

Федеральное государственное учреждение  
«Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша  
Российской академии наук»  
(ИПМ им. М.В. Келдыша РАН)

На правах рукописи

Ролдугин Дмитрий Сергеевич

**ДИНАМИКА КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С АКТИВНОЙ  
МАГНИТНОЙ СИСТЕМОЙ ОРИЕНТАЦИИ**

Специальность: 1.1.7 – Теоретическая механика, динамика машин

диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант:  
доктор физико-математических наук, профессор  
Овчинников Михаил Юрьевич

**Москва – 2023**

## Оглавление

Введение .....	4
Актуальность темы исследования .....	5
Цель и задачи диссертационной работы .....	7
Структура работы и состояние исследований .....	8
Используемые методы исследования .....	22
Научная новизна .....	22
Практическая значимость и реализация результатов работы .....	22
Личный вклад автора .....	23
Достоверность и апробация работы .....	23
Публикации .....	25
Результаты, выносимые на защиту .....	28
Объем работы .....	30
Глава 1. Уравнения движения и используемые модели .....	31
1.1. Системы координат .....	31
1.2. Модели геомагнитного поля .....	32
1.3. Уравнения движения .....	40
1.4. Модели моментов, действующих на КА .....	47
Глава 2. Движение космического аппарата в режиме демпфирования угловой скорости .....	50
2.1. Переходные процессы при гашении угловой скорости .....	50
2.2. Движение космического аппарата в установившемся режиме .....	58
Заключение .....	70
Глава 3. Одноосная и трехосная стабилизация аппарата с ротором .....	71
3.1. Переходные процессы при гашении угловой скорости аппарата, оснащенного тангажным маховиком .....	71
3.2. Сравнение переходных процессов при использовании алгоритма $\dot{V}$ .....	83
3.3. Движение с тангажным маховиком в установившемся режиме .....	93
3.4. Поддержание вращения вокруг касательной к орбите .....	109
3.5. Поддержание вращения вокруг касательной на низкой орбите .....	120
Заключение .....	132
Глава 4. Управляемое движение космического аппарата, стабилизируемого вращением .....	134

4.1. Переходные процессы под управлением связки трех алгоритмов ориентации.....	134
4.2. Движение быстро вращающегося аппарата в окрестности требуемого режима .....	149
4.3. Одноосная стабилизация на основе требуемой величины скорости вращения.....	162
4.4. Влияние недиагональных элементов тензора инерции на уровень нутационных колебаний.....	172
Заключение .....	188
Глава 5. Алгоритм стабилизации на Солнце Sdot.....	189
5.1. Вспомогательные сведения .....	189
5.2. Движение в окрестности стабилизации на Солнце.....	191
5.3. Моделирование движения аппарата под управлением алгоритма Sdot и дополнительных алгоритмов, использующих показания магнитометра .....	204
5.4. Обеспечение однозначной стабилизации аппарата, используя только показания солнечного датчика .....	210
Заключение .....	219
Глава 6. Обеспечение трехосной ориентации с помощью магнитной системы .....	220
6.1. Выбор параметров управления с обратной связью.....	220
6.2. Управление на скользящих режимах .....	236
6.3. Сравнение различных подходов к построению управления с обратной связью .....	244
Заключение .....	251
Заключение и выводы.....	252
Библиография.....	255
Приложение. Основные обозначения .....	269

## Введение

Магнитные системы управления используются на спутниках с начала эры освоения космического пространства. Первым спутником с пассивной магнитной системой стал Transit 1В [1], запущенный 13 апреля 1960 года. Первая активная магнитная система использовалась на аппарате Tiros II [2], запущенном 23 ноября 1960 года. Реконструкция движения по данным измерений магнитного поля была впервые проведена для Спутника-3 [3], запущенного 15 мая 1958 года.

В первые десятилетия освоения космоса особую популярность приобрели пассивные системы ориентации, в том числе и магнитные [4]. Такие системы включают в себя постоянный магнит и демпфирующее устройство – гистерезисные стержни или сферический магнитный демпфер. Постоянный магнит ориентируется примерно по вектору индукции магнитного поля. Демпферы используются для рассеяния энергии. Такие системы просты и надежны, они не требуют бортовых вычислений и не расходуют энергию. Эти особенности были важны, когда возможности спутников и опыт их создания были невелики. Пассивные системы используются и сейчас, если не предъявляются высокие требования по точности и быстродействию системы ориентации.

Активная магнитная система состоит из трех магнитных катушек, расположенных перпендикулярно друг другу [5]. Катушка представляет собой множество витков провода, иногда на металлическом сердечнике. При протекании тока создается дипольный момент  $\mathbf{m}$ , который, взаимодействуя с внешним магнитным полем (определяемым в основном геомагнитным полем) с вектором индукции  $\mathbf{B}$ , приводит к возникновению управляющего механического момента  $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ . Активная магнитная система разделяет с пассивной ее важные преимущества: она проста, надежна, дешева, компактна. В отличие от пассивной, магнитная система потребляет энергию, но существенно меньше, чем двигатели-маховики или гироскопы\*. Возможность создания любого по направлению дипольного момента – хотя и не механического – позволяет существенно расширить круг решаемых задач, используя

---

\* К магнитным можно также отнести систему, использующую магнитные катушки и момент сил Лоренца. Такая система, сохраняющая все основные преимущества магнитной и снимающая проблему направления механического момента, является весьма перспективной, но пока трудно реализуемой на современных космических аппаратах [167–173].



магнитную систему ориентации как основную или единственную для всей миссии или в некоторых режимах работы КА. Широкий круг задач, возникающих при реализации различных режимов движения КА с магнитной системой ориентации, как активной, так и пассивной, объясняет высокий интерес к ней ведущих специалистов по динамике. В этой области выделим А.П. Алпатова, В.В. Белецкого, А.Д. Герман, А.В. Дорошина, В.И. Драновского, Ю.В. Зонова, А.И. Игнатова, В.И. Каленкову, А.П. Коваленко, В.В. Любимова, Г.М. Маркелова, Ю.Г. Мартыненко, Н.А. Мельниченко, В.М. Морозова, М.Ю. Овчинникова, В.И. Пенькова, В.А. Раевского, Ю.А. Садова, В.В. Сазонова, В.А. Сарычева, В.В. Сидоренко, А.А. Тихонова, А.И. Ткаченко, А.А. Хентова, А.М. Яншина, К.Т. Alfrend, G. Avanzini, C.J. Damaren, R.E. Fischell, J.L. Junkins, R.W. Kammuller, I. Kolmanovsky, M. Lovera, S. Nakasuka, A. de Ruiter, M. Shigehara, Y. Shtessel, A. Slavinskis, I. Stellmacher, K. Stopfkuchen [6].

#### **Актуальность темы исследования**

Актуальность изучения алгоритмов магнитной системы ориентации неразрывно связана с развитием индустрии малых космических аппаратов, начавшимся около тридцати лет назад, и получившим неимоверное ускорение в начале двухтысячных годов с появлением стандарта Кубсат. Миниатюризация позволила устанавливать на КА массой в несколько десятков килограмм серьезную полезную нагрузку, дополняя и иногда заменяя крупные КА. Возникла возможность создания новых группировок и формаций КА, решающих принципиально иной по сравнению с одиночными аппаратами круг задач. При этом срок разработки малого аппарата может быть в несколько раз короче, чем у классического аппарата. Оперативное решение новых задач в сфере дистанционного зондирования и связи, восстановление флота научных и метеорологических спутников, внедрение аэрокосмических направлений в инновационные образовательные программы стали особенно актуальны для России в текущих условиях. При этом развитие малых аппаратов началось в современной России с существенным опозданием. Его можно отсчитывать от запуска в 2000 г. аппарата Reflector РНИИ КП, за которым в 2005 году последовал аппарат «Татьяна», созданный ВНИИЭМ для МГУ, и также в 2005 году Технологический наноспутник ТНС-0, созданный в РНИИ КП. Развитие индустрии малых аппаратов за рамки точечных запусков началось в 2010-х годах. Сейчас разработкой малых аппаратов в России активно занимаются как традиционные ведущие предприятия отрасли, так и новые частные компании и образовательные организации. Этап отработки основных технологий пройден, и малые КА

должны решать конкретные задачи, для которых требуется поддерживать заданную ориентацию.

При создании малого КА ведется борьба за минимальное использование ресурсов служебными системами, ведь сэкономленное высвобождается для полезной нагрузки. Это существенно сказалось на облике системы ориентации. Так, двигатели на холодном газе оказались практически неприемлемы из-за большого потребного объема топлива. Гравитационная штанга, несмотря на простоту, оказалась весьма дорогостоящей для малых аппаратов. Двигатели-маховики, и тем более гироскопы, которые сейчас в целом являются доминирующим средством обеспечения ориентации космических аппаратов, также слишком дороги в миниатюрном исполнении, или же недостаточно надежны, и при этом имеют существенное энергопотребление. На Рис. 1, заимствованном из обзора [7], показано распределение миссий кубсатов по используемой системе ориентации.

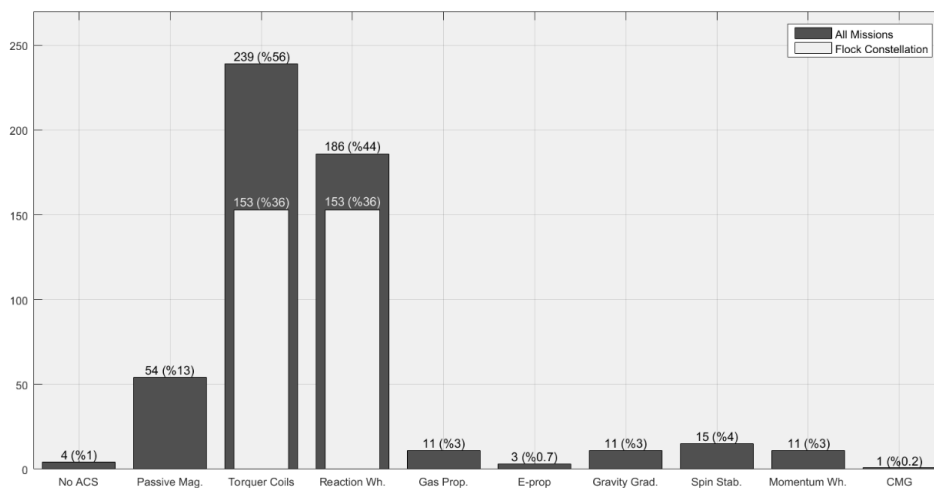


Рис. 1. Распределение миссий кубсатов по использованной системе ориентации

По Рис. 1 видно, что магнитная система опережает маховичную по популярности среди самых маленьких КА. Отметим, что и пассивная магнитная система ориентации все еще используется довольно часто.

Высокая популярность активной магнитной системы объясняется ее преимуществами, особенно актуальными для малых аппаратов. Это цена, размер и масса, энергопотребление, надежность, отсутствие расхода рабочего тела. На другой чаше весов от этих «инженерных» преимуществ находятся недостатки – невысокие точность ориентации и быстродействие. Они обусловлены исходным «теоретическим» недостатком магнитного управления: из векторного произведения, возникающего при вычислении управляющего момента, следует, что момент не создается вдоль вектора геомагнитной индукции. Система может показаться

неуправляемой. Однако направление, вдоль которого недоступен управляющий момент, меняется в пространстве при движении спутника по орбите. В результате все направления с течением времени оказываются доступны. Строго управляемость спутника с магнитной системой ориентации показана в [8–12]. Несмотря на общее обоснование управляемости, практическое преодоление проблемы ограничения на направление управляющего момента требует специфических подходов.

Использование дополнительных, но также простых, исполнительных элементов, движение в определенных востребованных режимах ориентации, специальный подбор управления и его параметров позволяют значительно улучшить точностные и скоростные показатели работы магнитной системы ориентации по сравнению с тем, что принято от нее ожидать. При этом спектр задач, ставящихся перед системой ориентации, в современном мире очень широк. Это позволяет выбрать те задачи, которые магнитная система успешно решает, но также заставляет искать решения для возможно большего набора задач полезной нагрузки и служебных систем, что в итоге превращает активную магнитную систему в универсальное решение, пригодное для большого числа миссий. Для всех возникающих перед магнитной системой проблем необходимо сформулировать пригодные решения и установить критерии качества работы системы ориентации. Они зачастую оказываются весьма ограниченными в силу присущей магнитной системе проблемы направления управляющего момента. В этих условиях особенно актуально установить достижимые характеристики эффективности работы системы управления для основных востребованных режимов движения КА, имея при этом полный набор инструментов для оперативного анализа зависимости эффективности от параметров КА и его системы управления в условиях ускоренного создания малого аппарата.

### **Цель и задачи диссертационной работы**

Целью диссертационного исследования является решение научной проблемы, состоящей в исследовании движения КА с активным магнитным управлением в основных востребованных режимах ориентации. Полученные результаты нацелены на сокращение стоимости и времени разработки системы ориентации, что имеет важное хозяйственное значение при создании современных спутниковых систем.

Задачи, решаемые для достижения указанной цели, состоят в анализе динамики КА под управлением магнитной системы ориентации в основных режимах углового движения, каждому из которых посвящена отдельная глава. Это гашение угловой скорости,

поддержание одноосной и трехосной ориентации КА с ротором, одноосная стабилизация аппарата в режиме вращения, стабилизация в направлении Солнца, стабилизация в произвольном трехосном положении. В ходе анализа устанавливаются конкретные приближенные выражения, характеризующие решение или его ключевые параметры – амплитуды колебаний, степень устойчивости и другие. Эти выражения позволяют получить общее представление о зависимости свойств движения аппарата от его параметров, в первую очередь инерционных, и от параметров управления. При необходимости в диссертационной работе предлагаются новые алгоритмы ориентации.

### **Структура работы и состояние исследований**

Диссертационная работа разделена на шесть глав. **Первая глава** является вспомогательной, в ней вводятся используемые системы координат, уравнения движения, модели действующих моментов, обсуждаются особенности используемых моделей геомагнитного поля. Далее следуют пять содержательных глав. Ниже для каждой главы кратко описывается решаемая задача; состояние исследований в данной области; результаты, полученные в диссертационной работе<sup>\*</sup>; сведения об их опубликовании.

**Во второй главе** рассматривается движение КА в режиме гашения угловой скорости. Этот режим обязателен в логике переключения между алгоритмами системы ориентации, и практически всегда эту задачу решают магнитные катушки. Исследования, представленные в диссертационной работе относительно использования алгоритма демпфирования, проводились, среди прочего, в рамках работ с ООО «Спутникс» (для аппаратов Зоркий, запущен 22 марта 2021 года, ТаблетСат-Аврора, запущен 19 июня 2014).

Наиболее популярен алгоритм демпфирования  $-V\dot{\theta}$ , впервые упомянутый в отчете [13] и опубликованный в открытой печати в [14]<sup>†</sup>. Это управление преобразуется в алгоритм  $-V\dot{\theta}$  в его классическом виде на основании связи производной вектора геомагнитной индукции в связанной и в инерциальной системах координат. Управление строится из требования отрицательности производной кинетической энергии и имеет вид

---

<sup>\*</sup> Соответствующие абзацы начинаются текстом, выделенным курсивом.

<sup>†</sup> Автором алгоритма является инженер Космического центра им. Годдарда Сеймор Кант.

$$\mathbf{m} = k\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  – абсолютная угловая скорость спутника,  $k$  – коэффициент усиления управления\*.

Поскольку гашение угловой скорости в большинстве ситуаций подразумевает быстрое вращение аппарата, непосредственное изменение вектора геомагнитной индукции в инерциальном пространстве, вызванное вращением Земли и движением КА по орбите, незначительно по сравнению с его изменением в связанной системе, вызванным вращением аппарата. Отбрасывая изменение вектора индукции в инерциальной системе, получаем

$$\mathbf{m} = -k d\mathbf{B}/dt. \quad (2)$$

Это простое и удобное управление обычно используется на предварительном этапе успокоения аппарата. При этом управление обычно реализуется в виде

$$\mathbf{m} = -k \frac{\mathbf{B}_k - \mathbf{B}_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}.$$

Для этого достаточно иметь два последовательных измерения магнитометра<sup>†</sup>. Отметим, что за один такт управления  $t_k - t_{k-1}$  аппарат не должен совершать больше, чем примерно половину оборота. В противном случае оценка скорости по простой разности измерений будет принципиально неверна.

Скорость, до которой управление (2) способно успокоить аппарат, обусловлена отброшенным членом, и близка к орбитальной. Розыску оценки конечной скорости посвящено несколько работ в иной физической интерпретации – при воздействии вихревых токов на КА в переходном процессе. Это воздействие аппроксимировалось моментом, по форме совпадающим с создаваемым магнитной системой ориентации при использовании алгоритма  $-\dot{\mathbf{B}}$ , хотя скорость КА при этом, вообще говоря, задается относительно системы координат, связанной с вектором геомагнитной индукции. В [15] показано, что КА выходит на вращение с удвоенной орбитальной скоростью. В [16] для полярной орбиты получена

\* В диссертационной работе рассматриваются различные алгоритмы управления. Соответственно, в каждом случае используется новый коэффициент усиления. Однако в большинстве случаев для них будет использоваться общее обозначение  $k$ , единое в рамках одного раздела. Исключение составляют разделы, в которых речь идет о совместном использовании нескольких алгоритмов управления. В этом случае для каждого вводится отдельное обозначение.

<sup>†</sup> Далее для разделения управлений (1) и (2) алгоритм (1) будем называть алгоритмом демпфирования, а алгоритм (2) – алгоритмом  $-\dot{\mathbf{B}}$  (вообще говоря, также являющимся алгоритмом демпфирования).

более точная оценка –  $9/5$  орбитальной скорости. Дальнейшее уточнение для полярной орбиты в виде оценок приближенного решения приведено [17] также для полярной орбиты.

Исходное управление (1) лишено указанного недостатка остаточной скорости вращения и обеспечивает экспоненциальное стремление абсолютной скорости к нулю [18–21] с быстродействием, зависящим от наклона орбиты. В работах [18], [21] проведено исследование зависимости величины кинетического момента от времени для спутника под воздействием вихревых токов. Авторы нашли выражения, ограничивающие значения модуля кинетического момента в течение всего времени движения.

В управлении (1) можно использовать относительную угловую скорость движения спутника в орбитальной системе координат. Управление в этом случае строится на основе функции Ляпунова, в качестве которой используется интеграл Якоби при движении под действием гравитационного момента [22]. Аналогично движению в инерциальном пространстве, в этом случае обеспечивается гашение относительной угловой скорости в орбитальной системе координат. В [23] вместо скалярного коэффициента усиления используется положительно-определенная матрица. Также можно использовать переменный коэффициент усиления для компенсации уменьшения величины скорости и поддержания величины управляющего момента. Например, можно использовать две величины, изменяя коэффициент усиления при уменьшении скорости ниже определенного значения [24].

*В диссертационной работе* проведено исследование движения КА под действием алгоритма демпфирования (1) в двух последовательных режимах. Сначала аппарат считается быстро вращающимся и проводится исследование переходных процессов. Эта ситуация представляет наибольший интерес, так как важным вопросом в работе алгоритма демпфирования является время протекания переходных процессов в зависимости от параметров аппарата, его орбиты и условий запуска. От этого зависит период, в течение которого работа с аппаратом практически невозможна, в том числе нежелательно раскрывать солнечные панели из-за высокой скорости вращения. С помощью метода усреднения для осесимметричного КА получены результаты, уточняющие и дополняющие ранее установленные В.А. Сарычевым и В.В. Сазоновым зависимости эффективности работы управления от разных факторов, в частности – от наклона орбиты, а также исследована зависимость времени переходных процессов от начальной ориентации вектора кинетического момента.

*Далее в диссертационной работе* рассматривается движение аппарата в установившемся режиме, когда скорость вращения КА близка к орбитальной, и используется

управление (2). Получена новая оценка скорости вращения для приполярной и приэкваториальной орбит, близкая к 9/5 орбитальной скорости. Аппарат при этом выходит на вращение вокруг нормали к плоскости орбиты. Алгоритм демпфирования, таким образом, оказывается обладающим восстанавливающими свойствами, хотя степень устойчивости найденного режима движения невысока.

Основные публикации, в которых приведены результаты второй главы, – [25–31].

**В третьей главе** рассматривается использование магнитной системы ориентации совместно с ротором. При этом выделяются два режима. В одном случае маховик обеспечивает КА значительным кинетическим моментом без вращения корпуса аппарата. Рассматривается движение КА в режиме приведения оси установки маховика к нормали к плоскости орбиты и в режиме вращения вокруг этой оси в установившемся режиме. Во втором случае, напротив, ротор используется для компенсации кинетического момента, возникающего из-за быстрого вращения корпуса КА. Исследуется движение аппарата, ось вращения которого направлена по касательной к орбите. Исследования, описанные в третьей главе, проводились в рамках работ с АО «Российские космические системы» (запуск с борта Международной космической станции назначен на 2024 год) и АО «Научно-исследовательский институт электромеханики».

При использовании маховика для создания значительного кинетического момента ось установки маховика ориентируется по нормали к плоскости орбиты [32]. Магнитное управление обеспечивает асимптотическую устойчивость такого движения и разворот вокруг оси вращения маховика. Это один из классических режимов стабилизации КА. За счет гарантированной устойчивости ориентации оси вращения маховика появляется возможность упростить задачу построения управления, которая часто решается в линейном приближении. Так, в [14] предложено линеаризованное управление

$$m_2 = k_1 b_1 \varphi - k_2 (b_3 \dot{\varphi} - b_1 \dot{\psi}),$$

опирающееся на углы прецессии и собственного вращения. В [33] показания магнитометра заменены на данные инфракрасного датчика вертикали. В [34] управление имеет вид

$$\mathbf{m} = -k_1 (\mathbf{B}_x - \mathbf{B}) - k_2 (\dot{\mathbf{B}}_x - \dot{\mathbf{B}}),$$

где индексом «x» обозначен вектор в связанной со спутником системе координат. Ранее этот алгоритм был предложен для гравитационно ориентируемого аппарата [35]. Это управление, как и линейно-квадратичный регулятор [36], было успешно проверено на аппарате Gurwin. В последней работе возмущающие моменты аппроксимировались простыми периодическими

выражениями с орбитальной и удвоенной орбитальной частотами, для геомагнитного поля использовалась модель упрощенного прямого диполя. Результаты построения управления, заметно упрощенного в постановке линеаризованных уравнений с периодическими коэффициентами, оказались применимыми для более полной модели движения аппарата.

В [37] приведено сравнение предложенных ранее законов управления, и рассмотрено их обобщение в виде

$$m_2 = k_1 h_{\max} (b_1 \dot{\varphi} + k_2 b_3 \dot{\psi}) - k_3 (b_3 \dot{\varphi} - k_4 b_1 \dot{\psi}) - k_5 (b_3 \varphi - k_6 b_1 \psi),$$

где необходим подбор шести коэффициентов усиления.

Зачастую [23,38,39] для стабилизации КА с ротором используются алгоритмы трехосной ориентации, рассматриваемые в шестой главе диссертационной работы, методы оптимального управления [40,41] и управление на скользящих режимах [42]. Для вращения КА в плоскости орбиты может использоваться совместная работа магнитной системы и ротора с управляемой скоростью вращения [43–45]. В [46] предложен эффективный геометрический метод перераспределения управляющего воздействия между магнитной системой и маховиком переменной скорости вращения. В [47] предложено  $\omega$ -управление и найдены решения, описывающие движение КА в режиме выхода на соосное с маховиком вращение аппарата.

В диссертационной работе рассмотрены два режима движения КА, оснащенного тангажным маховиком. В первом режиме с помощью алгоритма демпфирования (2) обеспечивается выход КА на стабилизацию оси установки маховика по нормали к плоскости орбиты. Для линеаризованных уравнений движения с периодическими коэффициентами получены приближенные выражения для аналогов характеристических показателей. Таким образом получены конкретные выражения, позволяющие оценить время переходных процессов. Проведено сравнение разных алгоритмов демпфирования и показано, что алгоритм  $\dot{V}$  (1) показывает лучшее быстродействие по сравнению с алгоритмом демпфирования (2). Этот результат может показаться неожиданным, так как  $\dot{V}$  обычно – наименее эффективный алгоритм. Однако для КА с тангажным маховиком алгоритм  $\dot{V}$  обладает дополнительными восстанавливающими свойствами, установленными в Главе 2. Далее рассматривается движение КА в установившемся режиме, когда ось установки маховика направлена по нормали к плоскости орбиты. В диссертации предложено интуитивное магнитное управление, позволяющее осуществлять поворот в плоскости орбиты. Исследовано плоское движение на полярной орбите, разработана численно-аналитическая методика оценки амплитуд периодических колебаний, возникающих вблизи



требуемой ориентации. Получены оценки амплитуд пространственных колебаний, возникающих из плоских на приполярной орбите.

Отдельного рассмотрения заслуживает система стабилизации, в которой КА вращается с большой скоростью вокруг касательной к орбите, а ротор используется для компенсации возникающего кинетического момента. Задача аппарата – сканирование облачного покрова и поверхности Земли. В настоящее время для этого применяются комплексы МТВЗА, производимые АО «Российские космические системы» и устанавливаемые на аппаратах Метеор [48], AMSU, устанавливаемые на различных аппаратах NOAA, и SSMIS на аппарате DMSP-F16. Дополнение Метеора, имеющего массу в несколько тонн, малыми спутниками с аналогичной аппаратурой, но работающей в других областях спектра, может существенно улучшить качество получаемой информации. Однако ключевым элементом комплекса МТВЗА является сканирующее зеркало, вращающееся со скоростью до нескольких оборотов в секунду. Установка аналогичного устройства на малый аппарат сопряжена с существенными техническими сложностями и приведет к высокой цене аппарата. Вместе с тем, малый аппарат, имеющий лишь одну полезную нагрузку, может быть полностью подчинен ее требованиям. А именно, вместо установки вращающейся полезной нагрузки целесообразно осуществить закрутку всего аппарата, в корпусе которого жестко закреплено необходимое оборудование.

Для обеспечения ориентации такого аппарата *в диссертации предлагается* использовать магнитную систему управления и ротор. В рассматриваемом случае привычный подход к управлению КА, стабилизируемого вращением, невозможен, так как вектор кинетического момента аппарата должен вращаться в инерциальном пространстве с орбитальной скоростью. Обеспечить столь быстрое вращение вектора кинетического момента магнитная система не в состоянии, поэтому в корпусе аппарата предполагается установка ротора, вращающегося с постоянной скоростью. Его задача – компенсировать кинетический момент вращающегося корпуса. Задача магнитной системы – поддержание околонулевого кинетического момента системы спутник-ротор, и обеспечение ориентации оси вращения по вектору линейной скорости. В диссертационной работе предложены соответствующие алгоритмы управления и проведено исследование динамики КА. При этом в исследовании используется переход к полусвязанной системе координат, что существенно упрощает как методику построения управления, так и анализ его работы. Показана устойчивость требуемого режима движения. Проведена адаптация управления к

использованию в контуре управления аппарата, включая упрощенный переход между связанной и полусвязанной системами координат.

Оказалось, впрочем, что таким образом удается достичь скорости вращения лишь в несколько оборотов в минуту. Вообще говоря, такая скорость весьма высока для космического аппарата, но мала по сравнению со скоростью, необходимой для работы метеорологического оборудования. Поэтому отдельно в *диссертации рассмотрен* случай движения на относительно низких орбитах (около 300 км). В этом случае можно использовать аэродинамический момент в тандеме с магнитной системой ориентации [49]. Это позволило повысить достижимую с учетом возмущающих факторов скорость вращения до нескольких оборотов в секунду. Аэродинамическая стабилизация начала применяться относительно поздно [50,51]. Первым аппаратом, стабилизированным по потоку, стал Космос-149, запущенный в 1967 году. В диссертационной работе для связки аэродинамической стабилизации, ротора, и предложенного магнитного управления получены выражения для аналогов характеристических показателей и, в целом, приближенный вид решения уравнений движения.

Основные публикации, в которых излагаются результаты третьей главы, – [52–55].

**Четвертая глава** посвящена движению КА, стабилизируемого вращением. Быстро вращающийся спутник приобретает свойства гироскопа. Осесимметричный аппарат в течение длительного времени сохраняет направление оси вращения в инерциальном пространстве, при этом действие внешних возмущений приводит к медленному изменению этого направления и возникновению нутационных колебаний. Магнитная система используется для поддержания вращения КА и переориентации оси вращения в требуемом направлении в инерциальном пространстве. Исследования, представленные в диссертационной работе для быстро вращающегося КА, проводились, среди прочего, в рамках работ с Morehead State University (для аппарата CXBN-2, запущен 16 мая 2017 года), ООО «Спутникс» и в инициативном порядке совместно с Физическим институтом им. П.Н. Лебедева РАН.

Стабилизация вращением используется с запуска первого американского спутника Explorer-I. На аппарате Tiros-II, запущенном 23 ноября 1960, было впервые применено активное магнитное управление для стабилизируемого вращением КА [56]. Поскольку стабилизация собственным вращением использует свойства большого кинетического момента, ориентация именно его, а не корпуса аппарата, обычно используется при построении управления [57]. В [58] идея использования ошибки ориентации обобщена как

$$\Delta_1 = \mathbf{H}_{ref} - \mathbf{h} - \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \Delta_2 = \mathbf{h}_{ref} - \mathbf{h} - \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}.$$

В первой невязке используется необходимое направление вектора кинетического момента в инерциальном пространстве  $\mathbf{H}_{ref}$ . С ее помощью обеспечивается ориентация оси вращения. Вторая невязка использует целевой кинетический момент в связанной системе  $\mathbf{h}_{ref}$  и служит для достижения необходимой скорости закрутки.

Три простых закона управления предложены в [59],

$$\mathbf{m} = \mathbf{b} \times \left[ k_1 (\omega_1, \omega_2, 0) + k_2 (0, 0, h_3 - h_{3ref}) + k_3 \Delta \mathbf{h} \right].$$

Алгоритмы гашения нутационных колебаний, закрутки и переориентации оси вращения представлены соответствующими слагаемыми.

В [60] был предложен популярный алгоритм управления углами прецессии и собственного вращения и показана асимптотическая устойчивость требуемой ориентации в зависимости от коэффициентов усиления. Разработана конструктивная методика подбора коэффициентов, расширенная с помощью теории Флоке и численного моделирования с учетом многих возмущающих факторов. Более общее управление для вращения вокруг третьей оси предложено в [61],

$$m_3 = k_1 f \left[ b_1 (a_{23} - k_2 \omega_2) - b_2 (a_{13} - k_2 \omega_1) \right].$$

Функция  $f$  должна удовлетворять условиям  $xf(x) > 0$  и  $f(0) = 0$ . Она задает обобщение управления с обратной связью и в большинстве случаев  $f(x) = x$  дает удовлетворительный результат. В [62] строится кусочно-постоянное управление, основанное на простых рассогласованиях по углам ориентации и скоростям.

Одна из наиболее популярных схем управления быстро вращающимся аппаратом была предложена в [63]. Управление разделено на три основных этапа: гашение нутационных колебаний, раскрутка спутника, переориентация оси вращения. Было предложено релейное управление и соответствующие функции переключения.

В диссертационной работе используется связка из трех простых законов управления, реализующих эти режимы и предложенная в [64]. Для гашения нутационных колебаний применяется управление

$$m_3 = -k \frac{d\mathbf{b}}{dt} \mathbf{e}_3,$$

соответствующее алгоритму  $-\dot{\mathbf{b}}$ , реализованному одной катушкой. В результате не гасится скорость вдоль оси симметрии. Закрутка обеспечивается управлением

$$\mathbf{m} = k(b_2, -b_1, 0).$$

Алгоритм переориентации оси симметрии

$$m_3 = k\Delta\mathbf{h} \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{b}),$$

где  $\Delta\mathbf{h} = \mathbf{h}_{ref} - \mathbf{h}$  – разница между требуемым  $\mathbf{h}_{ref}$  и текущим  $\mathbf{h}$  вектором кинетического момента.

В диссертации для связки этих трех алгоритмов с помощью метода усреднения исследуется эффективность работы системы управления в переходных процессах. Получены первые интегралы эволюционных уравнений. Отдельно рассматривается движение в окрестности требуемого режима движения. В полусвязанной системе координат получено приближенное выражение для амплитуды нутационных колебаний.

Далее в диссертационной работе рассматривается алгоритм одноосной стабилизации, основанный на рассогласовании текущего вектора угловой скорости и его требуемого значения – как величины, задающей скорость вращения, так и направления, задающего условия одноосной ориентации аппарата [65]. Показано, что кроме требуемого интуитивно ожидаемого положения равновесия существуют также положения стабилизации КА в обратном направлении и косые положения. Проведено исследование устойчивости найденных режимов движения и выделены области параметров управления и соотношений между моментами инерции КА, при которых достигаются различные варианты стабилизации.

Наконец, исследуется влияние недиагональных элементов тензора инерции на точность стабилизации КА. Обычно этот вопрос несущественен для стабилизируемых вращением аппаратов, имеющих скромные требования по точности ориентации. Однако в настоящее время возник интерес к созданию малоразмерных солнечных обсерваторий. Использование маховиков на таких аппаратах нежелательно, так как создаваемые ими вибрации снижают качество получаемой информации. Вместо этого можно использовать одноосную ориентацию при вращении аппарата. Требования по точности здесь оказываются весьма строгими, так как полезная нагрузка имеет узкую область обзора. При этом система управления пытается стабилизировать строительную ось КА, близкую к оси максимального момента инерции. Вращающийся аппарат, напротив, стремится выйти на вращение вокруг последней. В результате возникают нутационные колебания, полностью устранить которые не удастся. Пионерские исследования динамики быстро вращающихся КА были посвящены устойчивости движения симметричных тел [66–69]. Первые результаты касательно

несимметричности компоновки КА касались отличия диагональных элементов его тензора инерции [2,62,70,71]. При этом возможно не только исходное отличие моментов инерции, но и возникающее в ходе эксплуатации КА из-за наличия вращающихся и колеблющихся элементов, демпферов, полостей с жидкостью. Компенсация этих эффектов возможна как с помощью пассивных средств [72–74], так и современных методов управления [75–78]. Неточность знания тензора инерции оказывает влияние не только на управление КА, но и на процесс определения его движения [79–82].

*В диссертационной работе* проводится исследование амплитуд нутационных колебаний в зависимости от моментов инерции аппарата и отклонения оси вращения от оси максимального момента инерции. Рассматривается воздействие магнитного демпфирования на эти колебания, при этом получено выражение для оценки неустранимого уровня нутационных колебаний. Ранее аналогичные результаты были получены в более узкой постановке – в предположении постоянной скорости вращения и свободного движения для практически осесимметричного [83] и имеющего три существенно отличных главных момента инерции КА [84]. В [85] также получены оценки для постоянной амплитуды нутационных колебаний.

Основные публикации, в которых излагаются результаты четвертой главы, – [86–92].

**В пятой главе** проводится исследование движения аппарата в режиме стабилизации на Солнце. Этот режим близок к рассмотренному в четвертой главе, так как аппарат оказывается вращающимся вокруг направления на Солнце, хотя конкретных требований по скорости вращения не предъявляется. Управление аппаратом осуществляется с помощью алгоритма  $S_{dot}$ , предложенного С.О. Карпенко [93]. Представленные в главе результаты были получены в рамках работ с ИТЦ «Сканекс» (для аппарата Чибис-М, запущен в ночь с 24 на 25 января 2012 года) и ООО «Спутникс».

Обеспечение важного служебного режима заряда батарей с помощью магнитной системы, усиленной одним маховиком, рассматривается в [43]. В [46] приведена схема распределения моментов для разного числа маховиков. В [44] рассмотрена схема, при которой маховик используется в качестве тангажного, но присутствует возможность управления скоростью его вращения. Наибольший интерес представляет реализация одноосной ориентации аппарата без обязательного требования высокой скорости закрутки с помощью исключительно магнитной системы ориентации. Так, в [94] предложено управление для стабилизации на Солнце третьей оси КА

$$\mathbf{m} = \mathbf{K}(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}),$$

реализуемое двумя катушками, так что  $\mathbf{K} = \text{diag}(k, k, 0)$ . В [95] требуемое управление, которое затем реализуется в виде проекции, имеет вид

$$\mathbf{M}_{ref} = k_1 \delta \mathbf{e}_3 + k_2 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{s}_{max}.$$

Здесь  $\delta$  – нормализованная разница токосъема двух противоположных солнечных панелей, задача первого слагаемого – уменьшение этой разницы. Вектор  $\mathbf{s}_{max}$  задает нормаль к панели с максимальным токосъемом, задача второго слагаемого – максимизация токосъема за счет разворота орта  $\mathbf{e}_1$  связанной системы на Солнце.

В диссертации исследуется алгоритм Sdot, предложенный в [96,97],

$$\mathbf{m} = k \cos \alpha (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}).$$

Здесь используются показания солнечного датчика  $\mathbf{s}$  и угол  $\alpha$  между направлением на Солнце и вектором геомагнитной индукции. Этот угол вычисляется на основе моделей, заложенных в бортовом компьютере. С помощью эволюционных уравнений в [97] показано, что в результате работы управления вектор кинетического момента аппарата ориентируется на Солнце, и ось максимального момента инерции ориентируется по радиус-вектору. Однако возникает неопределенность: аппарат может развернуться как в сторону Солнца, так и от него.

В диссертации для исследования движения вблизи солнечной стабилизации вводятся новые эволюционные переменные, так как их классический набор, часто называемый переменными Белецкого-Черноузько, подвержен вырождению в требуемой ориентации. В новых переменных получены выражения, показывающие поведение вектора кинетического момента и амплитуды колебаний оси максимального момента инерции КА относительно вектора кинетического момента. Для верификации полученных результатов проводится моделирование движения аппарата в реалистичном сценарии, а также вводятся дополнительные алгоритмы, позволяющие избежать неоднозначности ориентации. Отдельно рассматривается задача поддержания однозначной ориентации по показаниям только солнечного датчика. Предложены соответствующие интуитивные алгоритмы управления и логика переключения, эффективность которых показана с помощью моделирования.

Основные публикации, в которых излагаются результаты пятой главы, – [96–101].

В шестой главе рассматривается трехосная стабилизация, обеспечиваемая только магнитной системой ориентации. В этом случае основное ограничение магнитной системы управления – невозможность создать момент вдоль вектора геомагнитной индукции – оказывает наибольшее влияние на процесс управления КА и, соответственно, требует

специального исследования. Представленные в главе результаты получены при работе с ООО «Спутникс» (для аппаратов СириусСат-1 и 2, запущены 15 августа 2017 года).

Наиболее распространенный подход к трехосной стабилизации КА магнитной системой – использование обычного управления с обратной связью. Этот подход был реализован в [38,102], в результате дипольный момент, задающий проекцию требуемого момента на плоскость, перпендикулярную вектору геомагнитной индукции, имеет вид

$$\mathbf{m} = -k_{\omega} \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} - k_a \mathbf{B} \times \mathbf{S}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{S} = (a_{23} - a_{32}, a_{31} - a_{13}, a_{12} - a_{21})$  задает ошибку ориентации через элементы матрицы направляющих косинусов  $a_{ij}$ . Исходное управление строится на основе функции Ляпунова.

Реальное управление, реализуемое магнитной системой, не обладает теми же свойствами глобальной асимптотической устойчивости. В [34] приведены результаты безуспешной работы алгоритма на борту спутника Gurwin. На аппарате TANGO миссии PRISMA управление с подбором коэффициентов усиления с помощью линейно-квадратичного регулятора успешно решило поставленные задачи с точностью ориентации около 10-20° [103,104]. Линейно-квадратичный регулятор специального вида применяется в работах В.М. Морозова и В.И. Каленовой [10,105,106]. При этом сначала вводится замена переменных, расширяющая фазовый вектор, но приводящая к системе с постоянными коэффициентами. Для этой системы строится регулятор, матрица которого затем используется в исходной нестационарной системе после специального обратного перехода, использующего дополнительные переменные.

Вообще, необходимы аккуратный подбор коэффициентов усиления и общее ограничение величины управляющего момента [107]. Поскольку управление поворачивает спутник лишь примерно в нужном направлении, происходит медленное, итерационное приближение его к требуемой ориентации. Большая величина управляющего момента на такте управления может привести к ошибке ориентации большей, чем была до его отработки. При этом демпфирующая часть управления аналогична обычному магнитному демпфированию, которое обеспечивает асимптотическое стремление скорости к нулю. Поэтому ограничение на величину этой части управления мягче.

Выбор коэффициентов усиления – центральный момент в исследовании этого управления. Управление особенно чувствительно к точности знания тензора инерции [108], и даже небольшая ошибка может привести к его неработоспособности, тогда как другие источники возмущений имеют в основном количественный характер. Однако при наличии

ограничений на величины моментов инерции подбор коэффициентов усиления возможен [109]. В [110] подбор коэффициентов проводится на основе минимизации времени стабилизации. Принято во внимание ограничение на дипольный момент катушек, так как оптимизационный подход неизбежно приводит к завышенному значению дипольного момента. Более того, так как скорость стабилизации зависит от начальных условий, строится минимаксная задача с целью поиска коэффициентов, работоспособных в худших ситуациях. В [23] вместо скалярных коэффициентов используются матрицы. Основные результаты по подбору коэффициентов усиления верны для аппаратов с соизмеримыми моментами инерции. Управление, реализуемое в виде проекции ляпуновского управления, имеет низкое быстродействие для аппарата с моментами инерции, отличающимися в несколько раз [111]. При этом использование управления (3) со скалярными коэффициентами усиления невозможно. Специальный подбор этих коэффициентов, представляющих собой диагональные матрицы, разработан в [112].

В [113] было предложено управление на скользящем режиме для аппарата с магнитной системой ориентации. Показана асимптотическая устойчивость требуемой ориентации для сферически симметричного аппарата. При построении поверхности скольжения используется только угловая скорость, что применимо только к симметричному аппарату. В [114] используется классическая поверхность. В [115] используется поверхность без «весовой» матрицы для компонент угловой скорости. В [116,117] предложена поверхность с добавкой интегрального слагаемого,

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}_1 \mathbf{q} + \mathbf{K}_2 \int_{t_0}^t \mathbf{q} d\tau + \mathbf{J}^{-1} \int_{t_0}^t \left[ \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}^T}{b^2} \mathbf{u} \right] d\tau.$$

Первый интегральный дополнительный член представляет собой среднюю ошибку ориентации, второй показывает близость требуемого управляющего момента к плоскости, перпендикулярной вектору геомагнитной индукции. Реализуется идея построения такой поверхности скольжения (и, соответственно, траектории углового движения аппарата), которая может быть реализована магнитной системой ориентации. Более того, предпринята попытка неявного учета возмущений, действующих на аппарат в требуемой ориентации. Наличие интегрального члена, зависящего от точности ориентации, позволяет опосредованно учесть возмущающие факторы. В [117] проведено моделирование работы такого управления и показано успешное парирование различных возмущений. Нелинейная поверхность скольжения была предложена в [118] в виде



$$\mathbf{s} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}_1 |q_0 \mathbf{q}|^\alpha \operatorname{sign}(q_0 \mathbf{q}) + \mathbf{K}_2 (q_0 \mathbf{q})$$

с диагональными матрицами и параметром  $\alpha \in (0,1)$ . Магнитное управление далее строится как проекция на плоскость, перпендикулярную вектору индукции. Тем не менее, это управление успешно справляется с возмущениями, в том числе с неточностью знания тензора инерции. В [119] для расчета наилучшего управляющего момента, реализуемого магнитной системой, используется метод наименьших квадратов, дающий лучший результат, чем простая проекция.

Интересное развитие идея построения траектории, управляемой магнитной системой ориентации, получила в совместных работах автора диссертации с А.С. Охитиной и С.С. Ткачевым. Предложено использование метода роя частиц [120] для розыска траектории, оптимальной в смысле минимизации проекции вектора управляющего момента на направление вектора геомагнитной индукции [121,122]. Траектория при этом представляется в виде периодических зависимостей углов ориентации от аргумента широты. Для стабилизации КА на этой траектории используется управление с обратной связью (3), коэффициенты усиления которого также ищутся с помощью роевого метода. Таким образом, задача стабилизации КА в заданном положении заменяется на задачу стабилизации на некоторой траектории, близкой к требуемому положению. Суммарная точность стабилизации (отклонение опорной траектории от заданной ориентации и ошибка отслеживания этой траектории) оказывается существенно выше, чем при использовании управления с обратной связью.

В диссертационной работе рассмотрено классическое управление с обратной связью и управление на скользящих режимах. Для обратной связи предложена схема подбора коэффициентов усиления, основанная на аналитических результатах и теории Флоке, для аппарата, стабилизируемого в инерциальной системе координат и в орбитальных осях. Предложены две итерационные процедуры построения поверхности скольжения, в которых требуемый управляющий момент оказывается практически перпендикулярен вектору геомагнитной индукции. Проводится сравнение работы управления (3) с подходами, используемыми в работах В.М. Морозова и В.И. Каленовой, А.С. Охитиной и С.С. Ткачева, и Я.В. Маштакова.

Основные публикации, в которых излагаются результаты третьей главы, – [39,108,123–129].

### **Используемые методы исследования**

Методы основаны на классических подходах теоретической механики и теории движения искусственных спутников Земли. Активно используются теория устойчивости [130]; асимптотические методы нелинейной динамики, в частности, метод усреднения [131–134]; метод поиска аналогов характеристических показателей [135]<sup>\*</sup> и приближенных периодических решений [136,137] для линейных систем с периодическими коэффициентами. Проводится численное моделирование движения КА [138,139].

### **Научная новизна**

Новизна состоит в полученных приближенных решениях уравнений движения КА под управлением активной магнитной системы ориентации в режимах гашения угловой скорости, поддержания одноосной и трехосной ориентации КА с ротором, одноосной стабилизации аппарата в режиме вращения, стабилизации в направлении Солнца, стабилизации в произвольном трехосном положении. Получены выражения для точностных и временных характеристик движения в этих режимах работы. Предложены новые алгоритмы управления. Полученные результаты существенно дополняют общую теорию управляемого движения КА.

### **Практическая значимость и реализация результатов работы**

Полученные в диссертации результаты позволяют значительно сократить время анализа и подбора параметров системы ориентации КА на этапе эскизного проектирования, предоставляя при этом общее понимание динамики его управляемого движения, связи характеристик движения и параметров спутника и его системы ориентации. Результаты проведенных исследований использовались при разработке систем ориентации и анализе полунатурных и летных испытаний успешно запущенных аппаратов Чибис-М, ТаблетСат-Аврора, СХВН-2, Зоркий, СириусСат, аппаратов, разрабатываемых в настоящее время АО РКС, АО ИСС им. М.Ф. Решетнева, АО ВНИИЭМ, ООО Спутникс.

---

<sup>\*</sup> Автор метода – Николай Артамонович Артемьев, доцент Ленинградского государственного университета. Выпустил несколько работ, посвященных исследованию уравнений с периодическими коэффициентами, в том числе цикл из трех работ в Известиях АН СССР, где предложил и развил используемый здесь метод поиска характеристических показателей. Расстрелян в 1942 году, реабилитирован в 1955 году.

