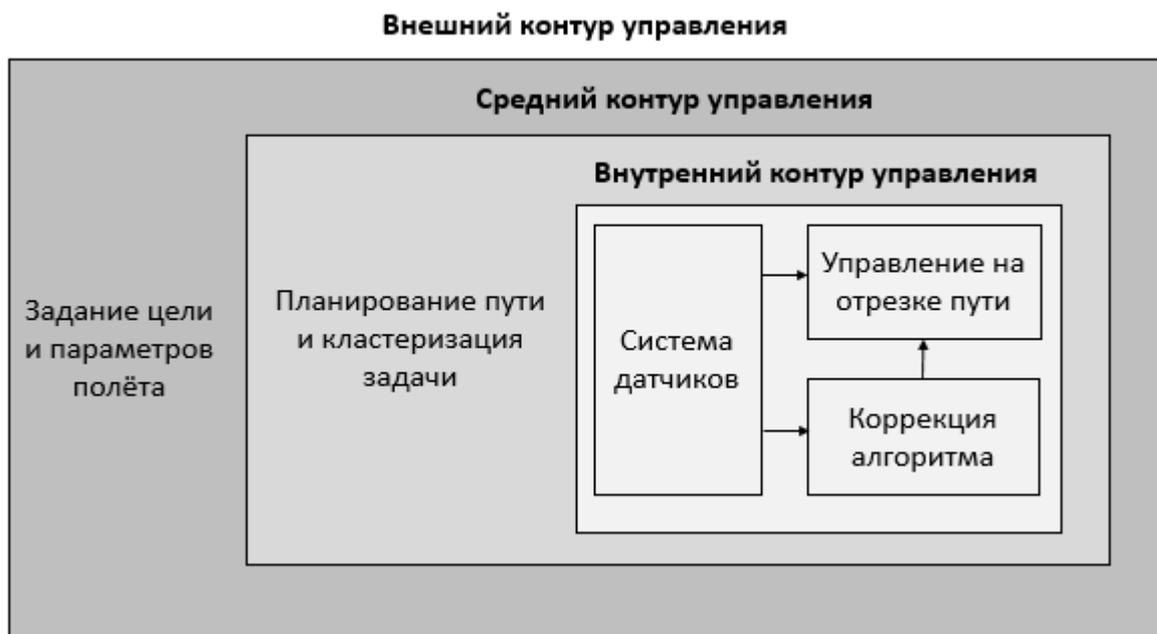


Рис. 23: Контуры алгоритма управления.

скоростью. Данный контур можно назвать выделением типовых решений или кластеризацией задачи.

Внутренний контур состоит из нескольких отдельных блоков. Во-первых, это ряд нейросетевых регуляторов, отвечающих за движение по базовым траекториям (шаблонам). Во-вторых, необходим блок, который будет отвечать за коррекцию алгоритма путем обновления обучающей выборки натурными испытаниями. Также можно добавить блок, отвечающий за создание новых шаблонов на основании многократных повторений подобных маневров.

В данной работе описан отдельный нейросетевой контроллер и принципы его работы на некоторых базовых траекториях. Подтверждение его удовлетворительной работы в этом случае позволит начать разработку многоуровневого контроллера, адаптирующегося к непредсказуемым внешним факторам и способного к самостоятельной корректировке.

4.2 Схема нейросетевого контроллера

В данном разделе предложена схема синтеза управления с использованием нейросетевого контроллера. Он состоит из четырех основных блоков: блока, моделирующего датчики, нейронной сети, интегратора; также имеется задающий блок, в котором описаны параметры задачи. В последний входит шаг интегрирования, шаг обращения к датчикам, погрешность датчиков и измерительных устройств, наличие случайных шумов; кроме того, в нем формулируется задача для нейросетевого контроллера. Например, для случая вертикального взлета это могут быть целевые показатели высоты h и времени подъема t_1 (рис. 24).

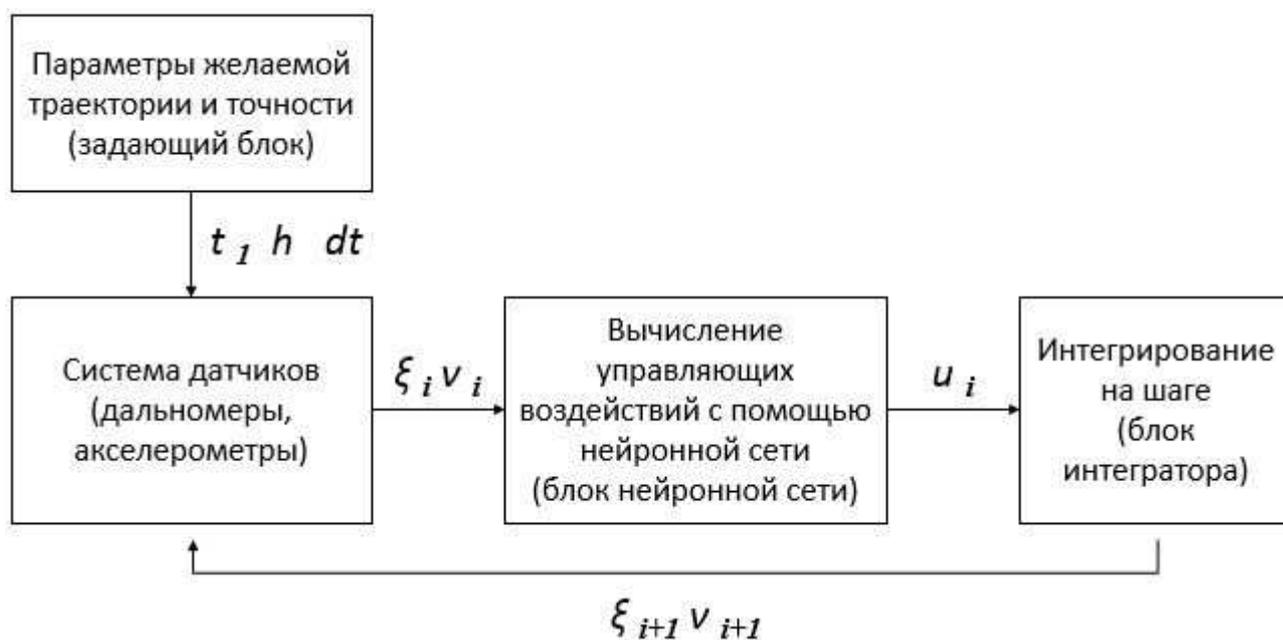


Рис. 24: Вычислительная схема блока управления.

Работа алгоритма начинается с задающего блока. Далее информация из него передается в блок датчиков, который с некоторым заданным шагом может выдавать информацию о координатах, скоростях, ускорениях летательного аппарата. Наиболее распространенными датчиками являются высотомер,

система определения долготы и широты (датчик GPS, система маяк-радар), акселерометры и гироскопы. Случайный шум и погрешность датчиков моделируются следующим образом: на каждом шаге измерения к нему прибавляется случайное число из некоторого диапазона.