### **Личный вклад автора**

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора. Все результаты диссертации получены автором лично.

В диссертации используются полученные ранее другими авторами совместно с автором диссертации вспомогательные результаты относительно устойчивости движения КА под управлением алгоритма Sdot в разделе 5.1; реализации фильтра Калмана в разделе 6.1; и работы одного алгоритма трехосной магнитной ориентации в разделе 6.3.

Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад соискателя был определяющим.

### **Достоверность и апробация работы**

Достоверность подтверждается соответствием результатов теоретических исследований, численного моделирования, лабораторных и летных испытаний, сравнением с результатами, опубликованными другими авторами по схожим проблемам.

Основные результаты докладывались на ведущих конференциях, школах и семинарах.

*Российские конференции:*

- XXXV (2011), XXXVI (2012), XXXVII (2013), XXXIX (2015), XL (2016), XLI (2017), XLIII (2019), XLIV (2020), XLV (2021), XLVI (2022), XLVII (2023) Чтения по космонавтике, Москва;
- Первый российский симпозиум RusNanoSat-2015, Самара, 2015;
- XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 2015;
- Первая международная конференция «Проблемы механики и управления», Махачкала, 2018;
- Третий Российский симпозиум по наноспутникам, Самара, 2019;
- Вторая всероссийская научно-техническая конференция «Современные проблемы ориентации и навигации космических аппаратов», Таруса, 2010;
- XLIV Чтения, посвященные разработке научного наследия и развитию идей К.Э. Циолковского, Калуга, 2009;
- VI (2008), VII (2009) Научно-практическая конференция «Микротехнологии в авиации и космонавтике», Москва.
- Ежегодная научная конференция МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук».

*Международные конференции:*

- 73<sup>rd</sup> (Paris, 2022), 72<sup>nd</sup> (Dubai, 2021), 71<sup>st</sup> (Online, 2020), 70<sup>th</sup> (Washington, 2019), 66<sup>th</sup> (Jerusalem, 2015), 65<sup>th</sup> (Toronto, 2014), 63<sup>rd</sup> (Naples, 2012), 62<sup>nd</sup> (Cape Town, 2011) International Astronautical Congress;
- 9<sup>th</sup> International Conference on Recent Advances in Space Technologies, Istanbul, 2019;
- 1<sup>st</sup> (Porto, 2012), 2<sup>nd</sup> (Roma, 2014), 3<sup>rd</sup> (Moscow, 2017) IAA Conference on dynamics and control of space systems;
- 2<sup>nd</sup> (Roma, 2013), 3<sup>rd</sup> (Roma, 2015), 4<sup>th</sup> (Roma, 2017), 5<sup>th</sup> (Roma, 2020) IAA Conference on University Satellites Missions and CubeSat Winter Workshop;
- 9<sup>th</sup> (Berlin, 2013), 10<sup>th</sup> (Berlin, 2015) IAA Symposium «Small satellites for Earth observation»;
- 6<sup>th</sup> European Cubesat Symposium, Estavayer-le-Lac, 2014;

*Российские и международные школы:*

- 10<sup>th</sup> (2016), 11<sup>th</sup> (2018) International workshop and advanced school «Spaceflight dynamics and control», Covilha;
- XIII (2019), XI (2017), IX (2015), VII (2013) The International Summer School «Computer Technologies of Engineering Mechanical Problems», Институт механики МГУ, Москва;
- XV Summer Space School, Самара, 2019.

*Научные семинары:*

- Семинар «Механика и управление движением» отдела № 5 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, руководитель Ю.Ф. Голубев;
- Семинар по теории управления и динамике систем Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, руководитель Ф.Л. Черноушко;
- Семинар «Механика и управление движением космических аппаратов» Баллистического центра ИПМ им. М.В. Келдыша, руководитель А.Г. Тучин;
- Семинар кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана, руководитель Г.А. Щеглов;
- Секция теоретической механики Санкт-Петербургского Дома Ученых, председатель М.П. Юшков;
- Семинар по прикладной механике и управлению НИИ механики МГУ, руководители В.В. Александров, Н.А. Парусников, Ю.В. Болотин;
- Семинар ИПМ им. М.В. Келдыша, руководители Б.Н. Четверушкин и А.И. Аптекарев;

- Семинар «Динамические системы и механика» Московского авиационного института, руководители Б.С. Бардин и П.С. Красильников;
- Семинар отдела № 7 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, руководитель М.Ю. Овчинников;
- Заседание Президиума Национального методического совета по теоретической механике, руководитель В.А. Самсонов.

### **Публикации**

Количество публикаций, в которых излагаются основные научные результаты диссертации, в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК РФ – 36.

В том числе 35 статей в изданиях, входящих в базы данных Web of Science или Scopus, из них 15 публикаций в изданиях, входящих в первый квартиль Web of Science. Получен патент. Выпущена монография.

*Список публикаций в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ:*

1. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S. A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites // Progress in Aerospace Sciences. 2019. Vol. 109. Paper 100546.
2. Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Ткачев С.С., Трофимов С.П., Шестаков С.А., Ширококов М.Г. Программный комплекс для моделирования орбитального и углового движения спутников // Математическое моделирование. 2019. Т. 31, № 12. с. 44–56.
3. Ovchinnikov M.Y., Penkov V.I., Roldugin D.S., Pichuzhkina A.V. Geomagnetic field models for satellite angular motion studies // Acta Astronautica. 2018. Vol. 144. P. 171–180.
4. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Tkachev S.S., Penkov V.I. B-dot algorithm steady-state motion performance // Acta Astronautica. 2018. Vol. 146. P. 66–72.
5. Roldugin D.S., Ovchinnikov M.Y., Ivanov D.S., Shachkov M.O., Koptev M.D., Pantsyrnyi O.A., Fedorov I.O. Saving mission yet to be launched: Tight schedule for an unexpected project // Advances in the Astronautical Sciences. 2018. Vol. 163. P. 377–391.
6. Ovchinnikov M.Y., Ivanov D.S., Ivlev N.A., Karpenko S.O., Roldugin D.S., Tkachev S.S. Development, integrated investigation, laboratory and in-flight testing of Chibis-M microsatellite ADCS // Acta Astronautica. 2014. Vol. 93. P. 23–33.
7. Иванов Д.С., Ивлев Н.А., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Ткачев С.С. Результаты летных испытаний системы ориентации микроспутника Чибис-М // Космические исследования. 2014. Т. 52, № 3. с. 218–228.

8. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Карпенко С.О., Пеньков В.И. Исследование быстродействия алгоритма активного магнитного демпфирования // *Космические исследования*. 2012. Т. 50, № 2. с. 176–183.
9. Иванов Д.С., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Ткачев С.С. Испытания алгоритмов управления ориентацией микроспутника “Чибис-М” на лабораторном стенде // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2012. № 1. с. 118–137.
10. Глухов В.И., Макеич С.Г., Нехамкин Л.И., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Рябиков В.С., Туманов М.В. Способ ориентации космического аппарата и устройство для реализации способа. Патент № 2618664. РФ, 2016.
11. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S. Magnetic attitude control and periodic motion for the in-orbit rotation of a dual-spin satellite // *Acta Astronautica*. 2021. Vol. 186. P. 203–210.
12. Ovchinnikov M.Y., Penkov V.I., Roldugin D.S., Tkachev S.S. Single axis stabilization of a fast rotating satellite in the orbital frame using magnetorquers and a rotor // *Acta Astronautica*. 2020. Vol. 173. P. 195–201.
13. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S. Comparison of two magnetic damping laws for the attitude acquisition of a dual spin satellite // *International Journal of Space Science and Engineering*. 2019. Vol. 5, № 4. P. 369–383.
14. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Пеньков В.И., Варатарео Р., Рябиков В.С. Движение спутника, оснащенного тангажным маховиком и магнитными катушками, в гравитационном поле // *Космические исследования*. 2017. Т. 55, № 3. с. 218–225.
15. Ролдугин Д.С. Устойчивость стабилизации космического аппарата в направлении Солнца магнитными исполнительными органами на солнечно-синхронной орбите // *Космические исследования*. 2023. Т. 61, № 2. с. 1–9.
16. Roldugin D.S., Ovchinnikov M.Y. Wobble of a spin stabilized satellite with cross products of inertia and magnetic attitude control // *Advances in Space Research*. 2023. Vol. 71, № 1. P. 408–419.
17. Roldugin D.S., Testani P. Spin-stabilized satellite magnetic attitude control scheme without initial detumbling // *Acta Astronautica*. 2014. Vol. 94, № 1. P. 446–454.
18. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I. Asymptotic study of a complete magnetic attitude control cycle providing a single-axis orientation // *Acta Astronautica*. 2012. Vol. 77. P. 48–60.

19. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Пеньков В.И. Исследование связки трех алгоритмов магнитного управления угловой скоростью и ориентацией спутника, стабилизируемого вращением // *Космические исследования*. 2012. Т. 50, № 4. с. 326–334.
20. Roldugin D.S., Testani P. Active magnetic attitude control system for sun-pointing of a spin-stabilized satellite without initial detumbling // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2012. Vol. 145. P. 669–688.
21. Roldugin D.S., Ovchinnikov M.Yu. Terminal one axis stabilization properties of a spinning satellite employing simple magnetic attitude control // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, № 6. Paper 1530.
22. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Tkachev S.S., Karpenko S.O. New one-axis one-sensor magnetic attitude control theoretical and in-flight performance // *Acta Astronautica*. 2014. Vol. 105, № 1. P. 12–16.
23. Karpenko S.O., Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Tkachev S.S. One-axis attitude of arbitrary satellite using magnetorquers only // *Cosmic Research*. 2013. Vol. 51, № 6. P. 478–484.
24. Ролдугин Д.С. Моделирование сценариев однозначной магнитной стабилизации космического аппарата на Солнце по данным солнечных датчиков // *Математическое моделирование*. 2023. Т. 35, № 3. с. 20–34.
25. Roldugin D.S., Tkachev S.S., Ovchinnikov M.Yu. Asymptotic motion of a satellite under the action of sdot magnetic attitude control // *Aerospace*. 2022. Vol. 9, № 11. Paper 639.
26. Roldugin D.S., Tkachev S.S., Ovchinnikov M.Y. Satellite angular motion under the action of Sdot magnetic one axis sun acquisition algorithm // *Cosmic Research*. 2021. Vol. 59, № 6. P. 529–536.
27. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Боргес Р.А., Каппелетти Ш., Баттистини С. Моделирование движения макета космического аппарата на аэродинамическом подвесе для отработки режима одноосной стабилизации магнитными катушками // *Математическое моделирование*. 2019. Т. 31, № 11. с. 36–46.
28. Roldugin D.S., Ivanov D.S., Tkachev S.S., Zharkih R.N., Kudryavtsev A. Flight experimentation with magnetic attitude control system of Sitiesat-1&2 nanosatellites // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2020. Vol. 173. P. 449–462.
29. Roldugin D.S., Guerman A.D., Ivanov D.S., Ovchinnikov M.Y. Three-axis magnetic control for a nanosatellite: practical limitations due to a residual dipole moment // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2020. Vol. 173. P. 427–436.

30. Guerman A.D., Ivanov D.S., Roldugin D.S., Tkachev S.S., Okhitina A.S. Infante maritime surveillance satellite // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2020. Vol. 173. P. 617–623.
31. Ivanov D.S., Ovchinnikov M.Yu., Roldugin D.S. Three-axis attitude determination using magnetorquers // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2018. Vol. 41, № 11. P. 2455–2462.
32. Ivanov D.S., Ovchinnikov M.Y., Penkov V.I., Roldugin D.S., Doronin D.M., Ovchinnikov A.V. Advanced numerical study of the three-axis magnetic attitude control and determination with uncertainties // *Acta Astronautica*. 2017. Vol. 132. P. 103–110.
33. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I., Tkachev S.S., Mashtakov Y.V. Fully magnetic sliding mode control for acquiring three-axis attitude // *Acta Astronautica*. 2016. Vol. 121. P. 59–62.
34. Ovchinnikov M.Y., Penkov V.I., Roldugin D.S., Guerman A.D. Active magnetic attitude control system providing three-axis inertial attitude // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2015. Vol. 153. P. 2569–272.
35. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Ivanov D.S., Penkov V.I. Choosing control parameters for three axis magnetic stabilization in orbital frame // *Acta Astronautica*. 2015. Vol. 116. P. 74–77.
36. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I. Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study // *Acta Astronautica*. 2015. Vol. 110. P. 279–286.

*Монография:*

М.Ю. Овчинников, В.И. Пеньков, Д.С. Ролдугин, Д.С. Иванов, Магнитные системы ориентации малых спутников, М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016, 368 с. ISBN: 978-5-98354-028-6.

**Результаты, выносимые на защиту**

- Для движения КА в режиме гашения угловой скорости в переходном процессе получено решение эволюционных уравнений в квадратурах и явный вид решения для сферически-симметричного спутника. Установлена экспоненциальная зависимость времени переходных процессов от наклона орбиты. Изучена зависимость времени переходного процесса от начальной ориентации вектора кинетического момента. В установившемся режиме выявлено, что аппарат выходит на вращение вокруг нормали к плоскости орбиты осью максимального момента инерции со скоростью, близкой к  $9/5$  орбитальной. Получена оценка отклонения оси вращения от нормали к плоскости орбиты.



- Для КА с тангажным маховиком в переходном режиме, когда КА выходит на режим ориентации осью установки маховика по нормали к плоскости орбиты, получены приближенные выражения для характеристических показателей системы с периодическими коэффициентами. Проведено сравнение трех основных алгоритмов демпфирования. Показано, что алгоритм  $\dot{V}$ , обычно наименее эффективный, в данной задаче является предпочтительным. Разработана численно-аналитическая методика поиска амплитуд периодических колебаний для установившегося движения в плоскости полярной орбиты и движений, рождающихся из плоских на приполярной орбите. Показана устойчивость таких движений.
- В движении быстро вращающегося КА с ротором, компенсирующим кинетический момент корпуса аппарата, предложено управление, поддерживающее ориентацию оси вращения по касательной к орбите в полусвязанной системе координат. Показана устойчивость требуемого режима движения, проведена адаптация алгоритма к условиям применения в контуре системы управления. Для движения на низкой орбите, когда существенное влияние оказывает восстанавливающий аэродинамический момент, для описанного режима движения найдены аналоги характеристических показателей и приближенное решение, показывающее переход КА в требуемое положение.
- Для стабилизируемого вращением КА проведено исследование переходных процессов при применении трех алгоритмов активной магнитной ориентации: гашения нутационных колебаний, поддержания скорости вращения и переориентации оси вращения в инерциальном пространстве. Эволюционные уравнения решены в квадратурах. Рассмотрено движение вблизи требуемого режима. Для линеаризованных эволюционных уравнений получено выражение для амплитуды нутационных колебаний. Для алгоритма ориентации на Солнце по рассогласованию вектора угловой скорости исследована устойчивость возникающих положений равновесия, выявлены значения параметров, которые препятствуют стабилизации КА в расчетном положении. Получены выражения, показывающие влияние недиагональных элементов тензора инерции на уровень нутационных колебаний в свободном движении. Рассмотрено влияние магнитного демпфирования, получены выражения для эволюции амплитуд нутационных колебаний и выражение для остаточного неустраняемого уровня колебаний.
- Для движения КА в режиме стабилизации на Солнце под управлением алгоритма  $\dot{S}$  исследовано поведение аппарата вблизи требуемой ориентации. Введены новые

эволюционные переменные, свободные от вырождения в требуемом режиме движения и включающие в себя амплитуды колебаний оси максимального момента инерции относительно вектора кинетического момента. Получено решение усредненных эволюционных уравнений в квадратурах. Предложены и исследованы с помощью численного моделирования две схемы доработки алгоритма Sdot, снимающие проблемы неоднозначности ориентации КА и потери скорости вращения.

- Для движения КА в режиме трехосной стабилизации под управлением алгоритма с обратной связью показано, что устойчивая стабилизация возможна как в инерциальном пространстве, так и в орбитальных осях. Предложена конструктивная численно-аналитическая методика выбора параметров управления. Разработан алгоритм управления на основе скользящего режима, обеспечивающий переориентацию КА по траектории, на которой управляющий момент практически перпендикулярен вектору геомагнитной индукции. Проведено сравнение разных подходов к обеспечению трехосной ориентации КА.

### **Объем работы**

Диссертационная работа состоит из 272 страниц машинописного текста, 4 таблиц и 106 рисунков. Она включает в себя введение, шесть глав, заключение с выводами, список литературы, который состоит из 176 наименований, и приложение с основными обозначениями.

## Глава 1. Уравнения движения и используемые модели

В главе приведены системы координат, модели геомагнитного поля, для которых также обсуждаются особенности их использования при анализе углового движения КА, уравнения движения и модели моментов и других факторов, влияющих на движение аппарата\*.

### 1.1. Системы координат

$OY_1Y_2Y_3$  – система, связанная с осью вращения Земли и орбитой КА, и перенесенная в его центр масс. Ось  $OY_3$  направлена по оси вращения Земли,  $OY_1$  лежит в плоскости земного экватора и направлена в восходящий узел орбиты спутника,  $OY_2$  дополняет систему до правой. Эта система считается инерциальной на небольших интервалах времени и используется как при проведении теоретических исследований, так и в численном моделировании.

$OZ_1Z_2Z_3$  – инерциальная система, полученная из системы  $OY_1Y_2Y_3$  поворотом на угол  $\Theta$  вокруг оси  $OY_1$ . Величина этого угла, весьма близкая к значению наклона орбиты, определяется ниже с помощью упрощенной дипольной модели. Эти система и модель в основном используются при исследовании движения КА в переходных процессах, когда есть возможность применять простую и удобную, но существенно неточную модель геомагнитного поля.

$OP_1P_2P_3$  – система, связанная с ориентацией орбиты спутника в инерциальном пространстве. Ось  $OP_3$  направлена по нормали к плоскости орбиты,  $OP_1$  указывает в восходящий узел орбиты,  $OP_2$  дополняет систему до правой. Переход между системами  $OY_1Y_2Y_3$  и  $OP_1P_2P_3$  задается поворотом на угол  $i$  (наклонение орбиты) относительно оси  $OY_1$ .

$OX_1X_2X_3$  – орбитальная система координат с центром в центре масс КА, ось  $OX_1$  лежит в плоскости орбиты и направлена по нормали к радиус-вектору в сторону движения спутника, составляя острый угол с вектором скорости его центра масс (на круговой орбите

---

\* Основные обозначения, единые для всей работы, и некоторые существенные обозначения внутри разделов приведены в Приложении. Некоторые обозначения, в частности, параметры, характеризующие распределение масс, для удобства повторно вводятся в различных разделах, сохраняя при этом единое для всей работы выражение.

направление этой оси совпадает с направлением скорости поступательного движения КА), ось  $OX_3$  направлена по радиус-вектору центра масс,  $OX_2$  дополняет систему до правой.

$OS_1S_2S_3$  – система, одна из осей которой связана с некоторым направлением в инерциальном пространстве. Обычно эта система применяется для анализа процесса стабилизации КА на Солнце, на которое указывает ось  $OS_3^*$ .

$Ox_1x_2x_3$  – связанная с КА система координат. Ее оси в большинстве случаев совпадают с главными центральными осями инерции спутника и, во всяком случае, близки им. Такие ситуации будут обсуждаться отдельно.

$O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$  – полусвязанная система координат, не участвующая в осевом вращении КА, обладающего динамической симметрией.

$OL_1L_2L_3$  – система, связанная с кинетическим моментом КА. Ось  $OL_3$  направлена по вектору кинетического момента. Эта система используется для построения эволюционных уравнений, причем будут применены два варианта задания системы, которые будут описаны в соответствующих разделах.

Далее для векторов, заданных своими проекциями в разных системах координат, будем использовать индекс с буквой системы. Например, вектор геомагнитной индукции в системе  $OL_1L_2L_3$  будет обозначаться как  $\mathbf{V}_L$ . Систему, относительно которой рассматривается ориентация в каждом конкретном случае, будем называть опорной. Для обозначения систем будем использовать сокращенную запись с двумя буквами – например, систему  $OL_1L_2L_3$  будем обозначать  $OL$ .

## 1.2. Модели геомагнитного поля

Выбор модели геомагнитного поля имеет решающее влияние на ход исследования в диссертационной работе. При этом возникает необходимость соблюдения компромисса между точностью модели и возможностью получить в ее рамках конкретные результаты.

---

\* Направление на Солнце далее всегда будем считать постоянным в инерциальном пространстве. Поскольку результаты как теоретических исследований, так и численного моделирования рассматриваются на интервалах в несколько часов и, реже, дней, направление на Солнце не успевает существенно измениться за это время. Более того, поскольку стабилизация в направлении Солнца обеспечивается активной системой с использованием показаний датчиков ориентации, медленное вращение Солнца вокруг Земли успешно отслеживается и не вносит каких-либо заметных изменений в режим стабилизации КА.

Последнее предполагает упрощение модели поля, что, в свою очередь, влечет понижение ее точности. Применимость различных моделей в задачах ориентации спутников была кратко рассмотрена автором диссертации в [140].

### ***International geomagnetic reference field / World magnetic model***

Наиболее полно геомагнитное поле описывают модели IGRF (International geomagnetic reference field) и WMM (World magnetic model). Разложение потенциала поля в ряд, используемое в обеих моделях, было предложено в 1838 К.Ф. Гауссом. Это разложение имеет вид [141,142]

$$V = -R \sum_{m=1}^k \left( \frac{R}{r} \right)^{m+1} \sum_{n=0}^m (g_n^m(t) \cos m\lambda' + h_n^m(t) \sin m\lambda') P_n^m(\cos \vartheta'), \quad \mathbf{B} = \nabla V,$$

где  $\lambda'$  – долгота точки, в которой определяется вектор напряженности,  $\vartheta' = 90^\circ - \theta'$ ,  $\theta'$  – ее широта,  $r$  – расстояние от центра Земли,  $R$  – средний радиус Земли,  $g_n^m$  и  $h_n^m$  – коэффициенты, определяемые из таблицы [143],  $P_n^m$  – квазинормализованные по Шмидту присоединенные функции Лежандра. Величины коэффициентов определяются эмпирически (коэффициенты, как и величина поля, получаемая по этой модели, измеряются в нТл). Обе модели отличаются лишь наборами коэффициентов и имеют общие ограничения. Они предназначены для высот до 600 километров над поверхностью Земли (WGS84), хотя обычно используются и на более высоких орбитах, и применимы до определенного года. В последний год действия модели Международный геодезический и геофизический союз публикует новые коэффициенты IGRF, действующие следующие пять лет. То же продельывает Национальное управление океанических и атмосферных исследований США для модели WMM. Такие сложные модели обычно используются на борту спутника для достижения максимально возможной точности и при численном моделировании его движения на этапе разработки, но не используются при аналитических исследованиях. Отметим, что в части обеспечения ориентации спутников чаще используется модель IGRF.

### ***Наклонный диполь***

Модель наклонного диполя, получающаяся из гауссовой при учете первых трех слагаемых [144], описывает поле диполя, наклоненного под небольшим углом к оси, антипараллельной вращению Земли. Точное значение угла наклона постоянно меняется из-за перемещения северного и южного магнитных полюсов, в настоящее время наклон составляет около 11 градусов. Поскольку вклад дипольной части в разложение составляет более 90%, такое допущение вполне оправданно. Оно позволяет учесть два основных эффекта,

вызывающих изменение геомагнитного поля в точке нахождения спутника – движение последнего по орбите и суточное вращение Земли. Вектор индукции в модели наклонного диполя задается выражением [142]

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_e}{r^5}(\mathbf{k}r^2 - 3(\mathbf{k}\mathbf{r})\mathbf{r}),$$

где  $\mathbf{k}$  – единичный вектор в направлении диполя,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор центра масс спутника,  $\mu_e = 7.7245 \cdot 10^6$  Тл·км<sup>3</sup>. В системе координат  $OY$

$$\mathbf{B}_Y = -\frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} \sin \alpha' \sin \delta' - 3\xi \cos u \\ -\cos \alpha' \sin \delta' - 3\xi \cos i \sin u \\ \cos \delta' - 3\xi \sin i \sin u \end{pmatrix}. \quad (1.2.1)$$

Здесь  $r$  – радиус-вектор точки, в которой вычисляется вектор индукции. Углы  $\alpha'$  и  $\delta'$  показывают ориентацию диполя относительно системы  $OY$ . Угол  $\alpha' = \omega_3 t + \alpha'_0$ , где  $\omega_3$  – угловая скорость вращения Земли, показывает вращение диполя относительно  $OY$  вместе с Землей,  $\alpha'_0 \approx 107^\circ$ ,  $\delta' \approx 170^\circ$ ,  $\xi = \cos u \sin \delta' \sin \alpha' - \sin u \cos i \sin \delta' \cos \alpha' + \sin u \cos \delta' \sin i$ ,  $i$  – наклонение орбиты,  $u$  – аргумент широты. В других системах выражение для вектора можно найти, пользуясь матрицами перехода. Здесь эти громоздкие выкладки опущены. При проведении аналитических исследований эти выражения не используются, а при проведении численного моделирования программируются матрицы перехода, а не конечные выражения. Численное моделирование будет в основном проводиться с помощью модели наклонного диполя, но иногда – с помощью модели IGRF. Хотя и более точная, эта модель требует заметно больших вычислений и существенно увеличивает время массовых расчетов, что важно, например, в разделе 5.4.

### **Прямой диполь**

В дальнейшем упрощении геомагнитное поле моделируется полем диполя, расположенного в центре Земли и антипараллельного ее оси вращения. В этом случае в системе  $OY$  вектор направления диполя имеет вид  $\mathbf{k} = (0, 0, -1)$ . Соответственно, выражение для вектора геомагнитной индукции в системе  $OY$  получается из (1.2.1), положив  $\delta' = 180^\circ$ ,

$$\mathbf{B}_Y = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} -1.5 \sin i \sin 2u \\ -1.5 \sin 2i \sin^2 u \\ 1 - 3 \sin^2 i \sin^2 u \end{pmatrix}. \quad (1.2.2)$$

Величина вектора индукции меняется при движении спутника по орбите и составляет

$$B_{0incl} = \mu_e / r^3 \sqrt{1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u}. \quad (1.2.3)$$

Далее будем использовать обозначение  $B_0 = \mu_e / r^3$  для характерной величины поля в модели прямого диполя. Эта величина не задает непосредственно величину поля, которая, согласно (1.2.3), колеблется в пределах от  $B_0$  на экваторе до  $B_0 \sqrt{1 + 3 \sin^2 i} \leq 2B_0$  в точке  $u = 0$ . Тем не менее,  $B_0$  можно использовать для характеристики величины вектора геомагнитной индукции при введении малого параметра.

В орбитальной системе  $OX$  геомагнитное поле записывается особенно компактно,

$$\mathbf{B}_x = B_0 \begin{pmatrix} \cos u \sin i \\ \cos i \\ -2 \sin u \sin i \end{pmatrix}. \quad (1.2.4)$$

В инерциальной системе  $OP$  вектор индукции имеет вид

$$\mathbf{B}_p = B_0 \begin{pmatrix} -1.5 \sin 2u \sin i \\ -3 \sin^2 u \sin i + \sin i \\ \cos i \end{pmatrix}. \quad (1.2.5)$$

Модель прямого диполя будет основной при проведении теоретических исследований в диссертационной работе. Эта модель имеет весьма компактное представление, а ее периодический характер делает удобным применение методов усреднения и анализа линейных уравнений с периодическими коэффициентами. Модель наклонного диполя, хотя и более точная, имеет один существенный недостаток. Уравнения движения оказываются квазипериодическими – в них присутствует орбитальный период, показывающий изменение геомагнитного поля при движении по орбите, и период вращения Земли, показывающий вращение вместе с ней диполя. При этом второй эффект обычно не имеет серьезного влияния на движение аппарата, так как большинство процессов протекает на характерных временах до нескольких часов. Отбрасывая небольшое изменение диполя за это время, можно привести уравнения к имеющим периодические коэффициенты, что в свою очередь позволяет использовать широкий спектр методов исследования таких уравнений.

#### ***Упрощенная дипольная модель***

В модели прямого диполя вектор индукции неравномерно вращается по поверхности практически кругового конуса (В-конус). Опираясь на этот факт, введем следующее упрощение. В упрощенной дипольной модели, также иногда называемой осредненной

моделью геомагнитного поля [145,146]\*, вектор индукции имеет постоянную длину и равномерно движется по поверхности кругового конуса ( $\Theta$ -конус). Если перенести этот вектор в центр масс Земли, то конус касается оси  $OY_3$  системы  $OY$ , его ось лежит в плоскости  $OY_2Y_3$  (Рис. 1.1).

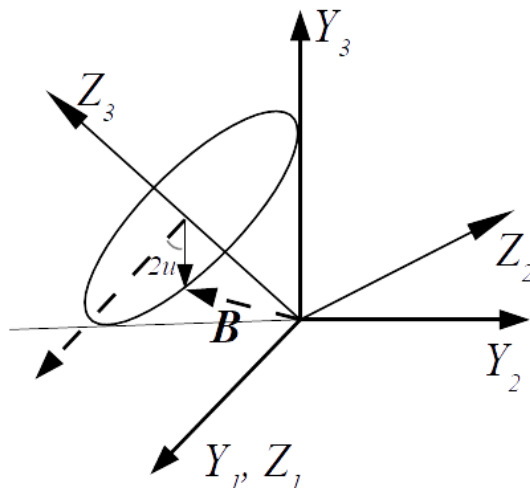


Рис. 1.1. Упрощенная дипольная модель геомагнитного поля

Угол полураствора конуса вычисляется из соотношения

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{3 \sin 2i}{2(1 - 3 \sin^2 i + \sqrt{1 + 3 \sin^2 i})}.$$

Скорость вращения вектора – удвоенная орбитальная  $2\omega_{orb}$ , то есть в системе  $OZ$  вектор индукции имеет простой вид

$$\mathbf{B}_Z = B'_0 \begin{pmatrix} -\sin \Theta \sin(2u + u') \\ \sin \Theta \cos(2u + u') \\ \cos \Theta \end{pmatrix}. \quad (1.2.6)$$

Чтобы определить  $u'$ , сравним векторы геомагнитной индукции при использовании упрощенной модели и прямого диполя. Согласно (1.2.6), в упрощенной дипольной модели вектор индукции при  $2u + u' = 0$  имеет вид  $\mathbf{B}_Z = B_0(0, \sin \Theta, \cos \Theta)$ , то есть вектор  $\mathbf{B}$  направлен по оси  $OY_3$  (Рис. 1.1). В модели прямого диполя вектор индукции, согласно (1.2.2), направлен по этой же оси при  $u = 0$ , откуда из (1.2.6) следует, что  $u' = 0$ .

---

\* Автором модели является Paul Leighton Donoho, сотрудник Лаборатории Белла.



Перейдем к более детальному сравнению прямого диполя и упрощенной модели геомагнитного поля. Постоянную величину вектора индукции  $B'_0$  для упрощенной модели обычно находят, опираясь на величину поля в модели прямого диполя (1.2.3). Она принимается равной среднему арифметическому максимального и минимального значений

$$B'_0 = \frac{1}{2} \left( B_{0incl}(0) + B_{0incl} \left( \frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\mu_e}{2r^3} \left( 1 + \sqrt{1 + 3 \sin^2 i} \right) \quad (1.2.7)$$

или интегральному среднему, взятому за половину витка на орбите

$$B'_0 = \int_0^\pi B_{0incl}(u) du = \frac{\mu_e}{\pi r^3} \int_0^\pi \sqrt{1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u} du. \quad (1.2.8)$$

Далее  $B'_0$  и  $B_0$  обозначают характерную величину вектора геомагнитной индукции (в упрощенной модели – непосредственно его постоянную величину). Вектор  $\mathbf{B}$  далее будет размерным, вектор  $\mathbf{b}$  – безразмерным, определяемым как  $\mathbf{B}/B_0$  или  $\mathbf{B}/B'_0$  в зависимости от того, какая модель геомагнитного поля используется. При этом, если используется модель прямого диполя, вектор  $\mathbf{b}$  не является единичным. Он задается выражениями в скобках в (1.2.2), (1.2.4), (1.2.5). При использовании упрощенной модели вектор  $\mathbf{b}$  – единичный. Компоненты безразмерного вектора индукции будем обозначать  $B_k$ , единичного безразмерного вектора индукции –  $b_k$ .

На Рис. 1.2 представлена величина вектора геомагнитной индукции в упрощенной модели при использовании соотношений (1.2.7) и (1.2.8). Из Рис. 1.2 видно, что разница между обоими подходами незначительна, и только для приполярных орбит достигает 1250 нТл, что составляет примерно 3% от интегрального среднего. Таким образом, в большинстве случаев можно опираться на простое выражение (1.2.7).

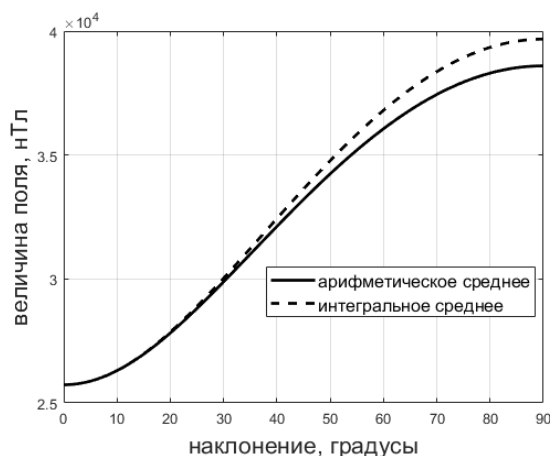


Рис. 1.2. Величина вектора индукции для упрощенной модели на высоте 350 км

При движении спутника по орбите вектор индукции в модели прямого диполя описывает коническую поверхность, замыкающуюся за половину оборота спутника по орбите. Направляющие кругового  $\Theta$ -конуса почти в точности совпадают с направляющими В-конуса. Основания же конусов при этом заметно различаются. Оценим, насколько близки конусы и направления векторов геомагнитной индукции в двух рассматриваемых моделях.

Пусть  $\delta$  – угловое отклонение вектора  $\mathbf{B}$  от оси  $OZ_3$  в модели прямого диполя. Тогда  $\delta \geq \Theta$  при любом  $u$  ( $\delta = \Theta$  при  $u = 0$ ,  $u = \pi/2$ ). Иначе говоря,  $\Theta$ -конус лежит целиком внутри В-конуса, имея с ним две общие, диаметрально противоположные образующие. Разность  $\delta - \Theta$  зависит от наклона орбиты и не превышает величины  $1^\circ 11'$ . Скорость движения вектора геомагнитной индукции по В-конусу непостоянна. Сравним векторы индукции в упрощенной модели и в модели прямого диполя при различных значениях аргумента широты. При  $u = 0$  и  $u = \pi/2$  они совпадают по направлению, хотя и не равны по модулю. В течение первой четверти витка вектор в модели прямого диполя «обгоняет» вектор индукции упрощенной модели. На второй четверти он «запаздывает», пока через половину витка они не совпадут по направлению. При этом угол между векторами никогда не превышает некоторой величины  $\Delta$ , задаваемой выражением

$$\cos \Delta = \frac{1 + \sin^2 i \sin^2 u}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u}}. \quad (1.2.9)$$

Производная (1.2.9) есть

$$\frac{d \cos \Delta}{di} = \frac{\sin^2 u \sin i \cos i (3 \sin^2 i \sin^2 u - 1)}{(1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u)^{3/2}}.$$

Ее нули достигаются при  $\sin i = 0$ ,  $\cos i = 0$ ,  $3 \sin^2 i \sin^2 u - 1 = 0$ . Из последнего соотношения получаем  $\sin^2 u = 1 / (3 \sin^2 i)$ . Так как  $\sin^2 u \leq 1$ , то при выполнении этого равенства  $1 / (3 \sin^2 i) \leq 1$ , откуда следует  $1 / \sqrt{3} \leq |\sin i|$ , или  $i \leq 35^\circ$ . На Рис. 1.3 приведен график максимального по всем точкам орбиты  $u$  значения отклонения  $\Delta$  для орбит с разным наклоном. При превышении наклона в  $35^\circ$  график функции  $\max(\Delta)$  выходит на стационарное значение.

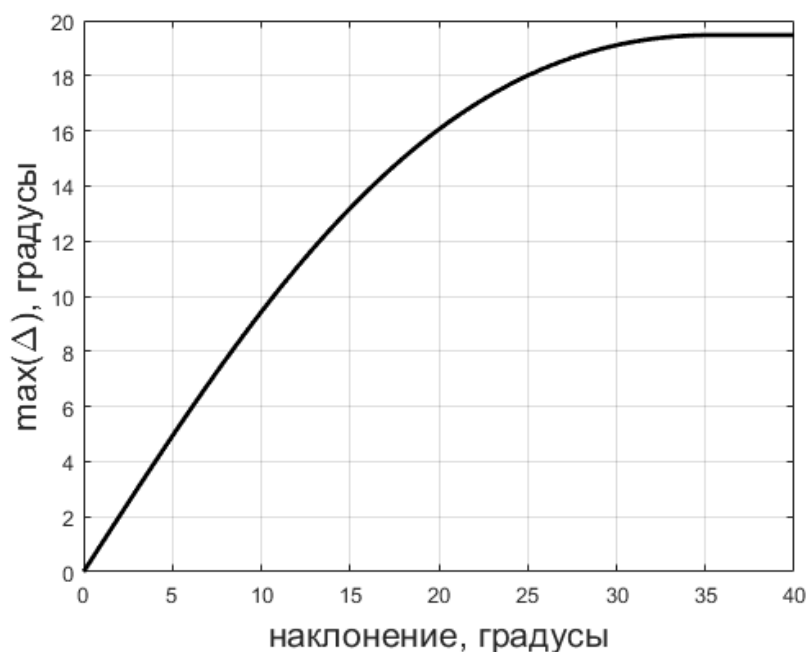


Рис. 1.3. Зависимость угла  $\Delta$  от наклона орбиты

Рис. 1.3 показывает, что вектора индукции в упрощенной дипольной модели и модели прямого диполя могут значительно – до 19 градусов – отличаться по направлению несмотря на то, что  $\mathbf{B}$ - и  $\Theta$ -конуса отличаются незначительно.

В целом упрощенная модель не позволяет учесть неравномерность вращения местного вектора геомагнитной индукции при движении спутника по орбите (как это учитывает модель прямого диполя) и его суточное изменение (как учитывает модель наклонного диполя) и допускает отклонение до 19 градусов от вектора индукции в модели прямого диполя. С использованием упрощенной модели не удастся обнаружить две существенные особенности в движении спутника с постоянным магнитом – вынужденные колебания оси магнита относительно вектора  $\mathbf{B}$  и зависимость амплитуды колебаний от положения КА на орбите. По этой причине большинство исследований движения КА с пассивной магнитной системой проводилось с использованием модели прямого диполя. Аналогично, дипольная модель используется в диссертации для исследования большинства задач. Однако, упрощенная модель также используется, в основном для исследования переходных процессов. В этом случае вопросы точности стабилизации отступают на второй план по сравнению с характеристиками переходных процессов, а уравнения движения существенно упрощаются.

### 1.3. Уравнения движения

В работе используются два подхода к описанию углового движения – уравнения Эйлера и эволюционные уравнения\*.

#### Уравнения Эйлера

Ориентация спутника описывается с помощью самолетных углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (последовательность поворотов 2-3-1) и компонент абсолютной  $\boldsymbol{\omega}$  или относительной  $\boldsymbol{\Omega}$  угловой скорости. В случае проведения численного моделирования вместо углов ориентации используется кватернион. Для выбранной последовательности поворотов матрица перехода от опорной системы к связанной имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (1.3.1)$$

Динамические уравнения движения спутника с тензором инерции  $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$  в связанных осях представлены в виде<sup>†</sup>

$$\mathbf{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} = \mathbf{M}_{gp} + \mathbf{M}_{aero} + \mathbf{M} + \mathbf{M}_{возм}, \quad (1.3.2)$$

где  $\mathbf{h}$  – кинетический момент ротора (маховика с постоянной скоростью вращения),  $\mathbf{M}_{gp}$ ,  $\mathbf{M}_{aero}$ ,  $\mathbf{M}$  – гравитационный, аэродинамический и магнитный<sup>‡</sup> механические моменты,  $\mathbf{M}_{возм}$  – возмущающий момент неизвестной природы.

В случае записи уравнений движения КА относительно орбитальной системы координат потребуется связь абсолютной угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  с относительной  $\boldsymbol{\Omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_{orb},$$

---

\* Подобные переменные были впервые введены Б.В. Булгаковым [174] применительно к задаче движения гироскопа. Система уравнений для осесимметричного спутника была предложена В.В. Белецким [175], для спутника с трехосным эллипсоидом инерции – Ф.Л. Черноушко [147], и эволюционные переменные иногда называют переменными Белецкого-Черноушко.

† В теоретических исследованиях орбита считается круговой. В численном моделировании может учитываться небольшой эксцентриситет орбиты. Эволюция орбиты не учитывается.

‡ Управляющий и возмущающий, например, вызванный появлением остаточного дипольного момента или вихревых токов.

где  $\boldsymbol{\omega}_{orb}$  – угловая скорость вращения орбитальной системы координат при движении спутника по орбите\*. Динамические уравнения для относительной угловой скорости записываются в виде

$$\mathbf{J} \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{h} = -\mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_{orb} \times \mathbf{h} + \mathbf{M}_{отн} + \mathbf{M}_{внеш}, \quad (1.3.3)$$

где все действующие моменты объединены в момент  $\mathbf{M}_{внеш}$ ,

$$\mathbf{M}_{отн} = -\mathbf{J} \mathbf{W}_{\Omega} \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_{orb} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_{orb} - \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_{orb} \times \mathbf{J} (\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_{orb}), \quad (1.3.4)$$

$$\mathbf{W}_{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3.5)$$

Динамические уравнения дополняются кинематическими соотношениями. При задании ориентации относительно орбитальной системы с помощью углов кинематические уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{\cos \beta} (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma), \\ \frac{d\beta}{dt} &= \Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \Omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma). \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Если ориентация описывается в инерциальном пространстве, компоненты относительной скорости  $\Omega_k$  следует заменить компонентами абсолютной скорости  $\omega_k$ . Если для описания ориентации КА используется кватернион  $(q_c, \mathbf{q})$ , кинематические соотношения имеют вид

$$\begin{pmatrix} dq_c/dt \\ d\mathbf{q}/dt \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_c \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}, \quad (1.3.7)$$

где введена операция кватернионного умножения

---

\* В теоретических исследованиях орбитальная скорость является постоянной величиной, так как орбита полагается круговой. При проведении численного моделирования орбита может считаться слабоэллиптической и орбитальная скорость – переменной.

$$\begin{pmatrix} a \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \\ ac + c\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \end{pmatrix}.$$

Для матрицы направляющих косинусов кинематические соотношения имеют вид

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{W}\mathbf{A}. \quad (1.3.8)$$

В зависимости от того, относительно какой системы координат – инерциальной или относительной – записывается ориентация КА, в выражении (1.3.5) для  $\mathbf{W}$  следует использовать компоненты абсолютной или относительной скорости.

### *Эволюционные уравнения*

#### *Классические эволюционные переменные*

Опишем классические эволюционные переменные. Введем полностью систему  $OL_1L_2L_3$ , третья ось которой направлена по вектору кинетического момента. Интерес представляет именно его движение в инерциальном пространстве. Однако для записи уравнений движения необходимо задать все оси системы  $OL_1L_2L_3$ . Используем углы ориентации вектора кинетического момента в инерциальном пространстве  $\rho$  и  $\sigma$  как показано на Рис. 1.4. В качестве инерциальной системы, относительно которой описывается ориентация вектора кинетического момента, здесь в качестве примера используется система  $OZ$ , но можно использовать и любую другую.

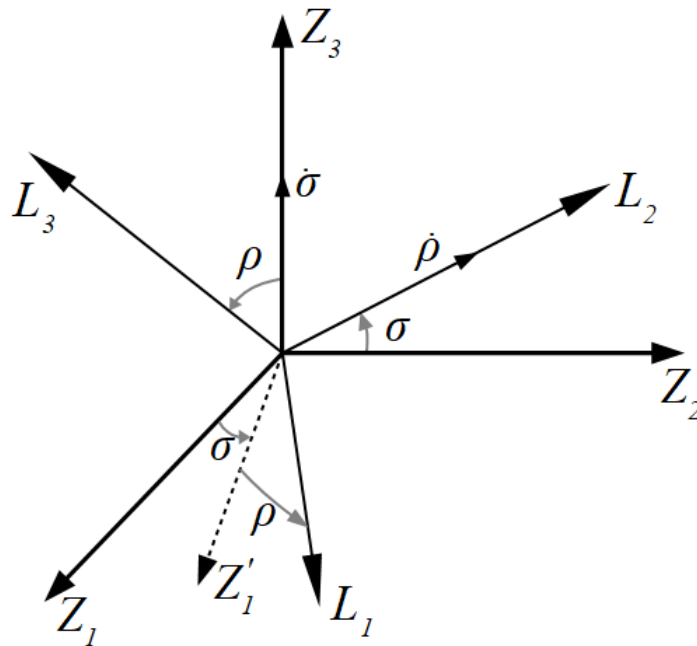


Рис. 1.4. Ориентация вектора кинетического момента в инерциальном пространстве

Ориентация осей системы  $Ox_1x_2x_3$  относительно системы  $OL_1L_2L_3$  задается углами Эйлера  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ . Ориентацию систем друг относительно друга будем определять матрицами перехода  $\mathbf{Q}: OL \rightarrow OZ$  и  $\mathbf{D}: Ox \rightarrow OL$ . Эти матрицы имеют вид

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \rho \cos \sigma & -\sin \sigma & \sin \rho \cos \sigma \\ \cos \rho \sin \sigma & \cos \sigma & \sin \rho \sin \sigma \\ -\sin \rho & 0 & \cos \rho \end{pmatrix}, \quad (1.3.9)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & -\sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.3.10)$$

Рассмотрим спутник с произвольными моментами инерции. Считаем, что его центр масс движется по круговой орбите. Движение такого спутника относительно центра масс описывается [147] системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= M_{L3}, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{L} M_{L1}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{L \sin \rho} M_{L2}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= L \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) + \frac{1}{L} (M_{L2} \cos \psi - M_{L1} \sin \psi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= L \cos \theta \left( \frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + \frac{1}{L \sin \theta} (M_{L1} \cos \psi + M_{L2} \sin \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= L \left( \frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{1}{L} M_{L1} \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{L} M_{L2} (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta), \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

где  $M_{Lk}$  – компоненты вектора суммарного внешнего момента.

В диссертации будут также использоваться уравнения для осесимметричного спутника с тензором инерции  $\mathbf{J} = \operatorname{diag}(A, A, C)$ . В этом случае уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= M_{L3}, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{L} M_{L1}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{L \sin \rho} M_{L2}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{L} (M_{L2} \cos \psi - M_{L1} \sin \psi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= L \cos \theta \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) + \frac{1}{L \sin \theta} (M_{L1} \cos \psi + M_{L2} \sin \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{L}{A} - \frac{1}{L} M_{L1} \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{L} M_{L2} (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta). \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Описанные эволюционные переменные удобно использовать для анализа переходных процессов, когда основной интерес представляет величина угловой скорости спутника,

фактически характеризуемая переменной  $L$ . При этом также удобно описывать и движение вращающегося аппарата, так как угол  $\rho$  задает ориентацию вектора кинетического момента относительно выделенной оси инерциальной системы координат. Аналогично, один угол  $\theta$  показывает отклонение аппарата от вращения вокруг оси максимального момента инерции.

#### *Модифицированные эволюционные переменные*

Недостатком описанных переменных и уравнений движения является вырождение последних, если  $\rho$  или  $\theta$  оказываются близки к нулю. Поэтому для использования эволюционных переменных вблизи требуемой ориентации необходимо ввести новый набор углов. Используем в качестве опорной инерциальную систему  $OS$ , по третьей оси которой необходимо стабилизировать вращающийся аппарат. Введем систему  $OL_1L_2L_3$  следующим образом. Ось  $OL_3$  направим по вектору кинетического момента. Далее в плоскости  $OS_1L_3$  проведем ось  $OL_1$ , перпендикулярную  $OL_3$  и составляющую острый угол с  $OS_1$ . Переход от системы  $OS$  к системе  $OL$  осуществляется с помощью двух последовательных поворотов. Первый поворот на угол  $\rho$  вокруг оси  $OS_1$  производится до совмещения оси  $OS_2$  с осью  $OL_2$ . Второй поворот на угол  $\sigma$  производится вокруг оси  $OL_2$  до совмещения промежуточной третьей оси с вектором кинетического момента (Рис. 1.5).

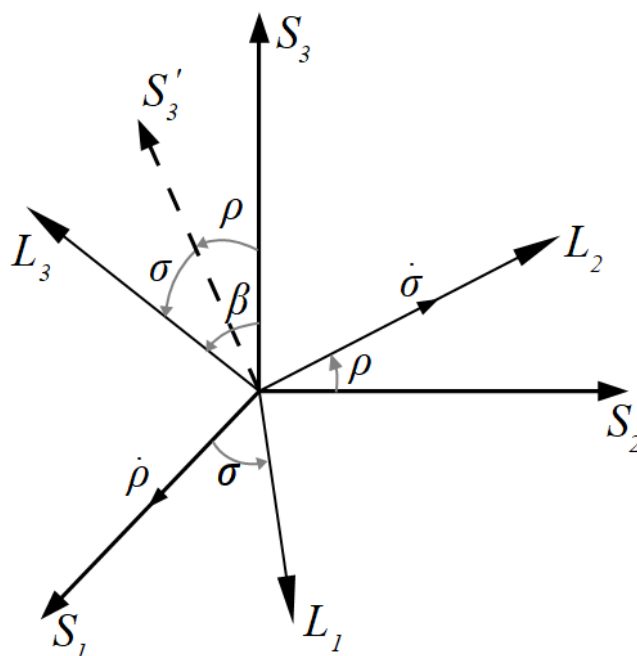


Рис. 1.5. Ориентация вектора кинетического момента в инерциальном пространстве

Вектор кинетического момента ориентируется вдоль третьей оси инерциальной системы координат при  $\rho = \sigma = 0$ . В отличие от классических эволюционных переменных



здесь отсутствует в явном виде угол между вектором кинетического момента и осью  $OS_3$ . Это, с одной стороны, несколько затрудняет интерпретацию движения в терминах, актуальных для рассматриваемой задачи. С другой стороны, это позволяет избежать вырождения в уравнениях движения. Получим эти уравнения.

Матрица перехода от системы  $OL$  к системе  $OS$  имеет вид

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \sigma & 0 & \sin \sigma \\ \sin \rho \sin \sigma & \cos \rho & -\sin \rho \cos \sigma \\ -\cos \rho \sin \sigma & \sin \rho & \cos \rho \cos \sigma \end{pmatrix}. \quad (1.3.13)$$

Вектор кинетического момента в инерциальном пространстве задается как

$$\mathbf{L}_S = \mathbf{Q}(0, 0, L) = L(\sin \rho, -\sin \rho \cos \sigma, \cos \rho \cos \sigma).$$

Изменение кинетического момента в проекциях на оси инерциальной системы есть

$$\dot{L}_{S1} = \dot{L} \sin \sigma + L \dot{\sigma} \cos \sigma = M_{S1}, \quad (1.3.14)$$

$$\dot{L}_{S2} = -\dot{L} \sin \rho \cos \sigma - L \dot{\rho} \cos \rho \cos \sigma + L \dot{\sigma} \sin \rho \sin \sigma = M_{S2}, \quad (1.3.15)$$

$$\dot{L}_{S3} = \dot{L} \cos \rho \cos \sigma - L \dot{\rho} \sin \rho \cos \sigma - L \dot{\sigma} \cos \rho \sin \sigma = M_{S3}. \quad (1.3.16)$$

Точка обозначает дифференцирование по времени. Умножая (1.3.16) на  $\cos \rho$ , (1.3.15) на  $\sin \rho$  и вычитая, получаем

$$\dot{L} \cos \sigma - L \dot{\sigma} \sin \sigma = -M_{S2} \sin \rho + M_{S3} \cos \rho. \quad (1.3.17)$$

Далее, умножая (1.3.14) на  $\sin \sigma$ , (1.3.17) на  $\cos \sigma$  и складывая, получаем

$$\dot{L} = M_{S1} \sin \sigma - M_{S2} \sin \rho \cos \sigma + M_{S3} \cos \rho \cos \sigma = M_{L3}.$$

Аналогично для получения уравнения для  $\rho$  необходимо умножить (1.3.15) на  $\cos \rho$ , (1.3.16) на  $\sin \rho$  и сложить; для получения закона изменения  $\sigma$  следует умножить (1.3.14) на  $\cos \sigma$ , (1.3.17) на  $\sin \sigma$  и вычесть. Окончательно получаем уравнения, описывающие изменение величины вектора кинетического момента и углов его ориентации под действием механического момента, записанного в проекциях на оси системы  $OL$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= M_{L3}, \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\frac{1}{L \cos \sigma} M_{L2}, \\ \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{1}{L} M_{L1}. \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

Обратимся теперь к ориентации КА относительно его кинетического момента и инерциальной системы. Для этого используем углы ориентации связанной с КА системы  $Ox$

относительно системы  $OL$ . Будем использовать углы  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  и последовательность поворотов 3-2-1 при переходе от системы  $OL$  к системе  $Ox$  (Рис. 1.6).

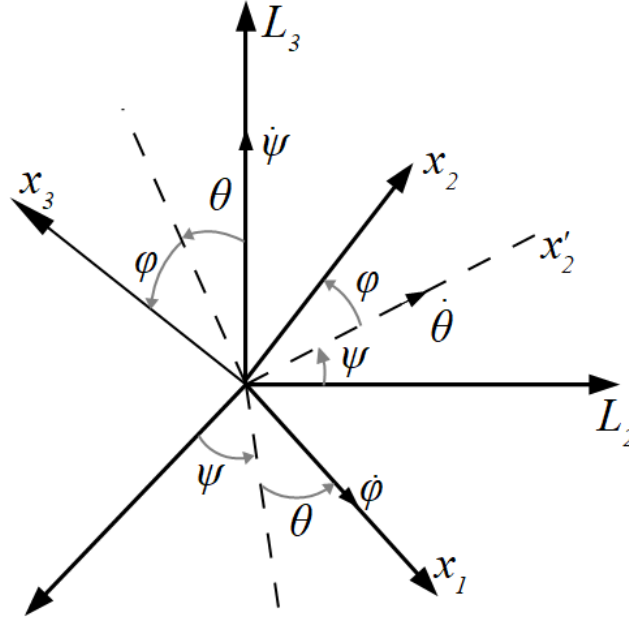


Рис. 1.6. Ориентация космического аппарата

Матрица перехода  $\mathbf{D}$ :  $Ox \rightarrow OL$  имеет вид

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \varphi \cos \psi \sin \theta - \cos \varphi \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi \sin \theta + \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \varphi \sin \psi \sin \theta + \cos \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \psi \sin \theta - \sin \varphi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \theta \end{pmatrix}.$$

В требуемом режиме стабилизации КА при вращении вокруг третьей оси  $\varphi = \theta = 0$ . Здесь, как и в случае с ориентацией кинетического момента, затрудняется интерпретация ориентации оси КА относительно вектора кинетического момента. При этом отсутствует вырождение в уравнениях движения. Чтобы получить эти уравнения, запишем проекции вектора угловой скорости КА на оси связанной системы координат, опираясь на Рис. 1.5 и 1.6 и соотношение  $\mathbf{L}_x = \mathbf{D}^T(0, 0, L) = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ . Для первой компоненты скорости имеем

$$\omega_1 = L/A d_{31} = \dot{\psi} \cos(x_1, L_3) + \dot{\theta} \cos(x_1, x'_2) + \dot{\varphi} + \dot{\rho} \cos(x_1, X_1) + \dot{\sigma} \cos(x_1, L_2).$$

Для направляющих косинусов между осями систем  $Ox$  и  $OL$  выражения задаются матрицей  $\mathbf{D}$ . Для косинусов между осями систем  $Ox$  и  $OS$  матрица перехода задается как  $\mathbf{C} = \mathbf{QD}$ . Для косинусов между осями системы  $Ox$  и промежуточной системы, полученной после поворота вокруг  $OL_3$  на угол  $\psi$ , достаточно в  $\mathbf{D}$  положить  $\psi = 0$ . А именно,

$\cos(x_1, x'_2) = 0$ ,  $\cos(x_2, x'_2) = \cos \varphi$  и  $\cos(x_3, x'_2) = -\sin \varphi$ . Для трех компонент скорости получаем следующие выражения:

$$\frac{L}{A} d_{31} = \dot{\psi} d_{31} + \dot{\varphi} + \dot{\rho} (\cos \sigma d_{11} + \sin \sigma d_{31}) + \dot{\sigma} d_{21},$$

$$\frac{L}{B} d_{32} = \dot{\psi} d_{32} + \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\rho} (\cos \sigma d_{12} + \sin \sigma d_{32}) + \dot{\sigma} d_{22},$$

$$\frac{L}{C} d_{33} = \dot{\psi} d_{33} - \dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\rho} (\cos \sigma d_{13} + \sin \sigma d_{33}) + \dot{\sigma} d_{23}.$$

Производные углов ориентации вектора кинетического момента задаются выражениями (1.3.18). Разрешая полученные соотношения, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= L \sin \theta \left( -\frac{1}{A} + \frac{\sin^2 \varphi}{B} + \frac{\cos^2 \varphi}{C} \right) + \frac{1}{L \cos \theta} (-M_{L1} \sin \psi + M_{L2} \cos \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= L \left( \frac{\sin^2 \varphi}{B} + \frac{\cos^2 \varphi}{C} \right) + \frac{1}{L} M_{L2} (\cos \psi \tan \theta + \tan \sigma) - \frac{1}{L} M_{L1} \sin \psi \tan \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= L \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) - \frac{1}{L} (M_{L1} \cos \psi + M_{L2} \sin \psi). \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

Уравнения (1.3.18)-(1.3.19) описывают движение вектора кинетического момента и корпуса КА в инерциальном пространстве.

#### 1.4. Модели моментов, действующих на КА

*Управляющий момент* со стороны магнитной системы ориентации

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad (1.3.20)$$

где  $\mathbf{m}$  – управляющий дипольный момент, создаваемый магнитными катушками. Вектор индукции  $\mathbf{B}$  записывается в связанной системе координат.

*Гравитационный момент*

$$\mathbf{M}_{op} = 3\omega_{orb}^2 \mathbf{e}_r \times \mathbf{J} \mathbf{e}_r,$$

где  $\mathbf{e}_r$  – единичный радиус-вектора КА, записанный в связанной системе координат,

$\omega_{orb} = \sqrt{\mu_3 / r^3}$  – орбитальная скорость,  $\mu_3$  – гравитационный параметр Земли.

Для вычисления *аэродинамического момента* используются два подхода. В более точной модели, применяемой в численном моделировании движения КА, аэродинамический момент представления собой сумму моментов, действующих на обращенные к набегающему

потоку стороны КА в форме параллелепипеда. Введем вектор  $\mathbf{n}$  центра одной выделенной стороны относительно центра давления КА. В случае КА-параллелепипеда это также нормаль к стороне, а длина вектора  $\mathbf{n}$  равна половине соответствующей грани. Сила, действующая на сторону, имеет вид [148]

$$F_n = -\rho_a V (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) / |\mathbf{n}|,$$

где  $\rho_a$  – плотность атмосферы,  $\mathbf{V}$  – скорость КА относительно набегающего потока, записанная в связанной СК,  $V = \sqrt{\mu_3/r}$  – величина этой скорости. Считая атмосферу статичной, не вращающейся вместе с Землей, имеем выражение для скорости в системе  $OP$

$$\mathbf{V} = V (-\sin u, \cos u, 0)$$

и вектор силы в системе  $OP$

$$\mathbf{F}_n = F_n (\sin u, -\cos u, 0).$$

Момент, действующий на грань, имеет вид

$$\mathbf{M}_{aep(n)} = (-\mathbf{d} + \mathbf{n}) \times \mathbf{F}_{nx}.$$

Здесь вектор силы  $\mathbf{F}_{nx}$  следует записать в связанной СК, используя соответствующие переходы, конкретный вид которых зависит от того, относительно какой СК записывается движение КА в конкретном рассматриваемом случае. Вектор  $\mathbf{d}$  задает смещение центра масс спутника относительно центра давления. Аэродинамический момент, действующий на КА, является суммой моментов, действующих на его грани, обращенные к набегающему потоку.

В разделе 3.5 проводится теоретическое исследование движения КА под управлением магнитной системы и восстанавливающего аэродинамического момента. В этом случае используется упрощенная модель, в рамках которой будем считать, что спутник – тело вращения, центр давления лежит на оси симметрии, так что  $\mathbf{d} = d\mathbf{e}_1$ , и учтем действие только восстанавливающего аэродинамического момента. Тогда этот момент задается выражением

$$\mathbf{M}_{aep} = 0.5c\rho|\mathbf{V}|Sd\mathbf{e}_1 \times \mathbf{V}. \quad (1.3.21)$$

Здесь баллистический коэффициент, вообще говоря, зависящий от угла между осью симметрии  $\mathbf{e}_1$  и вектором набегающего потока, будем считать постоянным и равным 2. Площадь поперечного сечения  $S$  также будем считать постоянной и равной площади грани параллелепипеда, обращенной к потоку практически перпендикулярно в номинальном режиме движения.

*Остаточный дипольный момент* будем считать имеющим постоянную и периодическую компоненты, вторая имеет примерно орбитальную частоту. Аналогичный подход используем для задания других возмущающих моментов, имеющих малую величину и незначительное влияние на динамику малого околоземного КА – момента сил солнечного давления, поправки к гравитационному моменту в силу сплюснутости Земли и других. Эти немоделируемые возмущающие факторы объединим в момент неизвестной природы, имеющий постоянную и периодическую компоненты,

$$\mathbf{M}_{\text{возм}} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \sin u + \mathbf{b}_1 \cos u + \mathbf{a}_2 \sin 2u + \mathbf{b}_2 \cos 2u. \quad (1.3.22)$$

Постоянная часть момента отвечает действию аэродинамического момента при стабилизации КА по осям орбитальной системы координат. Несмотря на то, что этот момент непосредственно моделируется, возникают дополнительные эффекты, связанные с неточностью используемой модели взаимодействия КА с потоком и определения плотности атмосферы. Орбитальная и двойная орбитальная частоты для момента неизвестной природы выбраны из-за характерных частот при движении КА – его орбитального движения и вращения вектора геомагнитной индукции. Коэффициенты  $\mathbf{a}_k$  и  $\mathbf{b}_k$  – нормально распределенные случайные величины. Величина этих коэффициентов подбирается так, чтобы в целом возмущающий момент неизвестной природы был в 5-10 раз меньше гравитационного.

Наконец, на управляемое движение КА могут оказывать влияние *ошибки определения ориентации*. При проведении теоретических исследований фазовый вектор КА и все необходимые векторы, характеризующие внешнюю среду – вектор индукции, направление на Солнце и другие – полагаются известными. В численном моделировании возможен учет ошибок идентификации состояния КА. Они в основном моделируются как постоянные и случайные нормально распределенные ошибки фазового вектора, состоящего из кватерниона ориентации и угловой скорости. Также могут учитываться ошибки определения вектора геомагнитной индукции и направления на Солнце в связанной системе координат. В разделе 6.1 реализован фильтр Калмана, использующий модельные зашумленные показания магнитометра для определения ориентации.

## Глава 2. Движение космического аппарата в режиме демпфирования угловой скорости

В главе рассматривается гашение угловой скорости КА. Система управления реализует алгоритм  $\dot{\mathbf{V}}$  (2), что в случае быстро вращающегося аппарата практически идентично реализации алгоритма демпфирования (1). Магнитное демпфирование – основное средство на подавляющем большинстве современных КА, в особенности малых. Последние, зачастую запускаемые в качестве попутной полезной нагрузки, могут иметь существенную начальную угловую скорость. Определение времени переходного процесса может иметь решающее значение для успеха всей миссии, так как КА должен оперативно перейти в режим заряда аккумуляторных батарей и осуществить связь с пунктом управления. Все это требует гашения угловой скорости. При этом важно также установить предел, до которого простой алгоритм  $\dot{\mathbf{V}}$  способен демпфировать угловую скорость, и если необходима более точная стабилизация – использовать алгоритм демпфирования (1).

### 2.1. Переходные процессы при гашении угловой скорости

Рассмотрим сначала переходный процесс – демпфирование угловой скорости спутника после отделения от ракеты-носителя. Управление формируется алгоритмом  $\dot{\mathbf{V}}$ , согласно которому дипольный магнитный момент спутника задается [14] выражением

$$\mathbf{m}_x = -k d\mathbf{B}_x/dt, \quad (2.1.1)$$

где  $k$  – постоянный положительный коэффициент.

Для описания динамики КА будем использовать классические эволюционные переменные и уравнения (1.3.12) для осесимметричного КА. В качестве инерциальной используем систему  $OZ$ , относительно которой будем записывать движение КА.

Вычислим производную вектора геомагнитной индукции в системе  $Ox$  через его производную в инерциальной системе  $OZ$  как

$$d\mathbf{B}_x/dt = \mathbf{A} d\mathbf{B}_z/dt - \boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{B}_x. \quad (2.1.2)$$

Рассмотрим теперь быстрые вращения спутника, при которых первым слагаемым, описывающим вращение вектора  $\mathbf{B}$  относительно инерциального пространства, в правой части (2.1.2) можно пренебречь. Угловая скорость спутника намного больше его орбитальной скорости ( $L/A \gg \omega_{orb}$ ,  $L/C \gg \omega_{orb}$ ). Тогда, фактически, будем рассматривать движение спутника под действием управления (1) и, соответственно, управляющего механического момента

$$\mathbf{M}_x = k (\boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{B}_x) \times \mathbf{B}_x. \quad (2.1.3)$$

Выразим угловую скорость спутника через его кинетический момент  $\boldsymbol{\omega}_x = \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{L}_x$ . Поскольку известен вид кинетического момента  $\mathbf{L}_L = (0, 0, L)^*$  в системе  $OL$ , то можем пересчитать его в систему  $Ox$  как  $\mathbf{L}_x = \mathbf{D}^T \mathbf{L}_L$ . Это позволяет записать выражение для угловой скорости в системе  $Ox$ ,  $\boldsymbol{\omega}_x = L(d_{31}/A, d_{32}/A, d_{33}/C)$ .

Будем рассматривать осесимметричный спутник, опираясь на уравнения (1.3.12). В уравнениях (1.3.12) присутствуют компоненты внешнего момента, которые необходимо задать в системе  $OL$ . Запишем его в этой системе, учитывая, что  $\boldsymbol{\omega}_L = \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_x$  и  $\mathbf{B}_L = \mathbf{Q}^T \mathbf{B}_Z$ ,

$$\mathbf{M}_L = B_0'^2 \begin{pmatrix} \omega_{L3} B_{L1} B_{L3} - \omega_{L1} B_{L3}^2 - \omega_{L1} B_{L2}^2 + \omega_{L2} B_{L1} B_{L2} \\ \omega_{L1} B_{L1} B_{L2} - \omega_{L2} B_{L1}^2 - \omega_{L2} B_{L3}^2 + \omega_{L3} B_{L2} B_{L3} \\ \omega_{L2} B_{L2} B_{L3} - \omega_{L3} B_{L2}^2 - \omega_{L3} B_{L1}^2 + \omega_{L1} B_{L1} B_{L3} \end{pmatrix}.$$

Для описания вектора геомагнитной индукции используем упрощенную модель и выражение (1.2.6). Запишем теперь уравнения движения спутника в безразмерных переменных. Для этого введем безразмерный момент  $\bar{\mathbf{M}}_L$ , определяемый выражением

$$\mathbf{M}_L = kB_0'^2 L / C \bar{\mathbf{M}}_L. \quad (2.1.4)$$

Перейдем к дифференцированию по аргументу широты  $u = \omega_{op6} t$ . Введем безразмерный кинетический момент  $l$  по формуле  $L = L_0 l$ , где  $L_0$  – начальный кинетический момент спутника. Все это позволяет записать уравнения движения (1.3.12) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dl}{du} &= \varepsilon l \bar{M}_{L3}, \quad \frac{d\rho}{du} = \varepsilon \bar{M}_{L1}, \quad \frac{d\sigma}{du} = \frac{\varepsilon}{\sin \rho} \bar{M}_{L2}, \\ \frac{d\theta}{du} &= \varepsilon (\bar{M}_{L2} \cos \psi - \bar{M}_{L1} \sin \psi), \\ \frac{d\varphi}{du} &= \eta_\varphi l \cos \theta + \frac{\varepsilon}{\sin \theta} (\bar{M}_{L1} \cos \psi + \bar{M}_{L2} \sin \psi), \\ \frac{d\psi}{du} &= \eta_\psi l - \varepsilon \bar{M}_{L1} \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \varepsilon \bar{M}_{L2} (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta). \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

---

\* В большинстве случаев в работе подразумевается, что векторы являются столбцами. Знак транспонирования не используется, чтобы не перегружать текст.

Здесь введены обозначения\*  $\varepsilon = kB_0^2 / \omega_{opb} C$ ,  $\eta_\varphi = L_0 / \omega_{opb} (1/C - 1/A)$ ,  $\eta_\psi = L_0 / A \omega_{opb}$ .

Параметр  $\varepsilon$  имеет смысл отношения изменения вектора кинетического момента за виток вокруг Земли к величине момента. В случае слабого управляющего момента параметр  $\varepsilon$  и отношения  $\varepsilon/\eta_i \sim kB_0^2/L_0$  малы (если спутник не близок к динамически симметричному, не является вытянутым стержнем или диском). Эти отношения имеют смысл изменения вектора кинетического момента за оборот спутника вокруг центра масс, отнесенного к его значению. В этом случае, как следует из вида уравнений (2.1.5), переменные  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $u$  можно считать быстрыми по сравнению с переменными  $l$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $\theta$ .

Разделение переменных на медленные и быстрые позволяет использовать известные методы асимптотического анализа [131–134,149]. Поскольку интересует представляет, в первую очередь, эволюция медленных переменных, к которым относится модуль вектора кинетического момента, будем рассматривать первое приближение по степеням параметра  $\varepsilon$ . Для этого необходимо провести усреднение правой части уравнений вдоль порождающего решения – регулярной прецессии. Поскольку при  $\varepsilon = 0$  быстрые переменные изменяются равномерно, при усреднении временное и пространственное средние совпадают, поэтому достаточно усреднить правую часть уравнений для медленных переменных независимо по всем быстрым переменным. Для этого также будем считать, что моменты инерции  $A$  и  $C$  выбраны так, что  $\eta_\varphi$ ,  $\eta_\psi$  и 1 (скорость изменения  $u$ ) рационально несоизмеримы. Чтобы получить усредненные уравнения, необходимо вычислить выражения  $\langle M_{iL} \rangle_{u,\varphi,\psi}$ ,  $\langle M_{iL} \cos \psi \rangle_{u,\varphi,\psi}$  и  $\langle M_{iL} \sin \psi \rangle_{u,\varphi,\psi}$ . Для усреднения (2.1.5) по  $u$  необходимо вычислить выражения

$$B_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_i B_j du, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (2.1.6)$$

где  $B_i$  – компоненты безразмерного геомагнитного поля в системе  $OZ$ , определяемые выражениями (1.2.6). В результате получаем

$$B_{11} = B_{22} = p = 1/2 \sin^2 \Theta, \quad B_{33} = q = \cos^2 \Theta, \quad B_{12} = B_{23} = B_{13} = 0. \quad (2.1.7)$$

---

\* Некоторые вторичные обозначения имеют разные выражения в разных разделах диссертационной работы. В частности,  $\varepsilon$  используется для обозначения малого параметра, хотя вводится он может по-разному.



Усредняя, получаем уравнения, описывающие эволюцию переменных  $l$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $\theta$

$$\begin{aligned}\frac{dl}{du} &= -\varepsilon l \left[ \cos^2 \theta + \theta_A \sin^2 \theta \right] \left[ (1 - q_{13}^2) B_{11} + (1 - q_{23}^2) B_{22} + (1 - q_{33}^2) B_{33} \right], \\ \frac{d\rho}{du} &= \varepsilon \left[ \cos^2 \theta + \theta_A \sin^2 \theta \right] \left[ q_{11} q_{13} B_{11} + q_{21} q_{23} B_{22} + q_{31} q_{33} B_{33} \right], \\ \frac{d\sigma}{du} &= \varepsilon \left[ \cos^2 \theta + \theta_A \sin^2 \theta \right] \frac{1}{\sin \rho} \left[ q_{12} q_{13} B_{11} + q_{22} q_{23} B_{22} \right], \\ \frac{d\theta}{du} &= \varepsilon \lambda \sin \theta \cos \theta \left[ B_{11} (1 + q_{13}^2) + B_{22} (1 + q_{23}^2) + B_{33} (1 + q_{33}^2) \right],\end{aligned}\tag{2.1.8}$$

где  $\theta_A = C/A^*$ ,  $\lambda = 1/2(1 - C/A)^\dagger$ . Учитывая (1.3.9) и выражения для  $B_{ij}$ , получаем окончательно

$$\begin{aligned}\frac{dl}{du} &= -\varepsilon l \left[ 2p + (1 - 3p) \sin^2 \rho \right] (\cos^2 \theta + \theta_A \sin^2 \theta), \\ \frac{d\rho}{du} &= \varepsilon (3p - 1) \sin \rho \cos \rho (\cos^2 \theta + \theta_A \sin^2 \theta), \\ \frac{d\sigma}{du} &= 0, \\ \frac{d\theta}{du} &= \varepsilon \lambda \left[ 2(1 - p) + (3p - 1) \sin^2 \rho \right] \sin \theta \cos \theta.\end{aligned}\tag{2.1.9}$$

Решение полученной системы уравнений удастся найти в квадратурах. Рассмотрим сначала два частных случая.

1. КА с шаровым тензором инерции, то есть  $A = B = C$ . Тогда все рассуждения о разделении переменных остаются в силе ( $\varphi$  становится медленной переменной, но усреднение по ней не требуется), а усредненная система первого приближения для медленных переменных принимает вид

\* Параметры  $\lambda_x$ ,  $\theta_x$  и  $\theta'_x = 1/\theta_x$  задают распределение масс КА, где индекс «x» означает один из моментов инерции  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Выражения для этих параметров имеют единый вид во всей работе. Тем не менее, при их введении в соответствующих разделах выражения обычно повторяются. Также выражения для этих параметров приведены в Приложении.

† Параметр  $\lambda$ , как и многие другие, используется для обозначения разных величин в разных разделах. Вообще, все фиксированные выражения, единые в рамках всей работы, приведены в Приложении. Для остальных величин выражения вводятся в каждом разделе заново.

$$\begin{aligned}\frac{dl}{du} &= -\varepsilon l [2p + (1-3p)\sin^2 \rho], \\ \frac{d\rho}{du} &= \varepsilon(3p-1)\sin \rho \cos \rho, \\ \frac{d\sigma}{du} &= 0, \quad \frac{d\theta}{du} = 0.\end{aligned}\tag{2.1.10}$$

Интегрируя эту систему и учитывая, что  $l_0 = 1$ , получаем

$$\begin{aligned}l &= \exp\left[-2\varepsilon pu + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \exp(2\varepsilon(3p-1)u + 2c_0)}{1 + \exp 2c_0}\right)\right], \\ \rho &= \operatorname{arctg}\left[\exp(\varepsilon(3p-1)u + c_0)\right], \\ \sigma &= \sigma_0, \quad \theta = \theta_0,\end{aligned}\tag{2.1.11}$$

где  $c_0 = \ln|\operatorname{tg} \rho_0|$ . В результате имеем зависимость модуля вектора кинетического момента спутника от наклона орбиты  $i$ . На Рис. 2.1.1 представлено уменьшение модуля кинетического момента для разных наклонов орбиты.

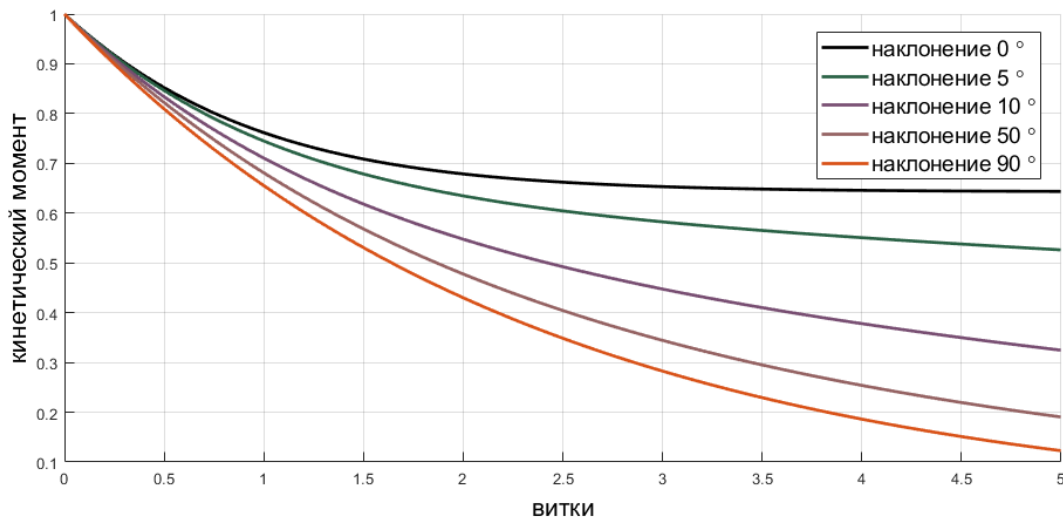


Рис. 2.1.1. Демпфирование в случае сферически-симметричного спутника

2. Случай  $3p-1=0$ , то есть  $i = i_0 \approx 46^\circ$ . При этом наклонении  $B_{11} = B_{22} = B_{33}$ . При меньших наклонениях проекция среднего вектора геомагнитной индукции на ось  $OZ_3$  больше, чем на плоскость  $OZ_1Z_2$ , при больших наклонениях – меньше. Уравнения движения принимают вид

$$\frac{dl}{du} = -\frac{2}{3}\varepsilon l (\cos^2 \theta + \theta_A \sin^2 \theta),$$

$$\frac{d\rho}{du} = 0, \quad \frac{d\sigma}{du} = 0, \quad (2.1.12)$$

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{4}{3} \varepsilon \lambda \sin \theta \cos \theta.$$

Интегрируя последнее выражение в (2.1.12), получаем

$$\frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} \theta| - c_0 = \frac{2}{3} \varepsilon \lambda u,$$

где  $c_0 = 1/2 \ln |\operatorname{tg} \theta_0|$ . Отсюда  $\operatorname{tg}^2 \theta = \exp(8/3 \varepsilon \lambda u + 4c_0) = f(u)$  и для  $l$  получаем уравнение

$$\frac{dl}{du} = -\frac{2}{3} \varepsilon l \frac{A + Cf(u)}{A + Af(u)},$$

откуда

$$l = \exp \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\exp(8/3 \varepsilon \lambda u + 4c_0) + 1}{\exp(4c_0) + 1} \right) - \frac{2}{3} \varepsilon u \right]. \quad (2.1.13)$$

Рассмотрим теперь общий случай. Разделим в (2.1.9) первое уравнение на второе и сгруппируем одноименные переменные. Тогда получим уравнение

$$\frac{dl}{l} = -\frac{2p + (1-3p)\sin^2 \rho}{(3p-1)\sin \rho \cos \rho} d\rho.$$

Знаменатель в правой части не равен нулю (иначе, см выше случай 2). Интегрируя это уравнение, получаем

$$\ln l = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) - \frac{2p}{3p-1} \ln |\operatorname{tg} \rho| - c_0,$$

где  $c_0 = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 \rho_0 + 1) - \frac{2p}{3p-1} \ln |\operatorname{tg} \rho_0|$ . Таким образом, имеем первый интеграл системы

(2.1.9) в виде

$$I_1(l, \rho) = (3p-1) \ln l - 1/2(3p-1) \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) + 2p \ln |\operatorname{tg} \rho|, \quad (2.1.14)$$

Тогда при  $3p-1=0$  получаем  $\rho = \rho_0$  (случай 2).

Разделим теперь второе уравнение на третье из (2.1.9) и получим

$$\frac{2(1-p) + (3p-1)\sin^2 \rho}{(3p-1)\sin \rho \cos \rho} d\rho = \frac{1}{\lambda} \frac{\cos^2 \theta + \theta_A \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} d\theta. \quad (2.1.15)$$

Знаменатели в выражениях слева и справа не равны нулю (иначе, см. случаи 2 и 1 соответственно). Интегрирование уравнения (2.1.15) дает еще один первый интеграл

$$I_2(\rho, \theta) = (3p-1) \left( \frac{\lambda}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) - \ln|\sin \theta| + \theta_A \ln|\cos \theta| \right) + \lambda(2-2p) \ln|\operatorname{tg} \rho| \quad (2.1.16)$$

и при  $3p-1=0$  получаем  $\rho = \rho_0$  (случай 2).

Интеграл  $I_2(\rho, \theta)$  задает  $\theta$  как неявную функцию  $\rho$ . Из (2.1.16) видно, что  $I_2(\rho, \theta)$  на некоторых интервалах (например,  $\theta \in (0, \pi/2)$ ) удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции [150] (существует производная по  $\theta$  и первый интеграл непрерывен) и можно определить  $\theta$  как функцию  $\rho$ . Аналогичные рассуждения можно применить к (2.1.14) и записать  $\rho$  как функцию  $l$ . Тем самым, решение уравнений (2.1.9) может быть найдено в квадратурах.

Кинетический момент является функцией трех параметров:  $l = l(i, \rho_0, \theta_0)$ . Таким образом, на быстродействие алгоритма могут оказать влияние наклонение орбиты и начальные условия – угол между вектором кинетического момента и осью конуса упрощенной модели и угол между осью симметрии спутника и вектором кинетического момента. На Рис. 2.1.2 и Рис. 2.1.3 показано влияние наклонения орбиты и  $\rho_0$ .

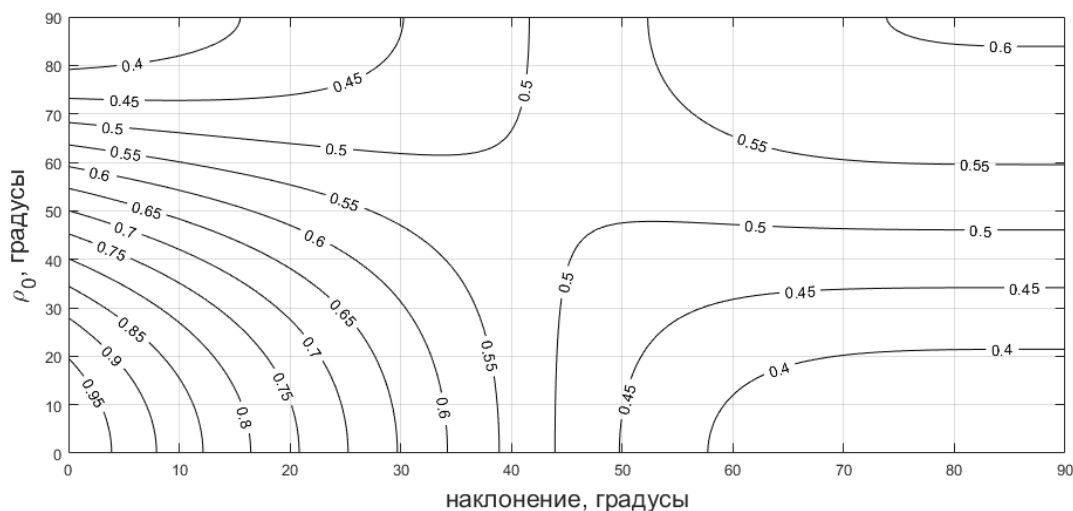


Рис. 2.1.2. Значение кинетического момента через 2 витка

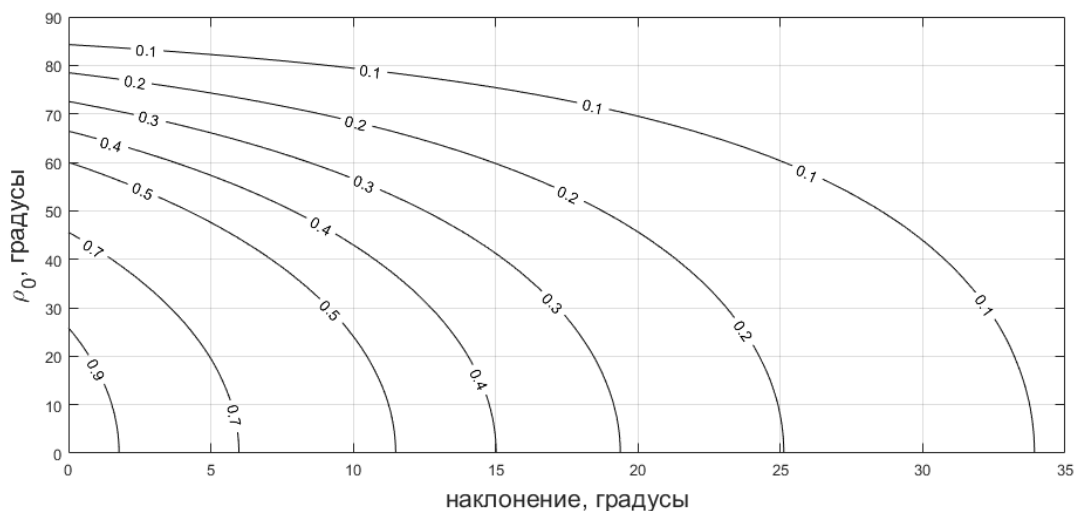


Рис. 2.1.3. Значение кинетического момента через 10 витков

На Рис. 2.1.2 и Рис. 2.1.3 представлены изолинии, соответствующие значению кинетического момента через 2 (Рис. 2.1.2) и через 10 (Рис. 2.1.3) витков в зависимости от наклона орбиты и  $\rho_0$  (на изолиниях нанесены значения безразмерного кинетического момента, начальное значение  $\theta_0 = \pi/4$ ). При этом учтено, что уравнения (2.1.9) симметричны относительно  $\rho=0$  и  $\rho=\pi/2$ . Рис. 2.1.2 и Рис. 2.1.3 практически не изменяются при изменении  $\theta_0$ . Как видно из Рис. 2.1.2, при  $\rho_0$ , близких к  $90^\circ$  (отметим, что при  $\rho=\pi/2$  уравнения (1.3.12) не имеют смысла, так как не имеет смысла угол  $\sigma$ ), кинетический момент демпфируется быстрее при меньших наклонениях. Однако Рис. 2.1.3 позволяет заключить, что быстродействие алгоритма растет с увеличением наклона. Для объяснения этого расхождения обратимся к соотношениям (2.1.11). При  $\rho_0$ , близких к  $90^\circ$ , в течение некоторого небольшого времени (это время увеличивается с уменьшением наклона) в показателе экспоненты превалирует второе слагаемое, зависящее от  $\rho_0$ . Через некоторое время превалировать начинает первое слагаемое, которое монотонно убывает, тогда как второе либо ограничено (при  $3p-1 < 0$ ), либо возрастает медленнее. Анализ уравнений показал, что влияние  $\theta_0$  аналогично влиянию  $\rho_0$ . В течение некоторого времени также может наблюдаться большее быстродействие при меньшем наклонении орбиты (влияние первого слагаемого в (2.1.13)). В [151] было показано, что кинетический момент спутника под действием момента (2.1.3) стремится к некоторому положению в инерциальном пространстве. Полученное решение позволяет найти это направление. Действительно, найдем наклонение  $i_0$ , определяющее ориентацию вектора кинетического

момента в инерциальном пространстве. Значение  $i_0$ , как следует из (2.1.11), определяется из знака выражения  $\varepsilon(3p-1)u$ , то есть  $i_0 \approx 46^\circ$ . При наклонении меньшем, чем  $i_0$ , кинетический момент спутника стремится ориентироваться вдоль оси конуса упрощенной дипольной модели геомагнитного поля, при наклонении более  $i_0$  – перпендикулярно ей. При  $i = i_0$  направление вектора кинетического момента в инерциальном пространстве не изменяется (см. случай 2). Анализ общего случая подтверждает существование полученного «пограничного» значения  $i_0$ .

## 2.2. Движение космического аппарата в установившемся режиме

Проведенное выше исследование верно в предположении относительно быстрого вращения КА. Если же его скорость достигает порядка орбитальной, использование усредненных уравнений раздела 2.1 более невозможно. Рассмотрим теперь отдельно движение в этом случае.

### *Устойчивость вращения спутника*

Изучим процесс демпфирования угловой скорости спутника в инерциальном пространстве. В качестве опорной будем использовать систему  $OZ$ , геомагнитное поле представим с помощью упрощенной модели (1.2.6), движение будем описывать уравнениями Эйлера (1.3.2). Управляющий дипольный момент спутника задается выражением

$$\mathbf{m} = \underbrace{k\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}\mathbf{B}_z}_{\mathbf{m}_1} - \underbrace{k\mathbf{A} d\mathbf{B}_z/dt}_{\mathbf{m}_2}. \quad (2.2.1)$$

Напомним, что если в управлении (2.2.1) реализуется лишь  $\mathbf{m}_1$ , как это было сделано в предыдущем разделе, скорость демпфируется полностью. Если же принять во внимание  $\mathbf{m}_2$ , следует ожидать, что демпфирование возможно лишь до величины, примерно равной двойной орбитальной – примерной скорости вращения вектора геомагнитной индукции в инерциальном пространстве. Покажем, что это вращение происходит вокруг оси максимального момента инерции, найдем величину скорости и направление вращения.

Для решения первой проблемы используем упрощенную модель геомагнитного поля. Точность аппроксимации поля в этом случае достаточна, чтобы можно было выявить качественную характеристику движения. А именно, определить выделенное в теле спутника направление, вдоль которого происходит вращение. Предположим, что вращение происходит вдоль третьей оси спутника (которая пока никак не выделяется по сравнению в

первой и второй), и найдем условия, при которых существует движение  $\beta = \gamma = 0$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . Принимая во внимание последние условия, для дипольного момента получаем

$$\mathbf{m} = kB'_0 \sin \Theta \begin{pmatrix} -\omega_3 \cos(\alpha - 2u) + 2\omega_{op\delta} \cos(\alpha - 2u) \\ \omega_3 \sin(\alpha - 2u) - 2\omega_{op\delta} \sin(\alpha - 2u) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что  $\omega_3 = 2\omega_{op\delta}$  и  $\alpha = 2u + \alpha_0$ , то есть спутник вращается с той же скоростью, что и вектор геомагнитной индукции. Положим  $\alpha_0 = 0$  и линеаризуем уравнения движения в окрестности  $\alpha = 2u$ ,  $\beta = \gamma = 0$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ,  $\omega_3 = 2\omega_{op\delta}$ . Заметим, что матрица направляющих косинусов в этом случае имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos 2u - \alpha \sin 2u & \sin 2u + \alpha \cos 2u & -\gamma \\ -\sin 2u - \alpha \cos 2u & \cos 2u - \alpha \sin 2u & \beta \\ \gamma \cos 2u + \beta \sin 2u & \gamma \sin 2u - \beta \cos 2u & 1 \end{pmatrix},$$

вектор геомагнитной индукции в связанной системе

$$\mathbf{B}_x = B'_0 \begin{pmatrix} \alpha \sin \Theta - \gamma \cos \Theta \\ \sin \Theta + \beta \cos \Theta \\ -\beta \sin \Theta + \cos \Theta \end{pmatrix},$$

компоненты управляющего дипольного момента

$$\mathbf{m}_1 = kB'_0 \begin{pmatrix} \omega_2 \cos \Theta - \omega_3 \sin \Theta - 2\omega_{op\delta} \sin \Theta - 2\omega_{op\delta} \cos \Theta \beta \\ 2\omega_{op\delta} \sin \Theta \alpha - 2\omega_{op\delta} \cos \Theta \gamma - \omega_1 \cos \Theta \\ \omega_1 \sin \Theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m}_2 = 2\omega_{op\delta} kB'_0 \sin \Theta \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

После этого можно выписать безразмерные линеаризованные уравнения движения,

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= 2\lambda_A \omega_2 - \theta_A \varepsilon (\omega_1 + 2\gamma), \\ \dot{\omega}_2 &= 2\lambda_B \omega_1 + \theta_B \varepsilon (-\omega_2 \cos^2 \Theta + \omega_3 \sin \Theta \cos \Theta + 2 \cos^2 \Theta \beta), \\ \dot{\omega}_3 &= \varepsilon (\omega_2 \cos \Theta \sin \Theta - \omega_3 \sin^2 \Theta - 2 \sin \Theta \cos \Theta \beta), \\ \dot{\alpha} &= \omega_3, \quad \dot{\beta} = \omega_1 + 2\gamma, \quad \dot{\gamma} = \omega_2 - 2\beta. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Здесь использовано дифференцирование по аргументу широты, отнесенные к орбитальной компоненте угловой скорости\*,  $\varepsilon = kB'_0{}^2 / C\omega_{op\delta}$ ,  $\theta_A = C/A$ ,  $\theta_B = C/B$ ,

---

\* Здесь, как и во многих других случаях, для безразмерной переменной сохраняется обозначение.

$\lambda_A = (B - C)/A$ ,  $\lambda_B = (C - A)/B$ . Уравнение для  $\alpha$  отделилось, его далее рассматривать не будем.