После задающего блока и блока датчиков данные передаются в блок вычисления управляющих воздействий, где они являются входами нейронной сети. Подробное описание этого блока приведено в следующем подразделе.

Полученные управления являются выходами блока нейронной сети и входами в блок интегратора, который на данном шаге решает прямую задачу динамики (систему шести дифференциальных уравнений второго порядка). На выходе этого блока - новое состояние системы. После этого происходит повторное обращение к системе датчиков и цикл повторяется до тех пор, пока не будут достигнуты целевые показатели с необходимой точностью.

4.3 Блок нейронной сети

Задачей этого блока является вычисление управляющих воздействий с помощью нейронной сети в зависимости от текущих параметров системы и требуемой точности. Он позволяет находить функции управления в задачах с плохо моделируемыми или непредсказуемыми эффектами. Являясь хорошим аппроксиматором, нейронная сеть также позволяет осуществлять быстрые вычисления. Единственным ее недостатком является необходимость в вычислении коэффициентов весовой матрицы.

В основе данного блока лежит трехслойная нейронная сеть прямого распространения (трехслойный перцептрон). В результате экспериментов была выбрана сеть с сигмоидальными функциями активации в скрытом слое, состоящем из десяти нейронов (рис. 25). Вычисление весовой матрицы и смещений осуществляется путем супервизорного обучения.

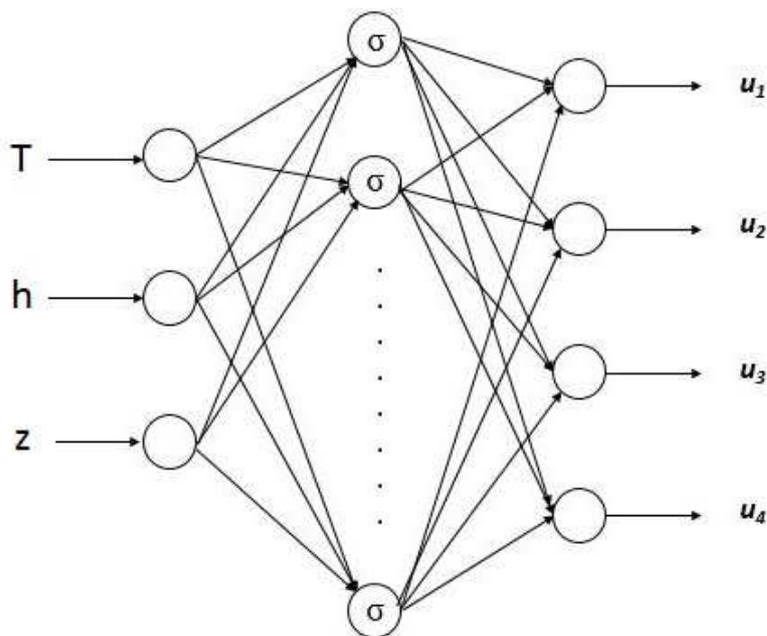


Рис. 25: Схема нейронной сети.

4.3.1 Построение обучающей выборки

Правило супервизорного обучения предполагает набор примеров (обучающая выборка) правильной работы сети:

$$\Xi = \{ (a_k, b_k), k = 1, \dots, N \},$$

где a_k — вход в нейронную сеть и b_k — соответствующий ему правильный выход (цель). Когда входы предъявляются сети, её выходы сравниваются с целями. Правило обучения используется для уточнения весов и смещений нейронов сети, чтобы приблизить выход сети к соответствующим целям, которые указаны в

задающем блоке.

Обучающая выборка формируется следующим образом. Для начала составляется семейство функций, которыми будет приближаться целевое решение. Далее с помощью численного моделирования решается обратная задача динамики по вычислению соответствующего семейства функций управления. Полученное семейство формирует набор выходов нейронной сети b_k . Входами являются параметры целевой траектории (высота и время подъема-парения-посадки, угол поворота и др.), а также информация, поступающая с блока датчиков (текущая координата центра масс, скорость и др.).

Например, для случая вертикального взлета за время t_1 на высоту h семейством целевых функций выбрано множество многочленов четвертой степени следующего вида:

$$\tilde{z}_{ht_1}(t) = \frac{3h}{t_1^4}t^4 - \frac{8h}{t_1^3}t^3 + \frac{6h}{t_1^2}t^2,$$

в котором коэффициенты найдены из условий, что $\tilde{z}_{ht_1}(0) = 0$, $\tilde{z}_{ht_1}(t_1) = h$, $\dot{z}_{ht_1}(0) = 0$, $\dot{z}_{ht_1}(t_1) = 0$, индекс ht_1 — количество функций в семействе. Причем каждому такому многочлену соответствует функция управления. Таким образом, для случая вертикального взлета с датчиком высоты (рассмотренного далее при моделировании) обучающей выборкой является множество строк вида:

$$(t_1, h, \tilde{z}_{ht_1}(t_j), u_{ht_1}(t_j)),$$

где j — соответствует количеству точек на целевой функции, взятых для обучающей выборки, $\tilde{z}_{ht_1}(t_j)$ — текущая высота и $u_{ht_1}(t_j)$ — управляющее воздействие (сила вертикальной тяги).

Первые три являются входными параметрами сети, а последнее - выходом. Причем обучающая выборка включает в себя семейства траекторий z_{ht_1} и u_{ht_1} , каждое из которых соответствует некоторому значению пары (h, t_1) . При этом h и t_1 выбирались перебором с равным шагом из некоторого отрезка, например, $1, 2, \dots, 10$ м, $1, 2, \dots, 5$ с.

4.3.2 Построение и обучение нейронной сети

Для построения нейронной сети использовался пакет Neural Network Fitting Tool (Matlab R2013A). Построенная обучающая выборка произвольным образом распределяется на три категории: для обучения (70%), для определения момента остановки обучения (15%), для независимого тестирования работы сети после обучения (15%). Далее сеть проходит обучение, после чего она используется для синтеза управлений.

4.4 Результаты работы нейросетевого контроллера на базовых траекториях

Рассмотрим работу построенного регулятора для таких базовых траекторий, как вертикальный взлет и поворот на заданный угол.

Для случая вертикального взлета система датчиков состоит из одного гибридного высотомера: предполагается, что для высоты от 0 до 1 м задействован ультразвуковой дальномер, а для высот более 1 метра подключается барометрический датчик. Он передает сигнал в блок нейронной сети с интервалом 0,03 секунды. Построение обучающей выборки описано выше в пункте 4.3.1. На рисунке 26 показана работа нейросетевого алгоритма для взлета на высоту 3 м и 5 м за 3 секунды без учета

погрешности высотомера.