Запишем характеристическое уравнение для (2.2.2),

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^5 C_j \lambda^j = 0, \quad (2.2.3)$$

где коэффициенты уравнения задаются выражениями

$$C_5 = 1,$$

$$C_4 = \theta_B \varepsilon \cos^2 \Theta + \varepsilon \sin^2 \Theta + \theta_A \varepsilon,$$

$$C_3 = \theta_A \theta_B \varepsilon^2 \cos^2 \Theta + \theta_A \varepsilon^2 \sin^2 \Theta - 4\lambda_A \lambda_B + 4,$$

$$C_2 = 4\theta_A \varepsilon \lambda_B - 4\lambda_A \lambda_B \varepsilon \sin^2 \Theta + 4\varepsilon \sin^2 \Theta - 4\lambda_A \theta_B \varepsilon \cos^2 \Theta,$$

$$C_1 = 4\theta_A \lambda_B \varepsilon^2 \sin^2 \Theta - 16\lambda_A \lambda_B,$$

$$C_0 = -16\lambda_A \lambda_B \varepsilon \sin^2 \Theta.$$

Для удовлетворения необходимых условий устойчивости определим, когда все  $C_j > 0$ .

Для  $C_4$  и  $C_5$  это условие верно. Параметр  $C_0 > 0$ , если  $\lambda_A \lambda_B < 0$ , то есть  $C$  является максимальным или минимальным моментом инерции. В этом случае оставшиеся  $C_j$  также положительны. Дальнейшее исследование характеристического уравнения (2.2.3), например, с помощью критерия Рауса-Гурвица, затрудняется громоздким видом коэффициентов  $C_j$ .

Заметим, что уравнения (2.2.2) имеют вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{A}_1 \mathbf{y},$$

где  $\mathbf{y} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \beta, \gamma)$ , параметр  $\varepsilon$  можно считать малым, что зачастую верно для магнитной системы управления. Характеристические показатели также представим в виде  $\lambda_j = \mu_j + \varepsilon \eta_j$ . Показатели нулевого приближения (при  $\varepsilon = 0$ ) можно легко найти,

$$\mu_{1,2} = \pm 2\sqrt{-\lambda_A \lambda_B} i,$$

$$\mu_3 = 0,$$

$$\mu_{4,5} = \pm 2i.$$

Здесь  $i$  – мнимая единица. Использовалось необходимое условие устойчивости  $\lambda_A \lambda_B < 0$ . Коэффициенты характеристического уравнения также представим в виде

$$C_j = A_j + \varepsilon D_j,$$

где



$$\begin{aligned}
A_5 &= 1, & D_5 &= 0, \\
A_4 &= 0, & D_4 &= \theta_B \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta + \theta_A, \\
A_3 &= -4\lambda_A \lambda_B + 4, & D_3 &= 0, \\
A_2 &= 0, & D_2 &= 4\theta_A \lambda_B - 4\lambda_A \lambda_B \sin^2 \Theta + 4\sin^2 \Theta - 4\lambda_A \theta_B \cos^2 \Theta, \\
A_1 &= -16\lambda_A \lambda_B, & D_1 &= 0, \\
A_0 &= 0, & D_0 &= -16\lambda_A \lambda_B \sin^2 \Theta.
\end{aligned}$$

Членами порядка  $O(\varepsilon^2)$  в коэффициентах пренебрегаем. Характеристическое уравнение принимает вид

$$P(\mu + \varepsilon\eta) = \sum_{j=0}^5 (A_j + \varepsilon D_j)(\mu + \varepsilon\eta)^j = 0.$$

Учитывая, что  $\mu_j$  удовлетворяют (2.2.3), для первого приближения характеристических чисел получаем

$$\eta_j = -\frac{\sum_{k=0}^5 \mu_j^k D_k}{\sum_{k=0}^4 (k+1) \mu_j^k A_{k+1}}.$$

Принимая во внимание выражения для коэффициентов и характеристических чисел нулевого приближения, получаем первое приближение

$$\eta_{1,2} = -\frac{\theta_A \lambda_B (1 + \lambda_A) + \theta_B \cos^2 \Theta \lambda_A (\lambda_B - 1)}{2(\lambda_A \lambda_B + 1)},$$

$$\eta_3 = -\sin^2 \Theta,$$

$$\eta_{4,5} = -\frac{\theta_A (1 - \lambda_B) + \theta_B \cos^2 \Theta (\lambda_A + 1)}{2(\lambda_A \lambda_B + 1)}.$$

В силу свойств тензора инерции  $|\lambda_A| < 1$ , поэтому  $\eta_{4,5} < 0$ . Однако  $\eta_{1,2} < 0$ , только если  $\lambda_B > 0$ ,  $\lambda_A < 0$ . Таким образом, асимптотически устойчиво лишь вращение с удвоенной орбитальной скоростью вокруг оси максимального момента инерции.

### ***Точность стабилизации в окрестности нормали к плоскости орбиты***

Упрощенное дипольное поле позволяет определить качественный режим движения спутника – направление и примерную скорость вращения. Используем более точную модель прямого диполя. Ее основное отличие – неравномерное вращение вектора геомагнитной индукции. Это позволит уточнить направление и скорость вращения спутника вокруг оси максимального момента инерции. Чтобы уточнить ориентацию этой оси, используем метод

Пуанкаре поиска периодических решений [152]. В качестве опорной системы координат выступает  $OP$ , и поле задается выражением (1.2.5).

*Движение на приэкваториальной орбите*

Рассмотрим движение спутника на приэкваториальной орбите. Используем в качестве малого параметра наклонение  $i$ . Ограничиваясь вторым приближением, вектор индукции можно записать в виде

$$\mathbf{B}_p = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + B_0 \begin{pmatrix} -3/2 \sin 2u \\ 1 - 3 \sin^2 u \\ 0 \end{pmatrix} i + B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} i^2.$$

Уравнения движения представим в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + i \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) + i^2 \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), \quad (2.3.1)$$

где  $\mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha, \beta, \gamma)$ . Периодическое решение уравнения (2.3.1) ищем в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + i \mathbf{x}_1 + i^2 \mathbf{x}_2, \quad (2.3.2)$$

причем  $\mathbf{x}_0$  – решение (2.3.1) при  $i = 0$  (периодическое порождающее решение). Проведя рассуждения, аналогичные использованным при анализе движения в упрощенном поле, можно показать, что решение  $\mathbf{x}_0 = (\omega_0 u, 0, 0, 0, 0, \omega_0)$  является асимптотически устойчивым для порождающей системы при любой скорости вращения  $\omega_0$ , а значит, это – единственное периодическое решение порождающей системы. Подставляя разложение (2.3.2) в (2.3.1) и группируя члены при одинаковых степенях  $i$ , получаем

$$i^0 \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0),$$

$$i^1 \quad \dot{\mathbf{x}}_1 = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{x}_1 + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_0),$$

$$i^2 \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{x}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{x}_1^T \left. \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{x}_1 + \left. \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{x}_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_0).$$

Уравнения для определения первого приближения разбиваются на две подсистемы:

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{F} \mathbf{z}_1 + \varepsilon \begin{pmatrix} \theta_A [3/2(\omega_0 - 2) \sin(\omega_0 - 2)u - 1/2 \sin \omega_0 u] \\ \theta_B [3/2(\omega_0 - 2) \cos(\omega_0 - 2)u - 1/2 \cos \omega_0 u] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.3)$$

$$\dot{\omega}_3^{(1)} = 0, \quad \dot{\alpha}^{(1)} = \omega_3^{(1)},$$

где  $\mathbf{z}_1 = (\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)})$ ,  $\varepsilon = kB_0^2 / C\omega_{opb}$ ,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -\varepsilon\theta_A & \omega_0\lambda_A & 0 & -\varepsilon\omega_0\theta_A \\ \omega_0\lambda_B & -\varepsilon\theta_B & \varepsilon\omega_0\theta_B & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \omega_0 \\ 0 & 1 & -\omega_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первое приближение не позволяет определить конкретное значение величины  $\omega_0$ . Для этого необходимо записать уравнения второго приближения

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{F}\mathbf{z}_2 + \mathbf{G}(u)\mathbf{z}_1,$$

$$\dot{\omega}_3^{(2)} = 3\varepsilon(\omega_0 - 1)\cos 2u - 5\omega_0 + 9, \dot{\alpha}^{(2)} = \omega_3^{(2)},$$

где  $\mathbf{G}(u)$  – периодическая матрица. Из всех уравнений для второго приближения интерес представляет только уравнение для  $\omega_3^{(2)}$ . Из него определяется условие существования периодического решения  $\omega_0 = 1.8$ . Скорость закрутки несколько меньше удвоенной орбитальной – результата, полученного в упрощенной дипольной модели.

Возмущение положения равновесия определяется системой (2.3.3). Так как положение равновесия невозмущенной системы асимптотически устойчиво, общее решение однородной системы в (2.3.3) стремится к нулю. Определяющим является частное решение неоднородной системы, которое представимо в виде

$$\mathbf{z}_p = \mathbf{a}_\Omega \cos \omega_0 u + \mathbf{b}_\Omega \sin \omega_0 u + \mathbf{a}_{\Omega-2} \cos(\omega_0 - 2)u + \mathbf{b}_{\Omega-2} \sin(\omega_0 - 2)u. \quad (2.3.4)$$

Векторы  $\mathbf{a}_x$  и  $\mathbf{b}_x$  определяются из систем, полученных подстановкой (2.3.4) в (2.3.3),

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_\Omega \\ \mathbf{b}_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 \mathbf{E}_{4 \times 4} & -\mathbf{F} \\ -\mathbf{F} & -\omega_0 \mathbf{E}_{4 \times 4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_\Omega \\ \mathbf{p}_\Omega \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{\Omega-2} \\ \mathbf{b}_{\Omega-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\omega_0 - 2) \mathbf{E}_{4 \times 4} & -\mathbf{F} \\ -\mathbf{F} & -(\omega_0 - 2) \mathbf{E}_{4 \times 4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{\Omega-2} \\ \mathbf{p}_{\Omega-2} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{q}_\Omega = (0, -1/2\theta_B\varepsilon, 0, 0), \mathbf{p}_\Omega = (-1/2\theta_B\varepsilon, 0, 0, 0),$$

$$\mathbf{q}_{\Omega-2} = -3(\omega_0 - 2)\mathbf{q}_\Omega, \mathbf{p}_{\Omega-2} = -3(\omega_0 - 2)\mathbf{p}_\Omega.$$

После вычислений  $\mathbf{a}_\Omega$  и  $\mathbf{b}_\Omega$  записываются в виде

$$\mathbf{a}_\Omega = (0, 0, 0, -0.5), \mathbf{b}_\Omega = (0, 0, 0.5, 0).$$

Для определения  $\mathbf{q}_{\Omega-2}$  и  $\mathbf{p}_{\Omega-2}$  можно воспользоваться формулой Фробениуса обращения блочной матрицы [153]

$$\begin{pmatrix} \kappa \mathbf{E}_{4 \times 4} & -\mathbf{F} \\ -\mathbf{F} & -\kappa \mathbf{E}_{4 \times 4} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa} (\mathbf{E}_{4 \times 4} - (\mathbf{E}_{4 \times 4} + \kappa^2 \mathbf{F}^{-2})^{-1}) & -(\mathbf{E}_{4 \times 4} + \kappa^2 \mathbf{F}^{-2})^{-1} \mathbf{F}^{-1} \\ -\mathbf{F}^{-1} (\mathbf{E}_{4 \times 4} + \kappa^2 \mathbf{F}^{-2})^{-1} & -\kappa \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{E}_{4 \times 4} + \kappa^2 \mathbf{F}^{-2})^{-1} \mathbf{F}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.3.5)$$

Так как  $\kappa = \omega_0 - 2 \ll 1$ , (2.3.5) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} \kappa \mathbf{E}_{4 \times 4} & -\mathbf{F} \\ -\mathbf{F} & -\kappa \mathbf{E}_{4 \times 4} \end{pmatrix}^{-1} \approx \begin{pmatrix} \kappa^2 \mathbf{F}^{-2} & -\mathbf{F}^{-1} \\ -\mathbf{F}^{-1} & -\kappa \mathbf{F}^{-2} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{z}_1 = (0, 0, 1/2 \sin \omega_0 u, -1/2 \cos \omega_0 u) - 3(\kappa^3 \mathbf{F}^{-2} \mathbf{q}_\Omega - \kappa \mathbf{F}^{-1} \mathbf{p}_\Omega) \cos \kappa u + 3(\kappa \mathbf{F}^{-1} \mathbf{q}_\Omega + \kappa^2 \mathbf{F}^{-2} \mathbf{p}_\Omega) \sin \kappa u.$$

Видно, что в силу малости  $\kappa$  решение для  $\beta^{(1)}$  и  $\gamma^{(1)}$  определяется в основном  $\mathbf{a}_\Omega$  и  $\mathbf{b}_\Omega$ , а именно

$$\beta^{(1)} \approx 1/2 \sin \omega_0 u, \quad \gamma^{(1)} \approx -1/2 \cos \omega_0 u.$$

Отклонение  $\Delta \gamma_{33}$  оси вращения от нормали к плоскости приэкваториальной орбиты задается выражением

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_{33} &= \text{acos} \left[ \cos(1/2 i \sin 1.8u) \cos(-1/2 i \cos 1.8u) \right] = \\ &= 2 \text{asin} \sqrt{\frac{1 - \cos(1/2 i \sin 9/5u) \cos(-1/2 i \cos 9/5u)}{2}} \approx 2 \text{asin} 1/4 i \approx 1/2 i. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Таким образом, ось максимального момента инерции отклоняется от нормали к плоскости орбиты на угол, примерно вдвое меньший наклона орбиты.

### *Движение на приполярной орбите*

Спутники, оснащенные магнитной системой ориентации, редко выводятся на приэкваториальные орбиты в силу ее малой эффективности, установленной, в частности, в предыдущем разделе в выражении (2.1.11) (с учетом выражения для параметра  $p$  (2.1.7)). Большой интерес представляет движение по орбитам с высоким наклоном, в том числе по солнечно-синхронным орбитам, практически значимым и естественным для использования магнитной системы. Рассмотрим движение на приполярной орбите и используем в качестве малого параметра  $\delta = \pi/2 - i$ . Тогда

$$\mathbf{B}_s = B_0 \begin{pmatrix} -3/2 \sin 2u \\ 1 - 3 \sin^2 u \\ 0 \end{pmatrix} + B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta + \frac{1}{2} B_0 \begin{pmatrix} -3/2 \sin 2u \\ 1 - 3 \sin^2 u \\ 0 \end{pmatrix} \delta^2 + \dots$$

При поиске порождающего решения уравнения разделяются. Система, описывающая колебания вне плоскости орбиты, снова имеет устойчивое тривиальное решение  $\beta = \gamma = 0$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . Вращение вокруг оси максимального момента инерции, однако, происходит с переменной скоростью. Уравнение, задающее скорость вращения, имеет вид

$$\dot{\omega}_3 + f_1(u) \omega_3 = f_2(u), \quad (2.3.7)$$

где

$$f_1(u) = \varepsilon(1 + 3 \sin^2 u), \quad f_2(u) = 3\varepsilon(1 + \sin^2 u).$$

Для (2.3.7) можно записать общий вид решения (предполагая  $u(0) = 0$ ),

$$\omega_3 = e^{-F(u)} \left( \omega_3(0) + \int_0^u f_2(x) e^{F(x)} dx \right), \quad (2.3.8)$$

где

$$F(u) = \int_0^u f_1(x) dx = \varepsilon \left( \frac{5}{2} u - \frac{3}{4} \sin 2u \right). \quad (2.3.9)$$

Чтобы вычислить интеграл в (2.3.8), представим его в виде

$$\begin{aligned} g(u) &= \int_0^u f_2(x) e^{F(x)} dx = \varepsilon \int_0^u 2e^{\varepsilon \left( \frac{5}{2} x - \frac{3}{4} \sin 2x \right)} dx + \varepsilon \int_0^u (1 + 3 \sin^2 x) e^{\varepsilon \left( \frac{5}{2} x - \frac{3}{4} \sin 2x \right)} dx = \\ &= e^{\varepsilon \left( \frac{5}{2} u - \frac{3}{4} \sin 2u \right)} + 2\varepsilon \int_0^u e^{\varepsilon \frac{5}{2} x} e^{-\varepsilon \frac{3}{4} \sin 2x} dx. \end{aligned}$$

Тогда

$$\omega_3 = e^{-F(u)} \left( \omega_3(0) + e^{F(u)} + 2\varepsilon \int_0^u e^{\varepsilon \frac{5}{2} x} e^{-\varepsilon \frac{3}{4} \sin 2x} dx \right).$$

Принимая во внимание  $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ , можем ограничить величину угловой скорости выражениями

$$e^{-\varepsilon \left( \frac{5}{2} u - \frac{3}{4} \sin 2u \right)} \omega_3(0) + 1 + \frac{4}{5} e^{-\frac{3}{4} \varepsilon} e^{\frac{3}{4} \varepsilon \sin 2u} \leq \omega_3 \leq e^{-\varepsilon \left( \frac{5}{2} u - \frac{3}{4} \sin 2u \right)} \omega_3(0) + 1 + \frac{4}{5} e^{\frac{3}{4} \varepsilon} e^{\frac{3}{4} \varepsilon \sin 2u}. \quad (2.3.10)$$

Приближенное значение скорости, удовлетворяющее этим ограничениям, можно найти, заметив, что с ростом аргумента широты второе слагаемое в (2.3.9) играет все меньшую роль. Рассматривая задачу на достаточном интервале времени, можно считать, что

$$g(u) = \int_0^u f_2(x) e^{F(x)} dx \approx 3\varepsilon \int_0^u (1 + \sin^2 x) e^{5/2\varepsilon x} dx =$$

$$= 6\varepsilon \left[ \frac{e^{5/2\varepsilon u} \sin u}{25\varepsilon^2 + 16} (5\varepsilon \sin u - 4 \cos u) + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{8}{125\varepsilon^2 + 80} + \frac{1}{5} \right) (e^{5/2\varepsilon u} - 1) \right],$$

что совместно с (2.3.9) и (2.3.8) дает выражение для угловой скорости вращения спутника вокруг оси максимального момента инерции:

$$\omega_3 \approx e^{-\varepsilon \left( \frac{5}{2}u - \frac{3}{4} \sin 2u \right)} \left( \omega_3(0) + 6\varepsilon \left[ \frac{e^{5/2\varepsilon u} \sin u}{25\varepsilon^2 + 16} (5\varepsilon \sin u - 4 \cos u) + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{8}{125\varepsilon^2 + 80} + \frac{1}{5} \right) (e^{5/2\varepsilon u} - 1) \right] \right). \quad (2.3.11)$$

Значение угла  $\alpha$  в порождающем решении можно найти, интегрируя (2.3.11).

Система уравнений первого приближения имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}(u) \mathbf{x}_1 + \mathbf{g}(u),$$

где  $F_{ij} = F_{ij}(\omega_3, f(2u - \alpha), f(4u - 2\alpha), f(2u - 2\alpha), f(2\alpha), f(2u))$ ,  $f$  – тригонометрические функции (синус, косинус), входящие в выражения для компонент  $\mathbf{F}$  линейно. Вообще говоря, эта система не может быть решена. Чтобы найти приближенное решение уравнений первого приближения, обратимся еще раз к методу поиска периодических решений. В качестве малого параметра будем использовать  $\varepsilon$ , то есть характеристику величины управляющего момента. Тогда решение исходного уравнения будет представлено в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \delta(\mathbf{y}_0 + \varepsilon \mathbf{y}_1),$$

$\mathbf{x}_0 = (0, 0, \omega_3(u), \alpha(u), 0, 0)$ , а матрица  $\mathbf{F}$  – в виде  $\mathbf{F}(u) = \mathbf{F}_0 + \varepsilon \mathbf{F}_1(u)$ . Порождающее решение  $\mathbf{y}_0$  и первое приближение  $\mathbf{y}_1$  находятся из уравнений

$$\dot{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{F}_0 \mathbf{z}_0, \quad (2.3.12)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{F}_0 \mathbf{z}_1 + \mathbf{F}_1(u) \mathbf{z}_0 + \mathbf{g}_1(u) \quad (2.3.13)$$

и

$$\dot{\omega}_3^{(0)} = 0, \quad \dot{\alpha}^{(0)} = \omega_3^{(0)}, \quad \dot{\omega}_3^{(1)} = (3/2 \cos 2u - 5/2) \omega_3^{(0)}, \quad \dot{\alpha}^{(1)} = 0,$$

где  $\mathbf{z}_1 = (\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)})$ . Отделившиеся пары уравнений дают  $\omega_3^{(0)} = 0$ ,  $\omega_3^{(1)}, \alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}$  – некоторые постоянные.

При определении матриц и векторов, входящих в (2.3.12)-(2.3.13), необходимо принять во внимание выражение для  $\omega_3(u)$ . Используем (2.3.11) и разложим его до первой степени малого параметра  $\varepsilon$  в предположении большого интервала времени,

$$\omega_3 = 9/5 + 3/5 \varepsilon \sin 2u. \quad (2.3.14)$$

Тогда

$$\mathbf{F}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 9/5 \lambda_A & 0 & 0 \\ 9/5 \lambda_B & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 9/5 \\ 0 & 1 & -9/5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_1(u) = \begin{pmatrix} \theta_A (3/10 \sin 0.2u - 9/10 \sin 1.8u) \\ \theta_B (-3/10 \cos 0.2u - 9/10 \cos 1.8u) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_1(u) = \begin{pmatrix} -\theta_A (5/4 + g_1) & 3/5 \lambda_A \sin 2u + \theta_A g_2 & -9/5 \theta_A g_2 & -\theta_A g_3 \\ 3/5 \lambda_B \sin 2u + \theta_B g_2 & -\theta_B (5/4 - g_1) & \theta_B g_3 & 9/5 \theta_B g_2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/5 \sin 2u \\ 0 & 0 & -3/5 \sin 2u & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = 9/8 \cos 0.4u + 1/8 \cos 3.6u - 3/4 \cos 1.6u - 3/4 \cos 2u,$$

$$g_2 = -3/4 \sin 1.6u - 9/8 \sin 0.4u + 1/8 \sin 3.6u,$$

$$g_3 = 9/4 - 3/20 \cos 2u - 27/20 \cos 1.6u + 81/40 \omega_3 \cos 0.4u + 9/40 \cos 3.6u.$$

Решение порождающего уравнения (2.3.12) имеет вид

$$\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} A' \cos \zeta u + B' \sin \zeta u \\ -A' \zeta \sin \zeta u + B' \zeta \cos \zeta u \\ D' \cos 1.8u + E' \sin 1.8u + B' \chi_2 \cos \zeta u + A' \chi_4 \sin \zeta u \\ -D' \sin 1.8u + E' \cos 1.8u + A' \chi_3 \cos \zeta u + B' \chi_1 \sin \zeta u \end{pmatrix},$$

где  $\zeta = 1.8\sqrt{-\lambda_A \lambda_B}$ ,  $\varsigma = \sqrt{-\lambda_B / \lambda_A}$ ,  $\chi_i = \chi_i(\zeta, \varsigma)$   $A'$ ,  $B'$ ,  $D'$ ,  $E'$  – постоянные. Найдем их из условия существования периодического решения уравнения (2.3.13). Для этого необходимо и достаточно, чтобы вынуждающая сила  $\mathbf{F}_1(u)\mathbf{z}_0 + \mathbf{g}_1(u)$  не имела частот  $\zeta$  и 1.8 (собственные частоты  $\mathbf{F}_0$ ). Поскольку  $\mathbf{F}_1(u)$  и  $\mathbf{g}_1(u)$  содержат лишь рациональные частоты, сразу получаем  $A' = B' = 0$ . Постоянные  $D'$  и  $E'$  находятся из условия отсутствия в  $\mathbf{F}_1(u)\mathbf{z}_0 + \mathbf{g}_1(u)$  частот 1.8, откуда  $E' = 0$ ,  $D' = 4/9$ .

Таким образом, ограничиваясь лишь порождающим решением в системе первого приближения, можем записать решение исходных уравнений

$$\omega_1 = \omega_2 = 0,$$

$$\beta = 4/9(\pi/2 - i) \cos 1.8u, \quad \gamma = -4/9(\pi/2 - i) \sin 1.8u,$$

$\omega_3$  задается одним из выражений (2.3.10), (2.3.11), (2.3.14),  $\alpha$  получается интегрированием

$\omega_3$ . Отклонение оси максимального момента инерции от нормали к плоскости орбиты задается выражением

$$\Delta\gamma_{33} = \text{acos} \left[ \cos \left( \frac{4}{9}(\pi/2 - i) \cos 1.8u \right) \cos \left( -\frac{4}{9}(\pi/2 - i) \sin 1.8u \right) \right].$$

Аналогично (2.3.6) разложение в ряд дает  $\Delta\gamma_{33} \approx 4/9(\pi/2 - i)$ . Отклонение на приполярной орбите несколько меньше такого на приэкваториальной орбите.

### Численное моделирование

Проведем численное моделирование движения спутника с параметрами

- тензор инерции  $\mathbf{J} = (1.4, 1.6, 2.0)$  кг·м<sup>2</sup>;
- наклонение орбиты 75°, высота 750 км;
- начальное положение: углы ориентации 50°, компоненты скорости  $1.1\omega_{orb}$ ;
- коэффициент усиления в управлении  $5 \cdot 10^5$  Н·м·с/Гл<sup>2</sup>·кг·м (соответствует  $\varepsilon \approx 0.11$ ).

Моделирование проводилось методом Рунге-Кутты 4 порядка с постоянным шагом 1 с.

На Рис. 2.2.1 представлен результат моделирования при использовании модели прямого диполя, на Рис. 2.2.2 – при использовании наклонного диполя.

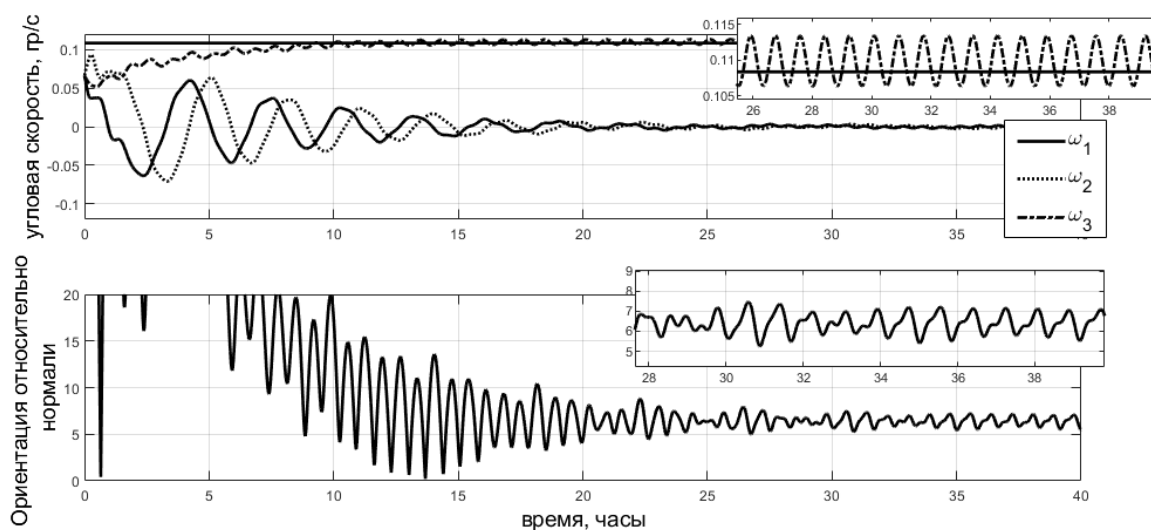


Рис. 2.2.1. Движение на приполярной орбите в поле прямого диполя



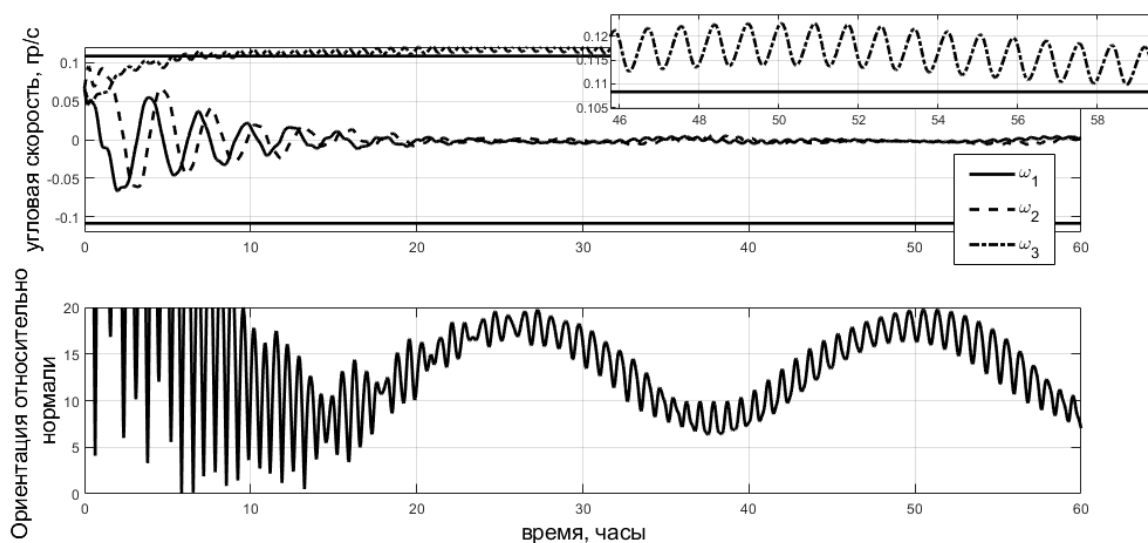
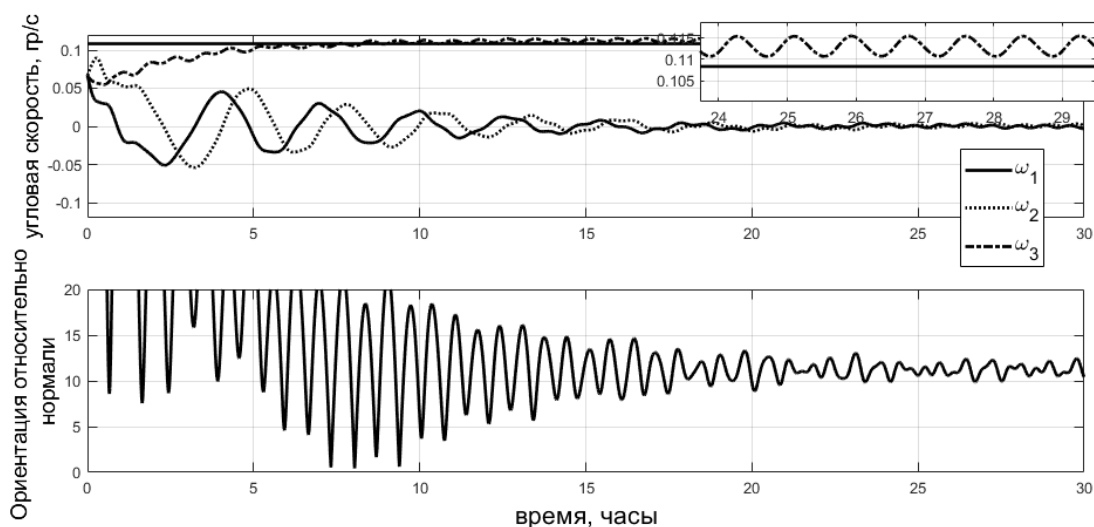


Рис. 2.2.2. Модель наклонного диполя

Рис. 2.2.1 находится в хорошем соответствии с теоретическим результатом – отклонение оси максимального момента инерции от нормали к плоскости орбиты составляет примерно  $5.5-7^\circ$ , тогда как приближенный результат дает  $6.5^\circ$ . Для модели наклонного диполя точность предсказания ориентации ухудшается примерно втрое. Горизонтальная линия на верхних рисунках соответствует значению скорости  $1.8\omega_{orb}$ . Аналогичный результат можно получить для приэкваториальной орбиты. На Рис. 2.2.3 и Рис. 2.2.4 показан результат моделирования для орбиты наклонением  $60^\circ$ , при этом использовалась модель прямого диполя, во втором случае принимался во внимание гравитационный момент.

Рис. 2.2.3. Движение на орбите наклонением  $60^\circ$

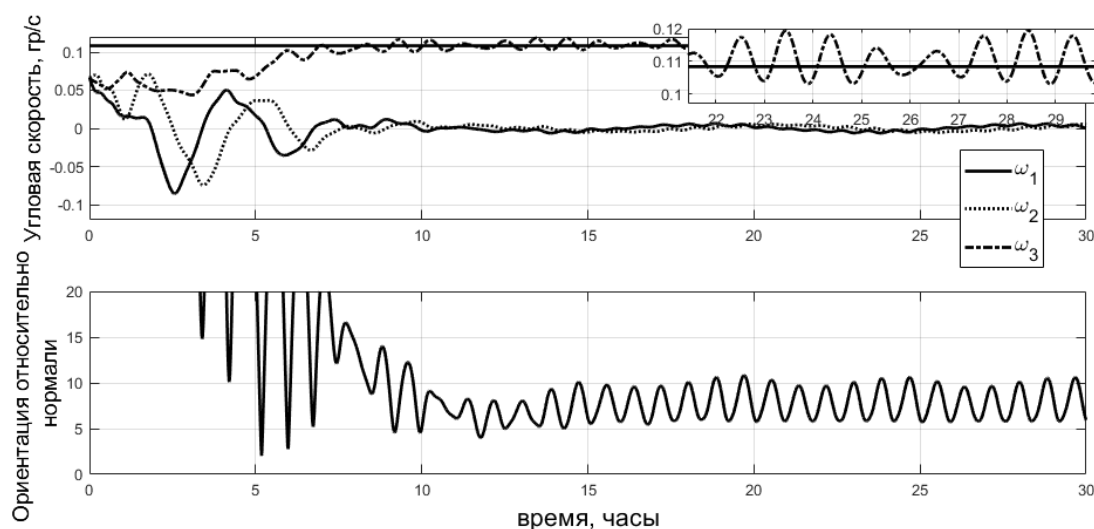


Рис. 2.2.4. Наклонение  $60^\circ$ , действие гравитационного момента

Для орбит с произвольным наклонением, далеким от  $0$  или  $90^\circ$ , точность ориентации оси максимального момента инерции оказывается около  $10$ - $12^\circ$ . При этом действие гравитационного момента, в данном случае восстанавливающего и лишь незначительно уступающего магнитному по величине, улучшает точность ориентации оси максимального момента инерции.

### Заключение

Во второй главе было рассмотрено движение аппарата под управлением алгоритма демпфирования  $-B\dot{\theta}$ . В переходном процессе получено решение эволюционных уравнений движения в квадратурах и явные выражения для сферически-симметричного спутника. Установлена экспоненциальная зависимость времени переходных процессов от наклонения орбиты. Исследовано влияние начальной ориентации вектора кинетического момента на эффективность гашения скорости. В установившемся режиме выявлено, что аппарат выходит на вращение вокруг нормали к плоскости орбиты осью максимального момента инерции со скоростью, близкой к  $9/5$  орбитальной.

### Глава 3. Одноосная и трехосная стабилизация аппарата с ротором

Использование ротора – маховика с постоянной скоростью вращения – усиливает возможности магнитной системы ориентации дополнительными динамическими свойствами. В диссертационной работе решается задача розыска аналогов характеристических показателей для спутника с двойным вращением и активным магнитным демпфированием в режиме установления оси вращения маховика по нормали к плоскости орбиты. При этом рассматриваются три разных алгоритма: простое демпфирование (1), «весовое» демпфирование, в котором в качестве весовой матрицы коэффициентов усиления используется тензор инерции, и  $-V\dot{\omega}$ . Далее рассматривается установившееся движение, когда ось установки маховика практически совпадает с нормалью к плоскости орбиты. Предложено управление для поворота КА в плоскости орбиты и исследованы возникающие при этом периодические движения. Помимо классической связки магнитной системы с тангажным маховиком, удерживающим направление нормали к плоскости орбиты, исследуется новая задача поддержания быстрого вращения КА вокруг касательной к орбите. При этом ротор используется для компенсации большого кинетического момента корпуса аппарата. Предложено оригинальное магнитное управление и проведено исследование движения КА.

#### 3.1. Переходные процессы при гашении угловой скорости аппарата, оснащенного тангажным маховиком

Перейдем к исследованию переходных процессов с целью выяснить быстродействие системы ориентации. При этом будем предполагать, что для спутника, движущегося только под действием гравитационного момента, выполнены условия [154]

$$A - C > 0, \quad B - A + h/\omega_{orb} > 0, \quad 4(B - C) + h/\omega_{orb} > 0, \quad (3.1.1)$$

обеспечивающие устойчивость орбитальной ориентации, при которой одноименные оси орбитальной и связанной систем совпадают. В случае установки массивного и/или быстро вращающегося тангажного маховика второе и третье условия выполняются независимо от величин моментов инерции. Фактически, кинетический момент маховика обеспечивает совпадение оси его установки (в рассматриваемом случае оси  $Ox_2$ ) с нормалью к плоскости орбиты (ось  $Ox_2$ ). Первое условие означает совпадение одноименных осей в плоскости орбиты. На движение в плоскости орбиты тангажный маховик не оказывает влияния, устойчивость обеспечивается действием гравитационного момента.

### *Движение под действием алгоритма демпфирования*

При исследовании переходных процессов нас будет особенно интересовать время, затрачиваемое на приведение оси вращения маховика к нормали к плоскости орбиты, после чего с помощью гравитационного или управляющего магнитного моментов можно обеспечить требуемую ориентацию в плоскости. В качестве меры быстродействия системы ориентации будем использовать характеристические показатели линеаризованной системы уравнений движения (1.3.3)-(1.3.6), имеющей безразмерный вид

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma} + \dot{\beta} - (\lambda_A + h_A)(\dot{\beta} - \gamma) &= \frac{1}{A\omega_{орб}^2} M_1, \\ \ddot{\alpha} &= \frac{1}{B\omega_{орб}^2} M_2, \\ \ddot{\beta} - \dot{\gamma} + (\lambda_C + h_C)(\dot{\gamma} + \beta) &= \frac{1}{C\omega_{орб}^2} M_3,\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

где  $\lambda_A = (B - C)/A$ ,  $\lambda_C = (B - A)/C$ ,  $h_A = h/A\omega_{орб}$ ,  $h_C = h/C\omega_{орб}$ . Точкой обозначено дифференцирование по аргументу широты. Далее необходимо принять во внимание гравитационный момент

$$\mathbf{M}_{gp} = 3\omega_{орб}^2 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{J} \mathbf{e}_3 = 3\omega_{орб}^2 (-(B - C)\gamma, (A - C)\alpha, 0)$$

и управляющий магнитный момент. В переходных процессах будем использовать алгоритм гашения угловой скорости

$$\mathbf{M}_{упр} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = k(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = k\omega_{орб} B_0^2 \begin{pmatrix} \dot{\beta} B_1 B_3 - \dot{\gamma} (B_2^2 + B_3^2) + \dot{\alpha} B_1 B_2 \\ \dot{\gamma} B_1 B_2 - \dot{\alpha} (B_1^2 + B_3^2) + \dot{\beta} B_2 B_3 \\ \dot{\alpha} B_2 B_3 - \dot{\beta} (B_2^2 + B_1^2) + \dot{\gamma} B_1 B_3 \end{pmatrix}.\tag{3.1.3}$$

Линеаризованные уравнения движения окончательно имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma} + \dot{\beta} - (\lambda_A + h_A)(\dot{\beta} - \gamma) + 3\lambda_A \gamma &= \varepsilon \theta_A (\dot{\beta} B_1 B_3 - \dot{\gamma} (B_2^2 + B_3^2) + \dot{\alpha} B_1 B_2), \\ \ddot{\alpha} &= \varepsilon \frac{C}{B} (\dot{\gamma} B_1 B_2 - \dot{\alpha} (B_1^2 + B_3^2) + \dot{\beta} B_2 B_3), \\ \ddot{\beta} - \dot{\gamma} + (\lambda_C + h_C)(\dot{\gamma} + \beta) &= \varepsilon (\dot{\alpha} B_2 B_3 - \dot{\beta} (B_2^2 + B_1^2) + \dot{\gamma} B_1 B_3),\end{aligned}\tag{3.1.4}$$

где  $\theta_A = C/A$ ,  $\varepsilon = kB_0^2/C\omega_{орб}$ .

Как было замечено ранее, особый интерес в переходных процессах представляет приведение оси вращения маховика к нормали к плоскости орбиты, то есть поведение углов  $\beta$  и  $\gamma$ . Поэтому логично упростить систему (3.1.4), отделив движение в плоскости орбиты.

Для этого в первом и третьем уравнениях системы (3.1.4) необходимо избавиться от слагаемых, содержащих  $\dot{\alpha}$ . Этого можно добиться, положив  $B_2 = 0$ , что имеет место при  $i = 90^\circ$ . Таким образом, далее будем рассматривать спутник на полярной орбите. При этом рассмотрение приполярной орбиты не приведет к изменению получаемых результатов. Фактически это будет означать введение дополнительного малого параметра и дополнительных слагаемых более высокого порядка малости в (3.1.4), не влияющих на характер получаемого решения. За счет этого существенно расширяется класс орбит, для которых верны последующие рассуждения. В частности, оказываются затронуты практически важные солнечно-синхронные орбиты. Уравнения движения аппарата вне плоскости орбиты принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + \varepsilon \cos^2 u \dot{\beta} + (2\varepsilon \sin u \cos u - 1 + \xi_C) \dot{\gamma} + \xi_C \beta &= 0, \\ \ddot{\gamma} + (2\varepsilon \theta_A \sin u \cos u + 1 - \xi_A) \dot{\beta} + 4\varepsilon \theta_A \sin^2 u \dot{\gamma} + (3\lambda_A + \xi_A) \gamma &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

где  $\xi_A = h_A + \lambda_A$ ,  $\xi_C = h_C + \lambda_C$ . Введем обозначение  $\mathbf{x} = (\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma)$ . Тогда систему (3.1.5)

можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{A}_1(u) \mathbf{x}, \quad (3.1.6)$$

где

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 - \xi_C & -\xi_C & 0 \\ \xi_A - 1 & 0 & 0 & -3\lambda_A - \xi_A \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -\cos^2 u & -2 \sin u \cos u & 0 & 0 \\ -2\theta_A \sin u \cos u & -4\theta_A \sin^2 u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_0,$$

соответствующую движению спутника, оснащенного тангажным маховиком в гравитационном поле, без учета действия демпфирующего управляющего момента. Ее характеристические показатели  $\lambda_i$  определяются из уравнения

$$\lambda^4 + (3\lambda_A + 1 + \xi_A \xi_C) \lambda^2 + (3\lambda_A + \xi_A) \xi_C = 0 \quad (3.1.7)$$

и равны

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm i \sqrt{\frac{1}{2} \left( 3\lambda_A + 1 + \xi_A \xi_C + \sqrt{(3\lambda_A + 1 + \xi_A \xi_C)^2 + 12\lambda_A \xi_C (\xi_A - 1)} \right)}, \\ \lambda_{3,4} &= \pm i \sqrt{\frac{1}{2} \left( -3\lambda_A - 1 - \xi_A \xi_C + \sqrt{(3\lambda_A + 1 + \xi_A \xi_C)^2 + 12\lambda_A \xi_C (\xi_A - 1)} \right)}, \end{aligned}$$

где  $i$  – мнимая единица. Собственные векторы, соответствующие числам  $\lambda_k$ , суть

$$\Phi_k = A_k \begin{pmatrix} \lambda_k & \frac{\xi_C + \lambda_k^2}{1 - \xi_C} & 1 & \frac{\xi_C + \lambda_k^2}{\lambda_k(1 - \xi_C)} \end{pmatrix},$$

где  $A_k$  – произвольные постоянные. Запишем решение системы (3.1.5) при  $\varepsilon = 0$  в виде

$$\begin{aligned} \beta_0 &= A_1 \exp(\lambda_1 u) + A_2 \exp(-\lambda_1 u) + A_3 \exp(\lambda_3 u) + A_4 \exp(-\lambda_3 u), \\ \gamma_0 &= D_1 \exp(\lambda_1 u) + D_2 \exp(-\lambda_1 u) + D_3 \exp(\lambda_3 u) + D_4 \exp(-\lambda_3 u), \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

где  $D_j = \zeta A_j$ ,  $\zeta = (\xi_C + \lambda_k^2) / \{\lambda_k(1 - \xi_C)\}$ . Чтобы уточнить (3.1.8) с учетом действия демпфирующего момента, представим решение уравнения (3.1.6) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{k=1}^4 \left( \Phi_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \Psi_{kj}(u) + O(\varepsilon^{n+1}) \right) \exp \left( \lambda_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \mu_{kj} + O(\varepsilon^{n+1}) \right) u = \\ &= \sum_{k=1}^4 \left( \Phi_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \Psi_{kj}(u) \right) \exp \left( \lambda_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \mu_{kj} \right) u + O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Подставляя это выражение в (3.1.6) и группируя члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0 & \quad \dot{\Phi}_k + (\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0) \Phi_k = 0, \\ \varepsilon = 1 & \quad \dot{\Psi}_{k1} + (\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0) \Psi_{k1} = -\mu_{k1} \Phi_k + \mathbf{A}_1 \Phi_k, \\ \varepsilon = 2 & \quad \dot{\Psi}_{k2} + (\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0) \Psi_{k2} = -\mu_{k1} \Psi_{k1} - \mu_{k2} \Phi_k + \mathbf{A}_1 \Psi_{k1}, \\ \varepsilon = j & \quad \dot{\Psi}_{kj} + (\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0) \Psi_{kj} = \mathbf{f}_j(u, \mu_{k1}, \dots, \mu_{kj-1}, \Phi_k, \Psi_{k1}, \dots, \Psi_{kj-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, для определения очередного приближения  $\Psi_{kj}$  ( $\Phi_k + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \Psi_{kj}(u)$  уже не является собственным вектором, так как матрица  $\mathbf{A}_1$  (зависит от времени) необходимо решать неоднородные уравнения, которые, вообще говоря, могут оказаться сложнее исходных уравнений движения. Характеристические показатели Ляпунова соответствующего приближения находятся из условия периодичности функций  $\Psi_{kj}(u) = \Psi_{kj}(u + 2\pi)$ . Зачастую можно утверждать [135], что такие решения найти можно, а ряд (3.1.9) сходится. Для этого достаточно, чтобы ни одна из разностей  $\lambda_{kj} - \lambda_{kl}$  не была равна  $it$  при  $j \neq l$ , где  $t$  – целое число. Эти разности являются собственными числами матрицы  $(\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0)$  однородной части уравнений для определения  $\Psi_{kj}$ . Фактически это означает, что общее решение однородных уравнений имеет период, отличный от  $2\pi$ , и

возникает необходимость определения частного решения таким образом, чтобы получить  $\Psi_{kj}$  требуемой периодичности. В рассматриваемом случае разности характеристических чисел нулевого приближения удовлетворяют представленному условию, что позволяет перейти к поиску характеристических показателей системы (3.1.6) в первом приближении. Для этого обратимся к системе (3.1.5) и представим ее решение, соответствующее  $k$ -му собственному числу, в виде

$$\beta = (A_k + \varepsilon \tau_k(u)) \exp(\lambda_k + \varepsilon \mu_k) u,$$

$$\gamma = (D_k + \varepsilon \vartheta_k(u)) \exp(\lambda_k + \varepsilon \mu_k) u.$$

Подставляя это выражение в систему (3.1.5), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon \ddot{\tau}_k + (A_k + \varepsilon \tau_k)(\lambda_k + \varepsilon \mu_k)^2 + \varepsilon \cos^2 u \left[ \varepsilon \dot{\tau}_k + (A_k + \varepsilon \tau_k)(\lambda_k + \varepsilon \mu_k) \right] + \\ + (2\varepsilon \sin u \cos u - 1 + \xi_C) \left[ \varepsilon \dot{\vartheta}_k + (D_k + \varepsilon \vartheta_k)(\lambda_k + \varepsilon \mu_k) \right] + \xi_C (A_k + \varepsilon \tau_k) = 0, \\ \varepsilon \ddot{\vartheta}_k + (D_k + \varepsilon \vartheta_k)(\lambda_k + \varepsilon \mu_k)^2 + (2\varepsilon \theta_A \sin u \cos u + 1 - \xi_A) \left[ \varepsilon \dot{\tau}_k + (A_k + \varepsilon \tau_k)(\lambda_k + \varepsilon \mu_k) \right] + \\ + 4\varepsilon \theta_A \sin^2 u \left[ \varepsilon \dot{\vartheta}_k + (D_k + \varepsilon \vartheta_k)(\lambda_k + \varepsilon \mu_k) \right] + (3\lambda_A + \xi_A)(D_k + \varepsilon \vartheta_k) = 0. \end{aligned}$$

Сгруппируем члены при  $\varepsilon^0$ :

$$\begin{aligned} (\lambda_k^2 + \xi_C) A_k + (\xi_C - 1) \lambda_k D_k = 0, \\ (1 - \xi_A) \lambda_k A_k + (\lambda_k^2 + 3\lambda_A + \xi_A) D_k = 0. \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Определитель системы (3.1.10) совпадает с характеристическим уравнением (3.1.7) и потому нулевой. Сгруппируем теперь члены при  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\tau}_k + 2A_k \lambda_k \mu_k + \lambda_k^2 \tau_k + \cos^2 u A_k \lambda_k + 2 \sin u \cos u D_k \lambda_k + \\ + (\xi_C - 1) D_k \lambda_k + (\xi_C - 1) \lambda_k \vartheta_k + \xi_C \tau_k = 0, \\ \ddot{\vartheta}_k + 2D_k \lambda_k \mu_k + \lambda_k^2 \vartheta_k + 2\theta_A \sin u \cos u A_k \lambda_k + (1 - \xi_A) \dot{\tau}_k + \\ + (1 - \xi_A) A_k \lambda_k + (1 - \xi_A) \lambda_k \tau_k + 4\theta_A \sin^2 u D_k \lambda_k + (3\lambda_A + \xi_A) \vartheta_k = 0. \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Запишем эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} F_1 - f_1 + C_1 \mu_k = 0, \\ F_2 - f_2 + C_2 \mu_k = 0, \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

где

$$\begin{aligned} F_1 = \ddot{\tau}_k + (\xi_C - 1) \dot{\vartheta}_k + (\xi_C - 1) \lambda_k \vartheta_k + (\xi_C + \lambda_k^2) \tau_k, \\ F_2 = \ddot{\vartheta}_k + (1 - \xi_A) \dot{\tau}_k + (1 - \xi_A) \lambda_k \tau_k + (3\lambda_A + \xi_A + \lambda_k^2) \vartheta_k, \end{aligned}$$

$$f_1(u) = -\cos^2 u A_k \lambda_k - 2 \sin u \cos u D_k \lambda_k,$$

$$f_2(u) = -4\theta_A \sin^2 u D_k \lambda_k - 2\theta_A \sin u \cos u A_k \lambda_k,$$

$$C_1 = 2A_k \lambda_k + (\xi_C - 1)D_k,$$

$$C_2 = 2D_k \lambda_k + (1 - \xi_A)A_k.$$

Умножим теперь первое уравнение (3.1.12) на  $\lambda_k^2 + \xi_C$ , второе на  $-(\xi_C - 1)\lambda_k$  и сложим, затем первое на  $1 - \xi_A$ , второе на  $-(\lambda_k^2 + 3\lambda_A + \xi_A)$  и сложим. Получим систему

$$\begin{aligned} (\lambda_k^2 + \xi_C)(F_1 - f_1 + C_1\mu_k) - (\xi_C - 1)\lambda_k(F_2 - f_2 + C_2\mu_k) &= 0, \\ (1 - \xi_A)\lambda_k(F_1 - f_1 + C_1\mu_k) - (\lambda_k^2 + 3\lambda_A + \xi_A)(F_2 - f_2 + C_2\mu_k) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Определитель этой системы, совпадающий с определителем (3.1.10), нулевой. Система (3.1.13) имеет отличное от нуля решение. В частности, при любом значении  $F_2 - f_2 + C_2\mu_k$  можно найти  $F_1 - f_1 + C_1\mu_k$  такое, что выполняется

$$(\lambda_k^2 + \xi_C)(F_1 - f_1 + C_1\mu_k) - (\xi_C - 1)\lambda_k(F_2 - f_2 + C_2\mu_k) = 0. \quad (3.1.14)$$

Используем последнее выражение, чтобы найти первое приближение характеристического показателя  $\mu_k$ . При этом первое приближение соответствующего ему собственного вектора нас не интересует. Имеют значение его свойства – величины  $\tau_k$  и  $\mathcal{G}_k$  и их производные периодичны, что обеспечивается подбором постоянных интегрирования уравнения (3.1.11) и  $\mu_k$ . Проинтегрируем соотношение (3.1.14) от 0 до  $2\pi$ , принимая во

внимание периодичность  $\tau_k$  и  $\mathcal{G}_k$  и их производных, откуда  $\int_0^{2\pi} F_j(u) du = 0$ ,

$$(\lambda_k^2 + \xi_C)(-\bar{f}_1 + 2\pi C_1\mu_k) - (\xi_C - 1)\lambda_k(-\bar{f}_2 + 2\pi C_2\mu_k) = 0,$$

где

$$\bar{f}_1 = \int_0^{2\pi} f_1(u) du = \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{2} A_k \lambda_k (1 + \cos 2u) - D_k \lambda_k \sin 2u \right] du = -\pi A_k \lambda_k,$$

$$\bar{f}_2 = \int_0^{2\pi} f_2(u) du = \int_0^{2\pi} \left[ 2D_k \lambda_k (-1 + \cos 2u) - A_k \lambda_k \sin 2u \right] \theta_A du = -4\pi \theta_A \zeta A_k \lambda_k.$$

Это позволяет записать первое приближение  $k$ -го характеристического показателя

$$\mu_k = \frac{1}{2} \frac{4\theta_A \zeta \lambda_k^2 (\xi_C - 1) - \lambda_k (\lambda_k^2 + \xi_C)}{(\lambda_k^2 + \xi_C) [2\lambda_k + \zeta (\xi_C - 1)] - \lambda_k (\xi_C - 1) [2\zeta \lambda_k + (1 - \xi_A)]}. \quad (3.1.15)$$



Наибольший интерес с точки зрения переходных процессов представляет вещественная часть  $\mu_k$ , характеризующая их скорость. Обозначим  $\lambda_k = i\lambda_{k(re)}$  и  $\zeta = \frac{\xi_C - \lambda_{k(re)}^2}{\lambda_{k(re)}(\xi_C - 1)}i = \zeta_{re}i$ .

Тогда (3.1.15) можно записать в виде

$$\mu_k = \frac{1}{2} \frac{4\theta_A \zeta_{re} \lambda_{k(re)}^2 (1 - \xi_C) + \lambda_{k(re)} (\lambda_{k(re)}^2 - \xi_C)}{(\xi_C - \lambda_{k(re)}^2) [2\lambda_{k(re)} + \zeta_{re} (\xi_C - 1)] + \lambda_{k(re)} (\xi_C - 1) [2\zeta_{re} \lambda_{k(re)} + (\xi_A - 1)]}.$$

При этом  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $\mu_3 = \mu_4$ . Окончательно получаем аналоги характеристических показателей (3.1.5) в первом приближении

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i\lambda_{1(re)} + \frac{1}{2} \varepsilon (1 + 4\zeta) \frac{\lambda_{1(re)}^2 (\lambda_{1(re)}^2 - \xi_C)}{-3\lambda_{1(re)}^4 + [2\xi_C + (\xi_A - 1)(\xi_C - 1)] \lambda_{1(re)}^2 + \xi_C^2}, \\ \lambda_2 &= -i\lambda_{1(re)} + \frac{1}{2} \varepsilon (1 + 4\zeta) \frac{\lambda_{1(re)}^2 (\lambda_{1(re)}^2 - \xi_C)}{-3\lambda_{1(re)}^4 + [2\xi_C + (\xi_A - 1)(\xi_C - 1)] \lambda_{1(re)}^2 + \xi_C^2}, \\ \lambda_3 &= i\lambda_{3(re)} + \frac{1}{2} \varepsilon (1 + 4\zeta) \frac{\lambda_{3(re)}^2 (\lambda_{3(re)}^2 - \xi_C)}{-3\lambda_{3(re)}^4 + [2\xi_C + (\xi_A - 1)(\xi_C - 1)] \lambda_{3(re)}^2 + \xi_C^2}, \\ \lambda_4 &= -i\lambda_{3(re)} + \frac{1}{2} \varepsilon (1 + 4\zeta) \frac{\lambda_{3(re)}^2 (\lambda_{3(re)}^2 - \xi_C)}{-3\lambda_{3(re)}^4 + [2\xi_C + (\xi_A - 1)(\xi_C - 1)] \lambda_{3(re)}^2 + \xi_C^2}, \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{1(re)} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( 3\lambda_A + 1 + \xi_A \xi_C + \sqrt{(3\lambda_A + 1 + \xi_A \xi_C)^2 + 12\lambda_A \xi_C (\xi_A - 1)} \right)}, \\ \lambda_{3(re)} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( -3\lambda_A - 1 - \xi_A \xi_C + \sqrt{(3\lambda_A + 1 + \xi_A \xi_C)^2 + 12\lambda_A \xi_C (\xi_A - 1)} \right)}. \end{aligned}$$

Для определения степени устойчивости (ближайшая к вещественной оси отрицательная часть аналогов характеристических показателей) системы (3.1.5) в первом приближении необходимо сравнить  $-\varepsilon\mu_1$  и  $-\varepsilon\mu_3$ , соотношение между которыми зависит от параметров спутника и управления. Рассмотрим в качестве примера спутник с тензором инерции  $\mathbf{J} = \text{diag}(1.5, 1.8, 1.1)$  кг·м<sup>2</sup> на орбите высотой 1000 км и коэффициентом усиления в управлении  $k = 5 \cdot 10^5$  Н·м·с/Тл<sup>2</sup> ( $\varepsilon \approx 0.18$ ). На Рис. 3.1.1 представлена зависимость степени устойчивости (в данном случае  $-\varepsilon\mu_3$ ) от величины кинетического момента тангажного маховика.

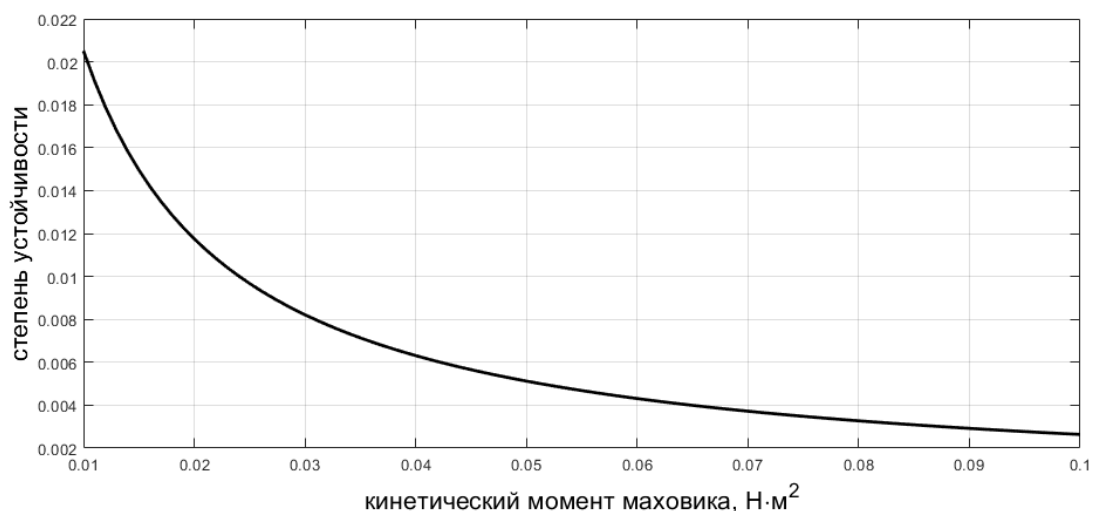


Рис. 3.1.1. Степень устойчивости в зависимости от кинетического момента маховика

Уменьшение степени устойчивости означает увеличение времени, затрачиваемого на поворот маховика при возрастании его кинетического момента. Так, при величине кинетического момента 0.01 Н·м степень устойчивости равна 0.02. Численное моделирование, проведенное с теми же параметрами, показывает падение угла между осями  $Ox_1$  и  $Ox_2$  с  $9.2^\circ$  до  $1.1^\circ$  за  $10^5$  секунд, при этом степень устойчивости указывает на конечное значение  $0.8^\circ$ . Для тангажного маховика с кинетическим моментом 0.05 Н·м степень устойчивости равна 0.005. В этом случае конечный угол между одноименными осями составляет  $5.6^\circ$  при проведении моделирования и  $5.8^\circ$  при использовании примерных значений степени устойчивости. Приближенный результат (3.1.16) представляется полезным и достаточно точным при оценке времени переходных процессов.

#### ***Использование тензора инерции как «весовой» матрицы для коэффициентов усиления демпфирования***

В случае существенной разницы между моментами инерции КА может возникнуть необходимость выдачи принципиально разных управляющих воздействий по разным каналам управления. Причем масштабировать величины компонент управляющего момента логично на величины соответствующих моментов инерции. Такой подход, среди прочего, возникает при построении скользящего управления [155] для КА, управляемого магнитной системой в орбитальной системе координат [114],

$$\mathbf{m} = k'(\mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{V} . \quad (3.1.17)$$

Заметим сразу, что дальнейшая реализация управления с помощью магнитной системы «перемешивает» масштабированные управляющие воздействия между каналами управления.

Исходно управление строится в виде  $\mathbf{M}' = -k''\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ , и выражение (3.1.17) получается после стандартной процедуры проекции требуемого управляющего момента на плоскость, перпендикулярную вектору геомагнитной индукции согласно  $\mathbf{M} = \mathbf{B} \times (\mathbf{M}' \times \mathbf{B}) / |\mathbf{B}|^2$ . Из-за возникающего двойного векторного произведения неочевидно, что задуманное масштабирование управляющего момента окажет ожидаемое влияние на процесс демпфирования. Проведем сравнение простого магнитного демпфирования (3.1.3) и весового демпфирования (3.1.17).

При сравнении управлений необходимо провести некоторое подравнивание коэффициентов усиления. В управлении (3.1.17) значения дипольных моментов будут принципиально различаться, если использовать то же значение коэффициента усиления, что и в (3.1.3). Отношение между величинами моментов будет примерно задаваться моментами инерции. Чтобы привести два подхода к управлению к схожим величинам управляющих воздействий, необходимо провести масштабирование коэффициента усиления  $k'$ , связав его с коэффициентом усиления  $k$ . Рассмотрим несколько вариантов. В случае  $k' = k / B$ , причем  $B$  – максимальный момент инерции, в управлении (3.1.17) будет наблюдаться заведомо меньший дипольный момент, нежели в (2.1.3), при одинаковой величине коэффициента усиления  $k$ . Более точным будет использование среднего масштабирования  $k' = 3k / (A + B + C)$ . Наконец, можно проводить масштабирование на величину дипольного момента катушек на каждом шаге управления. В этом случае можно добиться одинаковой величины управляющего воздействия и наиболее точно сравнить два подхода к управлению. Однако, в этом случае нет возможности получить конкретные выражения для поправок к характеристическим показателям, как это было сделано в предыдущем разделе. Масштабирование на текущую величину дипольного момента будет применяться в численном моделировании. Приведем полный список рассматриваемых случаев:

1. Демпфирование (2.1.3).
2. Весовое демпфирование (3.1.17) с коэффициентом усиления  $k' = k / B$ .
3. Весовое демпфирование (3.1.17) с осредненным масштабированием коэффициента усиления  $k' = 3k / (A + B + C)$ .
4. Весовое демпфирование (3.1.17) с масштабированием величины момента по его величине в простом демпфировании.

Используем вариант 2 при поиске поправок к характеристическим показателям. Линеаризованные уравнения на полярной орбите, аналогичные уравнениям (3.1.5), имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + \varepsilon\theta_B \cos^2 u \dot{\beta} + (2\varepsilon\mu_A \sin u \cos u - 1 + \xi_C) \dot{\gamma} + \xi_C \beta &= 0, \\ \ddot{\gamma} + (2\varepsilon\theta_A \theta_B \sin u \cos u + 1 - \xi_A) \dot{\beta} + 4\varepsilon\theta_A \mu_A \sin^2 u \dot{\gamma} + (3\lambda_A + \xi_A) \gamma &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

где  $\mu_A = A/B$ .

Эти уравнения аналогичны уравнениям (3.1.5) и исследуются так же. Опуская соответствующие выкладки, запишем поправки к характеристическим показателям,

$$\mu_k = \frac{1}{2} \frac{4\theta_A \zeta \lambda_k^2 (\xi_C - 1) \mu_A - \lambda_k (\lambda_k^2 + \xi_C) \theta_B}{(\lambda_k^2 + \xi_C) [2\lambda_k + \zeta (\xi_C - 1)] - \lambda_k (\xi_C - 1) [2\zeta \lambda_k + (1 - \xi_A)]}. \quad (3.1.19)$$

Эти поправки также оказываются действительными и непосредственно показывают скорость протекания переходного процесса. Соотношения (3.1.15) и (3.1.19) используются для сравнения стратегий управления 1 и 2. Для сравнения с вариантом 3 следует в (3.1.18) и (3.1.19) заменить  $\mu_A \rightarrow 3A/(A+B+C)$  и  $\theta_B \rightarrow 3C/(A+B+C)$ . При сравнении разных подходов к управлению будем считать, что момент инерции  $C$  остается неизменным, а моменты инерции  $A$  и  $B$  увеличиваются на  $\Delta J$ . То есть, КА становится более вытянутым, что и соответствует случаю, когда весовое демпфирование может показать повышение быстродействия по сравнению с обычным демпфированием.

На Рис. 3.1.2 приведена степень устойчивости  $-\varepsilon\mu_3$  согласно (3.1.19).

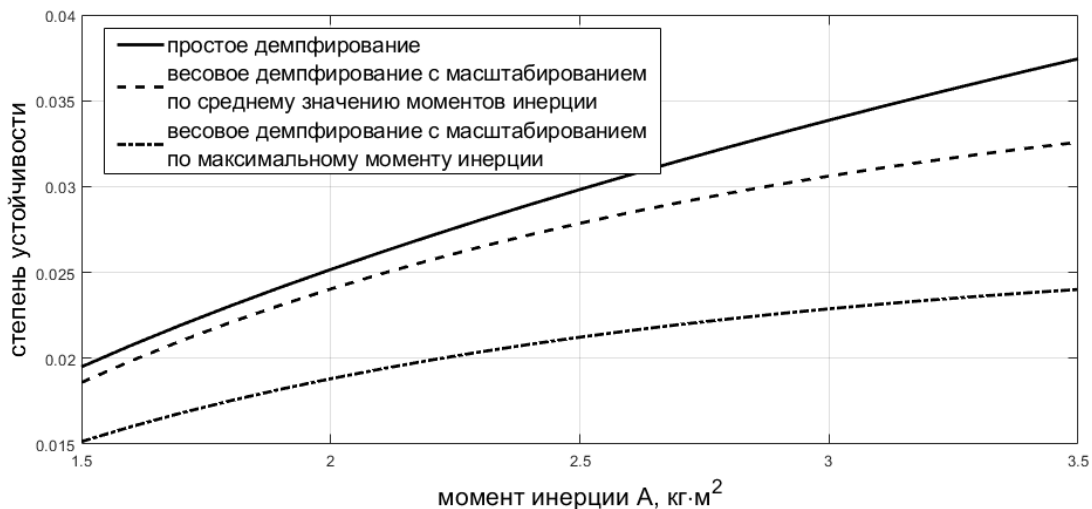


Рис. 3.1.2. Степень устойчивости при разных алгоритмах демпфирования

КА имеет «базовый» тензор инерции  $\mathbf{J} = \text{diag}(1.5, 1.8, 1.1)$  кг·м<sup>2</sup>, второй и третий моменты инерции которого увеличиваются, высота орбиты 1000 км, коэффициент усиления  $k = 5 \cdot 10^5$  Н·м·с/Тл<sup>2</sup> ( $\varepsilon \approx 0.18$ ); кинетический момент маховика 0.01 Н·м. Как и следовало ожидать, схема 2 с масштабированием коэффициента усиления на максимальный момент инерции дает наихудший результат из-за меньшего управляющего момента. Однако и вариант 3 оказывается хуже простого магнитного демпфирования.

### Численное моделирование переходного процесса

Численное моделирование проводится для проверки полученных результатов и для включения в сравнение подхода к управлению 4. На Рис. 3.1.3 и 3.1.4 показано изменение угла между осями  $Ox_2$  и  $Ox_2$  с течением времени для КА с примерно одинаковыми моментами инерции и для существенно вытянутого аппарата.

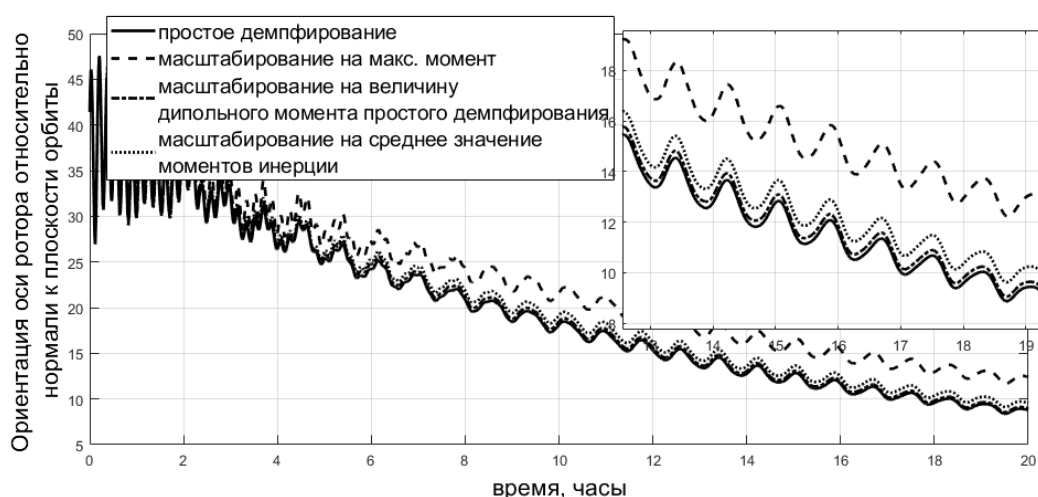


Рис. 3.1.3. Движение КА с примерно одинаковыми моментами инерции

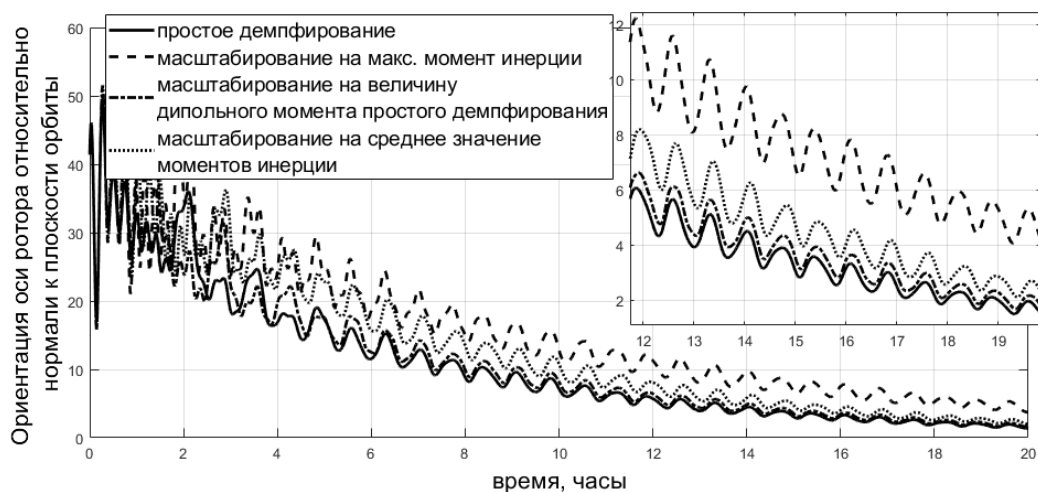


Рис. 3.1.4. Движение вытянутого КА

На Рис. 3.1.3 разница между обычным демпфированием и весовым демпфированием с масштабированием по средней величине моментов инерции практически незаметна. Как и следовало ожидать, для КА с примерно равными моментами инерции эти два подхода практически идентичны. На Рис. 3.1.4 разница между подходами немного больше, хотя также не принципиальна. Обычное демпфирование оказывается более эффективным, что согласуется с полученными теоретическими результатами на Рис. 3.1.2.

На Рис. 3.1.5 и 3.1.6 приведены результаты моделирования с коэффициентом усиления, увеличенным в десять раз. В этом случае результаты, задаваемые формулами (3.1.15) и (3.1.19), использовать нельзя, так как  $\varepsilon$  более не является малым параметром.

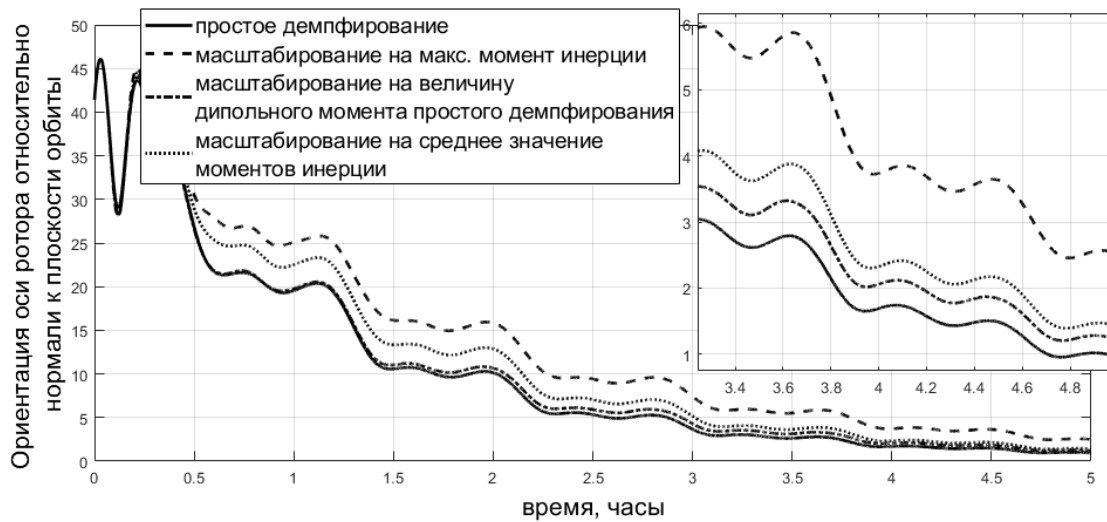


Рис. 3.1.5. Движение КА с примерно одинаковыми моментами инерции

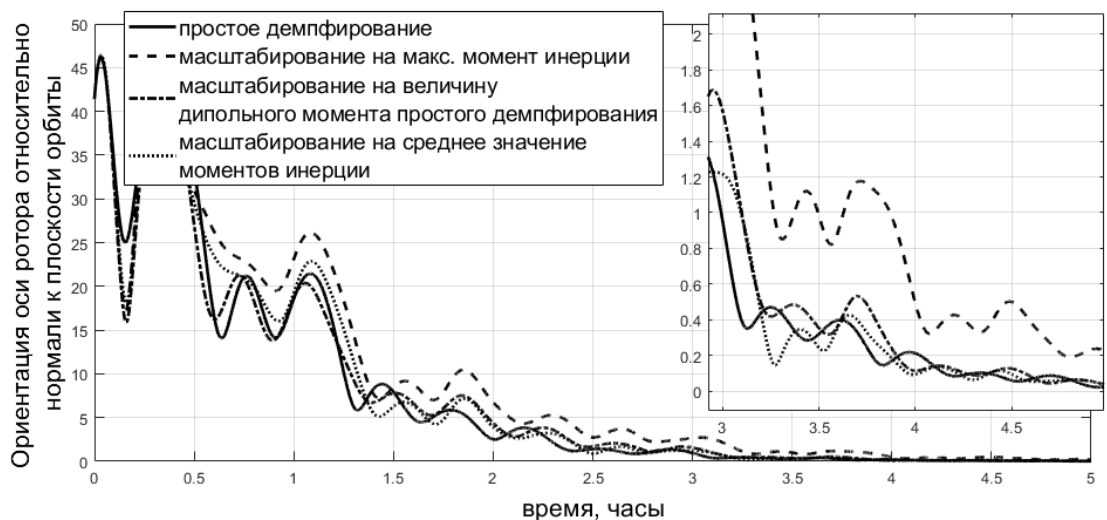


Рис. 3.1.6. Движение вытянутого КА

Сравнение Рис. 3.1.3 и 3.1.5 показывает, что выводы, сделанные на основе приближенных выражения для аналогов характеристических показателей для КА с примерно схожими моментами инерции, сохраняются при существенном управляющем воздействии. Сравнение Рис. 3.1.4 и 3.1.6 показывает, что для вытянутого КА разница между подходами к демпфированию практически исчезает, за исключением случая 2 из-за заведомо меньшей величины управляющего воздействия. В целом можно заключить, что для КА с существенной разницей в моментах инерции использование весового демпфирования (3.1.17) нецелесообразно.

### 3.2. Сравнение переходных процессов при использовании алгоритма $\mathbf{Vdot}$

В предыдущем разделе было проведено сравнение различных вариантов алгоритма демпфирования (1). Рассмотрим теперь ту же задачу, но при движении КА под управлением алгоритма  $\mathbf{Vdot}$

$$\mathbf{m} = -k \frac{d\mathbf{B}_x}{dt} = -k \left( \mathbf{A} \frac{d\mathbf{B}_x}{dt} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \mathbf{B}_x \right). \quad (3.2.1)$$

В разделе 2.2 показана устойчивость вращения аппарата под управления алгоритма  $\mathbf{Vdot}$  в инерциальном пространстве. Ось максимального момента инерции ориентируется по нормали к плоскости орбиты, скорость вращения вокруг этой оси составляет удвоенную орбитальную скорость при движении в упрощенном дипольном магнитном поле и примерно 1.8 орбитальной скорости при движении в дипольном поле.

Результат относительно устойчивости вращения в упрощенном поле может быть практически без изменений перенесен на рассматриваемую задачу. Опуская выкладки, аналогичные приведенным в разделе 2.2 с той лишь разницей, что в уравнениях движения появляется дополнительное слагаемое, вызванное наличие маховика с постоянной скоростью вращения, приведем характеристические показатели линеаризованных уравнений движения в инерциальном пространстве

$$\lambda_j = \mu_j + \varepsilon \theta'_A \eta_j,$$

где

$$\mu_{1,2} = \pm 2 \sqrt{-\kappa_A \kappa_B} i, \quad \mu_3 = 0, \quad \mu_{4,5} = \pm 2i,$$

$$\eta_{1,2} = - \frac{\xi_A \lambda_B (1 + \kappa_A) + \xi_B \cos^2 \Theta \kappa_A (\kappa_B - 1)}{2(\kappa_A \kappa_B + 1)},$$

$$\eta_3 = -\sin^2 \Theta,$$

$$\eta_{4,5} = -\frac{\xi_A(1-\kappa_B) + \xi_B \cos^2 \Theta (\kappa_A + 1)}{2(\kappa_A \kappa_B + 1)}.$$

Здесь

$$\varepsilon = kB_0^2 / A\omega_{orb}, \quad \theta'_A = A/C, \quad \kappa_A = (B-C)/A - h/2A\omega_{orb}, \quad \kappa_B = (C-A)/B + h/2B\omega_{orb}.$$

При этом  $\kappa_A > 0$ ,  $\kappa_B < 0$  независимо от соотношений между моментами инерции при достаточной величине кинетического момента маховика. Поэтому  $\mu_j$  – мнимые числа.  $\eta_j$ , напротив, действительные числа.  $\eta_{1,2,4,5} < 0$ , если  $\kappa_A > 1$  и  $|\kappa_B| > 1$ . Эти условия накладывают более строгие ограничения на величину кинетического момента маховика в зависимости от соотношений между моментами инерции. В силу свойств тензора инерции эти условия заведомо выполняются, если  $h/A\omega_{orb} > 6$  и  $h/B\omega_{orb} > 6$ . Последние два условия можно считать требованиями к кинетическому моменту тангажного маховика в зависимости от моментов инерции аппарата.

### ***Поиск характеристических показателей линеаризованной системы***

Опираясь на устойчивость вращения аппарата вокруг оси установки маховика при ориентации последнего по нормали к плоскости орбиты, линеаризуем уравнения движения (1.3.3)-(1.3.6) в окрестности движения

$$\beta = \gamma = 0, \quad \Omega_1 = \Omega_3 = 0,$$

$$\alpha = \omega_0 u, \quad \Omega_2 = \omega_0.$$

Здесь  $\omega_0$  – скорость вращения аппарата вокруг нормали к плоскости орбиты в орбитальной системе координат, которая примерно равна 0.8 при использовании модели прямого диполя и 1 при использовании упрощенной модели.

Линеаризованные уравнения движения вне плоскости орбиты отделяются от уравнения, описывающего поворот в плоскости, и имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma} + \dot{\beta}(\omega_0 + 1 + \omega_0 \lambda_A - \lambda_A - h_A) + \gamma(-\omega_0 \lambda_A + \lambda_A + h_A) - 2\varepsilon\beta &= \varepsilon M_1, \\ \ddot{\beta} + \dot{\gamma}(-1 - \omega_0 \lambda_C + \lambda_C + h_C) + \beta(1 + \omega_0)(-\omega_0 \lambda_C + \lambda_C + h_C) + 2\varepsilon\theta'_A \gamma &= \varepsilon\theta'_A M_3. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Последние слагаемые в левой части уравнений (3.2.2) отвечают первому слагаемому в управлении (3.2.1), тогда как компоненты момента  $M_i$  отвечают второму слагаемому (закону демпфирования (2.1.3)) и имеют вид



$$\begin{aligned}
M_1 &= \omega_0 \{ \cos \omega_0 u \cos u + 2 \sin \omega_0 u \sin u \} \times \\
&\quad \{ \gamma (2 \cos \omega_0 u \sin u - \sin \omega_0 u \cos u) + \beta (2 \sin \omega_0 u \sin u + \cos \omega_0 u \cos u) \} - \\
&\quad \{ 2 \cos \omega_0 u \sin u - \sin \omega_0 u \cos u \} \times \\
&\quad \{ (2 \cos \omega_0 u \sin u - \sin \omega_0 u \cos u) (\dot{\gamma} + \omega_0 \beta) + (\cos \omega_0 u \cos u + 2 \sin \omega_0 u \sin u) \dot{\beta} \}, \\
M_3 &= - \{ \cos \omega_0 u \cos u + 2 \sin \omega_0 u \sin u \} \times \\
&\quad \{ (2 \cos \omega_0 u \sin u - \sin \omega_0 u \cos u) (\dot{\gamma} + \omega_0 \beta) + (\cos \omega_0 u \cos u + 2 \sin \omega_0 u \sin u) \dot{\beta} \} - \\
&\quad \omega_0 \{ 2 \cos \omega_0 u \sin u - \sin \omega_0 u \cos u \} \times \\
&\quad \{ \gamma (2 \cos \omega_0 u \sin u - \sin \omega_0 u \cos u) + \beta (2 \sin \omega_0 u \sin u + \cos \omega_0 u \cos u) \}.
\end{aligned}$$

Уравнение (3.2.2) имеет вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_0(\omega_0, h_A, h_C, \lambda_A, \lambda_C, \varepsilon) \mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{A}_1(\omega_0, u) \mathbf{y},$$

где  $\mathbf{y} = (\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma)$ ,

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -d_1 & -d_2 & -2\varepsilon\theta'_A \\ -e_1 & 0 & 2\varepsilon & -e_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d_1 = -1 - \omega_0 \lambda_C + \lambda_C + h_C, \quad d_2 = (1 + \omega_0)(-\omega_0 \lambda_C + \lambda_C + h_C),$$

$$e_1 = \omega_0 + 1 + \omega_0 \lambda_A - \lambda_A - h_A, \quad e_2 = -\omega_0 \lambda_A + \lambda_A + h_A.$$

Матрица  $\mathbf{A}_1$  может быть получена из выражений для  $M_i$ .

Левая часть (3.2.2) представляет собой линейные уравнения с постоянными коэффициентами, для которых можно найти характеристические показатели. Затем можно получить приближенные выражения для их аналогов с учетом правых частей, то есть действия момента (2.1.3). Заметим, что левая часть (3.2.2) показывает влияние на движение аппарата маховика и первого слагаемого в (3.2.1), то есть позиционной части управления.

Характеристическое уравнение для левой части (3.2.2) имеет вид

$$P(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^2 + \varepsilon\beta\lambda + c + 4\varepsilon^2 = 0, \quad (3.2.3)$$

$$a = \omega_0 + \theta'_A h_A^2 + h_A \lambda_C + \theta'_A h_A \lambda_A + \lambda_A \lambda_C + \omega_0^2 \lambda_A \lambda_C - \omega_0 \lambda_C h_A - \omega_0 \lambda_A \theta'_A h_A - 2\lambda_A \lambda_C \omega_0 + 1,$$

$$b = 2(2 - \theta'_A h_A + \theta'_A - \lambda_C - \theta'_A h_A - \theta'_A \lambda_A + \theta'_A \omega_0 + \omega_0 \lambda_C + \theta'_A \lambda_A \omega_0),$$

$$c = \theta'_A h_A^2 + h \lambda_C + \theta'_A h_A \lambda_A + \lambda_A \lambda_C - \omega_0^2 h_A \lambda_C - \omega_0^2 \theta'_A h_A \lambda_A - \omega_0^2 \lambda_A \lambda_C + \omega_0^3 \lambda_A \lambda_C - \omega_0 h_A \lambda_C + \omega_0 \theta'_A h_A^2 - \omega_0 \lambda_A \lambda_C.$$

Уравнение (3.2.3) слишком громоздко для прямого решения. Рассмотрим его в случае  $\varepsilon=0$ . Фактически, это движение аппарата с тангажным маховиком без действия управления. Уравнение (3.2.3) тогда можно записать как

$$\lambda^{(0)4} + (\zeta + \alpha_1)\lambda^{(0)2} + (\Omega+1)(\zeta + \alpha_2) = 0, \quad (3.2.4)$$

$$\alpha_2 = (1 - \omega_0)^2 \lambda_A \lambda_C, \quad \alpha_1 = \alpha_2 + \omega_0 + 1, \quad \zeta = \theta'_A h_A^2 - (\omega_0 - 1)\lambda_C h_A - \theta'_A (\omega_0 - 1)\lambda_A h_A.$$

Корни уравнения (3.2.4)

$$\lambda_{1-4}^{(0)2} = \frac{1}{2} \left( -\zeta - \alpha_1 \pm \sqrt{(\zeta + \alpha_1)^2 - 4(\omega_0 + 1)(\zeta + \alpha_2)} \right). \quad (3.2.5)$$

Получим оценку кинетического момента тангажного маховика  $h_A$ , при которой все корни  $\lambda_j$  мнимые. В первую очередь, необходимо  $\zeta + \alpha_1 > 0$ , то есть

$$\zeta + (1 - \omega_0)^2 \lambda_A \lambda_C + \omega_0 + 1 > 0. \quad (3.2.6)$$

Получим условие на кинетический момент маховика  $h_A$ , обеспечивающее  $\zeta > 0$ ,

$$\theta'_A h_A - (\omega_0 - 1)\lambda_C - \theta'_A (\omega_0 - 1)\lambda_A > 0.$$

Учитывая, что  $|\lambda_A| < 1$ ,  $|\lambda_C| < 1$ ,  $0 < \omega_0 < 1$  и  $1/2 < \theta'_A < 1$ , получаем, что это условие выполняется при  $h_A > 4$ . Из этих же соотношений получаем, что условие (3.2.6) заведомо выполняется при  $\zeta > 3$ . Далее, необходимо, чтобы выражение под корнем в (3.2.5) также было положительным. Это условие можно записать в виде

$$\zeta^2 + 2\alpha_1\zeta - 4(\omega_0 + 1)\zeta + (\alpha_2 - \omega_0 - 1)^2 > 0.$$

Последнее слагаемое оказывает незначительное влияние на знак выражения по сравнению со слагаемыми, пропорциональными  $\zeta$  (величина момента тангажного маховика). Кроме того, это слагаемое положительно. Отбросив его, получим несколько более строгое условие

$$\zeta + 2\alpha_1 - 4(\omega_0 + 1) > 0, \quad (3.2.7)$$

в котором уже учтена положительность  $\zeta$ , требуемая по условию (3.2.6). Учитывая, что  $\omega_0 < 1$ , и соотношение между  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , запишем еще более строгое условие

$$\zeta + 2(\omega_0 - 1)^2 \lambda_A \lambda_C - 4 > 0.$$

Второе слагаемое не может быть меньше -2 в силу соотношений между моментами инерции. Тогда, если  $\lambda_A \lambda_C < 0$ , то  $\zeta > 6$ . Этот случай имеет место, если  $B$  – средний момент инерции. Если же  $B$  – максимальный или минимальный момент инерции, то  $\zeta > 4$ .

Возвращаясь к выражению для  $\zeta$  при учете соотношений  $|\lambda_A| < 1$ ,  $|\lambda_C| < 1$ ,  $0 < \omega_0 < 1$ , при неудачной компоновке аппарата ( $B$  – средний момент инерции) имеем

$$h_A (\theta'_A h_A - 2) > 6,$$

откуда с учетом  $h_A > 4$  получаем  $\theta'_A h_A > 14/4$ . Наконец, принимая во внимание  $1/2 < \theta'_A < 1$ , получаем  $h_A > 7$ . Это условие задает величину кинетического момента маховика, при которой заведомо, вне зависимости от соотношений между моментами инерции аппарата и скорости вращения  $\omega_0$ , корни в (3.2.5) мнимые и различные и имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}^{(0)} &= \pm i \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\zeta + \alpha_1 + \sqrt{(\zeta + \alpha_1)^2 - 4(\omega_0 + 1)(\zeta + \alpha_2)}}, \\ \lambda_{3,4}^{(0)} &= \pm i \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\zeta + \alpha_1 - \sqrt{(\zeta + \alpha_1)^2 - 4(\omega_0 + 1)(\zeta + \alpha_2)}}. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Вернемся теперь к уравнению (3.2.3) и представим его решения в виде  $\lambda_j = \lambda_j^{(0)} + \varepsilon \lambda_j^{(1)}$ .

Подставляя это выражение в (3.2.3) и группируя слагаемые при  $\varepsilon$ , получаем

$$\lambda_j^{(1)} = -\frac{1}{2} \frac{b}{2\lambda_j^{(0)2} + a}. \quad (3.2.9)$$

Полученное с помощью (3.2.8)-(3.2.9) приближенное значение характеристического корня уравнения (3.2.3) и будем использовать далее. Собственный вектор, соответствующий  $\lambda_j$ , имеет вид

$$\Phi_j = A_j [\lambda_j, \zeta \lambda_j, 1, \zeta],$$

где  $A_j$  – произвольные постоянные,

$$\zeta = \frac{\lambda_j^2 + d_2}{-d_1 \lambda_j + 2\varepsilon \theta'_A},$$

Решение уравнения в левой части (3.2.2) суть

$$\beta_0 = \sum A_j \exp(\lambda_j u), \quad \gamma_0 = \sum D_j \exp(\lambda_j u),$$

где  $D_j = \zeta A_j$ . Чтобы уточнить решение (3.2.2) с учетом действия демпфирующего момента, представим это решение в виде

$$\begin{aligned} y &= \sum_{j=1}^4 \left( \Phi_j + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k \Psi_{jk}(u) + O(\varepsilon^{n+1}) \right) \exp \left( \lambda_j + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k \mu_{jk} + O(\varepsilon^{n+1}) \right) u = \\ &= \sum_{j=1}^4 \left( \Phi_j + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k \Psi_{jk}(u) \right) \exp \left( \lambda_j + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k \mu_{jk} \right) u + O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned}$$

Найдем поправки к характеристическим показателям  $\mu_{jk}$  из условия периодичности поправок к собственным векторам  $\Psi_{kj}$  как это было сделано в предыдущем разделе. Для этого запишем решение (3.2.2), соответствующее  $j$ -му собственному числу, в виде

$$\begin{aligned}\beta &= (A_j + \varepsilon \tau_j(u)) \exp[(\lambda_j + \varepsilon \mu_j)u], \\ \gamma &= (D_j + \varepsilon \vartheta_j(u)) \exp[(\lambda_j + \varepsilon \mu_j)u].\end{aligned}\quad (3.2.10)$$

Подставляя эти выражения в (3.2.2) и группируя члены при  $\varepsilon$ , получаем

$$\begin{aligned}F_1 - f_1 + C_1 \mu_k &= 0, \\ F_2 - f_2 + C_2 \mu_k &= 0,\end{aligned}\quad (3.2.11)$$

где

$$F_1 = \ddot{\tau}_j + 2\lambda_j \dot{\tau}_j + \lambda_j^2 \tau_j + d_1 (\dot{\vartheta}_j + \lambda_j \vartheta_j) + d_2 \tau_j,$$

$$C_1 = 2A_j \lambda_j + d_1 D_j,$$

$$f_1 = \theta'_A (b_1 A_j + b_2 \lambda_j A_j + (b_3 - 2) D_j + b_4 \lambda_j D_j),$$

$$F_2 = \ddot{\vartheta}_j + 2\lambda_j \dot{\vartheta}_j + \lambda_j^2 \vartheta_j + e_1 (\dot{\tau}_j + \lambda_j \tau_j) + e_2 \vartheta_j,$$

$$C_2 = 2D_j \lambda_j + e_j A_j,$$

$$f_2 = (a_1 + 2) A_j + a_2 \lambda_j A_j + a_3 D_j + a_4 \lambda_j D_j.$$

Умножим теперь первое уравнение (3.2.11) на  $e_1 \lambda_j^{(0)}$ , второе на  $-e_2 - \lambda_j^{(0)2}$  и сложим, затем первое на  $d_2 + \lambda_j^{(0)2}$ , второе на  $-d_1 \lambda_j^{(0)}$  и сложим. Получим систему

$$\begin{aligned}e_1 \lambda_j^{(0)} (F_1 - f_1 + C_1 \mu_j) - (e_2 + \lambda_j^{(0)2}) (F_2 - f_2 + C_2 \mu_j) &= 0, \\ (d_2 + \lambda_j^{(0)2}) (F_1 - f_1 + C_1 \mu_j) - d_1 \lambda_j^{(0)} (F_2 - f_2 + C_2 \mu_j) &= 0.\end{aligned}\quad (3.2.12)$$

Определитель этой системы, совпадающий с (3.2.4), нулевой. Система (3.2.12) имеет отличное от нуля решение. В частности, при любом значении  $F_2 - f_2 + C_2 \mu_j$  можно найти

$F_1 - f_1 + C_1 \mu_j$  такое, что выполняется

$$e_1 \lambda_j^{(0)} (F_1 - f_1 + C_1 \mu_j) - (e_2 + \lambda_j^{(0)2}) (F_2 - f_2 + C_2 \mu_j) = 0. \quad (3.2.13)$$

Используем последнее выражение, чтобы найти первое приближение характеристического показателя  $\mu_j$ . При этом первое приближение соответствующего ему собственного вектора нас не интересует. Имеют значение его свойства – величины  $\tau_j$  и  $\vartheta_j$  и их производные периодичны, что обеспечивается подбором постоянных интегрирования

уравнения (3.2.11) и  $\mu_j$ . Период  $T$  может быть определен из конкретного вида  $M_i$ .