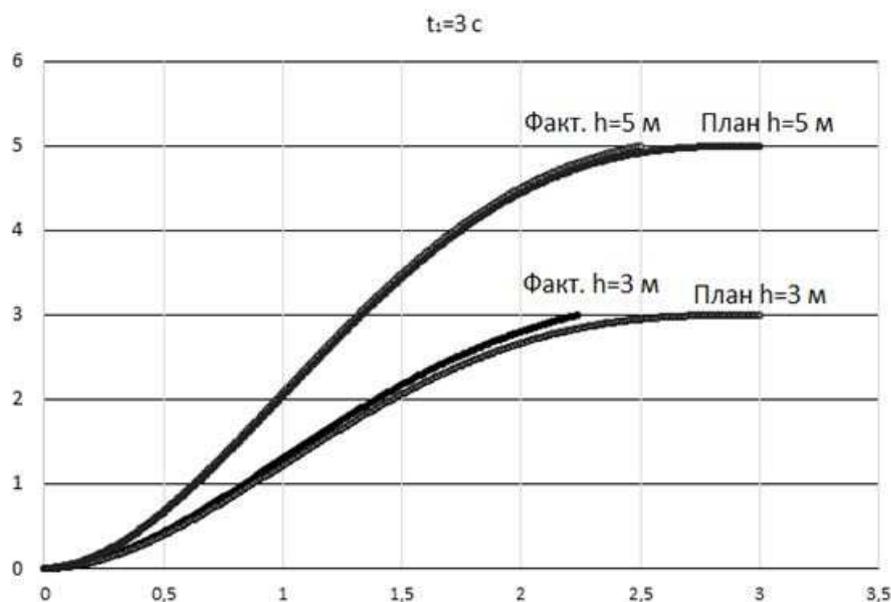


Рис. 26: Взлет на высоту 3 и 5 м с идеальными датчиками высоты.

На основании численных экспериментов можно сделать вывод об удовлетворительной работе построенного алгоритма для случая вертикального взлета.

Далее рассмотрим работу нейросетевого контроллера для построения плоских траекторий. Одной из наиболее важных задач в этом случае является управление углами крена и тангажа, так как они отвечают за определение результирующего вектора тяги и, следовательно, вектора движения летательного аппарата. В силу симметрии в данной постановке достаточно изучить алгоритм управления одним из углов поворота, например, креном.

Аналогично случаю вертикального взлета выберем семейство целевых функций для составления обучающей выборки. Для того, чтобы поворот был плавным и гладким, построим обучающую выборку как множество функций вида:

$\theta(t) = \pm\theta_1 \sin^2\left(\frac{\pi t}{2t_1} + \frac{\pi}{2}\right)$, где θ_1 и t_1 - параметры обучающей выборки.

Далее построим нейронную сеть, в которой в качестве входных параметров выступает угол θ_1 , на который необходимо совершить поворот, время t_1 , за которое необходимо повернуть на угол θ_1 , и текущее (полученное с гироскопа) значение угла крена. На выходе сеть выдает четыре управляющих воздействия. На рисунке ниже показана работа нейросетевого алгоритма для поворота на угол $\pi/12 = 0,26$ радиан за 5 секунд а также график целевой функции.

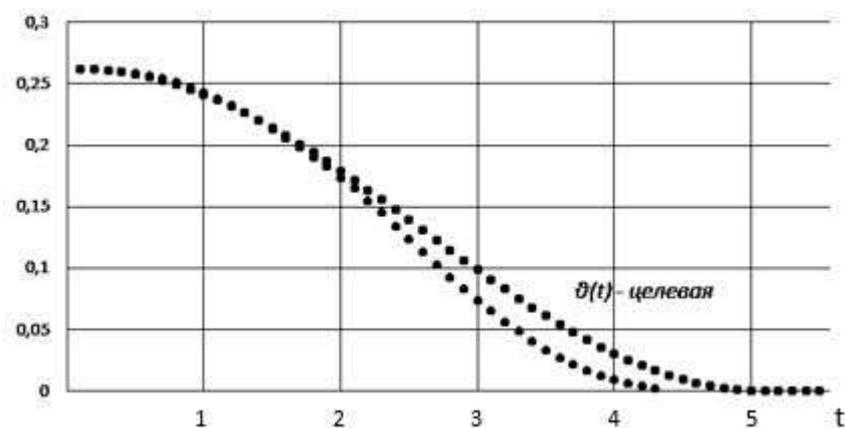


Рис. 27: Поворот вокруг оси Ae_1 на 0,26 рад.

На основании результатов моделирования можно сделать вывод об удовлетворительной работе построенного алгоритма для случая поворота на заданный угол.

4.5 Анализ работы нейросетевого регулятора при наличии погрешности датчиков

Использование контроллеров с обратной связью сопряжено с появлением таких проблем, как погрешность датчиков и на-

личие случайного шума. Изучим, какое влияние оказывают эти факторы на работу нейросетевого контроллера для случая вертикального взлета. Для этого предположим, что случайный шум и погрешность являются случайными аддитивными величинами, находящиеся в определенном диапазоне. На рисунке 28 представлены результаты работы контроллера для вертикального взлета на высоту 3 м и 5 м для случая идеальных датчиков и при наличии случайного шума и погрешности высотомера не более 4 см.

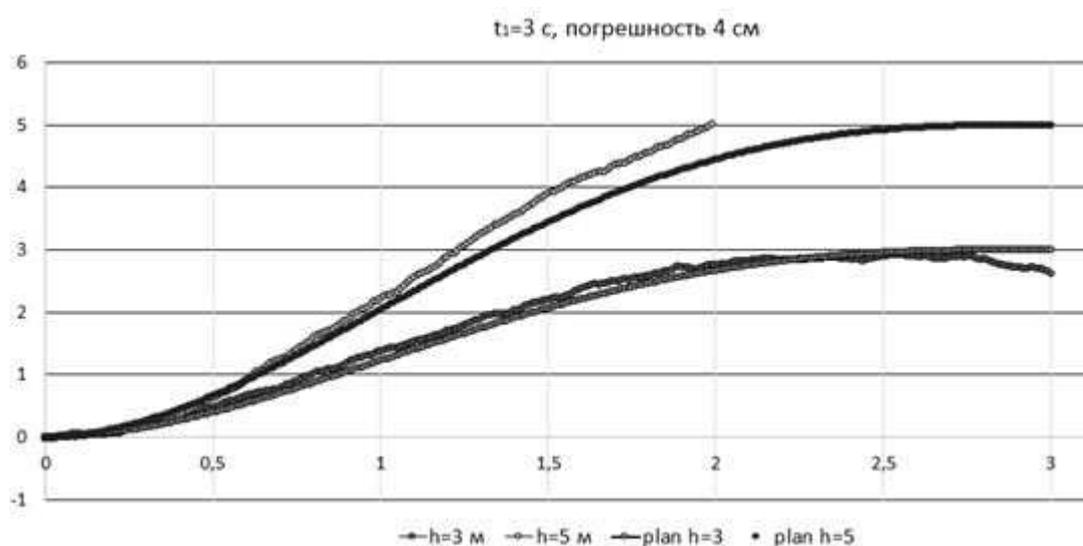


Рис. 28: Взлет на высоту 3 м и 5 м за 3 с с погрешностью высотомера 4 см.

Из графиков видно, что даже при работе с неидеальными датчиками высоты полученные траектории достаточно близки к целевой функции. На рисунке 29 рассмотрен менее точный высотомер - с максимальной погрешностью на шаге 10 см. В результате получаем значительное отклонение от целевой функции.

На рисунке 30 графически показана величина отклонения фактической траектории от планируемой в течение всего взлета на протяжении трех секунд.

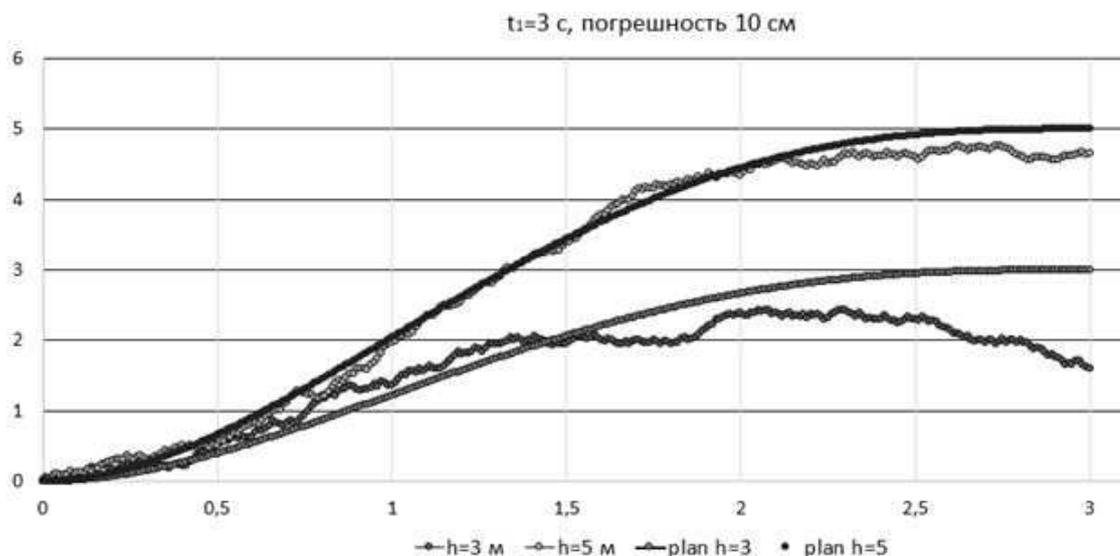


Рис. 29: Взлет на высоту 3 м и 5 м за 3 с с погрешностью высотомера 10 см.

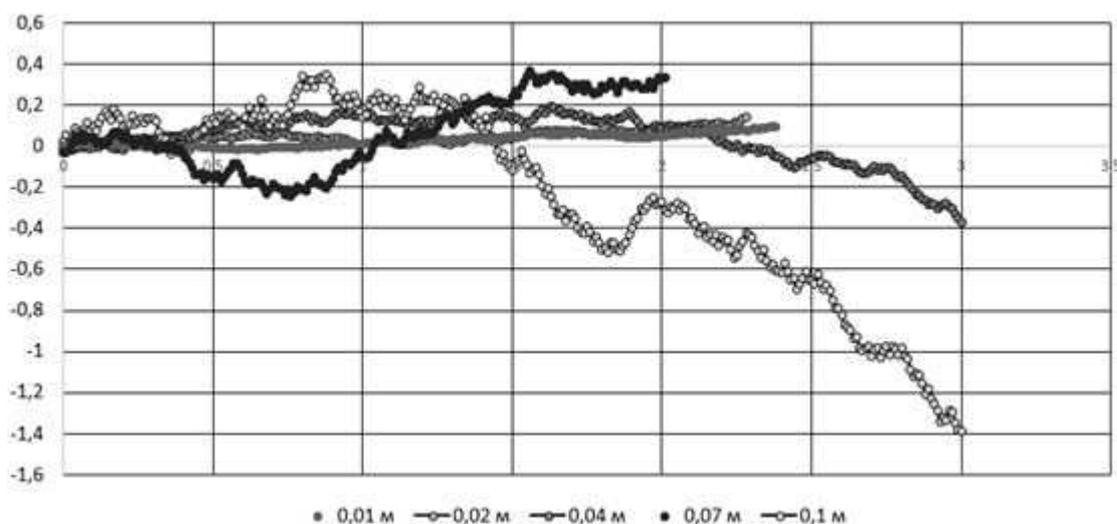


Рис. 30: Графики отклонения от траектории (м).

В качестве показателей эффективности описанного регулятора рассмотрен усредненный квадрат отклонений полученной траектории от целевой для некоторых движений. Соответствующие значения представлены в таблице 2, которая показывает связь между погрешностью датчиков и отклонением от целевого результата для случая вертикального взлета на высоту 3 м. Будем считать эффективной работу регулятора, если усредненный

квадрат отклонения не превосходит 5% от целевого расстояния. В данном случае отклонение не должно превышать 15 см.

На основании проведенного моделирования можно сделать вывод о том, что построенный неросетевой регулятор эффективно при погрешности работы высотомера до 4 см. Дополнительные графики по проведенным экспериментам с различными погрешностями измерительного датчика находятся в Приложении 2.

Таблица 2. Анализ работы регулятора.

Погрешность высотомера (см)	1	2	4	6,6	10
Усредненный квадрат отклонений (см)	4	6	13	19	50

В данной главе описан нейросетевой подход к управлению квадрокоптером и описан метод его работы в общем случае. Составлены модели таких основных блоков, как блок входящих параметров, блок нейронной сети и интегрирующий блок. Проведен анализ работы нейросетевого регулятора для таких базовых траекторий, как взлет и поворот вокруг оси Ae_1 .

Исследована эффективность построенного алгоритма для случая идеально работающих датчиков высоты и при наличии погрешности измерений. Построенный гибридный нейросетевой алгоритм управления квадрокоптером удовлетворительно работает для случая движения по некоторым базовым траекториям. Также построен аппарат, вычисляющий влияние погрешности датчиков и случайного шума на синтез управляющих воздействий. Показано, что данный контроллер удовлетворительно работает при погрешности на шаге до 4 см.

5 Заключение

В данной работе построена теоретико-механическая модель мультироторного робота, учитывающая основные аэродинамические эффекты. Составлены уравнения, описывающие его динамику. Для общего случая предложены условия распределения силы тяги несущих винтов для случая недоопределенной задачи, для повышения маневренности и более эффективного распределения нагрузки управляющих воздействий.

Отдельно рассмотрен случай четырех роторов и составлены уравнения динамики квадрокоптера.