Проинтегрируем соотношение (3.2.13) на периоде, принимая во внимание периодичность

$$\tau_j \text{ и } \vartheta_j \text{ и их производных, откуда } \int_0^T F_j(u) du = 0,$$

$$e_1 \lambda_j^{(0)} \left( -\bar{f}_1/T + C_1 \mu_j \right) - \left( e_2 + \lambda_j^{(0)2} \right) \left( -\bar{f}_2/T + C_2 \mu_j \right) = 0.$$

Чтобы вычислить  $\bar{f}_k = \int_0^T f_k(u) du$  необходимо выделить в выражениях для

$M_i$  постоянную часть. А именно, среди коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  непериодическими являются

лишь  $a_4^{(0)} = -5/4$ ,  $b_2^{(0)} = -5/4$ ,  $b_3^{(0)} = -5/4 \omega_0$ . В результате для первого приближения

поправок характеристических показателей получаем

$$\mu_j = \frac{1}{4} \frac{e_1 \lambda_j^{(0)} \zeta \{ 5\lambda_j + (5\omega_0 + 8)\zeta \} + (e_2 + \lambda_j^{(0)2}) (8 - 5\lambda_j \zeta)}{(e_2 + \lambda_j^{(0)2}) (2\zeta \lambda_j + e_1) - e_1 \lambda_j^{(0)} (2\lambda_j + d_1 \zeta)}. \quad (3.2.14)$$

Комбинируя выражения (3.2.8), (3.2.9) и (3.2.14), получаем следующие аналоги характеристических показателей для линейной системы с периодическими коэффициентами

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \lambda_{1,2}^{(0)} + \varepsilon \left( \lambda_{1,2}^{(1)} + \mu_{1,2} \right) = \\ &\pm i \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\zeta + \alpha_1 + \sqrt{(\zeta + \alpha_1)^2 - 4(\omega_0 + 1)(\zeta + \alpha_2)}} + \\ &\frac{1}{2} \varepsilon \left( -\frac{b}{2\lambda_{1,2}^{(0)2} + a} + \frac{1}{2} \frac{e_1 \lambda_{1,2}^{(0)} \zeta \{ 5(\lambda_{1,2}^{(0)} + \varepsilon \lambda_{1,2}^{(1)}) + (5\omega_0 + 8)\zeta \} + (e_2 + \lambda_{1,2}^{(0)2}) \{ 8 - 5(\lambda_{1,2}^{(0)} + \varepsilon \lambda_{1,2}^{(1)}) \zeta \}}{(e_2 + \lambda_{1,2}^{(0)2}) \{ 2\zeta (\lambda_{1,2}^{(0)} + \varepsilon \lambda_{1,2}^{(1)}) + e_1 \} - e_1 \lambda_{1,2}^{(0)} \{ 2(\lambda_{1,2}^{(0)} + \varepsilon \lambda_{1,2}^{(1)}) + d_1 \zeta \}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{3,4} &= \lambda_{3,4}^{(0)} + \varepsilon \left( \lambda_{3,4}^{(1)} + \mu_{3,4} \right) = \\ &\pm i \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\zeta + \alpha_1 - \sqrt{(\zeta + \alpha_1)^2 - 4(\omega_0 + 1)(\zeta + \alpha_2)}} + \\ &\frac{1}{2} \varepsilon \left( -\frac{b}{2\lambda_{3,4}^{(0)2} + a} + \frac{1}{2} \frac{e_1 \lambda_{3,4}^{(0)} \zeta \{ 5(\lambda_{3,4}^{(0)} + \varepsilon \lambda_{3,4}^{(1)}) + (5\omega_0 + 8)\zeta \} + (e_2 + \lambda_{3,4}^{(0)2}) \{ 8 - 5(\lambda_{3,4}^{(0)} + \varepsilon \lambda_{3,4}^{(1)}) \zeta \}}{(e_2 + \lambda_{3,4}^{(0)2}) \{ 2\zeta (\lambda_{3,4}^{(0)} + \varepsilon \lambda_{3,4}^{(1)}) + e_1 \} - e_1 \lambda_{3,4}^{(0)} \{ 2(\lambda_{3,4}^{(0)} + \varepsilon \lambda_{3,4}^{(1)}) + d_1 \zeta \}} \right). \end{aligned}$$

Интерес для оценки времени переходных процессов представляет лишь действительная часть  $\lambda_j$ , имеющая вид

$$\lambda_{j(re)} = \frac{1}{2} \varepsilon \left( \lambda_j^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{c_1 s_1 + c_0 s_0}{s_0^2 + s_1^2} \right), \quad (3.2.15)$$

причем поправка (3.2.9)  $\lambda_j^{(1)} = -b/(-2\rho_j^2 + a)$ , вызванная позиционным членом в управлении (3.2.1), является действительной. Также введены обозначения

$$\rho_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\zeta + \alpha_1 + \sqrt{(\zeta + \alpha_1)^2 - 4(\omega_0 + 1)(\zeta + \alpha_2)}},$$

$$\rho_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\zeta + \alpha_1 - \sqrt{(\zeta + \alpha_1)^2 - 4(\omega_0 + 1)(\zeta + \alpha_2)}},$$

$$c_0 = e_1 \rho_j \theta'_A (5\varepsilon \lambda_j^{(1)} + (5\omega_0 + 8)\zeta_0) - 5(e_2 - \rho_j^2)(\rho_j \zeta_0 + \varepsilon \lambda_j^{(1)} \zeta_1),$$

$$c_1 = -e_1 \rho_j \theta'_A (5\rho_j + (5\omega_0 + 8)\zeta_1) + (e_2 - \rho_j^2)(8 + 5\rho_j \zeta_1 - 5\varepsilon \lambda_j^{(1)} \zeta_0),$$

$$s_0 = 2(e_2 - \rho_j^2)(\zeta_0 \rho_j + \zeta_1 \varepsilon \lambda_j^{(1)}) - e_1 \rho_j (2\varepsilon \lambda_j^{(1)} + d_1 \zeta_0),$$

$$s_1 = (e_2 - \rho_j^2)(-2\zeta_1 \rho_j + 2\zeta_0 \varepsilon \lambda_j^{(1)} + e_1) + e_1 \rho_j (2\rho_j + d_1 \zeta_1).$$

Здесь

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 i = \frac{(i\rho_j + \varepsilon \lambda_j^{(1)})^2 + d_2}{-d_1(i\rho_j + \varepsilon \lambda_j^{(1)}) + 2\varepsilon \theta'_A},$$

$$\zeta_0 = \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2}{m_1^2 + m_2^2}, \quad \zeta_1 = \frac{n_2 m_1 - n_1 m_2}{m_1^2 + m_2^2},$$

$$n_1 = d_2 - \rho_j^2 + \varepsilon^2 \lambda_j^{(0)2},$$

$$n_2 = 2\varepsilon \rho_j \lambda_j^{(0)},$$

$$m_1 = 2\varepsilon \theta'_A - \varepsilon \delta_1 \lambda_j^{(0)},$$

$$m_2 = -d_1 \rho_j.$$

Полученное довольно громоздкое выражение (3.2.15) можно заметно упростить, отбросив в нем члены порядка  $\varepsilon^2$  и выше. В этом случае

$$\lambda_{j(re)} = \frac{1}{4} \varepsilon \frac{e_1 \rho_j \theta'_A (-5\rho_j - (5\omega_0 + 8)\zeta_1) + (e_2 - \rho_j)(8 + 5\rho_j \zeta_1)}{(e_2 - \rho_j)(-2\zeta_1 \rho_j + e_1) + e_1 \rho_j (2\rho_j + d_1 \zeta_1)}, \quad (3.2.16)$$

$$\chi_1^{(0)} = \frac{d_2 - \rho_j^2}{d_1 \rho_j}.$$

При этом  $\lambda_{1(re)} = \lambda_{2(re)}$  и  $\lambda_{3(re)} = \lambda_{4(re)}$ . Проведем сравнение с результатом, полученным в предыдущем разделе для использования алгоритма демпфирования (2.1.3). Рассмотрим в качестве примера спутник с тензором инерции  $\mathbf{J} = \text{diag}(1.5, 1.7, 1.3)$  кг·м<sup>2</sup> (спутник массой в

несколько десятков килограмм) на орбите высотой 1000 км и коэффициентом усиления в управлении  $k = 5 \cdot 10^5$  Н·м·с/Тл<sup>2</sup> ( $\varepsilon \approx 0.13$ ). На Рис. 3.2.1 представлена зависимость аналогов характеристических показателей от величины кинетического момента тангажного маховика для законов управления (3.2.1) и (2.1.3).

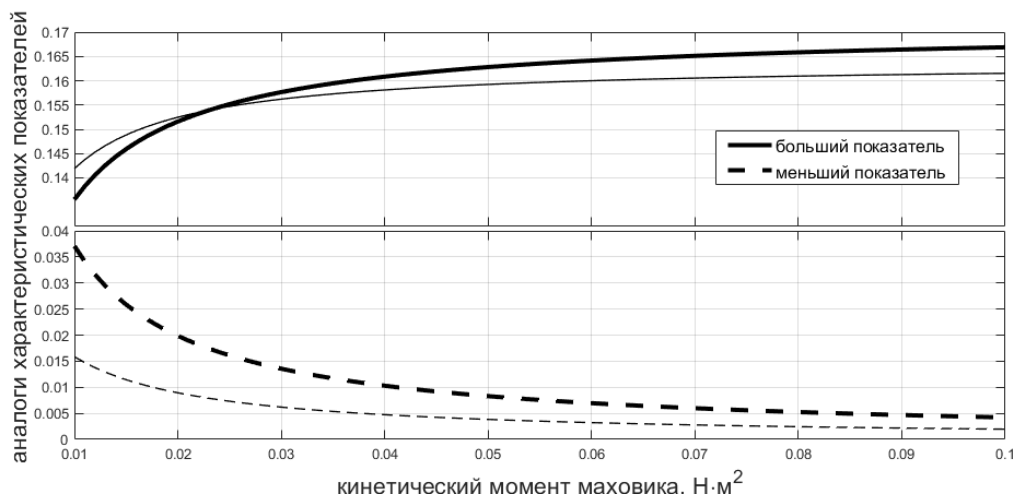


Рис. 3.2.1. Степень устойчивости в зависимости от кинетического момента маховика

На Рис. 3.2.1 жирными линиями обозначен результат для алгоритма -Vdot, тонкими – для алгоритма демпфирования. Из Рис. 3.2.1 видно, что меньший показатель существенно меньше для второго алгоритма, что приводит к большему времени переходных процессов.

### Численное моделирование

В качестве примера рассмотрим движение аппарата, при котором начальные углы ориентации равны  $20^\circ$ . На Рис. 3.2.2 представлен результат моделирования исходных нелинейных уравнений движения (1.3.3) при кинетическом моменте маховика  $0.01$  Н·м.

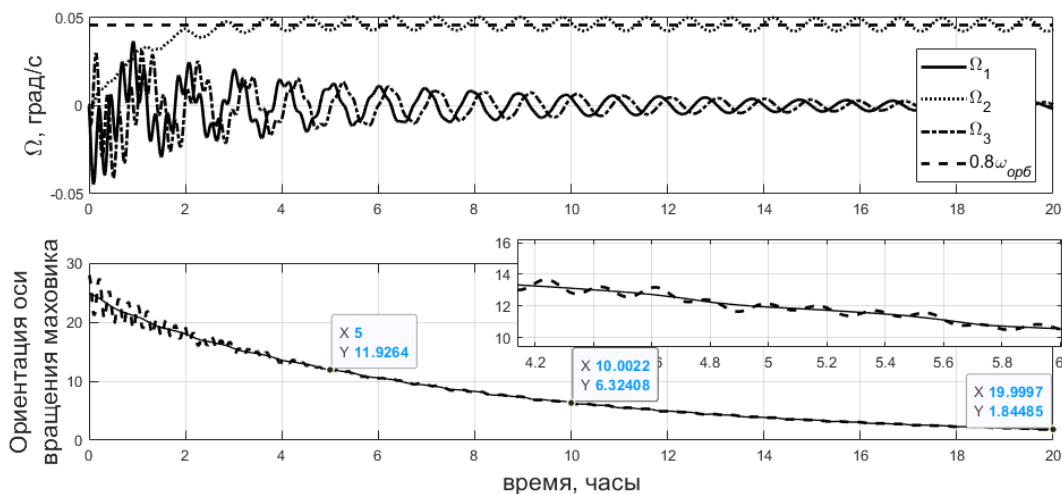


Рис. 3.2.2. Моделирование движения КА под действием управления

На Рис. 3.2.2 отмечены значения угла между осью установки маховика и нормалью к плоскости орбиты через 5, 10 и 20 часов. В таблице 3.2.1 приведены соответствующие значения для алгоритмов (3.2.1) и (2.1.3), полученные с помощью моделирования, и с помощью соотношений (3.2.16) и (3.1.16) с использованием выражений (3.2.10).

Таблица 3.2.1. Сравнение эффективности работы алгоритмов и применимости упрощенных соотношений

Время	Алгоритм $\dot{B}$		Алгоритм $\Omega \times B$	
	Численное моделирование	Приближенное соотношение (3.2.16)	Численное моделирование	Приближенное соотношение (3.1.16)
5 часов	11.8	10.4	16.3	15.1
10 часов	6.0	5.3	11.1	11.2
20 часов	2.4	1.4	5.1	6.3

Из Таблицы 3.2.1 видно, что приближенные соотношения позволяют качественно предсказать эволюцию ориентации оси вращения маховика, отражая разницу между двумя алгоритмами управления. Значительное отличие численного и приближенного результатов обусловлено весьма большой величиной малого параметра  $\varepsilon$ , из-за чего ошибка в определении аналогов характеристических показателей, имеющая порядок  $\varepsilon^2$ , существенна. Дипольный момент, возникающий при такой величине малого параметра, не выходит за пределы  $2 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ , что типично для аппаратов с подобными тензорами инерции. Приближенные соотношения позволяют эффективно предсказывать эволюцию ориентации оси вращения маховика и вдали от линейной окрестности требуемой ориентации. Так, при начальных углах ориентации  $40^\circ$ , отклонение этой оси от нормали к плоскости орбиты составляет  $21.4^\circ$ ,  $11.3^\circ$  и  $3^\circ$  через 5, 10 и 20 часов при численном моделировании,  $20.9^\circ$ ,  $10.6^\circ$  и  $2.8^\circ$  соответственно при использовании соотношения (3.2.16).

На Рис. 3.2.3 приведен результат моделирования с учетом следующих возмущающих факторов:

- Действие гравитационного момента;
- Эксцентриситет орбиты 0.001;
- Погрешность в определении ориентации по угловой скорости  $10^{-5} \text{ с}^{-1}$  постоянная и  $10^{-4} \text{ с}^{-1}$  нормально распределенная, по углам ориентации  $0.1^\circ$  и  $1^\circ$  соответственно;
- Возмущающий момент неизвестной природы;



- Управление по двум последовательным измерениям, соответствующее типичной реализации алгоритма  $-\dot{\mathbf{B}}$ ;
- Модель геомагнитного поля IGRF.

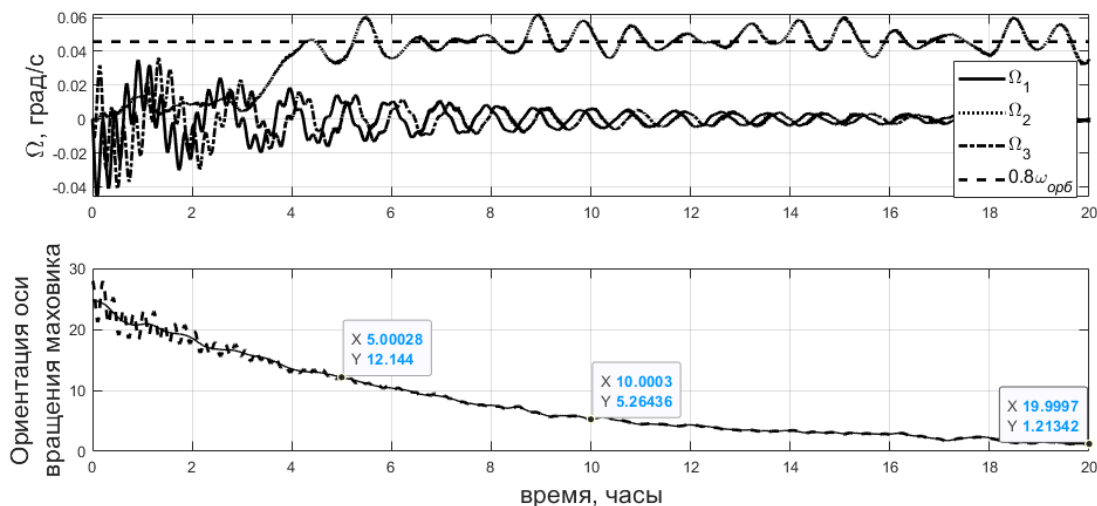


Рис. 3.2.3. Моделирование при реалистичных предположениях

Сравнение Рис. 3.2.2 и 3.2.3 показывает, что возмущающие факторы не оказывают существенного влияния на движение аппарата, и приближенными соотношениями (3.2.15) или (3.2.16) можно пользоваться для оценки времени переходных процессов на приполярных орбитах. Значительное отличие орбиты от полярной не позволяет этого сделать, количественные характеристики переходных процессов меняются существенно. Это сужает область применения полученного результата, но он все еще может использоваться для важного класса солнечно-синхронных орбит.

### 3.3. Движение с тангажным маявником в установившемся режиме

В предыдущих разделах были рассмотрены переходные процессы в движении спутника. Рассмотрим управление, которое должно стабилизировать КА в положении  $\alpha = \alpha_d$  в плоскости орбиты в установившемся режиме

$$\mathbf{M} = k\omega_{орб}\zeta B_0^2 \left( 0, \sin(\alpha_d - \alpha) B_{x3}^2, -k' \sin(\alpha_d - \alpha) B_{x2} B_{x3} \right). \quad (3.3.1)$$

Это управление реализуется первой катушкой,  $\mathbf{m} = k\omega_{орб}\zeta B_0 \left( -\sin(\alpha_d - \alpha) B_{x3}, 0, 0 \right)$ . Здесь  $\zeta$  – число, характеризующее вклад позиционной части управления по сравнению с демпфирующей, задаваемой выражением  $\mathbf{m} = k(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B})$ .

Чтобы исследовать влияние управления (3.3.1) на динамику спутника, запишем линеаризованные уравнения движения после переходных процессов, когда  $\beta, \gamma \sim 0$ ,  $\Omega_i \sim 0$ ,

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma} + (1 - \xi_A) \dot{\beta} + \xi_A \gamma &= -3\lambda_A (\beta \sin \alpha \cos \alpha + \gamma \cos^2 \alpha) + \varepsilon C/A \bar{M}_1, \\ \ddot{\alpha} &= 3\lambda_B \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon C/B \bar{M}_2, \\ \ddot{\beta} + (\xi_C - 1) \dot{\gamma} + \xi_C \beta &= -3\lambda_C (\gamma \sin \alpha \cos \alpha + \beta \sin^2 \alpha) + \varepsilon \bar{M}_3, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

где  $\lambda_A = (B - C)/A$ ,  $\lambda_B = (C - A)/B$ ,  $\lambda_C = (B - A)/C$ ,  $h_A = h/A\omega_{op\bar{b}}$ ,  $h_C = h/C\omega_{op\bar{b}}$ ,  $\xi_A = h_A + \lambda_A$ ,  $\xi_C = h_C + \lambda_C$ ,  $\varepsilon = kB_0^2/C\omega_{op\bar{b}}$ ,  $\bar{M}_i$  – компоненты безразмерного управляющего момента, дифференцирование происходит по аргументу широты. Линеаризованный механический демпфирующий момент задается как

$$\mathbf{M} = k\omega_{op\bar{b}} B_0^2 \begin{pmatrix} \dot{\beta} B_{x1} B_{x3} - \dot{\gamma} (B_{x2}^2 + B_{x3}^2) + \dot{\alpha} B_{x1} B_{x2} \\ \dot{\gamma} B_{x1} B_{x2} - \dot{\alpha} (B_{x1}^2 + B_{x3}^2) + \dot{\beta} B_{x2} B_{x3} \\ \dot{\alpha} B_{x2} B_{x3} - \dot{\beta} (B_{x2}^2 + B_{x1}^2) + \dot{\gamma} B_{x1} B_{x3} \end{pmatrix}. \quad (3.3.3)$$

Отметим, что размерный параметр  $k$  определяет величину управляющего магнитного момента, тогда как безразмерный параметр  $\zeta$  определяет соотношение между величинами позиционной и демпфирующей компонент управления.

### ***Плоское движение на полярной орбите***

При движении спутника на полярной орбите появляется возможность отделить вращение в плоскости орбиты (угол  $\alpha$ ) от движения вне плоскости (углы  $\beta, \gamma$ ). Уравнения движения вне плоскости допускают решение  $\beta = \gamma = 0$ . Уравнение движения в плоскости имеет вид

$$\ddot{\alpha} = 3\lambda_B \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon C/B \left[ \zeta \sin(\alpha_d - \alpha) (\cos u \sin \alpha - 2 \sin u \cos \alpha)^2 - (1 + 3 \sin^2 u) \dot{\alpha} \right]. \quad (3.3.4)$$

Влияние гравитационного момента заключается в смещении положения равновесия в сторону  $\alpha = 0$  (для определенности положим, что  $B > C$ ). Периодическая зависимость вектора геомагнитной индукции от аргумента широты приводит к периодическим колебаниям около этого нового положения равновесия.

Определим сначала примерное смещение спутника в плоскости орбиты. Будем считать, что гравитационный и управляющий магнитный моменты малы ( $\lambda_B \ll 1$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ). Предположение малого управляющего момента вполне естественно, так как магнитная система ориентации обычно комплектуется слабыми катушками. Предположение малого гравитационного момента может показаться искусственным. Однако гравитационный

момент не должен превалировать над управляющим, иначе нет смысла говорить об управлении поворотом в плоскости орбиты: движение будет определяться в первую очередь гравитационным моментом. Усредним (3.3.4) по аргументу широты,

$$\ddot{\alpha} = m\mu \sin \alpha \cos \alpha + \mu\zeta \sin(\alpha_d - \alpha) \left( \frac{1}{2} \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha \right) - 5/2 \mu \dot{\alpha}, \quad (3.3.5)$$

где  $\mu = \varepsilon C/B \ll 1$  – малый параметр, параметр  $m = 3\lambda_B/\mu = O(1)$  отражает соотношение между величинами гравитационного и магнитного моментов. Введем новую переменную  $\rho = \alpha - \alpha_d$ , характеризующую отклонение спутника от требуемого положения. Разложим тригонометрические функции в (3.3.5) в ряд, сохраняя вторую степень по  $\rho$  (вообще говоря, угол  $\rho$  не является малым, если  $m$  велико). Для определения положения равновесия (3.3.5) получаем уравнение

$$c_2 \rho^2 + c_1 \rho + c_0 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} c_2 &= \mu \sin \alpha_d \cos \alpha_d (3\zeta - 2m), \\ c_1 &= m\mu (\cos^2 \alpha_d - \sin^2 \alpha_d) - \mu\zeta \left( \frac{1}{2} \sin^2 \alpha_d + 2 \cos^2 \alpha_d \right), \\ c_0 &= m\mu \sin \alpha_d \cos \alpha_d. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Для выбранной динамической конфигурации спутника ( $B > C$ ) положение равновесия определяется выражением

$$\rho_0 = \left( -c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_0c_2} \right) / 2c_2. \quad (3.3.7)$$

Заметим, что  $c_2 \neq 0$  при реалистичных параметрах спутника. Для спутника с параметрами  $A = 1.5$ ,  $B = 1.7$ ,  $C = 1.3$  кг·м<sup>2</sup>/с,  $k = 1.5 \cdot 10^6$  Н·м·с/Тл<sup>2</sup>,  $\zeta = 3$ , на орбите высотой 550 км получаем значения характерных величин магнитного управляющего момента  $\mu \approx 0.37$  и гравитационного момента  $\lambda = 3\lambda_B \approx -0.35$ . Пусть требуемое положение спутника в плоскости орбиты  $\alpha_d = 40^\circ$ . Тогда новое положение равновесия  $\alpha' = \alpha_d + \rho_0 \approx 34.5^\circ$ . Несмотря на то, что характерные величины управляющего и возмущающего моментов близки, отклонение от требуемого положения  $\rho$  невелико. Линеаризуем уравнение (3.3.4) около положения  $\alpha'$ , положив  $\alpha = \alpha' + x$ ,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \mu \left[ m(b^2 - a^2) - d\zeta (a \cos u - 2b \sin u)^2 - 2c\zeta (a \cos u - 2b \sin u)(b \cos u + 2a \sin u) \right] x + \\ &+ \mu \left[ mab - c\zeta (a \cos u - 2b \sin u)^2 \right] - \mu(1 + 3 \sin^2 u) \dot{x}, \end{aligned}$$

где  $a = \sin \alpha'$ ,  $b = \cos \alpha'$ ,  $c = \sin \rho_0$ ,  $d = \cos \rho_0$ . Переходя к двойному аргументу широты, это уравнение приведем к виду

$$\ddot{x} = \mu [f_0(u) + f_1(u)x + f_2(u)\dot{x}],$$

где

$$f_i(u) = a_i + b_i \cos 2u + c_i \sin 2u,$$

$$a_1 = m(b^2 - a^2) - d\zeta(2b^2 + 1/2a^2) + 3c\zeta ab, \quad a_0 = mab - c\zeta(2b^2 + 1/2a^2), \quad a_2 = -5/2,$$

$$b_1 = d\zeta(2b^2 - 1/2a^2) - 5c\zeta ab, \quad b_0 = c\zeta(2b^2 - 1/2a^2), \quad b_2 = 3/2,$$

$$c_1 = 2d\zeta ab + 2c\zeta(b^2 - a^2), \quad c_0 = 2abc\zeta, \quad c_2 = 0.$$

Наконец, представим уравнения в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(u)\mathbf{x} + \mathbf{g}(u), \quad (3.3.8)$$

где  $\mathbf{x} = (x, \dot{x})$ ,

$$\mathbf{A}(u) = \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f_1(u) & f_2(u) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}(u) = (0, \mu f_0(u)).$$

Будем численно искать амплитуды  $\pi$ -периодических решений (3.3.8) в зависимости от величин управляющего магнитного и возмущающего гравитационного моментов. Процедура поиска основывается на следующих рассуждениях. Согласно [137], если мультипликаторы однородной системы (3.3.8) меньше единицы, то система асимптотически устойчива. Это, в свою очередь, означает, что каждое её решение асимптотически устойчиво. Однако согласно [137] если тривиальное решение линейной однородной системы асимптотически устойчиво при  $t \rightarrow \infty$ , то неоднородная система является асимптотически устойчивой и (3.3.8) имеет единственное  $\pi$ -периодическое решение вида

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{X}(u) [\mathbf{E} - \mathbf{X}(\pi)]^{-1} \left\{ \int_0^u \mathbf{X}^{-1}(\tau) \mathbf{g}(\tau) d\tau + \mathbf{X}(\pi) \int_u^\pi \mathbf{X}^{-1}(\tau) \mathbf{g}(\tau) d\tau \right\}, \quad (3.3.9)$$

где  $\mathbf{X}(u)$  – нормированная при  $t=0$  фундаментальная матрица однородной системы. Если неоднородная система является асимптотически устойчивой, все её решения также являются асимптотически устойчивыми. Периодическое решение также является асимптотически устойчивым, и все остальные решения сходятся к нему. Таким образом получаем, что все решения сходятся к решению (3.3.9), которое определяет движение в установившемся режиме.

На Рис. 3.3.1 и 3.3.2 представлен результат поиска амплитуд периодических решений – минимальное и максимальное значения угла  $\alpha_0 = \alpha_d + \rho_0 + x$ . Для каждой пары значений  $\lambda$ ,  $\mu$  согласно (3.3.7) вычисляется смещение  $\rho_0$  и ищется периодическое решение уравнения (3.3.8). Другие параметры спутника и орбиты сохранены.

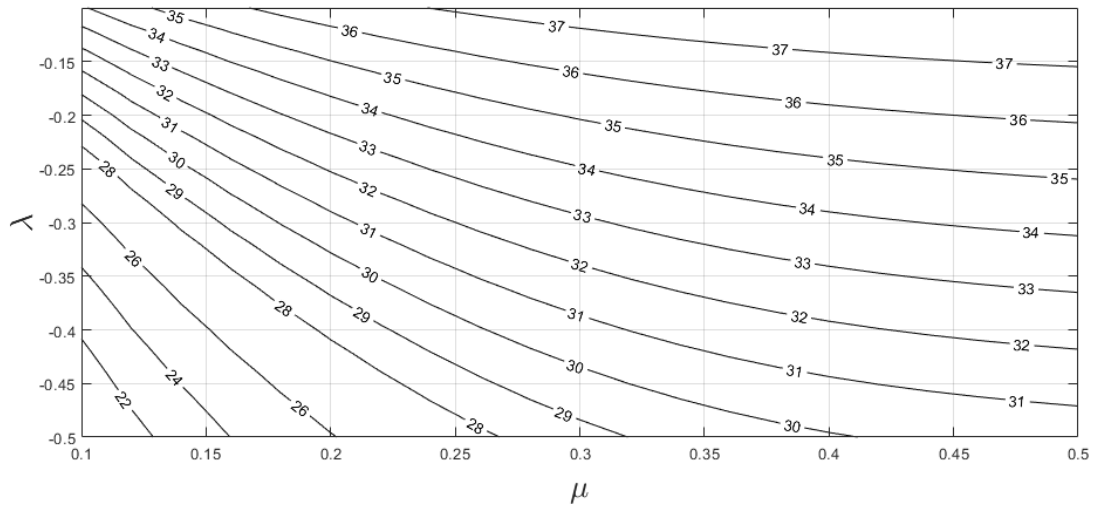


Рис. 3.3.1. Минимальное значение угла  $\alpha$

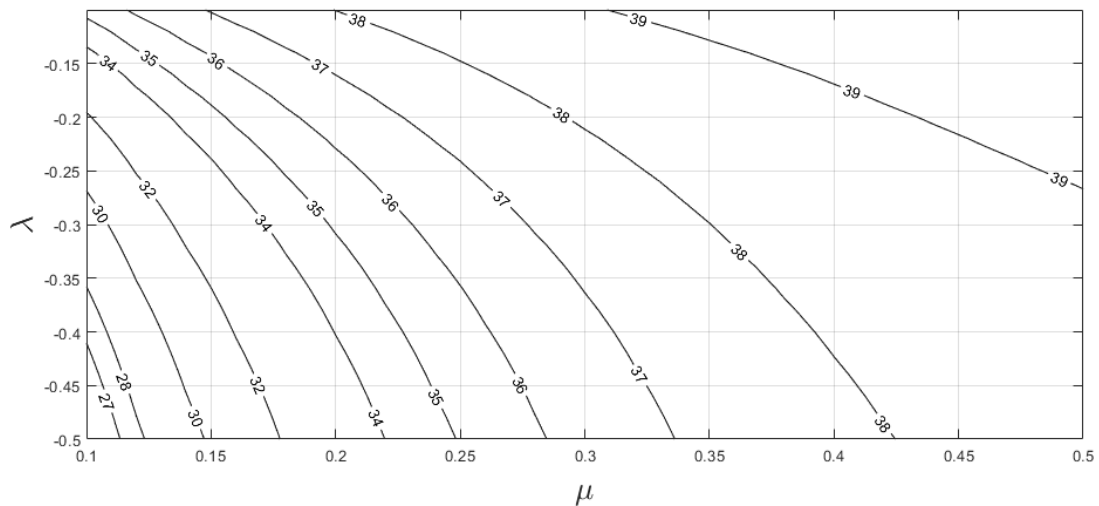


Рис. 3.3.2. Максимальное значение угла  $\alpha$

Как и следовало ожидать, с ростом  $\mu$  (величина магнитного управляющего момента) амплитуда увеличивается – спутник ближе к требуемому положению  $\alpha_d = 40^\circ$ . С ростом  $\lambda$  по абсолютной величине (величина гравитационного момента) амплитуда уменьшается – спутник ближе к устойчивому в гравитационном поле положению равновесия  $\alpha = 0$ . Для

рассмотренного выше частного примера угол  $\alpha$  находится в пределах  $32.58^\circ$ - $38^\circ$ . Численное моделирование (Рис. 3.3.3) уравнения (3.3.4) дает границы  $32.6^\circ$ - $38^\circ$ .

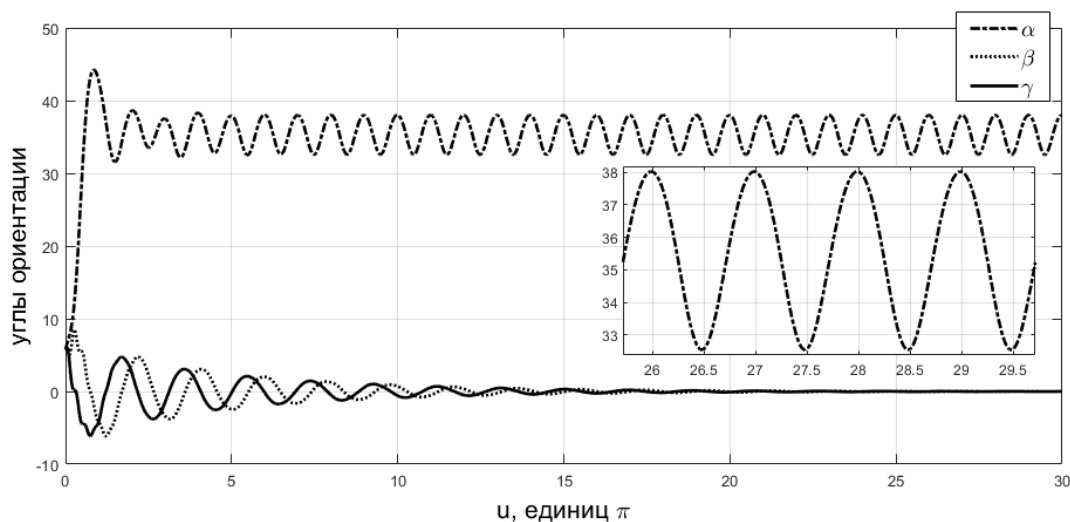


Рис. 3.3.3. Результат численного моделирования движения спутника

При поиске амплитуд периодических решений также находятся начальные данные этих решений. При численном моделировании эта информация не используется. Рис. 3.3.3 получен при начальных данных 0.1 по каждому углу и угловой скорости. Со временем движение выходит на полученное выше периодическое решение для  $\alpha$  и  $\beta = \gamma = 0$ . Поэтому можно ожидать, что это решение асимптотически устойчиво.

Полученные плоские периодические решения на полярной орбите можно использовать [152] для построения движений спутника на приполярной орбите. При этом логично предположить, что появятся колебания спутника вне плоскости орбиты, пусть и с малой амплитудой. Чтобы использовать полученное в предыдущем разделе периодическое плоское движение  $\alpha = \alpha_d + \rho_0 + x$ ,  $\beta = \gamma = 0$  (и соответствующие величины скоростей  $\omega_2, \omega_3, \omega_1$ ) в качестве порождающего для системы (3.3.2), необходимо показать его асимптотическую устойчивость. В этом случае найденное плоское периодическое решение окажется единственным, и ему будет соответствовать единственное периодическое решение системы (3.3.2) при малом изменении наклона.

Чтобы исследовать устойчивость плоского периодического решения, составим уравнения в вариациях для (3.3.2), соответствующие найденному в предыдущем разделе решению. Обозначая знаком « $\Delta$ » вариацию  $\mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha, \beta, \gamma)$ , имеем

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_\Delta(u) \Delta \mathbf{x}, \quad (3.3.10)$$

$$\mathbf{A}_{\Delta} = \mathbf{A}_{\text{демпф}} + \mathbf{A}_{\text{поз}} + \mathbf{A}_{\text{кин}} + \mathbf{A}_{\text{грав гир}}.$$

Матрица, соответствующая демпфирующей части управления

$$\mathbf{A}_{\text{демп}} = \begin{pmatrix} -\varepsilon\theta_A f_1^2 & 0 & -\varepsilon\theta_A f_1 f_2 & 0 & -\varepsilon\theta_A \omega_{\text{орб}} f_2^2 & -\varepsilon\theta_A \omega_{\text{орб}} f_1 f_2 \\ 0 & -\varepsilon'(1+3\sin^2 u) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon f_1 f_2 & 0 & -\varepsilon f_2^2 & 0 & \varepsilon\omega_{\text{орб}} f_1 f_2 & \varepsilon\omega_{\text{орб}} f_1^2 \\ & & & \mathbf{0}_{3 \times 6} & & \end{pmatrix},$$

$$f_1 = 2 \cos \alpha' \sin u - \sin \alpha' \cos u, \quad f_2 = 2 \sin \alpha' \sin u + \cos \alpha' \cos u.$$

Матрица, соответствующая позиционной части управления

$$\mathbf{A}_{\text{поз}} = \zeta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mu g_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon g_2 f_1 f_2 & -\varepsilon g_2 f_1^2 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix},$$

$$g_1 = 2 \sin(\alpha' - \alpha_d) [1/2 \cos(\alpha' + u) - 3/2 \cos(\alpha' - u)] \times [3/2 \sin(\alpha' - u) - 1/2 \sin(\alpha' + u)] - \\ - \cos(\alpha' - \alpha_d) [3/2 \sin(\alpha' - u) - 1/2 \sin(\alpha' + u)]^2,$$

$$g_2 = \cos \alpha' \sin \alpha_d - \cos \alpha' \sin \alpha_d.$$

Матрица, соответствующая кинематическим уравнениям

$$\mathbf{A}_{\text{кин}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица, соответствующая гироскопическому и гравитационному моментам

$$\mathbf{A}_{\text{грав гир}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_A - 1 & 0 & -3\lambda_A \sin \alpha' \cos \alpha' & -3\lambda_A \cos^2 \alpha' - \xi_A \\ 0 & 0 & 0 & 3\lambda_B \cos 2\alpha' & 0 & 0 \\ 1 - \xi_C & 0 & 0 & -3\lambda_C \cos 2\alpha' & -\xi_C - 3\lambda_C \sin^2 \alpha' & -3\lambda_C \sin \alpha' \cos \alpha' \\ & & & \mathbf{0}_{3 \times 6} & & \end{pmatrix}.$$

Для исследования устойчивости проводился численный поиск матрицы монодромии уравнения (3.3.10) с параметрами, использованными при получении Рис. 3.3.1 и 3.3.2 (включая перебор значений  $\lambda$  и  $\mu$ ). Максимальные значения характеристических показателей матрицы монодромии представлены на Рис. 3.3.4.

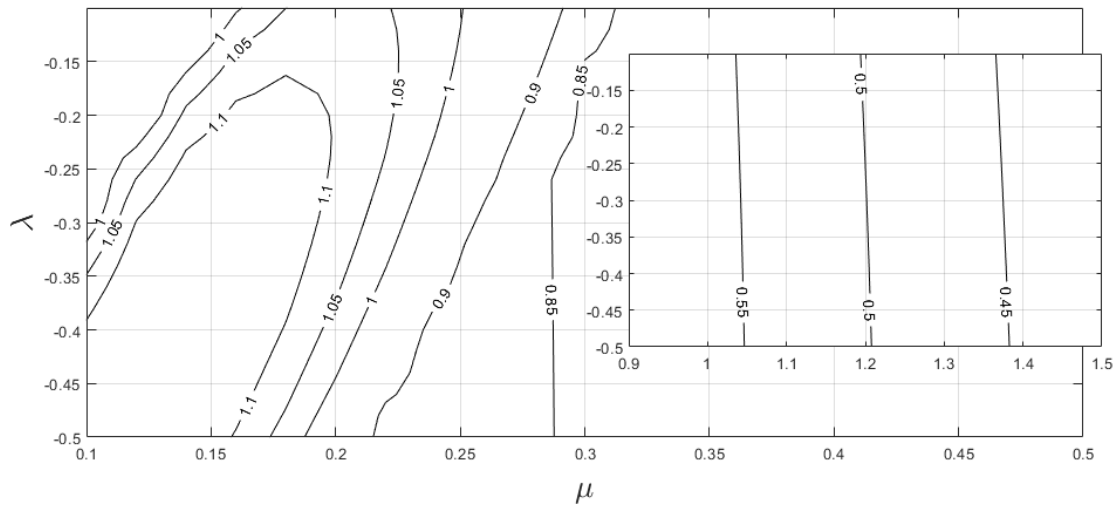


Рис. 3.3.4. Устойчивость плоских периодических решений

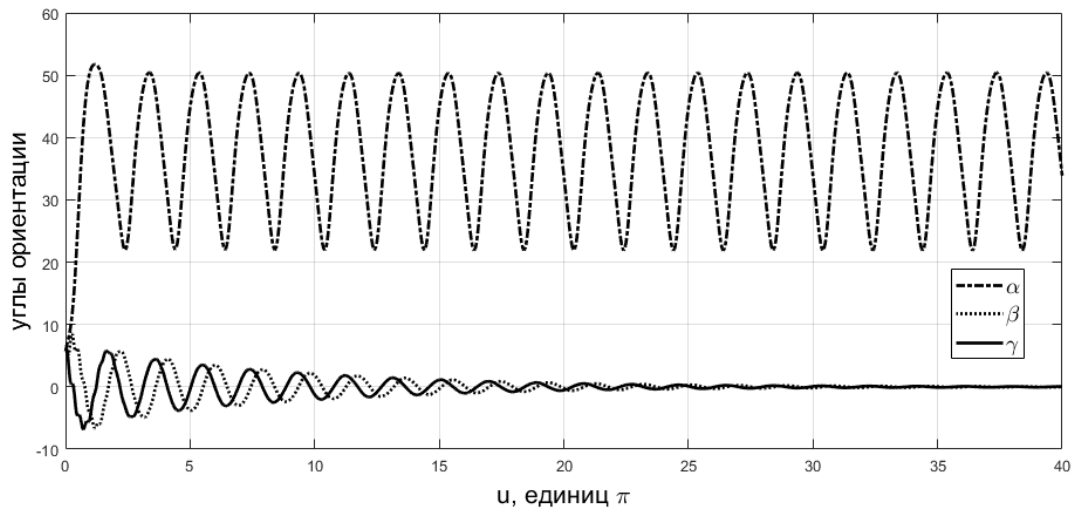


Рис. 3.3.5. Возрастание амплитуды колебаний

Из Рис. 3.3.4 видно, что при малом управляющем моменте полученное плоское решение оказывается неустойчивым. Гравитационный момент вносит слишком большое возмущение. При этом, как и следовало ожидать, при малом гравитационном моменте снова наблюдается устойчивость. Численное моделирование уравнения (3.3.4) показывает существование периодического решения и в области неустойчивости, но с большой амплитудой (колебания в пределах до  $60^\circ$ ). В приближенных уравнениях (3.3.8), полученных в предположении небольшой амплитуды колебаний, этот результат переходит в неустойчивость. Также заметим, что колебания остаются плоскими (уравнение (3.3.4) верно в любом случае для полярной орбиты). Таким образом, качественное изменение решения имеет место лишь для уравнений (3.3.8), тогда как для исходных уравнений (3.3.4)



наблюдается лишь количественное изменение. С учетом этого замечания можно несколько расширить область применимости результата, приведенного на Рис. 3.3.1 и 3.3.2. Проведенное численное моделирование показывает, что его можно использовать при характеристических показателях примерно до 1.1. Один пример колебаний с большой, но еще приемлемой амплитудой колебаний, приведен на Рис. 3.3.5. Пример получен при  $\mu \approx 0.22$  и  $\lambda \approx -0.176$ , что соответствует  $A = 1.4 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , характеристический показатель чуть больше, чем 1.1.

### *Пространственное движение на приполярной орбите*

Рассмотрим движение на орбите с наклоном, мало отличающимся от  $90^\circ$ . Решение уравнений (3.3.2) представим в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}_1,$$

где  $\delta = \pi/2 - i$  – малый параметр,  $\mathbf{x}_0$  – порождающее решение, полученное в предыдущем разделе. Уравнение, определяющее первое приближение  $\mathbf{x}_1$ , имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}(u)\mathbf{x}_1 + \mathbf{g}(u).$$

Матрица  $\mathbf{A}$  получена в предыдущем разделе. Вектор  $\mathbf{g}$  суть

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \varepsilon \theta_A \omega_{orb} f_2 \\ 0 \\ -\varepsilon \omega_{orb} f_1 + \varepsilon \zeta g_2 f_1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения, определяющие движение в плоскости орбиты (переменные  $\alpha_{(1)}, \omega_{2(1)}$ ), отделяются и имеют нулевое периодическое решение. В первом приближении движение в плоскости орбиты не меняется. Колебания вне плоскости (переменные  $\beta_{(1)}, \gamma_{(1)}, \omega_{3(1)}, \omega_{1(1)}$ ) в силу вида функции  $\mathbf{g}$  оказываются  $2\pi$ -периодическими. На Рис. 3.3.6 представлен результат поиска таких периодических решений – амплитуды отклонения оси установки тангажного маховика от плоскости орбиты с наклоном  $80^\circ$ . На Рис. 3.3.7 представлена начальная фаза  $\varphi_\beta$  колебаний угла  $\beta$  в предположении, что  $\beta_{(1)} = A_\beta \sin(u + \varphi_\beta)$ . При этом нужно отметить, что всегда  $\varphi_\gamma - \varphi_\beta \approx \pi/2$ , и можно считать, что  $\varphi_\beta \approx -\pi/4$ . Рис. 3.3.6 и 3.3.7 построены для величин управляющего момента  $\mu \geq 0.2$ , соответствующих устойчивому (за исключением небольшой области, в которой, впрочем, плоское решение все еще достаточно точно) плоскому решению на полярной орбите.