На основе построенной теоретико-механической модели были получены ограничения на возможные движения квадрокоптера. Предложено решение обратной задачи динамики и представлен алгоритм вычисления управляющих воздействий. Отдельно было рассмотрено движение в горизонтальной и вертикальных плоскостях. Построены графики управлений для полета по таким траекториям, как полет по вертикальной окружности, «горка», винтовая линия и другим траекториям. Отдельно описан алфавит базовых траекторий движения квадрокоптера. Для некоторых базовых траекторий управляющие воздействия найдены в явном виде.

Для проверки найденных управлений численно была решена прямая задача динамики. При этом полученные результаты полностью соответствовали требуемым траекториям.

Предложен новый алгоритм управления квадрокоптером, основанный на нейросетевом регуляторе. Описана методика его создания для общего случая. Для некоторых базовых траек-

торий рассмотрена эффективность его работы. На основании результатов численного моделирования показано, что предложенный метод удовлетворительно работает для отдельных базовых траекторий.

Кроме того, описаны результаты его работы при наличии случайного шума и погрешности датчика. Показано, что для рассмотренного конкретного варианта квадрокоптера (характерный размер порядка 1 м) нейрорегулятор удовлетворительно работает при точности датчиков высоты порядка 4 см.

Результаты:

1. Построена мехатронная модель мультироторного робота, учитывающая основные аэродинамические эффекты; составлены уравнения, описывающие его динамику;
2. Получено решение обратной задачи динамики для нахождения управляющих воздействий для квадрокоптера; изучены некоторые траектории высшего пилотажа и составлен алфавит базовых траекторий;
3. Построен нейросетевой контроллер для синтеза управляющих воздействий с высокими характеристиками быстродействия и адаптивности, представлены результаты его работы при наличии случайного шума и погрешности датчика.

6 Список литературы

Список литературы

- [1] *Фантони И., Лозано Р.* Нелинейное управление механическими системами с дефицитом управляющих воздействий // Москва-Ижевск: ООО "Компьютерная динамика 2012. 312 стр.
- [2] *Murrieri P.S. Bouabdallah, Siegwart R.* Design and control of an indoor micro quadrotor.
- [3] *Dzul A.P. Castillo, Lozano R.* Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft // IEEE Transaction on Control System Technology. 2004. P. 510-516.
- [4] *Bresciani T.* Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter // Department of Automatic Control, Lund University, October 2008. P. 1-184.
- [5] *Murrieri P.S. Bouabdallah, Siegwart R* Pid vs lq control techniques applied to an indoor micro quadrotor.
- [6] *Carreira T.G.* Quadcopter Automatic Landing on a Docking Station // Instituto Superior Tecnico. 2013. P. 1-10.
- [7] *Venables C.* Multirotor Unmanned Aerial Vehicle Autonomous Operation in an Industrial Environment using On-board Image Processing // University of Western Australia. Final Year Project Thesis. 2013. P. 1-130.
- [8] *Madani T., Benallegue A.* Control of a quadrotor mini-helicopter via full state backstepping technique // Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. 2006. P. 1515-1520.

- [9] *Joao P., Mendes B.* Assisted Teleoperation of Quadcopters Using Obstacle Avoidance. Lisbon. 2012.
- [10] *Иванов Д. Я.* Построение формаций в группах квадрокоптеров с использованием виртуального строя // Труды XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ. 2014. С. 1971-1978.
- [11] *Nicol C., Macnab C.J.B., Ramirez-Serrano A.* Robust neural network control of a quadrotor helicopter // Mechatronics. Volume 21. Issue 6. September 2011. P. 927-938.
- [12] *Dierks T., Jagannathan S.* Neural Network Control and Wireless Sensor Network-based Localization of Quadrotor UAV Formations // Aerial Vehicles. 2009. P. 287-312.
- [13] *Munoz R. S. M., Rossi C., Cruz A. B.* Modelling and Identification of Flight Dynamics in Mini-Helicopters Using Neural Networks // Aerial Vehicles. 2009. P. 601-620.
- [14] *Lavi B.* An Adaptive Neuro PID for Controlling the Altitude of quadcopter Robot // International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics. Poland. Volume: 18th. 2014. P. 662-665.
- [15] *Jatsyn S.F., Pavlovsky V.E., Emelyanova O.V., Savitsky A.V.* Mathematical model of the quadrotor type unmanned aerial vehicle with neurocontroller // The 2014 international conference on continuum mechanics. Structural Analysis (MEROSTA 2014). Santorini Island, Greece. 2014. P. 46-50.
- [16] *Павловский В.Е., Яцун С.Ф., Емельянова О.В., Савицкий А.В.* Моделирование и исследование процессов управления квадрокоптером // Робототехника и техническая киберне-

тика: научно-техн. журнал / Санкт-Петербург. №4(5)/2014. С. 49-57.

- [17] *Павловский В.Е., Савицкий А.В.* Модель, базовые траектории, нейроконтроллер для мультироторного робота // Труды Всероссийского научно-практического семинара «Беспилотные транспортные средства с элементами искусственного интеллекта». БТС-ИИ-2014. Казань. 2014.
- [18] *Павловский В.Е., Савицкий А.В.* Нейросетевой контроллер для управления квадрокоптером // Труды XVII Всероссийской научно-технической конференции с международным участием «НЕЙРОИНФОРМАТИКА-2015». Часть 2. Москва. 2015. С. 177-188.
- [19] *Павловский В.Е., Савицкий А.В.* Нейросетевой алгоритм управления квадрокоптером на типовых траекториях // журнал «Нелинейный мир», изд. «Радиотехника», Москва, 2015. №6, С. 47-51.
- [20] *Павловский В.Е., Савицкий А.В.* Решение обратной задачи для вычисления управляющих воздействий квадрокоптером // журнал «Нелинейный мир», изд. «Радиотехника», Москва, 2016. №7, С. 19-30.
- [21] *Павловский В.Е., Савицкий А.В.* Исследование обратной задачи для вычисления управляющих воздействий для квадрокоптера //Препринт ИПМ, Москва, 2017. №17, С. 1-20.
- [22] *Павловский В.Е., Савицкий А.В.* Модель квадрокоптера и нейросетевой алгоритм управления //Препринт ИПМ, Москва, 2017. №77, С. 1-20.