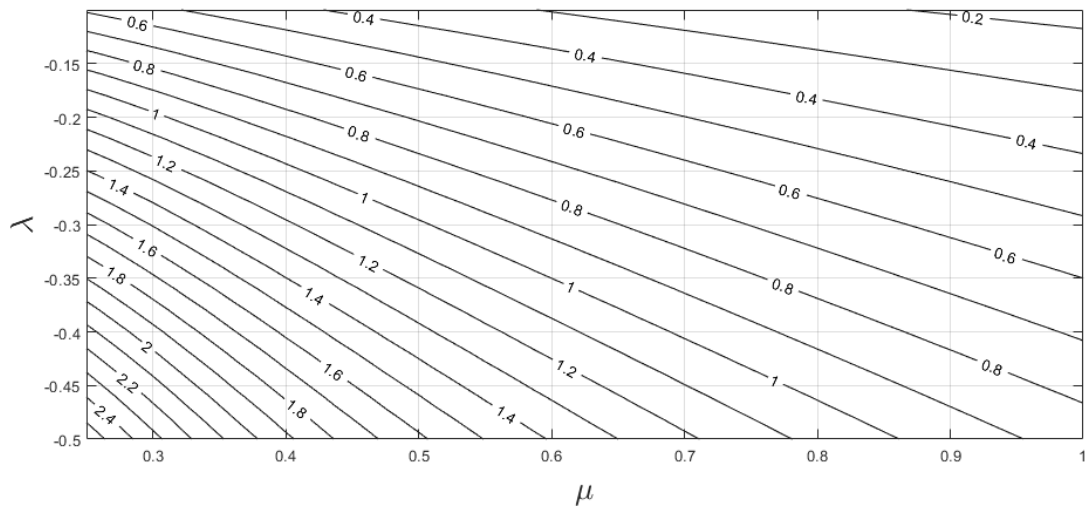
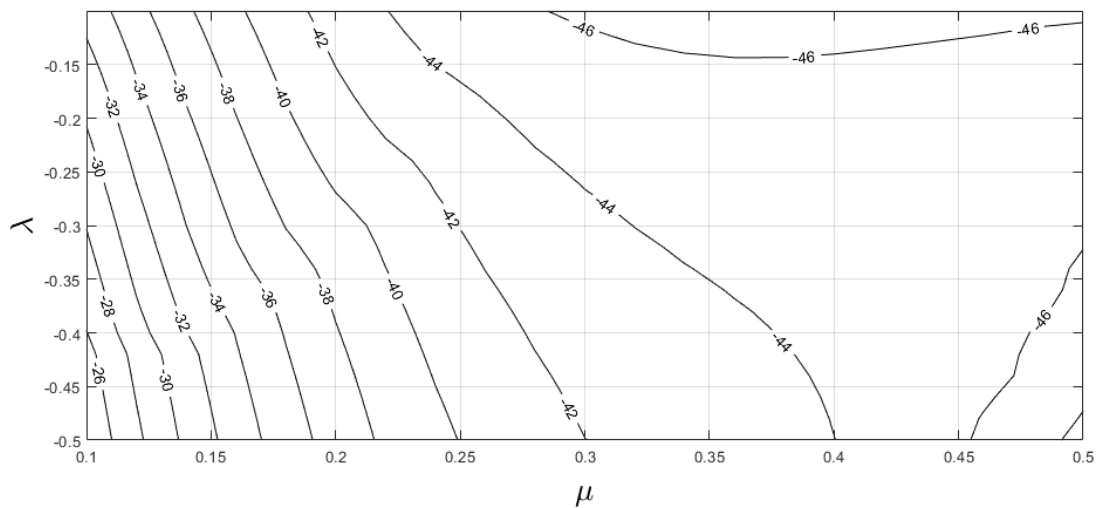


Рис. 3.3.6. Амплитуда отклонения оси маховика от нормали

Рис. 3.3.7. Начальная фаза колебаний  $\beta$ 

Рост по абсолютной величине  $\lambda$  означает увеличение момента инерции  $A$  (границы изменения 1.41-1.58 кг·м<sup>2</sup>, другие два момента инерции не изменяются), что в свою очередь влечет уменьшение параметра  $\lambda_c$ . Таким образом, действие восстанавливающего гравитационного момента вне плоскости орбиты уменьшается, и отклонение оси установки маховика от нормали увеличивается. С ростом управляющего магнитного момента отклонение уменьшается в силу действия демпфирующей части момента совместно с тангажным маховиком (величина кинетического момента маховика приводит к превалированию его действия над действием паразитной части восстанавливающего магнитного момента). Интересно отметить, что при большой величине магнитного и гравитационного моментов наблюдается обратная зависимость. Это связано с тем, что

плоское решение, полученное в предыдущем разделе, оказывается недостаточно точным. Для рассмотренного выше частного примера ( $A=1.5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ) на орбите наклонением  $80^\circ$  получаем амплитуды  $\delta\beta_{(1)}=1.51^\circ$ ,  $\delta\gamma_{(1)}=1.31^\circ$  и отклонение оси установки маховика от нормали к плоскости орбиты до  $1.29^\circ$ . Численное моделирование линейных уравнений дает отклонение оси на угол до  $1.26^\circ$ . Моделирование исходных нелинейных уравнений движения (1.3.2)-(1.3.6) показывает, что результатом, представленным на Рис. 3.3.6, можно пользоваться для орбит с произвольным наклонением, кроме приэкваториальных. Рис. 3.3.6 получен для орбиты наклонением  $80^\circ$  ( $\delta=10^\circ$ ). Для орбиты наклонением  $40^\circ$  ( $\delta=50^\circ$ ) отклонение оси установки маховика от нормали составляет около  $7.5^\circ$  – примерно в 6 раз больше (при сравнении результатов численных расчетов). Фактически, наблюдается линейная зависимость точности ориентации оси маховика от наклона орбиты: меняется  $\delta$ , тогда как решение  $\mathbf{x}_1$ , полученное в этом разделе, примерно сохраняется. Ошибка в примерном определении амплитуды колебаний увеличивается.

#### ***Плоское движение на орбите с наклонением, близким к $45^\circ$***

Такая закономерность обусловлена наличием тангажного маховика и демпфирующей частью управления и верна лишь для движения вне плоскости орбиты. Движение в плоскости, обеспечиваемое управлением (3.3.1), сохраняется лишь для орбит с высоким наклонением (примерно до  $50^\circ$ ). При малом наклонении в установившемся режиме, когда ось установки маховика примерно совпадает с нормалью к плоскости орбиты, первая и третья компоненты вектора геомагнитной индукции малы. Управление в плоскости орбиты мало по сравнению с гравитационным. Однако оказывается, что ожидаемое равномерное ухудшение точности ориентации на орбитах с высоким наклонением дополняется резким ухудшением на орбитах наклонением около  $45\text{-}50^\circ$ . Моделирование показывает резкое увеличение амплитуды периодических колебаний. Найдем примерное наклонение, при котором происходит этот скачок амплитуды.

Рассмотрим движение спутника на орбите с наклонением, близким к  $45^\circ$ ,  $i = \pi/4 + \vartheta$ . Здесь  $\vartheta$  – новый малый параметр. Тогда выражение для вектора геомагнитной индукции в орбитальной системе принимает вид

$$\mathbf{B} = B_0/\sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos u \\ 1 \\ -2 \sin u \end{pmatrix} + \vartheta B_0/\sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos u \\ -1 \\ -2 \sin u \end{pmatrix}.$$

Позиционная часть управляющего момента в линейном приближении уменьшается примерно в 2 раза в силу квадратичной зависимости от компонент вектора индукции. Существенно меняется демпфирующая часть, при этом появляется зависимость движения в плоскости от движения вне плоскости. Чтобы упростить исследование, отделив движение в плоскости, воспользуемся тем фактом, что движение вне плоскости представляет собой периодические колебания с небольшой амплитудой. Будем считать, что

$$\beta = A_{\beta\gamma} \sin(u - \pi/4), \quad \gamma = A_{\beta\gamma} \sin(u + \pi/4). \quad (3.3.11)$$

Здесь для упрощения дальнейших вычислений амплитуду  $A_{\beta\gamma}$  колебаний углов  $\beta$  и  $\gamma$  считаем одинаковой. Эту амплитуду можно оценить по приведенному в предыдущем разделе примеру. Увеличение полученной примерно амплитуды пропорционально увеличению наклона. В результате амплитуды колебаний углов на орбите наклоном  $45^\circ$  составляют  $A_\beta \approx 6.8^\circ$ ,  $A_\gamma \approx 5.9^\circ$ , из них определено среднее значение  $A_{\beta\gamma}$ . Фазы были получены в предыдущем разделе и составляют  $\varphi_\beta \approx -44^\circ$ ,  $\varphi_\gamma \approx 49^\circ$ , однако в (3.3.11) они заменены на упрощающие дальнейшие выкладки  $\mp 45^\circ$ . После учета этих предположений получаем следующее уравнение движения в плоскости орбиты,

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} = & m \sin \alpha \cos \alpha + \mu \zeta \sin(\alpha_d - \alpha) \left[ (1 + 2\mathcal{G})(\cos u \sin \alpha - 2 \sin u \cos \alpha)^2 + \right. \\ & \left. + 2A_{\beta\gamma} \sin(u + \pi/4)(2 \sin u \cos \alpha - \cos u \sin \alpha) \right] - \mu(1 + 3 \sin^2 u) \dot{\alpha} - \\ & - 2\mu A_{\beta\gamma} \dot{\alpha} \left[ \mathcal{G}(1 + 3 \sin^2 u) + \sin(u + \pi/4)(2 \cos \alpha \sin u - \sin \alpha \cos u) + \right. \\ & \left. + \sin(u - \pi/4)(2 \sin \alpha \sin u + \cos \alpha \cos u) \right] + \\ & + \varepsilon' A_{\beta\gamma} \left[ \cos(u + \pi/4)(2 \sin \alpha \sin u + \cos \alpha \cos u) - \right. \\ & \left. \cos(u - \pi/4)(2 \cos \alpha \sin u - \sin \alpha \cos u) \right]. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Подчеркнутая часть аналогична (3.3.4). Дальнейшее исследование проведем так же, как для уравнения (3.3.5). Усредним (3.3.12) в предположении малых управляющего и гравитационного моментов и определим положение равновесия  $\alpha'$ . При этом изменяются коэффициенты  $c_i$ , полученные выше,

$$\begin{aligned} c'_2 &= c_2 - 1/4 A_{\beta\gamma} \mu (b + a) (\cos \pi/4 - 2 \sin \pi/4) - 2A_{\beta\gamma} \mu \zeta (-\cos \pi/4 a - 1/2 \sin \pi/4 b), \\ c'_1 &= c_1 + 1/2 A_{\beta\gamma} \mu (-a + b) (\cos \pi/4 - 2 \sin \pi/4) - 2A_{\beta\gamma} \mu \zeta (\cos \pi/4 b - 1/2 \sin \pi/4 a), \\ c'_0 &= c_0 + 1/2 A_{\beta\gamma} \mu (b + a) (\cos \pi/4 - 2 \sin \pi/4). \end{aligned}$$

В выражениях для  $c_i$  (3.3.6), следует заменить  $\zeta$  на  $\zeta(1 + 2\mathcal{G})$ . Далее, линеаризуя уравнения движения, получаем

$$\ddot{x} + \varphi_2 \dot{x} + \varphi_1 x + \varphi_0 = 0, \quad (3.3.13)$$

$$\varphi_2 = -f_2 - f_2', \quad \varphi_1 = -f_1 - f_1', \quad \varphi_0 = -f_0 - f_0',$$

$$f_2' = -2\vartheta(1 + 3\sin^2 u) - 2A_{\beta\gamma} \sin(u + \pi/4)(-a \cos u + 2b \sin u) - \\ - 2A_{\beta\gamma} \sin(u - \pi/4)(b \cos u + 2a \sin u),$$

$$f_1' = A_{\beta\gamma} \cos(u - \pi/4)(b \cos u + 2a \sin u) - A_{\beta\gamma} \cos(u + \pi/4)(a \cos u - 2b \sin u) - \\ - 2A_{\beta\gamma} \zeta \sin(u + \pi/4) [c(-2a \sin u - b \cos u) + d(2b \sin u - a \cos u)],$$

$$f_0' = -A_{\beta\gamma} \cos(u - \pi/4)(-a \cos u + 2b \sin u) + A_{\beta\gamma} \cos(u + \pi/4)(b \cos u + 2a \sin u) - \\ - 2A_{\beta\gamma} \zeta \sin(u + \pi/4)c(2b \sin u - a \cos u).$$

Выражения для  $f_i$  приведены в выше (в них снова нужно положить  $\zeta \rightarrow \zeta(1 + 2\vartheta)$ ). В линеаризованных уравнениях резкое возрастание амплитуды можно интерпретировать как возникновение неустойчивости.

На Рис. 3.3.8 приведены характеристические показатели (3.3.13) в зависимости от наклона орбиты и амплитуды колебаний вне плоскости орбиты (эта амплитуда в основном определяется параметрами тангажного маховика, не влияющими на уравнение (3.3.13)). По Рис. 3.3.8 видно, что устойчивость теряется при наклонении орбиты около 50-52°. При этом увеличение амплитуды колебаний вне плоскости отрицательно сказывается на устойчивости.

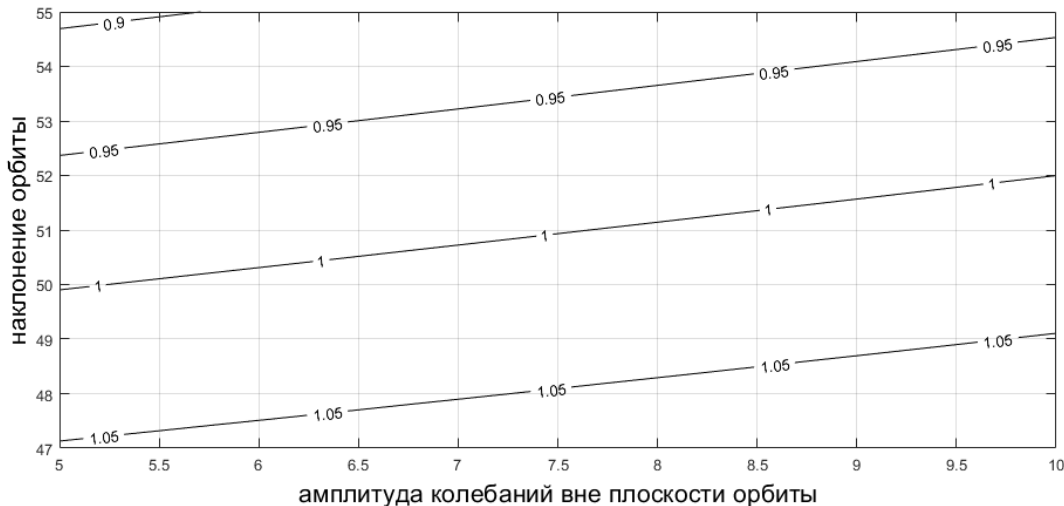


Рис. 3.3.8. Устойчивость решений на орбите наклонением около 45°

### Численное моделирование

При проведении моделирования движения КА необходимо модифицировать управление (3.3.1), использующее угол ориентации  $\alpha$ . Такой подход удобен при построении

управления и исследовании движения аппарата, но нежелателен для практической реализации из-за возможного вырождения углов ориентации. Разложим входящую в (3.3.1) функцию синуса как  $\sin(\alpha_d - \alpha) = \sin \alpha_d \cos \alpha - \cos \alpha_d \sin \alpha$ . Далее, считая движение происходящим вблизи плоскости орбиты (ось установки ротора ориентировалась практически по нормали к плоскости орбиты), положим  $\cos \beta \approx 1$ . Тогда тригонометрические функции угла  $\alpha$  могут быть найдены из выражений для элементов матрицы направляющих косинусов (1.3.1) как  $\cos \alpha \approx a_{11}$ ,  $\sin \alpha \approx -a_{13}$ . Таким образом, управляющий дипольный момент, используемый в моделировании, формируется в виде

$$m_1 = -k\zeta\omega_{orb}B_0(\sin \alpha_d a_{11} + \cos \alpha_d a_{13})B_{x3}.$$

Проведем моделирование движения КА на полярной орбите с параметрами, приведенными после формулы (3.3.7). Таким образом, моделирование в значительной степени совпадает с теоретически исследованным случаем. Кроме модифицированного управления, отличие заключается в использовании нелинейных уравнений пространственного движения (начальные данные КА также не входят в линейную окрестность). Как модификация управления, так и использование нелинейных уравнений, можно рассматривать как возмущения для линейной системы (3.3.2) с управлением (3.3.1)-(3.3.3). Поскольку найденное решение асимптотически устойчиво, можно ожидать выхода КА на этот режим движения.

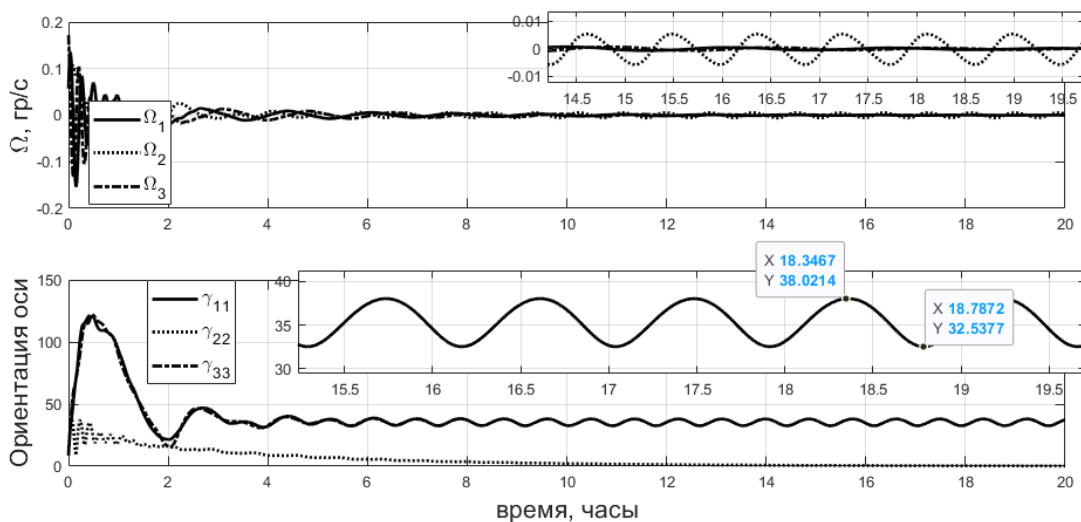


Рис. 3.3.9. Моделирование для полярной орбиты

После того, как КА ориентируется осью установки ротора по нормали к плоскости орбиты ( $\gamma_{22} \approx 0$ ), угол поворота в плоскости приближенно определяется как  $\alpha \approx \gamma_{11} \approx \gamma_{33}$ .

Результаты, полученные по Рис. 3.3.1 и 3.3.2 показывают, что угол  $\alpha$  колеблется в диапазоне  $32.58^\circ$ - $38^\circ$  для рассматриваемого примера. Величины, полученные в численном моделировании на Рис. 3.3.9, близки к этому результату.

Результаты, приведенные на Рис. 3.3.6 для движения на приполярной орбите, также задают весьма точное предсказание движения КА. В Таблице 3.3.1 приведены результаты сравнения приближенных теоретических и численных результатов для трех пар параметров величин управляющего и гравитационного моментов, и трех наклонений орбиты.

Таблица 3.3.1. Пространственное движение

Параметры $\mu$ и $\lambda$	Наклонение	Амплитуда колебаний оси ротора	Численные результат
0.363 и -0.36	80	1.55	1.52
	70	3.1	3.5
	60	4.65	5.4
0.625 и -0.44	80	1.19	1.12
	70	2.38	2.5
	60	3.57	4.2
0.663 и -0.24	80	0.63	0.62
	70	1.26	1.35
	60	1.89	2.34

Различие между приближенным и численным результатами увеличивается с уменьшением наклонения орбиты. Как и следовало ожидать, теоретические результаты можно использовать лишь на приполярных орбитах. Отметим, что полученные выше амплитуды фактически не зависят от наклонения орбиты, конечные отклонения оси установки ротора от нормали к плоскости орбиты  $x_1$  получаются при умножении амплитуды на  $\delta = \pi/2 - i$ .

На Рис. 3.3.10 приведен пример моделирования движения КА с учетом возмущающих факторов. Параметры управления и гравитационного моментов равны  $\mu=0.775$ ,  $3\lambda_B=-0.36$ , наклонение орбиты  $80^\circ$ . Учитываются следующие возмущающие факторы:

- Возмущающий момент неизвестной природы, немного меньший, чем гравитационный.
- Аэродинамический момент. Стороны КА 52, 42, 36 см, смещение центра масс 2 см по первой и второй осям. Смещение по первой оси выбрано таким образом, что аэродинамический момент является возмущающим и действует в том же направлении,

что и гравитационный, что ухудшает ожидаемую точность поворота в плоскости орбиты. Смещение по второй оси снижает точность стабилизации оси установки ротора по нормали к плоскости орбиты. Плотность  $1.8 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^3$  соответствует средней солнечной активности.

- Остаточный дипольный момент на уровне примерно  $10^{-3} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ .
- Ошибка определения ориентации  $0.1^\circ$ . Ошибка определения угловой скорости имеет постоянный сдвиг на уровне  $10^{-5} \text{ с}^{-1}$  и случайную компоненту с дисперсией  $10^{-4} \text{ с}^{-1}$ .
- Эксцентриситет орбиты 0.001.
- Модель геомагнитного поля IGRF.

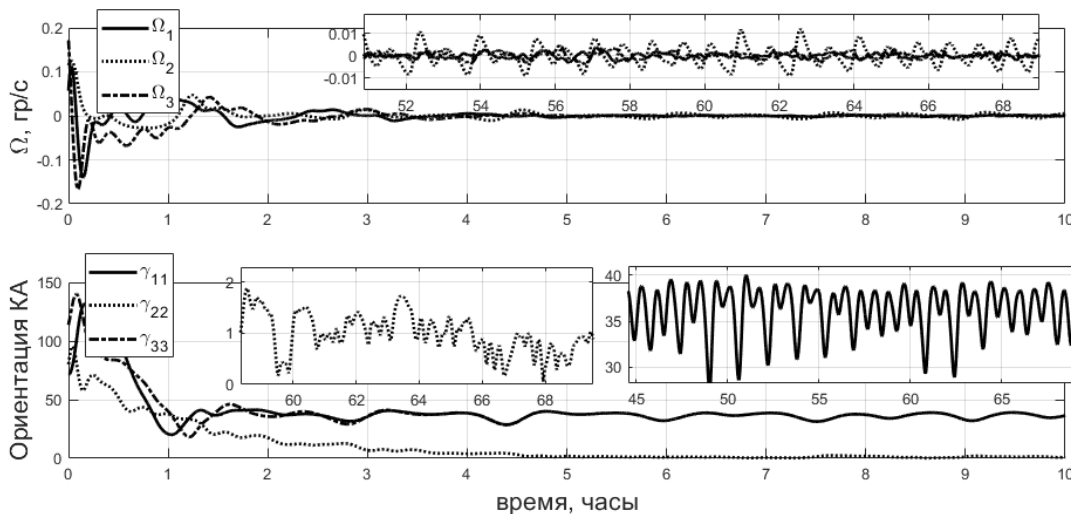


Рис. 3.3.10. Моделирование движения с учетом возмущений

Ожидаемое согласно теоретическим расчетам отклонение оси установки ротора от нормали к плоскости орбита составляет около одного градуса. Наблюдаемое на Рис. 3.3.11 отклонение существенно выше, что вызвано влиянием возмущающего аэродинамического момента. Движение в плоскости орбиты удастся предсказать с большей точностью. Так, поворот КА по углу тангажа должен находиться в пределах 34-29 градусов. На Рис. 3.3.11 в целом этот результат подтверждается, но наблюдаются суточные отклонения от предсказанного результата. Это связано с вращением магнитного поля вместе с Землей в модели IGRF. Отметим, что результаты моделирования на Рис. 3.3.10 и 3.3.11 получены при относительно слабом управляющем воздействии. Так, типичная величина управляющего дипольного момента составляет около  $0.05 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ , хотя для КА с рассматриваемыми моментами инерции типичные магнитные катушки могут создавать моменты, большие на порядок. В первую очередь, малый управляющий дипольный момент был выбран для



проверки теоретических результатов, полученных выше и требующих наличия малого параметра, характеризующего величину управляющего воздействия. С практической точки зрения такой выбор позволяет существенно снизить энергопотребление системы ориентации, сохраняя при этом способность решить задачи стабилизации с точностью в несколько градусов. Повышение коэффициента усиления и, соответственно, дипольного момента катушек приводит к улучшению показателей работы системы ориентации. Поскольку показана асимптотическая устойчивость требуемого управляемого режима движения, нет необходимости в специальной процедуре подбора коэффициента усиления – его можно повышать до достижения предела выдачи управляющего дипольного момента катушками. Так, повышение коэффициента усиления на порядок приводит к колебаниям в плоскости орбиты в пределах 38-40 градусов. Влияние возмущающих факторов снижается. Корректировка целевого угла поворота  $\alpha_d$  с учетом последующего смещения «равновесия»  $\alpha'$  позволяет сместить колебания в диапазон 39-41 градуса, но не сказывается на амплитуде колебаний. Моделирование также проводилось для низкой орбиты высотой 350 км. В этом случае точность стабилизации снижается до 10 градусов из-за повышения величины возмущающего аэродинамического момента более чем на порядок. Для улучшения точности стабилизации необходимо повышение управляющих дипольных моментов до уровня не менее  $1 \text{ A} \cdot \text{м}^2$ , равно как и кинетического момента маховика. Использование рассмотренной схемы управления по-прежнему возможно, хотя разработанная методика предсказания амплитуд колебаний применена быть не может.

#### **3.4. Поддержание вращения вокруг касательной к орбите**

В этом и следующем разделах рассматривается задача стабилизации КА, нетипичная для применения магнитных исполнительных элементов. А именно, аппарат должен вращаться с высокой – более нескольких оборотов в минуту – скоростью вокруг вектора линейной скорости на круговой орбите. Такая задача возникает при необходимости сканирования поверхности Земли и облачного покрова в метеорологических приложениях. В настоящее время для этого применяются комплексы МТВЗА, производимые АО «Российские космические системы» и устанавливаемые на аппаратах Метеор [48], AMSU, устанавливаемые на различных аппаратах NOAA, и SSMIS на аппарате DMSP-F16. Установка аналогичного устройства на малом КА позволит расширить диапазон частот, в которых доступны данные о состоянии околоземного пространства. Однако, установка вращающегося с высокой скоростью сканирующего зеркала на малом аппарате – сложная

техническая задача. Вместо этого предлагается осуществить закрутку всего КА. В отличие от крупного КА, несущего большое число научной аппаратуры, малый КА обычно оснащается одной основной полезной нагрузкой, и требования по ориентации всего аппарата можно установить, исходя из требований его основного научного прибора.

В рассматриваемой ситуации КА оказывается близок к стабилизации вращением. При этом вектор кинетического момента необходимо поворачивать в инерциальном пространстве с орбитальной скоростью. Магнитная система неспособна обеспечить такую скорость поворота. Поэтому в теле КА на оси вращения устанавливается ротор, компенсирующий кинетический момент корпуса. Фактически, скорость закрутки ротора определяет скорость вращения КА. Магнитная система управления используется, чтобы обеспечить околоузуловый суммарный кинетический момент и требуемую ориентацию оси вращения. Перейдем к исследованию движения такого аппарата, приняв следующие упрощающие предположения: КА является динамически симметричным, орбита круговая, геомагнитное поле – прямой диполь. Возмущающие факторы, помимо гравитационного момента, не учитываются.

#### ***Уравнения движения в полусвязанной системе координат***

Запишем уравнения движения (1.3.2), учитывая, что ротор с кинетическим моментом  $J_r$  и скоростью вращения  $\omega_r$  установлен по первой оси связанной системы координат,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A\omega_1 + J_r(\omega_1 + \omega_r)) + (C - B)\omega_2\omega_3 &= 3\omega_{orb}^2(C - B)a_{23}a_{33} + m_2B_0B_{x3} - m_3B_0B_{x2}, \\ B\frac{d}{dt}\omega_2 + (A - C)\omega_1\omega_3 + J_r(\omega_1 + \omega_r)\omega_3 &= 3\omega_{orb}^2(A - C)a_{13}a_{33} + m_3B_0B_{x1} - m_1B_0B_{x3}, \\ C\frac{d}{dt}\omega_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 - J_r(\omega_1 + \omega_r)\omega_2 &= 3\omega_{orb}^2(B - A)a_{13}a_{23} + m_1B_0B_{x2} - m_2B_0B_{x1}. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Далее  $\bar{A} = A + J_r$  обозначает осевой момент инерции КА с ротором. Аппарат осесимметричный,  $C = B$ . Опорной системой, относительно которой рассматривается движение КА, является орбитальная. Уравнения (3.4.1) в этом случае записываются как

$$\begin{aligned} \bar{A}\frac{d\omega_1}{dt} + J_r\frac{d\omega_r}{dt} &= m_2B_0B_{x3} - m_3B_0B_{x2}, \\ B\frac{d}{dt}\omega_2 + (\bar{A} - B)\omega_1\omega_3 + J_r\omega_r\omega_3 &= 3\omega_0^2(A - B)a_{31}a_{33} + m_3B_0B_{x1} - m_1B_0B_{x3}, \\ B\frac{d}{dt}\omega_3 + (B - \bar{A})\omega_1\omega_2 - J_r\omega_r\omega_2 &= 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} + m_1B_0B_{x2} - m_2B_0B_{x1}. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Запишем теперь эти уравнения в полусвязанной системе координат, не участвующей в осевом вращении КА. Введем безразмерные компоненты угловой скорости в полусвязанной системе как

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_1 &= \omega_1 / \omega_{op\delta}, \\
\tilde{\omega}_2 &= (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma) / \omega_{op\delta}, \\
\tilde{\omega}_3 &= (\omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma) / \omega_{op\delta},
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

безразмерную скорость вращения ротора обозначим  $\Omega_r = \omega_r / \omega_{op\delta}$ . В качестве безразмерного времени используем аргумент широты  $u = \omega_{op\delta} t$ . Компоненты управляющего дипольного момента в полусвязанной системе запишем в виде

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_1 &= B_0 m_1 / \omega_{op\delta}^2, \\
\tilde{m}_2 &= B_0 (m_2 \cos \gamma - m_3 \sin \gamma) / \omega_{op\delta}^2, \\
\tilde{m}_3 &= B_0 (m_2 \sin \gamma + m_3 \cos \gamma) / \omega_{op\delta}^2.
\end{aligned}$$

Тогда уравнения (3.4.2) и кинематические соотношения (1.3.6) в полусвязанной системе координат примут вид

$$\begin{aligned}
\bar{A} \dot{\tilde{\omega}}_1 + J_r \dot{\Omega}_r &= \\
&\tilde{m}_2 B_0 (B_1 \sin \alpha + B_3 \cos \alpha) + \tilde{m}_3 B_0 (B_1 \cos \alpha \sin \beta - B_2 \cos \beta - B_3 \sin \alpha \sin \beta), \\
B \dot{\tilde{\omega}}_2 + (\bar{A} - B) \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_3 + J_r \Omega_r \Omega_3 &= -3(A - B) \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta - \\
&\tilde{m}_1 B_0 (B_1 \sin \alpha + B_3 \cos \alpha) + \\
&\tilde{m}_3 B_0 (B_1 \cos \alpha \cos \beta + B_2 \sin \beta - B_3 \sin \alpha \cos \beta) - B \tilde{\omega}_3 (\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2 \operatorname{tg} \beta), \\
B \dot{\tilde{\omega}}_3 + (B - \bar{A}) \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 - J_r \Omega_r \tilde{\omega}_2 &= -3(B - A) \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta - \\
&\tilde{m}_1 B_0 (B_1 \cos \alpha \sin \beta - B_2 \cos \beta - B_3 \sin \alpha \sin \beta) - \\
&\tilde{m}_2 B_0 (B_1 \cos \alpha \cos \beta + B_2 \sin \beta - B_3 \sin \alpha \cos \beta) + B \tilde{\omega}_2 (\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2 \operatorname{tg} \beta), \\
\dot{\alpha} &= \tilde{\omega}_2 / \cos \beta - 1, \quad \dot{\beta} = \tilde{\omega}_3, \quad \dot{\gamma} = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2 \operatorname{tg} \beta,
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

где точка означает дифференцирование по аргументу широты. Матрица перехода от орбитальной к полусвязанной системе задается вращением (1.3.1), в котором следует положить  $\gamma = 0$ . В уравнениях (3.4.4) угол вращения вокруг оси симметрии  $\gamma$  отделяется при правильном выборе управления. Это позволяет уменьшить порядок системы, не рассматривая несущественную переменную. Сохраняются скорость вращения вокруг оси симметрии  $\bar{\omega}_1$ , ориентация оси вращения относительно вектора линейной скорости КА (углы  $\alpha$  и  $\beta$ ) и величина нутационных колебаний (скорости  $\tilde{\omega}_2$  и  $\tilde{\omega}_3$ ).

### **Построение управления**

Построение управления основано на создании положения равновесия, отвечающего целевой ориентации КА. Затем отдельно обеспечивается гашение скорости и, соответственно, асимптотическая устойчивость потребного движения.

*Положения равновесия*

Ось вращения КА совпадает с направлением скорости при  $\alpha = \beta = 0$ . Система управления должна обеспечить существование этого положения равновесия для уравнений (3.4.4). Подставляя это условие в (3.4.4), получаем

$$\begin{aligned} \bar{A}\dot{\tilde{\omega}}_1 + J_r\dot{\Omega}_r &= \tilde{m}_2 B_0 B_3 - \tilde{m}_3 B_0 B_2, \\ 0 &= -\tilde{m}_1 B_0 B_3 + \tilde{m}_3 B_0 B_1, \\ -\bar{A}\tilde{\omega}_1 - J_r\Omega_r &= \tilde{m}_1 B_0 B_2 - \tilde{m}_2 B_0 B_1, \\ \tilde{\omega}_2 &= 1, \quad \tilde{\omega}_3 = 0, \quad \dot{\gamma} = \tilde{\omega}_1. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Введем переменные  $P = \bar{A}\tilde{\omega}_1 + J_r\Omega_r$  и  $Q = \tilde{m}_2 B_0 B_3 - \tilde{m}_3 B_0 B_2$ . Из второго уравнения в (3.4.5) получаем  $\tilde{m}_1 = \tilde{m}_3 B_1 / B_3$ . Тогда первое и третье уравнения можно записать в компактной форме

$$\dot{P} = Q, \quad P = B_1 / B_3 Q. \quad (3.4.6)$$

Отсюда получаем уравнение для переменной  $P$

$$dP/P = B_3/B_1 du.$$

Принимая во внимание выражение для вектора геомагнитной индукции (1.2.5), решение этого уравнения запишем как

$$P = C_1 \cos^2 u, \quad (3.4.7)$$

где  $C_1 = \bar{A}\tilde{\omega}_1(0) + J_r\Omega_r(0)$  является константой интегрирования, определяемой начальными условиями.

Выражение (3.4.7) и второе уравнение в (3.4.6) задают соотношение между компонентами управляющего дипольного момента

$$\tilde{m}_2 B_0 B_3 - \tilde{m}_3 B_0 B_2 = -2C_1 \sin u \cos u. \quad (3.4.8)$$

В результате получены две связи на три компоненты дипольного момента. Будем задавать компоненту  $\tilde{m}_3$  произвольно, затем определяя две другие. Предположим, что выбрано некоторое значение  $\tilde{m}_3^*$ . Тогда из второго уравнения (3.4.5) первая компонента момента задается как  $\tilde{m}_1 = \tilde{m}_3^* \cos u / (2 \sin u)$ . Определение первой компоненты вблизи экватора невозможно. Поэтому третью компоненту следует задавать пропорциональной  $\sin u$ ,

$$\tilde{m}_3 = kf \sin u, \quad (3.4.9)$$

где  $k$  – коэффициент усиления,  $f$  – некоторая функция, которая может быть выбрана произвольным образом. Соотношение (3.4.8) дает

$$\tilde{m}_2 = \left( -\frac{1}{2}kfB_0 \cos i + C_1 \cos u \right) / B_0 \sin i \quad (3.4.10)$$

и второе уравнение (3.4.5) дает

$$\tilde{m}_1 = \frac{B_1}{B_3} \tilde{m}_3 = -\frac{1}{2}kf \cos u. \quad (3.4.11)$$

Выбирая  $f = -2 \sin i B_0$ , получаем простое выражение для третьей компоненты дипольного момента  $\tilde{m}_3 = kB_3$ . Этот выбор функции  $f$  используется далее.

Соотношение (3.4.7) задает скорость вращения КА

$$\tilde{\omega}_{1ref} = \frac{1}{A} (-J_r \Omega_r + C_1 \cos^2 u). \quad (3.4.12)$$

Таким образом, скорость вращения ротора  $\Omega_r$  определяет скорость вращения КА, хотя в (3.4.12) присутствуют дополнительные колебания, определяемые начальными условиями. После определения скорости по последнему уравнению (3.4.5) можно найти угол вращения КА

$$\gamma_{ref} = \int_0^u \tilde{\omega}_{1ref} du. \quad (3.4.13)$$

Таким образом, определив угол  $\gamma$ , в принципе можно произвести переход от полусвязанной системы координат, в которой построено управление, к связанной, в которой выдается управляющее воздействие. Однако любые небольшие ошибки в определении вектора состояния КА и выдаче управляющих воздействий приведут к существенным ошибкам при расчете угла  $\gamma$  по выражению (3.4.13). Его применение нежелательно, и практические аспекты реализации построенного управления будут рассмотрены ниже.

#### *Устойчивость движения*

Управление (3.4.9)-(3.4.11) обеспечивает существование положения равновесия. Вопрос его устойчивости, и тем более асимптотической устойчивости, остается открытым. Введем дополнительный демпфирующий момент. Для этого введем переменную  $\mathbf{w}$ , задающую отклонение скорости КА в полусвязанной системе от требуемой скорости вращения согласно соотношению

$$\tilde{\omega} = \mathbf{w} + \mathbf{A}_{\gamma=0} (0, 1, 0) + (\tilde{\omega}_{1ref}, 0, 0). \quad (3.4.14)$$

Введем некоторое управление  $\mathbf{u}$  в полусвязанной системе. Уравнения (3.4.4) запишем в виде

$$\begin{aligned}
\bar{A}\dot{w}_1 &= u_1 - \bar{A}w_3 + C_1 \sin 2u + \tilde{m}_2 B_0 (B_1 \sin \alpha + B_3 \cos \alpha) + \\
&\quad \tilde{m}_3 B_0 (B_1 \cos \alpha \sin \beta - B_2 \cos \beta - B_3 \sin \alpha \sin \beta), \\
B\dot{w}_2 &= u_2 + 2B \sin \beta w_3 - \bar{A}\tilde{\omega}_1 w_3 - J_r \Omega_r w_3 + Bw_3 w_2 \operatorname{tg} \beta - \\
&\quad 3(A - B) \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta - \tilde{m}_1 B_0 (B_1 \sin \alpha + \bar{B}_3 \cos \alpha) + \\
&\quad \tilde{m}_3 B_0 (B_1 \cos \alpha \cos \beta + B_2 \sin \beta - B_3 \sin \alpha \cos \beta), \\
B\dot{w}_3 &= u_3 + \bar{A}\tilde{\omega}_1 (w_2 + \cos \beta) + J_r \Omega_r (w_2 + \cos \beta) - \\
&\quad B \operatorname{tg} \beta (w_2 + \cos \beta)^2 - 3(B - A) \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta - \\
&\quad \tilde{m}_1 B_0 (B_1 \cos \alpha \sin \beta - B_2 \cos \beta - B_3 \sin \alpha \sin \beta) - \\
&\quad \tilde{m}_2 B_0 (B_1 \cos \alpha \cos \beta + B_2 \sin \beta - B_3 \sin \alpha \cos \beta), \\
\dot{\alpha} &= w_2 / \cos \beta, \quad \dot{\beta} = w_3.
\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

В уравнениях (3.4.15) не наблюдается устойчивости требуемого режима движения без дополнительного управления  $\mathbf{u}$ . Введем это управление как

$$\mathbf{u} = -k_w \mathbf{w}. \tag{3.4.16}$$

Вопрос реализации управления (3.4.16) с помощью магнитной системы ориентации пока не рассматриваем. Уравнения (3.4.15) с дополнительным управлением (3.4.16) показывают асимптотическую устойчивость требуемого режима движения. Отметим, что так как линеаризованная система уравнений имеет периодические коэффициенты, введение диссипативного члена может оказывать наблюдаемый в данной задаче эффект существенного изменения свойств устойчивости [156], чего не наблюдается в системах с постоянными коэффициентами.

Для исследования устойчивости уравнения (3.4.15) линеаризуются. При этом дипольные моменты удовлетворяют соотношениям (3.4.5), тогда как скорость вращения удовлетворяет (3.4.5) лишь в нулевом приближении. Линеаризованные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
\bar{A}\dot{w}_1 &= -\bar{A}w_3 + \tilde{m}_2 B_0 B_1 \alpha + \tilde{m}_3 B_0 B_1 \beta + u_1, \\
B\dot{w}_2 &= -C_1 \cos^2 u \cdot w_3 - (3(A - B) + \tilde{m}_1 B_0 B_1 + \tilde{m}_3 B_0 B_3) \alpha + \tilde{m}_3 B_0 B_2 \beta + u_2, \\
B\dot{w}_3 &= \bar{A}w_1 + C_1 \cos^2 u \cdot w_2 + \tilde{m}_2 B_0 B_3 \alpha - (\tilde{m}_1 B_0 B_1 + \tilde{m}_2 B_0 B_1) \beta + u_3, \\
\dot{\alpha} &= w_2, \quad \dot{\beta} = w_3,
\end{aligned} \tag{3.4.17}$$

где  $u_i = -k_w w_i$ . Устойчивость исследуется с помощью теории Флоке. Принимаются следующие параметры КА:

- Моменты инерции 1.7, 1.3, 1.3 кг·м<sup>2</sup>.
- Высота орбиты 750 км, наклонение 70°.
- Скорость вращения ротора 100  $\omega_{орб}$ , его осевой момент инерции 0.01 кг·м<sup>2</sup> (кинетический момент ротора примерно  $10^{-3}$  Н·м).

Мультипликаторы системы (3.4.17) приведены на Рис. 3.4.1.

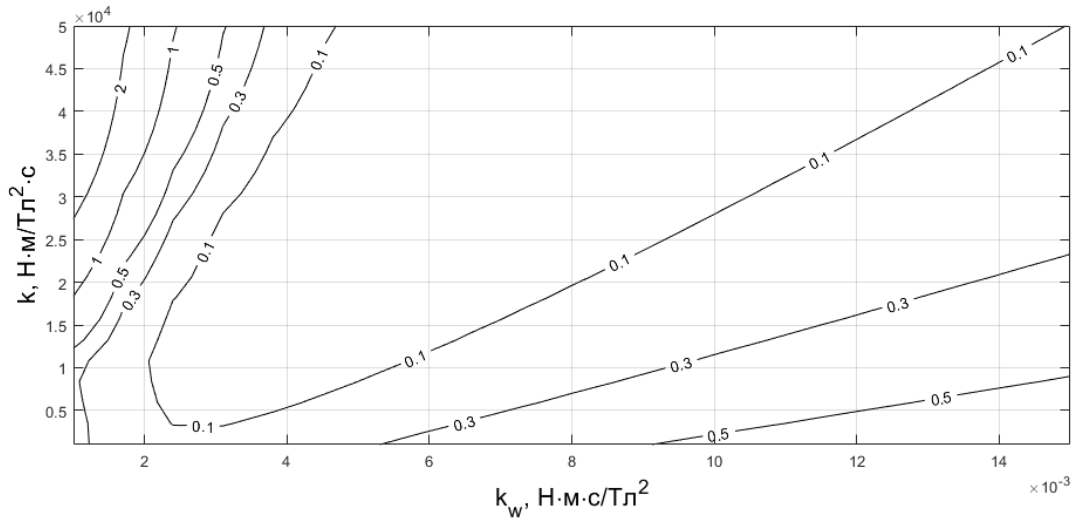


Рис. 3.4.1. Устойчивость линейных уравнений

Изменение скорости вращения ротора не приводит к существенному изменению области устойчивости, что позволяет осуществлять его медленную раскрутку до достижения потребной скорости вращения КА.

#### ***Практические аспекты реализации управления***

Управление (3.4.9)-(3.4.11) формируется в полусвязанной системе координат, тогда как выдача управляющего воздействия осуществляется в связанной системе. Переход между этими системами требует определения угла вращения  $\gamma$ . Использование углов ориентации в контуре управления КА нежелательно из-за их возможного вырождения. Рассмотрим движение вблизи требуемой ориентации аппарата. В этом случае

$$\sin \gamma \approx -a_{32} = \cos \beta \sin \gamma, \quad \cos \gamma \approx a_{22} = \cos \beta \cos \gamma.$$

Опираясь на эти приближенные равенства, управление (3.4.9)-(3.4.11) записывается в связанной системе координат как

$$\begin{aligned} m_1 &= \omega_{орб}^2 / B_0 \tilde{m}_1, \\ m_2 &= \omega_{орб}^2 / B_0 (\tilde{m}_2 a_{22} - \tilde{m}_3 a_{32}), \\ m_3 &= \omega_{орб}^2 / B_0 (\tilde{m}_2 a_{32} + \tilde{m}_3 a_{22}). \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Здесь также учтено, что уравнения в полусвязанных осях записываются в безразмерном виде. Управление (3.4.18)-(3.4.9)-(3.4.11) используется далее в исследовании и моделировании движения КА. Ошибка, возникающая при формировании управления с помощью перехода (3.4.18) по сравнению с построенным управлением (3.4.9)-(3.4.11) увеличивается по мере отклонения оси вращения КА от требуемого направления. При этом анализ устойчивости, проводимый в линейном приближении, сохраняется.

Рассмотрим теперь вопрос реализации управления (3.4.16). Помимо необходимости реализации того же перехода между системами координат, возникает вопрос реализации управляющего механического момента магнитной системой ориентации. Система реализует лишь проекцию на плоскость, перпендикулярную вектору геомагнитной индукции,

$$\mathbf{M} = -k_w (\mathbf{w}_x \times \mathbf{B}_x) \times \mathbf{B}_x / |\mathbf{B}|^2. \quad (3.4.19)$$

Отклонение угловой скорости КА от ее требуемого значения задается выражением (3.4.14), записанным в связанной системе координат как

$$\mathbf{w}_x = \begin{pmatrix} \omega_1 / \omega_{opb} - \Omega_{1ref} - \sin \beta \\ \omega_2 / \omega_{opb} - \cos \beta \cos \gamma \\ \omega_3 / \omega_{opb} + \cos \beta \sin \gamma \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\sin \beta$  заменяется  $a_{12}$  при расчете управляющего воздействия. Приближенные выражения для  $\sin \gamma$  и  $\cos \gamma$  уже установлены выше. В управлении (3.4.19) производится нормировка на величину вектора геомагнитной индукции для сохранения характерной величины управляющего воздействия. Зачастую в такой ситуации достаточно проводить нормировку на характерную величину поля  $B_0$ . В рассматриваемой задаче, однако, результат работы управления оказывается существенно зависящим от выбора нормировки.