- [23] *Vilchis A.J.C., Brogliato B., Dzulc A., Lozano R.* Nonlinear modelling and control of helicopters // *Automatica* 39. 2003. P. 1583-1596.
- [24] <http://www.microdrones.com/index.php>
- [25] <http://www.u xvuniversity.com/contact/>
- [26] *Pounds P., Mahony R., Corke P.* Modelling and Control of a Quad-Rotor Robot // Australian National University, Canberra. 2005.
- [27] *Hoffmann G. M., Huang H., Waslander S. L., Tomlin C. J.* Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment // Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit. 2007. P. 1-20.
- [28] *Abichou A. L. Beji, Zemalache K. M.* Smooth control of an x4 bidirectional rotors flying robot // Fifth International Workshop on Robot Motion and Control. 2005. P. 181-186.
- [29] *Евгенов А.А.* Нейросетевой регулятор системы управления квадрокоптером // Современные проблемы науки и образования. 2013. №5. 7 стр.
- [30] *Сайфеддин Д., Булгаков А.Г., Круглова Т.Н.* Нейросетевая система отслеживания местоположения динамического агента на базе квадрокоптера // «Инженерный вестник Дона». 2014. №1.
- [31] *Boudjedir H., Fouad Yacef F.* Simulation of wind effect on a quadrotor flight // *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*. Volume 10. №4. 2015. P. 1535-1538.
- [32] *Solovyev V. V., Finaev V. I., Zargaryan Y. A., Shapovalov I. O., Beloglazov D. A.* Multicopter Unmanned Aerial Vehicle

Autonomous Operation in an Industrial Environment using On-board Image Processing // University of Western Australia. Final Year Project Thesis. 2013. P. 1-130.

- [33] *Емельянова О.В., Попов, Н. И., Яцун* Моделирование движения квадрокоптера в пространстве // Авиакосмические технологии (АКТ-2013). Труды XIV Всероссийской научно-технической конференции и школы молодых ученых, аспирантов и студентов. Воронеж: ООО Фирма «Элист». 2013. С.131-138.
- [34] *Попов Н.И., Емельянова О.В., Яцун С.Ф., Савин А.И.* Исследование колебаний квадрокоптера при внешних периодических воздействиях // Фундаментальные исследования. № 1. 2014. С. 28-32.
- [35] *Попов Н.И., Емельянова О.В.* Динамические особенности мониторинга воздушных линий электропередачи с помощью квадрокоптера // Современные проблемы науки и образования. №2. 2014.
- [36] *Голубев Ю.Ф.* Нейронные сети в мехатронике // Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, т. 11, №8, 2005 С. 81-103.
- [37] *Soumelidis A., Gaspar P., Regula G., Lantos B.* Control of an experimental mini quad-rotor UAV.
- [38] *Wei Dong, Guo-Ying Gu, Xiangyang Zhu, Han Ding* Modeling and Control of a Quadrotor UAV with Aerodynamic Concepts // World Academy of Science, Engineering and Technology. Vol:7. 2013. P. 377-382.
- [39] *Кондратьев А.И., Тюменцев Ю.В.* НЕЙРОСЕТЕВОЕ АДАПТИВНОЕ ОТКАЗОУСТОЙЧИВОЕ УПРАВЛЕНИЕ

ДВИЖЕНИЕМ МАНЕВРЕННОГО САМОЛЁТА // НЕЙРОИНФОРМАТИКА – 2010. Часть 2.

- [40] *Бардов В.М.* ЛЕТАЮЩАЯ ПЛАТФОРМА ДЛЯ ФОТО И ВИДЕО СЪЕМКИ // НИУ ИТМО, Санкт-Петербург.
- [41] *Канатников А.Н., Акопян К.Р.* Управление плоским движением квадрокоптера// Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана, Электронный журнал. 2015. №2. С. 23-26.
- [42] *Белинская Ю.С., Четвериков В.Н.* Управление четырехвинтовым вертолетом // Научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана «Наука и образование», 2012. №5, С. 157-171.
- [43] *Канатников А.Н., Крищенко А.П., Ткачев С.Б.* Допустимые пространственные траектории беспилотного летательного аппарата в вертикальной плоскости// Научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана «Наука и образование». 2012. №3. С. 1-15.
- [44] *Takeshi Tsuchiya* Fault-tolerant flight control with neural networks (2011), www.youtube.com/watch?v=K12Fm5s6YCA, [cited 15 May 2012]
- [45] *A. Chamseddine* LQR vs C-MRAC with a damage of part of propeller 2011b, www.youtube.com/watch?v=NhI-UBi01jo, [cited 15 May 2012].
- [46] *Белоконь С.А.* Управление параметрами полёта квадрокоптера при движении по заданной траектории // Автометрия, №5 2012, С. 32-41.
- [47] *Зенкевич С.Л., Галустян Н.К.* Синтез и апробация алгоритма управления движением квадрокоптера по траектории //

Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. №8. С. 530-535.

- [48] *Пыркин А.А.* Синтез системы управления квадрокоптером с использованием упрощенной математической модели. // СПб.: Изв. вузов. Приборостроение. 2013. Т. 56. №4. С. 47-51.
- [49] *Buchholz T. T., Gretarsson D.* Construction of a Four Rotor Helicopter Control System: S.M. Thesis. Technical University of Denmark. 2009. 158 p.
- [50] *Anthony J. Calise, Rolf T. Rysdyk* Nonlinear Adaptive Flight Control using Neural Networks, Georgia Institute of Technology, School of Aerospace Engineering, Atlanta, GA, 30332, P. 1-24.
- [51] *Pieter Abbeel, Adam Coates, Morgan Quigley, Andrew Y. Ng* An Application of Reinforcement Learning to Aerobatic Helicopter Flight, Computer Science Dept., Stanford University, Stanford, CA 94305, P. 1-8.
- [52] *S. Salazar · H. Romero · R. Lozano · P. Castillo* Modeling and Real-Time Stabilization of an Aircraft Having Eight Rotors, Journal of Intelligent and Robotic Systems, March 2009, P. 455-470.
- [53] *S. Andon Venelinov Topalov and Okyay Kaynak* Online Learning in Adaptive Neurocontrol Schemes with a Sliding Mode Algorithm, IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS—PART B: CYBERNETICS, VOL. 31, NO. 3, JUNE 2001, P. 445-450.
- [54] *Flavio Nardi* Neural Network based Adaptive Algorithms for Nonlinear Control, Georgia Institute of Technology, November 2000, P. 1-165.

- [55] *Derrick H. N., Bernard W.* Neural Networks for Self-Learning Control Systems, IEEE Control Systems Magazine, Apr. 1990, P. 18-23.
- [56] *Sergey Andropov, Alexei Guirik, Mikhail Budko, Marina Budko* Synthesis of Neurocontroller for Multirotor Unmanned Aerial Vehicle Based on Neuroemulator, PROCEEDING OF THE 20TH CONFERENCE OF FRUCT ASSOCIATION, Apr. 2017, P. 20-25.

7 Приложения

7.1. Уравнения Лагранжа для случая n -роторного летательного аппарата:

1-е уравнение:

$$M\ddot{x} = k_1 \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i (\cos \varphi \sin \psi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta),$$

2-е уравнение:

$$M\ddot{y} = k_1 \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i (\sin \varphi \sin \psi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta),$$

3-е уравнение:

$$M\ddot{z} = -Mg + k_1 \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i \cos \psi \cos \theta$$

4-е уравнение:

$$\begin{aligned} & \ddot{\varphi} (A \sin^2 \psi + A \cos^2 \psi \sin^2 \theta + D \cos^2 \psi \cos^2 \theta) + \ddot{\psi} \cos \theta \sin \theta (A - D) - \\ & - A \ddot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin 2\psi \cos^2 \theta (A - D) + \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin 2\theta \cos^2 \psi (A - D) + \\ & + \dot{\psi}^2 \sin \psi \cos \theta \sin \theta (D - A) + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \psi (-2A \sin^2 \theta - D \cos 2\theta) = \\ & = -I_3^c \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \ddot{\gamma}_i \cos \psi \cos \theta + I_3^c \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \dot{\gamma}_i (\dot{\psi} \sin \psi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \psi \sin \theta) - \\ & + k_1 l \frac{\sin \theta}{\cos \psi} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i \cos ((i+1)\alpha) + k_2 \frac{\cos \theta}{\cos \psi} \sum_{i=1}^n (-1)^i \dot{\gamma}_i^2, \end{aligned}$$

5-е уравнение:

$$\ddot{\varphi} \cos \psi \sin \theta \cos \theta (A - D) + \ddot{\psi} (A \cos^2 \theta + D \sin^2 \theta) +$$

$$\begin{aligned}
& + \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \psi (2A \cos^2 \theta - D \cos 2\theta) + \dot{\varphi}^2 \sin \psi \cos \psi \cos^2 \theta (D - A) + \\
& + \psi \dot{\theta} \sin 2\theta (D - A) = I_3^c \sin \theta \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \ddot{\gamma}_i + \\
& + I_3^c \cos \theta \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \dot{\gamma}_i (\dot{\theta} - \dot{\varphi} \sin \psi) + k_1 l \cos \theta \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i \cos ((i+1)\alpha) - \\
& - k_2 \sin \theta \sum_{i=1}^n (-1)^i \dot{\gamma}_i^2,
\end{aligned}$$

6-е уравнение:

$$\begin{aligned}
& - A \ddot{\varphi} \sin \psi + A \ddot{\theta} + \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \psi (D \cos 2\theta - 2A \cos^2 \theta) + \\
& + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi \sin \theta \cos \theta (D - A) + \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta (A - D) = \\
& = I_3^c \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \dot{\gamma}_i (-\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\psi} \cos \theta) + k_1 l \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i \sin ((i-1)\alpha) + \\
& + k_1 l \frac{\sin \psi \sin \theta}{\cos \psi} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i \cos ((i+1)\alpha) + k_2 \frac{\sin \psi \cos \theta}{\cos \psi} \sum_{i=1}^n (-1)^i \dot{\gamma}_i^2.
\end{aligned}$$

7.2. Сравнение работы системы с погрешностями датчиков для случая вертикального взлета.

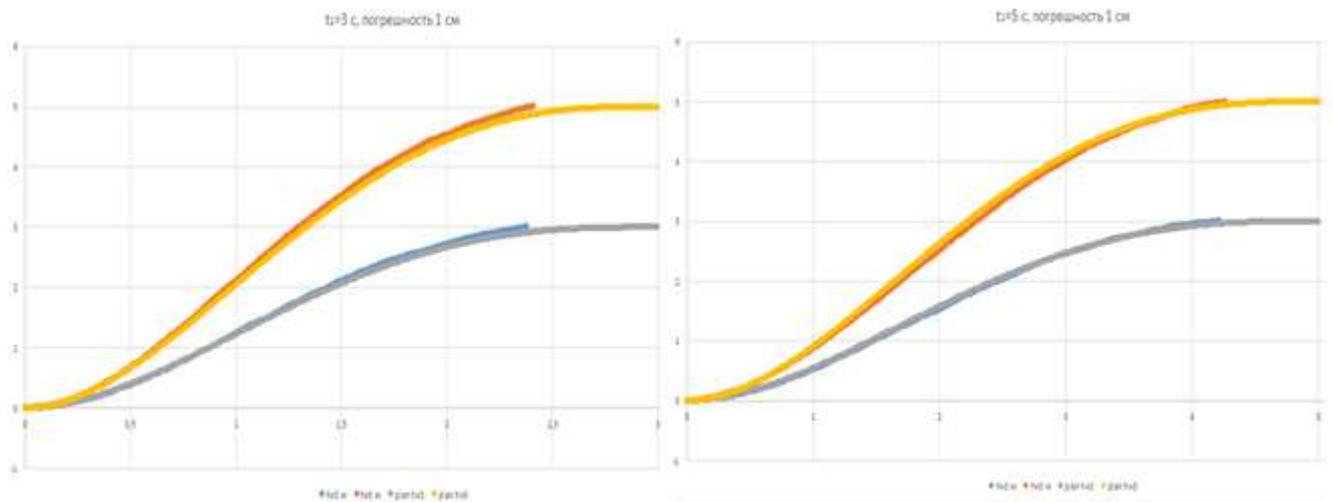


Рис. 31: Взлет на высоту 3 м и 5 м за (слева за 3 с, справа за 5 с) с погрешностью высотомера 1 см.

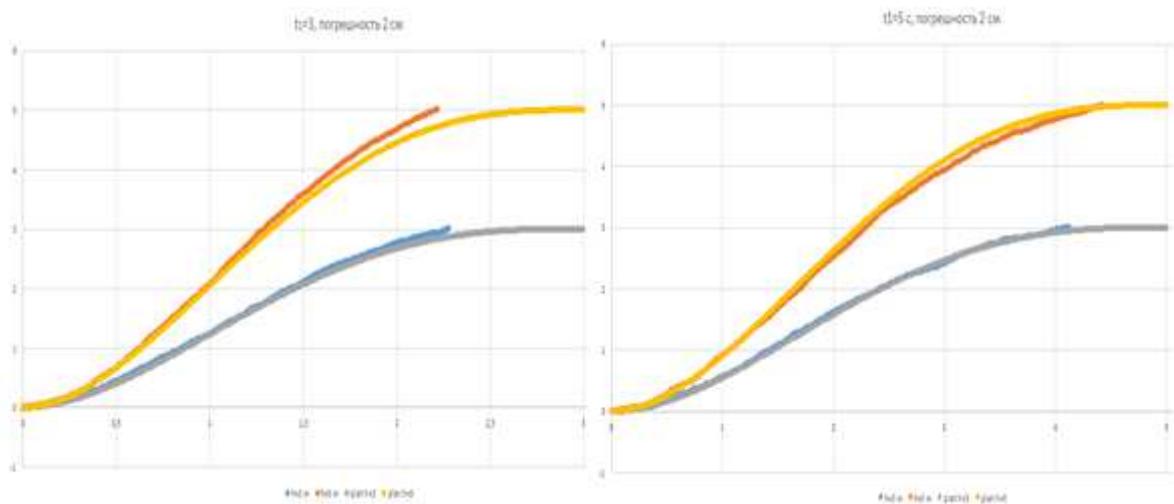


Рис. 32: Взлет на высоту 3 м и 5 м за (слева за 3 с, справа за 5 с) с погрешностью высотомера 2 см.

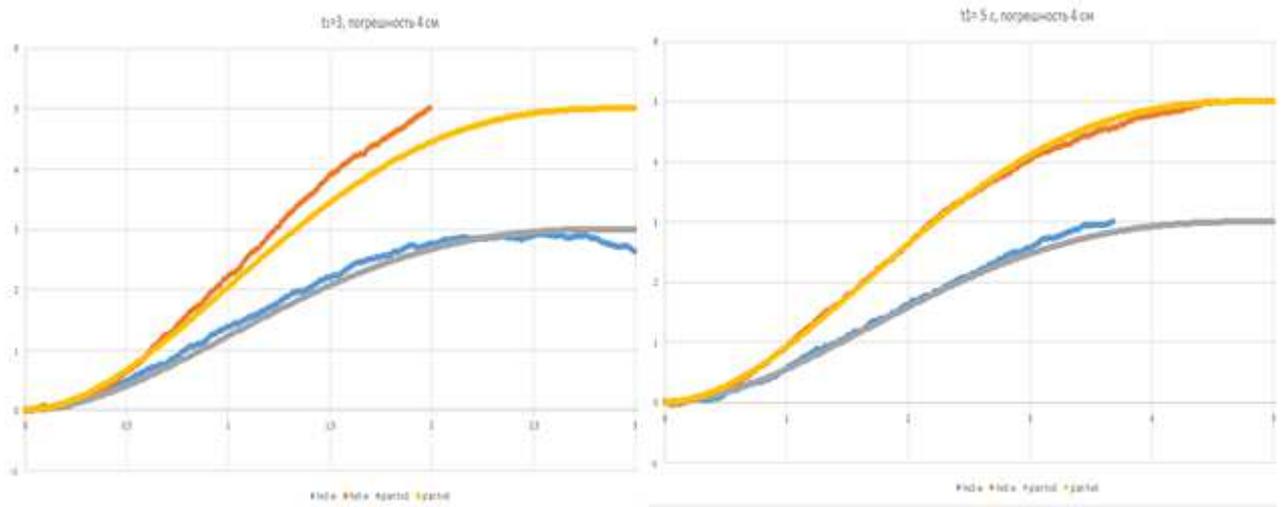


Рис. 33: Взлет на высоту 3 м и 5 м за (слева за 3 с, справа за 5 с) с погрешностью высотомера 4 см.

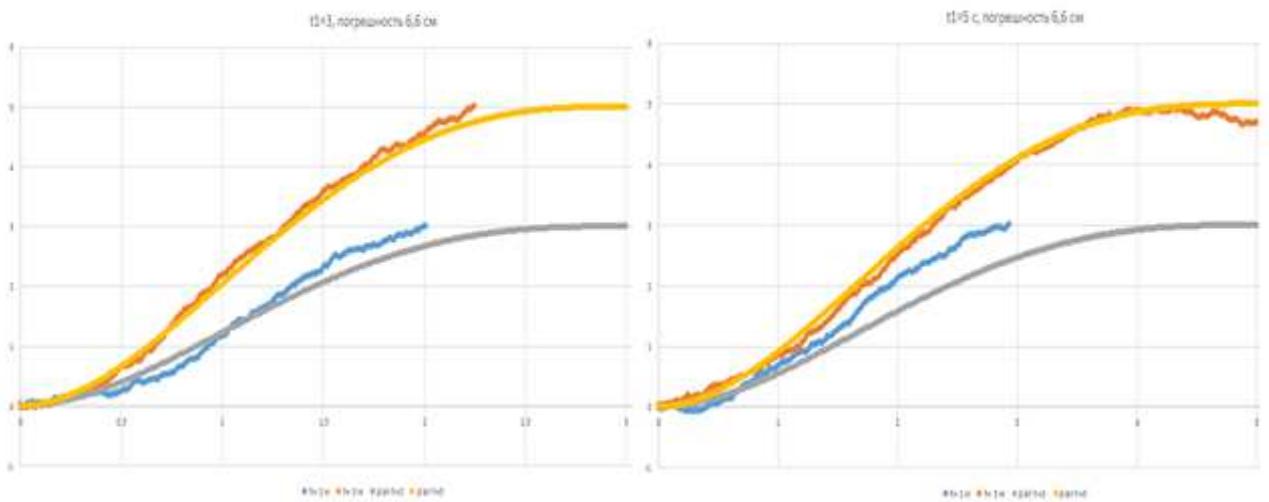


Рис. 34: Взлет на высоту 3 м и 5 м за (слева за 3 с, справа за 5 с) с погрешностью высотомера 6,6 см.

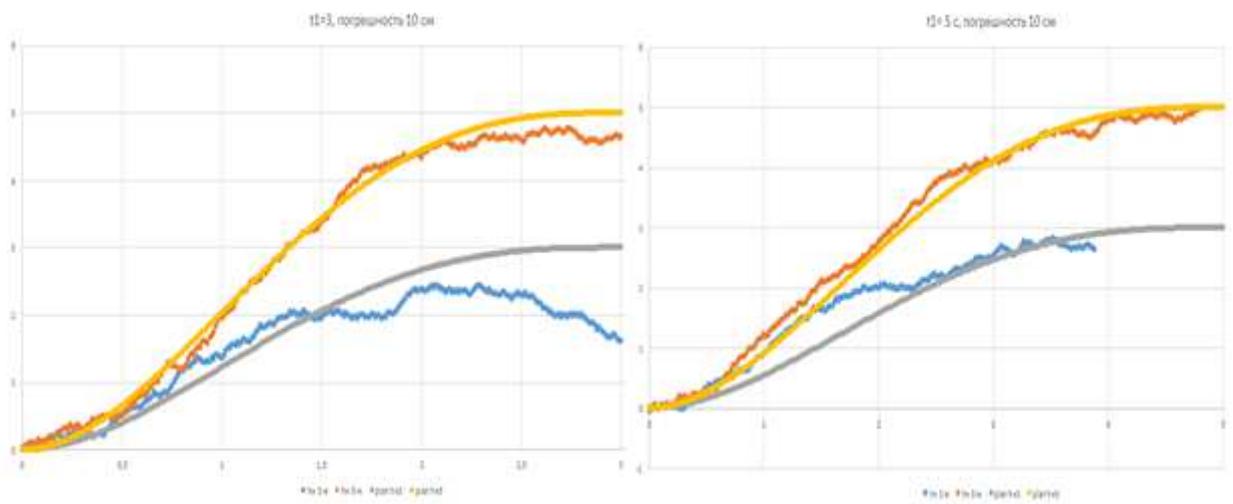


Рис. 35: Взлет на высоту 3 м и 5 м за (слева за 3 с, справа за 5 с) с погрешностью высотомера 10 см.