Исследуем, как изменится область устойчивости, приведенная на Рис. 3.5.1, при учете описанных особенностей реализации управления. Переходя снова в полусвязанную систему координат, управление (3.4.19) запишем как

$$\mathbf{M} = -k_w (\mathbf{w} \times \mathbf{A}_{\gamma=0} \mathbf{B}) \times \mathbf{A}_{\gamma=0} \mathbf{B} / |\mathbf{B}|^2, \quad (3.4.20)$$

где относительная скорость  $\mathbf{w}$  задается выражением (3.4.14). В модели прямого диполя величина вектора геомагнитной индукции  $|\mathbf{B}| = B_0 \sqrt{1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u}$ . Для исследования устойчивости линеаризованные уравнения движения должны иметь периодические коэффициенты. Чтобы получить уравнения в таком виде, используем разложение [157]



$$f_B = \frac{1}{|\mathbf{B}|^2} = \frac{1}{1+3\sin^2 i \sin^2 u} = \vartheta \left( 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \chi^{2j} \cos 2ju \right), \quad (3.4.21)$$

где

$$\chi = \left( \frac{\sqrt{1+3\sin^2 i} - 1}{\sqrt{3} \sin i} \right)^2, \quad \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2 i}}.$$

Для рассматриваемой орбиты наклонением  $70^\circ$  параметр  $\chi \approx 0.3$ . Поэтому в (3.4.21) ограничимся первым членом разложения. Линеаризованные уравнения, используемые в определении области устойчивости, сохраняют вид (3.4.17). При этом управление, обеспечивающее существование положения равновесия, не претерпевает изменений в линейном приближении. Управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость, изменяется. Вместо простых демпфирующих слагаемых  $u_i = k_w w_i$  в уравнениях (3.4.17) появляются выражения

$$\begin{aligned} u_1 &= -f_B \left[ \cos i (w_1 \cos i - w_2 \sin i \cos u) + 2 \sin i \sin u (w_3 \sin i \cos u + 2w_1 \sin i \sin u) \right], \\ u_2 &= f_B \left[ \cos u \sin i (w_1 \cos i - w_2 \cos u \sin i) - 2 \sin i \sin u (w_3 \cos i + 2w_2 \sin i \sin u) \right], \\ u_3 &= -f_B \left[ \cos i (w_3 \cos i + 2w_2 \sin i \sin u) + \cos u \sin i (w_3 \sin i \cos u + 2w_1 \sin i \sin u) \right]. \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

Выражения  $\cos 2u \cos u$  и  $\cos 2u \sin u$ , возникающие в (3.4.22), делают уравнения (3.4.17)-(3.4.22)  $6\pi$ -периодическими. Мультипликаторы системы приведены на Рис. 3.4.2.

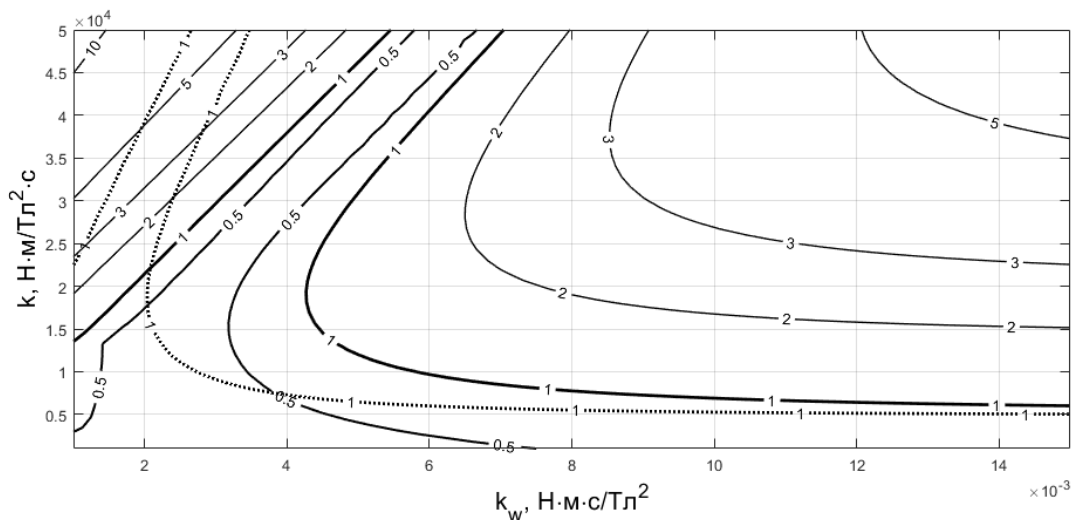


Рис. 3.4.2. Область устойчивости при реализации демпфирования магнитной системой ориентации

Точечная линия на Рис. 3.4.2 показывает границу области устойчивости в случае, если при реализации демпфирования используется нормировка на характерную величину вектора

геомагнитной индукции  $B_0$  (в этом случае следует положить  $f_B = 1$  в (3.4.22)). Область устойчивости сдвигается влево по сравнению с нормировкой на реальную величину вектора индукции  $|\mathbf{B}|$ , так как  $B_0 < |\mathbf{B}|$  и для получения той же величины момента требуется меньший коэффициент усиления. Однако наблюдается также заметное сужение области устойчивости при использовании нормировки на  $B_0$  по сравнению с нормировкой на  $|\mathbf{B}|$ , что делает второй вариант предпочтительным.

Сравнение Рис. 3.4.1 и 3.4.2 показывает, что практические аспекты реализации управления приводят к существенному изменению его работы. Свойства устойчивости оказываются близки только при малых коэффициентах усиления. При их повышении область устойчивости, на Рис 3.4.1 уходящая в бесконечность, значительно сужается. На Рис. 3.4.2 повышение коэффициентов усиления также возможно, но только в узкой «трубке» параметров, обеспечивающих устойчивость. Причиной такой разницы является реализация демпфирующей части управления магнитной системой ориентации. В отличие от управления (3.4.9)-(3.4.11), построенного непосредственно для дипольных моментов, хотя и в полусвязанной системе, управление (3.4.16) вводится для механического момента. Это влечет за собой типичные проблемы реализации с помощью магнитных катушек, выражающиеся в необходимости аккуратно подбирать коэффициенты усиления.

### ***Численное моделирование***

Проведем моделирование движения КА со следующими параметрами:

- Моменты инерции 1.7, 1.5, 1.3 кг·м<sup>2</sup> (аппарат не является динамически симметричным).
- Высота орбиты 750 км, наклонение 70°.
- Осевой момент инерции ротора 0.01 кг·м<sup>2</sup>, начальная скорость вращения  $100\omega_{orb}$ , на каждом такте управления увеличивается на  $\omega_{orb}$  до достижения номинальной скорости вращения  $30.000\omega_{orb}$  (кинетический момент маховика 0.32 Н·м).
- Возмущающий момент неизвестной природы на уровне  $10^{-6}$  Н·м/с.
- Коэффициенты усиления  $k = 3 \cdot 10^4$  Н·м/с·Тл<sup>2</sup>,  $k_w = 4 \cdot 10^{-3}$  Н·м/Тл<sup>2</sup>.

При проведении численного моделирования КА более не является осесимметричным, что существенно использовалось при построении управления и анализе его работы в упрощенной постановке. Кроме этого, влияние возмущающих моментов может сказаться на движении аппарата заметнее, чем обычно. Это связано с высокой скоростью вращения КА,

из-за чего даже небольшие ошибки в скорости и ориентации оси вращения могут привести к значительным отклонениям.

В соотношении (3.4.12) скорость осевого вращения КА задается двумя слагаемыми. Первое основное слагаемое постоянно и определяется кинетическим моментом ротора. Второе слагаемое – периодическое, возникающее в силу наличия некоторых начальных данных, не соответствующих требуемому осевому вращению КА. Подобрать начальные данные так, чтобы удовлетворить  $C_1 = 0$ , невозможно. При построении управления, однако, такое предположение сделать можно. В этом случае управление, построенное для магнитной системы, должно поддерживать постоянную скорость осевого вращения. Поэтому при моделировании далее считаем, что в процессе построения управления полагается  $C_1 = 0$ . На Рис. 3.4.3 приведен пример моделирования движения КА.

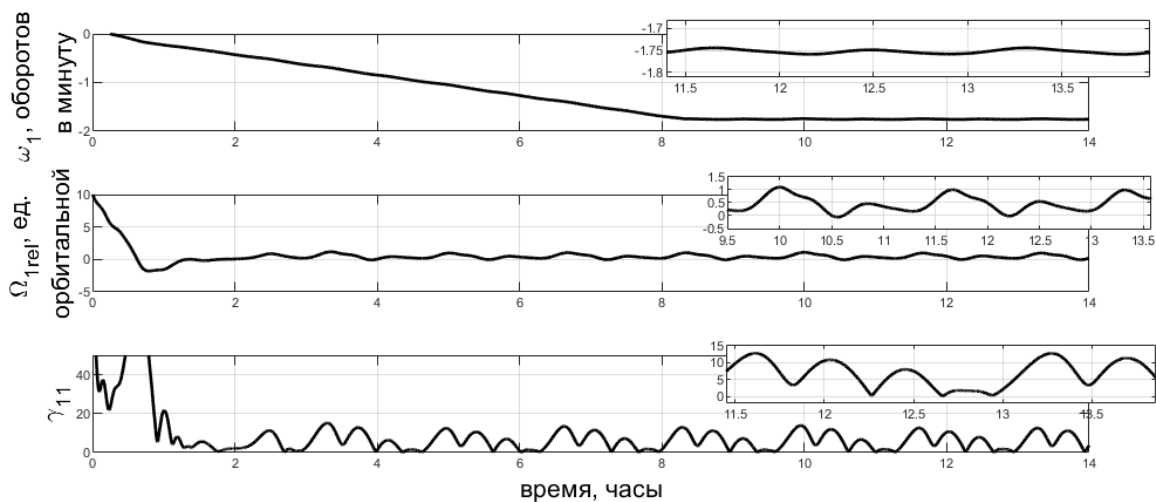


Рис. 3.4.3. Моделирование движения КА

На Рис. 3.4.3  $\gamma_{11} = \arccos(a_{11})$  – угол между осью вращения КА и вектором скорости (между первыми осями связанной и орбитальной систем координат),  $\Omega_{1rel}$  – отклонение скорости вращения от требуемой, выраженное в единицах орбитальной. На первом графике показан процесс медленной раскрутки ротора. Этот процесс, не учтенный при построении управления, не оказывает существенного влияния на работу системы управления. Примерная точность поддержания скорости вращения в номинальном режиме равна орбитальной скорости вращения. Хотя и большая по абсолютной величине, эта ошибка весьма мала по сравнению с самой скоростью вращения в несколько оборотов в минуту. Точность поддержания ориентации оси вращения составляет около 12 градусов.

Существенное повышение скорости вращения ротора – а значит, и скорости осевого вращения КА – приводит к потере возможности поддержания ориентации оси. Так, на Рис. 3.4.4 приведен пример моделирования при номинальной скорости вращения ротора  $300.000 \omega_{orb}$  и скорости его начальной раскрутки  $10 \omega_{orb}$  в секунду).

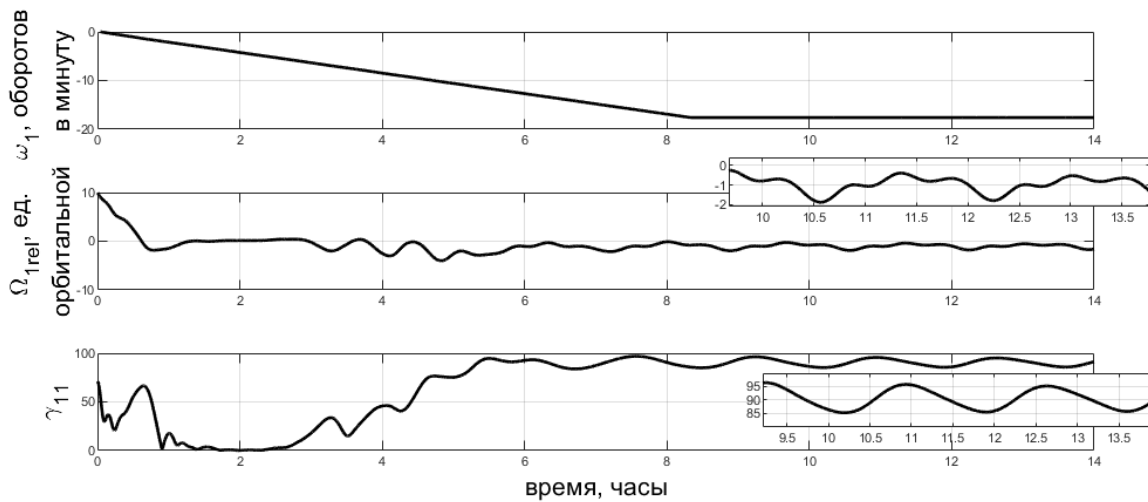


Рис. 3.4.4. Движение с высокой скоростью вращения

Поддержание скорости вращения на Рис. 3.4.4 осуществляется с точностью около двух орбитальных скоростей. Ось вращения при этом ориентируется по нормали к плоскости орбиты, магнитная система управления оказывается неспособна осуществить ее вращение с орбитальной частотой в инерциальном пространстве.

### 3.5. Поддержание вращения вокруг касательной на низкой орбите

#### *Модификация управляющего момента*

Построение управляющего дипольного момента подробно описано в предыдущем разделе. Далее будем использовать его несколько упрощенную форму, показавшую большую эффективность. А именно, момент будем описывать в виде двух составляющих. Позиционная составляющая вводится в полусвязанной СК как

$$\tilde{\mathbf{m}}_p = k_p \mathbf{B}_x, \quad (3.5.1)$$

то есть дипольные моменты катушек в полусвязанной СК являются компонентами геомагнитного поля в орбитальной СК. Далее для задания дипольных моментов  $m_j$  в ССК используется переход

$$m_1 = \tilde{m}_1, \quad m_2 = \tilde{m}_2 a_{22} - \tilde{m}_3 a_{32}, \quad m_3 = \tilde{m}_2 a_{32} + \tilde{m}_3 a_{22}.$$

Отметим, что в предыдущем разделе в компоненте дипольного момента  $\tilde{m}_2$  при построении управления появляется слагаемое  $C_1 \cos^2 u$ , причем постоянная  $C_1$  зависит от начальных условий. Здесь это слагаемое отброшено, так как его включение оказалось неэффективным. Также заметим, что переход от дипольного момента, заданного в ПСК, к его выражению в ССК, вообще говоря, должен производиться с помощью углов ориентации. Их использование при практической реализации управления нежелательно в силу возможного вырождения. Поэтому, предполагая, что аппарат близок к требуемому режиму движения, то есть углы  $\alpha$  и  $\beta$  близки к нулю, для  $\sin \gamma$  и  $\cos \gamma$  используются их приближенные выражения, заданные соответствующими элементами матрицы направляющих косинусов.

Для определения демпфирующей компоненты управления введем сначала требуемую скорость вращения как

$$\omega_0 = -\frac{J}{A+J} \omega_r. \quad (3.5.2)$$

Таким образом, скорость вращения ротора фактически задает скорость вращения аппарата вокруг оси  $\mathbf{e}_1$ . Далее введем отклонение скорости от требуемой

$$\Delta \omega = \omega - \omega_{orb} A \mathbf{e}_2 - \omega_0 \mathbf{e}_1, \quad (3.5.3)$$

причем разность  $\omega - \omega_{orb} A \mathbf{e}_2$  является угловой скоростью аппарата относительно орбитальной СК, записанной в связанной СК. Демпфирующий дипольный момент имеет вид

$$\mathbf{m}_d = k_\omega / |\mathbf{B}|^2 \Delta \omega \times \mathbf{B}_x. \quad (3.5.4)$$

Заметим, что величина геомагнитного поля не постоянна как в модели прямого диполя, так и в модели IGRF.

### ***Упрощенные уравнения движения***

Для проведения анализа динамики аппарата введем ряд упрощающих предположений. Будем считать, что аппарат осесимметричный,  $B = C$ , и вращение происходит вокруг оси симметрии. Из моментов внешней природы будем учитывать гравитационный и аэродинамический, заданный упрощенным выражением (1.3.21). Геомагнитное поле будем описывать с помощью модели прямого диполя.

### ***Линеаризация уравнений движения***

Рассмотрим движение аппарата в окрестности требуемого вращения, то есть при условии, что углы  $\alpha$  и  $\beta$  малы. Матрица перехода в этом случае в линейном приближении имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \beta & -\alpha \\ -\beta \cos \gamma + \alpha \sin \gamma & \cos \gamma & \sin \gamma \\ \alpha \cos \gamma + \beta \sin \gamma & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (3.5.5)$$

Скорость аппарата будем считать близкой к требуемой. В ОСК требуемая скорость полусвязанной системы задается выражением

$$\boldsymbol{\omega}_{0X}^{(ПСК)} = (0, \omega_{орб}, 0),$$

что отражает вращение аппарата (без учета его осевого вращения) вместе с орбитальной системой. В полусвязанной системе требуемая скорость имеет вид

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0^{(ПСК)} = \mathbf{A}_{\gamma=0} \boldsymbol{\omega}_{0X}^{(ПСК)} = (\beta \omega_{орб}, \omega_{орб}, 0).$$

Наконец, для записи требуемой скорости самого аппарата в связанной системе необходимо использовать переход (3.4.3) и учесть вращение вокруг первой оси, которого нет при рассмотрении полусвязанной системы,

$$\boldsymbol{\omega}_{0x} = \begin{pmatrix} \omega_0 + \beta \omega_{орб} \\ \omega_{орб} \cos \gamma \\ -\omega_{орб} \sin \gamma \end{pmatrix}.$$

Далее рассмотрим небольшую добавку к требуемой скорости, так что  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{0x} + \delta \boldsymbol{\omega}$ .

При этом будем использовать безразмерные компоненты скорости, отнесенные к требуемой скорости вращения. Тогда для скорости получим выражение

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} 1 + \beta \Omega_0 + w_1 \\ \Omega_0 \cos \gamma + w_2 \\ -\Omega_0 \sin \gamma + w_3 \end{pmatrix}, \quad (3.5.6)$$

где  $\bar{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} / \omega_0$  и  $\Omega_0 = \omega_{орб} / \omega_0$  – абсолютная угловая и орбитальная скорости, отнесенные к требуемой скорости вращения,  $w_j = \delta \omega_j / \omega_0$  – отнесенные к требуемой компоненты отклонения скорости аппарата от нее. Эти отклонения будем считать малыми и линеаризуем уравнения движения относительно этой добавки.

Для линеаризации введем также безразмерное время  $\tau = \omega_0 t$ , по сути используя в качестве единицы времени период вращения аппарата вокруг первой оси. Обозначая производную по новому времени точкой, запишем кинематические соотношения (1.3.6) с учетом (3.5.6) в линейном приближении

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= w_2 \cos \gamma - w_3 \sin \gamma, \\
\dot{\beta} &= w_2 \sin \gamma + w_3 \cos \gamma, \\
\dot{\gamma} &= 1 + w_1.
\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Далее необходимо записать динамические уравнения для отклонений скорости от требуемой, опираясь на замену переменных (3.5.6) и исходные динамические уравнения (1.3.2). Связь между производными отклонений и исходных компонент скорости задается (3.5.6) и (3.5.7). А именно,

$$\begin{aligned}
\dot{w}_1 &= \dot{\bar{\omega}}_1 - \dot{\beta} \Omega_0 = \dot{\bar{\omega}}_1 - \Omega_0 (w_2 \sin \gamma + w_3 \cos \gamma), \\
\dot{w}_2 &= \dot{\bar{\omega}}_2 + \Omega_0 \sin \gamma \cdot \dot{\gamma} = \dot{\bar{\omega}}_2 + \Omega_0 \sin \gamma (1 + w_1), \\
\dot{w}_3 &= \dot{\bar{\omega}}_3 + \Omega_0 \cos \gamma \cdot \dot{\gamma} = \dot{\bar{\omega}}_3 + \Omega_0 \cos \gamma (1 + w_1).
\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Уравнения (3.5.8) – динамические уравнения, которые будем использовать далее. В выражениях  $\dot{\bar{\omega}}_j$  входят моменты, действующие на аппарат согласно (1.3.2). Линеаризованный гироскопический момент, действующий на осесимметричный аппарат, имеет вид

$$\mathbf{M}_{зуп} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ (\bar{A} - B)(1 + w_1)(-\Omega_0 \sin \gamma + w_3) \\ (B - \bar{A})(1 + w_1)(\Omega_0 \cos \gamma + w_2) \end{pmatrix} + \bar{A} \omega_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_0 \sin \gamma - w_3 \\ \Omega_0 \cos \gamma + w_2 \end{pmatrix}.$$

Второе слагаемое обусловлено действием ротора. В его выражении принято во внимание, что требуемая скорость вращения аппарата связана со скоростью вращения ротора согласно (3.5.2).

Гравитационный и аэродинамический моменты в линейном приближении

$$\mathbf{M}_{зр} = 3\Omega_0^2 \omega_0^2 \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ (B - \bar{A}) \cos \gamma \\ (\bar{A} - B) \sin \gamma \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{азр} = \kappa \omega_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \cos \gamma + \beta \sin \gamma \\ \beta \cos \gamma - \alpha \sin \gamma \end{pmatrix},$$

где  $\kappa = 0.5c\rho|\mathbf{V}|Sd/\omega_0^2$ .

Перейдем к определению управляющих моментов, действующих на аппарат. В демпфирующий момент входит относительная скорость (3.5.3). Выражение (3.5.6) задает отклонение текущей скорости от требуемой в линейном приближении, и за счет этой замены относительная скорость оказывается равной  $\mathbf{w}$ . Далее необходимо определить выражение для вектора геомагнитной индукции  $\mathbf{B}_x = \mathbf{A}\mathbf{B}$ , используя в качестве матрицы перехода

линеаризованное выражение (3.5.5) и в качестве вектора геомагнитной индукции выражение (1.2.4). В результате получаем

$$\mathbf{M}_d = k'_\omega \omega_0 \times \left[ w_1 \left\{ -B_2^2 - B_3^2, B_1 (B_2 \cos \gamma + B_3 \sin \gamma), B_1 (B_3 \cos \gamma - B_2 \sin \gamma) \right\} + \right. \\ \left. w_2 \left\{ B_1 (B_2 \cos \gamma + B_3 \sin \gamma), -B_1^2 - (B_3 \cos \gamma - B_2 \sin \gamma)^2, \zeta \right\} + \right. \\ \left. w_3 \left\{ B_1 (B_3 \cos \gamma - B_2 \sin \gamma), \zeta, -B_1^2 - (B_2 \cos \gamma + B_3 \sin \gamma)^2 \right\} \right],$$

где  $k'_\omega = k_\omega B_0^2 / |\mathbf{B}|^2 \omega_0$ ,  $\zeta = B_2 B_3 (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) + \sin \gamma \cos \gamma (B_3^2 - B_2^2)$ . Отметим, что в выражении для  $k'_\omega$  появляется  $B_0$ , тогда как компоненты  $B_j$  безразмерны.

Позиционная компонента управления имеет вид

$$\bar{\mathbf{M}}_p = k'_p \omega_0^2 \left[ \alpha \left\{ B_1 B_2, -\cos \gamma (B_1^2 + B_3^2) + \sin \gamma B_2 B_3, \sin \gamma (B_1^2 + B_3^2) + \cos \gamma B_2 B_3 \right\} + \right. \\ \left. \beta \left\{ B_1 B_3, -\sin \gamma (B_1^2 + B_2^2) + \cos \gamma B_2 B_3, -\cos \gamma (B_1^2 + B_2^2) - \sin \gamma B_2 B_3 \right\} \right],$$

где  $k'_p = k_p B_0^2 / \omega_0^2$ .

#### *Уравнения движения в полусвязанной системе координат*

В результате линеаризованная система уравнений движения представлена кинематическими соотношениями (3.5.7) и динамическими уравнениями (3.5.8), в которых вместо  $\dot{\omega}_j$  необходимо подставить выражения для соответствующих компонент гироскопического, гравитационного, аэродинамического, демпфирующего и позиционного управляющего моментов, отнесенных к соответствующим моментам инерции аппарата с ротором. Эти выражения весьма громоздки и потому не могут использоваться для дальнейшего анализа динамики аппарата, однако применяются в численном примере для оценки их точности.

Чтобы далее упростить уравнения необходимо, в первую очередь, получить явное выражение для  $|\mathbf{B}|$ , входящее в  $\mathbf{M}_d$ . Для его представления используем ряд (3.4.21). Перейдем также в полусвязанную систему координат. Для этого все моменты, выписанные выше, равно как и производные скоростей в (3.5.8), необходимо преобразовать согласно (3.4.3). Обозначая линейные безразмерные приращения скоростей в полусвязанной системе  $\tilde{w}_j$ , для их производных имеем

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{w}}_2 &= \dot{w}_2 \cos \gamma - \dot{w}_3 \sin \gamma - w_2 \sin \gamma - w_3 \cos \gamma, \\ \dot{\tilde{w}}_3 &= \dot{w}_2 \sin \gamma + \dot{w}_3 \cos \gamma + w_2 \cos \gamma - w_3 \sin \gamma. \end{aligned} \tag{3.5.9}$$



Отметим, что, вообще говоря, при дифференцировании выражений (3.4.3) возникает производная  $\dot{\gamma} = 1 + w_1$  согласно (3.5.7). Однако далее возникают выражения  $w_1 w_2$  и  $w_1 w_3$ , которые в линейном приближении отброшены. Подставляя выражения для моментов в уравнения для  $\dot{w}_j$  (3.5.8), а их, в свою очередь, в (3.5.9), и принимая во внимание упрощенное выражение для  $|\mathbf{B}|$ , получаем весьма компактные упрощенные линейные уравнения движения в полусвязанной системе координат,

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{w}}_1 &= -\Omega_0 \tilde{w}_3 + \mu \varepsilon (B_1 B_2 \alpha + B_1 B_3 \beta) + \mu \eta(u) \varepsilon' \left[ -(B_2^2 + B_3^2) \tilde{w}_1 + B_1 B_2 \tilde{w}_2 + B_1 B_3 \tilde{w}_3 \right], \\ \dot{\tilde{w}}_2 &= -(3\Omega_0^2 \lambda + \xi) \alpha + \varepsilon \left[ -(B_1^2 + B_3^2) \alpha + B_2 B_3 \beta \right] + \eta(u) \varepsilon' \left[ B_1 B_2 \tilde{w}_1 - (B_1^2 + B_3^2) \tilde{w}_2 + B_2 B_3 \tilde{w}_3 \right], \\ \dot{\tilde{w}}_3 &= \Omega_0 \tilde{w}_1 / \mu - \xi \beta + \varepsilon \left[ B_2 B_3 \alpha - (B_1^2 + B_2^2) \beta \right] + \eta(u) \varepsilon' \left[ B_1 B_3 \tilde{w}_1 + B_2 B_3 \tilde{w}_2 - (B_1^2 + B_2^2) \tilde{w}_3 \right], \\ \dot{\alpha} &= \tilde{w}_2, \quad \dot{\beta} = \tilde{w}_3.\end{aligned}\tag{3.5.10}$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\lambda = (\bar{A} - B)/B$ ,  $\mu = B/\bar{A}$ ,  $\eta = 1 + 2\chi^2 \cos 2u$ ,  $\xi = \kappa/B$ ,  $\varepsilon = k_p B_0^2 / B \omega_0^2$ ,  $\varepsilon' = k_\omega \nu / B \omega_0$ ,  $\nu = 1/\sqrt{1 + 3\sin^2 i}$ . Все параметры, равно как и компоненты скорости и орбитальная скорость, являются безразмерными величинами. В уравнениях (3.5.10) отсутствует угол  $\gamma$ , который можно определить после вычисления остальных переменных.

### **Поиск приближенного решения**

Перейдем к поиску приближенного решения уравнений (3.5.10). Для этого будем считать, что действие управления слабо, и потому параметры  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  малы. Уравнения представим в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_0 + \varepsilon \mathbf{A}_1(\tau)) \mathbf{x},\tag{3.5.11}$$

где  $\mathbf{x} = (\alpha, \beta, \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$ ,

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega_0 \\ -\xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi & \mathcal{G} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\zeta = \xi + 3\Omega_0^2 \lambda$ ,  $\mathcal{G} = \Omega_0 / \mu$ , причем эти параметры, равно как и  $\xi$  и  $\Omega_0$ , положительны (в частности, в  $\zeta$  характерная величина аэродинамического момента превалирует над величиной гравитационного),

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu B_1 B_2 & \mu B_1 B_3 & -\mu\nu(B_2^2 + B_3^2) & \mu\nu B_1 B_2 & \mu\nu B_1 B_3 \\ -(B_1^2 + B_3^2) & B_2 B_3 & \nu B_1 B_2 & -\nu(B_1^2 + B_3^2) & \nu B_2 B_3 \\ B_2 B_3 & -(B_1^2 + B_2^2) & \nu B_1 B_3 & \nu B_2 B_3 & -\nu(B_1^2 + B_2^2) \end{pmatrix},$$

причем  $\nu(u) = \eta(u)\varepsilon'/\varepsilon$  и предполагается, что отношение  $\varepsilon'/\varepsilon$  не является большим числом.

Дальнейший анализ системы (3.5.10) в виде (3.5.11) основывается на методике, развитой в [135,158] и уже примененной в разделе 3.1. Собственные числа матрицы  $\mathbf{A}_0$  суть

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\Omega_0\vartheta + \xi}, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{\zeta}, \quad \lambda_5 = 0.$$

Найдя соответствующие им собственные векторы, запишем решение порождающей системы как

$$\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\Omega_0 \\ 0 \\ i\sqrt{\Omega_0\vartheta + \xi} \end{pmatrix} \exp i\sqrt{\Omega_0\vartheta + \xi}\tau + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ \frac{i}{\sqrt{\Omega_0\vartheta + \xi}} \\ -\Omega_0 i \\ \frac{-\Omega_0 i}{\sqrt{\Omega_0\vartheta + \xi}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-i\sqrt{\Omega_0\vartheta + \xi})\tau +$$

$$C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\zeta}i \\ 0 \end{pmatrix} \exp i\sqrt{\zeta}\tau + C_4 \begin{pmatrix} i \\ \sqrt{\zeta} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\sqrt{\zeta})\tau + C_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\xi}{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем также действительную часть решения, описывающую поведение углов ориентации и угловой скорости в явном виде,

$$\alpha = C_3 \cos\sqrt{\zeta}\tau + C_4 \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \sin\sqrt{\zeta}\tau,$$

$$\beta = C_5 + C_1 \cos\sqrt{\Omega_0\vartheta + \xi}\tau + C_2 \frac{1}{\sqrt{\Omega_0\vartheta + \xi}} \sin\sqrt{\Omega_0\vartheta + \xi}\tau,$$

$$\Omega_1 = C_5 \frac{\xi}{\vartheta} - C_1 \Omega_0 \cos\sqrt{\Omega_0\vartheta + \xi}\tau - C_2 \frac{\Omega_0}{\sqrt{\Omega_0\vartheta + \xi}} \sin\sqrt{\Omega_0\vartheta + \xi}\tau, \quad (3.5.12)$$

$$\Omega_2 = -C_3 \sqrt{\xi} \sin \sqrt{\xi} \tau + C_4 \cos \sqrt{\xi} \tau,$$

$$\Omega_3 = -C_1 \sqrt{\Omega_0 \vartheta + \xi} \sin \sqrt{\Omega_0 \vartheta + \xi} \tau + C_2 \cos \sqrt{\Omega_0 \vartheta + \xi} \tau.$$

После этого можно определить константы  $C_j$  через начальные данные,

$$C_1 = \frac{\xi \beta(0) - \vartheta \Omega_1(0)}{\vartheta \Omega_0 + \xi}, \quad C_5 = \frac{\vartheta (\Omega_0 \beta(0) + \Omega_1(0))}{\vartheta \Omega_0 + \xi},$$

$$C_2 = \Omega_3(0), \quad C_3 = \alpha(0), \quad C_4 = \Omega_2(0).$$

Порождающее решение, таким образом, представляет собой периодические колебания около требуемой ориентации, а также некоторое постоянное смещение. Чтобы определить, как на порождающее решение влияет управление, необходимо общий вид решения (3.1.9) подставить в уравнения (3.5.11) и приравнять выражения при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . В частности, в первом приближении для  $k$ -го характеристического показателя получаем

$$\dot{\Psi}_k + (\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0) \Psi_k = (\mathbf{A}_1 - \mu_k \mathbf{E}) \Phi_k.$$

Здесь для сокращения записи опущен индекс «1», обозначающий первое приближение в  $\Psi_k$  и  $\mu_k$ . Составим соответствующие уравнения для первого собственного числа,

$$\dot{\psi}_1^{(1)} + i \sqrt{\Omega_0 \vartheta + \xi} \psi_1^{(1)} - \psi_1^{(4)} = 0,$$

$$\dot{\psi}_1^{(2)} + i \sqrt{\Omega_0 \vartheta + \xi} \psi_1^{(2)} - \psi_1^{(5)} = -C_1 \mu_1,$$

$$\dot{\psi}_1^{(3)} + i \sqrt{\Omega_0 \vartheta + \xi} \psi_1^{(3)} + \Omega_0 \psi_1^{(5)} = C_1 \Omega_0 \mu_1 +$$

$$C_1 \underbrace{\left[ \mu B_1 B_3 + \Omega_0 \mu \nu (B_2^2 + B_3^2) + i \mu \nu \sqrt{\Omega_0 \vartheta + \xi} B_1 B_3 \right]}_{f_3(\tau)},$$

$$\dot{\psi}_1^{(4)} + i \sqrt{\Omega_0 \vartheta + \xi} \psi_1^{(4)} + \zeta \psi_1^{(1)} = C_1 \left[ B_2 B_3 - \Omega_0 \nu B_1 B_2 + i \nu \sqrt{\Omega_0 \vartheta + \xi} B_2 B_3 \right],$$

$$\dot{\psi}_1^{(5)} + i \sqrt{\Omega_0 \vartheta + \xi} \psi_1^{(5)} + \xi \psi_1^{(2)} - \vartheta \psi_1^{(3)} = -i C_1 \sqrt{\Omega_0 \vartheta + \xi} \mu_1 +$$

$$C_1 \underbrace{\left[ -(B_1^2 + B_2^2) - \Omega_0 \mu \nu B_1 B_3 - i \nu \sqrt{\Omega_0 \vartheta + \xi} (B_1^2 + B_2^2) \right]}_{f_3(\tau)},$$

где нижний индекс в  $\Psi_1$  указывает на добавку к первому собственному вектору, верхний индекс обозначает компоненту этого вектора. Обозначим  $\varpi = \sqrt{\Omega_0 \vartheta + \xi}$ , умножим второе уравнение на  $\xi$ , третье – на  $-\vartheta$  и сложим,

$$\xi \dot{\psi}_1^{(2)} - \vartheta \dot{\psi}_1^{(3)} + i \varpi \left( \xi \psi_1^{(2)} - \vartheta \psi_1^{(3)} \right) - \underbrace{(\xi + \vartheta \Omega_0)}_{\varpi^2} \psi_1^{(5)} = -C_1 \underbrace{(\xi + \vartheta \Omega_0)}_{\varpi^2} \sigma_1 - \vartheta f_3(\tau).$$

Далее, разделив это выражение на  $\varpi$  и вычитая из него пятое уравнение, получаем

$$\dot{\psi}_\Sigma = 2i\varpi\sigma_1 + i\frac{\mathcal{G}}{\varpi}f_3(\tau) - f_5(\tau). \quad (3.5.13)$$

Здесь  $\psi_\Sigma$  – линейная комбинация  $\psi_1^{(j)}$ . Ее конкретный вид не существен. Важным свойством является ее периодичность в силу периодичности всех  $\psi_1^{(j)}$ , то есть

$$\int_0^T \dot{\psi}_\Sigma d\tau = \psi_\Sigma(T) - \psi_\Sigma(0) = 0. \text{ Тогда, интегрируя (3.5.13) на периоде, получаем}$$

$$2i\varpi\mu_1 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ -i\frac{\mathcal{G}}{\varpi}f_3(\tau) + f_5(\tau) \right] d\tau.$$

Фактически, для определения поправок к характеристическим показателям нужно найти средние значения  $f_j(\tau)$ . Выделив в  $\mu_1$  вещественную и мнимую части, получим окончательно

$$i\mu_1^{real} - \mu_1^{im} = -\frac{1}{2\varpi T} \int_0^T \left[ -(B_1^2 + B_2^2) - \Omega_0\nu B_1B_3 - \nu\varpi(B_1^2 + B_2^2) - \frac{\nu}{\varpi} \left\{ i\mu B_1B_3 + i\Omega_0\mu\nu(B_2^2 + B_3^2) - \mu\nu\varpi B_1B_3 \right\} \right] d\tau. \quad (3.5.14)$$

Осталось провести интегрирование входящих в (3.5.14) выражений, зависящих от времени. Обозначая  $\langle g(\tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T g(\tau) d\tau$  и учитывая, что  $\nu = \eta(\tau)\varepsilon'/\varepsilon$ , для входящих в

(3.5.14) выражений имеем:

$$\langle B_1^2 + B_2^2 \rangle = \langle \cos^2 i + \sin^2 i \cos^2 u \rangle = \cos^2 i + 1/2 \sin^2 i,$$

$$\langle \eta(B_1^2 + B_2^2) \rangle = \langle (1 + 2\chi^2 \cos 2u)(\cos^2 i + \sin^2 i \cos^2 u) \rangle = \cos^2 i + 1/2(1 + \chi^2) \sin^2 i,$$

$$\langle \eta(B_2^2 + B_3^2) \rangle = \langle (1 + 2\chi^2 \cos 2u)(\cos^2 i + 4\sin^2 i \sin^2 u) \rangle = \cos^2 i + 2(1 - \chi^2) \sin^2 i,$$

$$\langle B_1B_3 \rangle = \langle \eta B_1B_3 \rangle = 0.$$

В результате получаем выражения для поправок к характеристическим показателям,

$$\mu_1^{real} = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \left( \cos^2 i + 1/2(1 + \chi^2) \sin^2 i \right) - \frac{\mathcal{G}\Omega_0\mu}{2\varpi^2} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \left( \cos^2 i + 2(1 - \chi^2) \sin^2 i \right),$$

$$\mu_1^{im} = \frac{1}{2\varpi} \left( \cos^2 i + 1/2 \sin^2 i \right).$$

Аналогичная процедура проводится для всех поправок  $\mu_j$ . Опуская соответствующие вычисления, приведем результат:

$$\begin{aligned}\mu_2^{real} &= \mu_1^{real}, \quad \mu_2^{im} = -\mu_1^{im}, \\ \mu_3^{real} &= -\frac{1}{4} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} (5 - 3\chi^2) \sin^2 i, \quad \mu_3^{im} = \frac{5}{4\sqrt{\zeta}} \sin^2 i, \\ \mu_4^{real} &= \mu_3^{real}, \quad \mu_4^{im} = -\mu_3^{im}, \\ \mu_5^{real} &= -\mu \frac{\xi \vartheta}{\Omega_0 \vartheta + \xi} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} (\cos^2 i + 2(1 - \chi^2) \sin^2 i), \quad \mu_5^{im} = 0.\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения для  $\mu_j$  в решение и представляя его опять в виде (3.5.12), имеем окончательно

$$\begin{aligned}\alpha &= \left( C_3 \cos \varpi_1 \tau + C_4 \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \sin \varpi_1 \tau \right) \exp(\varepsilon \mu_3^{real} \tau), \\ \beta &= C_5 \exp(\varepsilon \mu_5^{real} \tau) + \left( C_1 \cos \varpi_2 \tau + C_2 \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 \vartheta + \xi}} \sin \varpi_2 \tau \right) (\varepsilon \mu_1^{real} \tau), \\ \Omega_1 &= C_5 \frac{\xi}{\vartheta} \exp(\varepsilon \mu_5^{real} \tau) - \left( C_1 \Omega_0 \cos \varpi_2 \tau + C_2 \frac{\Omega_0}{\sqrt{\Omega_0 \vartheta + \xi}} \sin \varpi_2 \tau \right) \exp(\varepsilon \mu_1^{real} \tau), \\ \Omega_2 &= (-C_3 \sqrt{\zeta} \sin \varpi_1 \tau + C_4 \cos \varpi_1 \tau) \exp(\varepsilon \mu_3^{real} \tau), \\ \Omega_3 &= (-C_1 \sqrt{\Omega_0 \vartheta + \xi} \sin \varpi_2 \tau + C_2 \cos \varpi_2 \tau) \exp(\varepsilon \mu_1^{real} \tau).\end{aligned} \tag{3.5.15}$$

где

$$\begin{aligned}\varpi_1 &= \sqrt{\zeta} + \varepsilon \frac{5}{4\sqrt{\zeta}} \sin^2 i, \\ \varpi_2 &= \sqrt{\Omega_0 \vartheta + \xi} + \varepsilon \frac{1}{2\sqrt{\Omega_0 \vartheta + \xi}} (\cos^2 i + 1/2 \sin^2 i).\end{aligned}$$

Отметим, что одинаковым частотам колебаний в порождающем решении (3.5.12) соответствуют одинаковые действительные поправки к характеристическим показателям. При этом мнимые части поправок противоположны для противоположных собственных чисел порождающей системы. Также заметим, что все действительные части  $\mu_j$  содержат отношение  $\varepsilon'/\varepsilon$ , то есть скорость затухания колебаний и уменьшения постоянного смещения зависят от демпфирующей части управления, чего и следовало ожидать. Аналогично мнимые части  $\mu_j$  не содержат этого отношения, так что модифицированные частоты колебаний  $\varpi_j$  определяются позиционной частью управления.

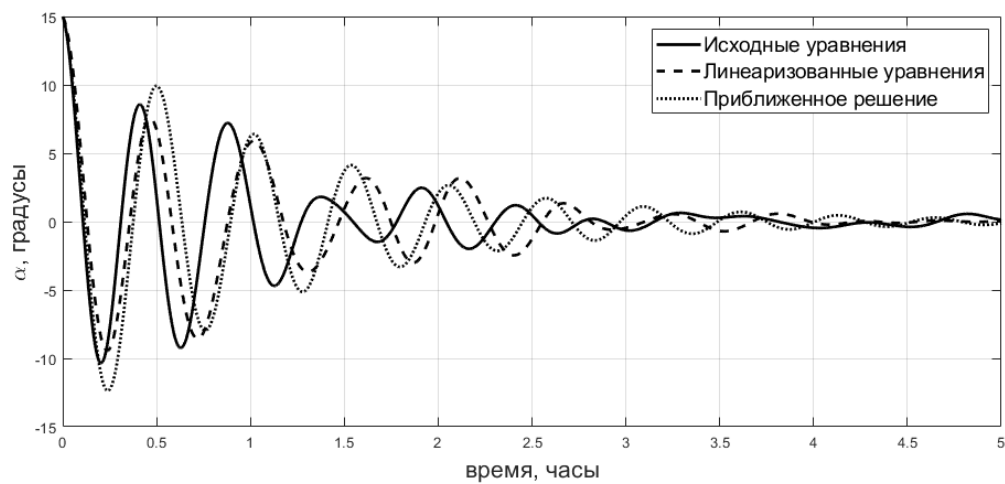
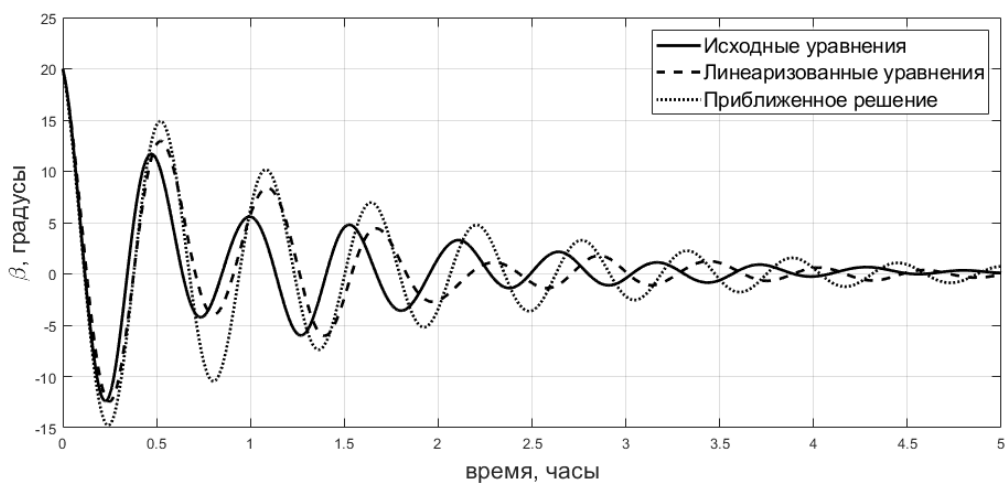
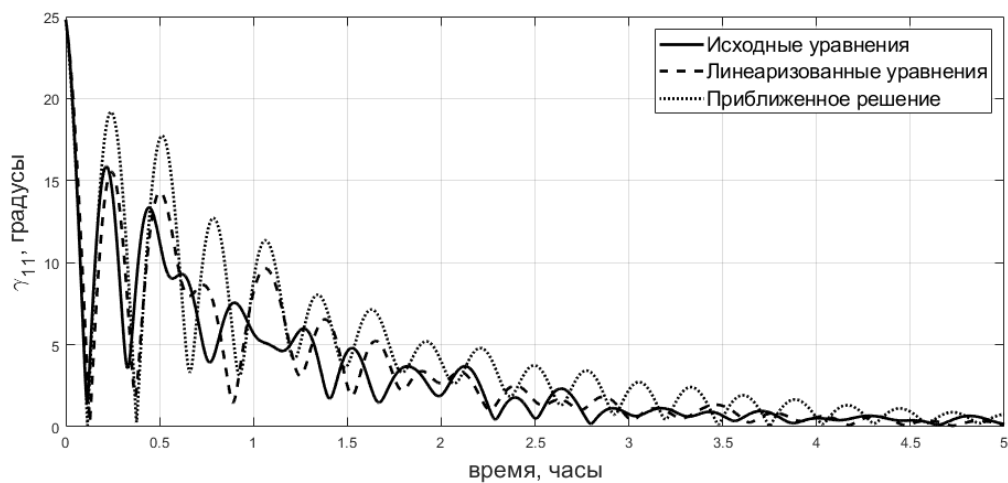
### ***Численное моделирование***

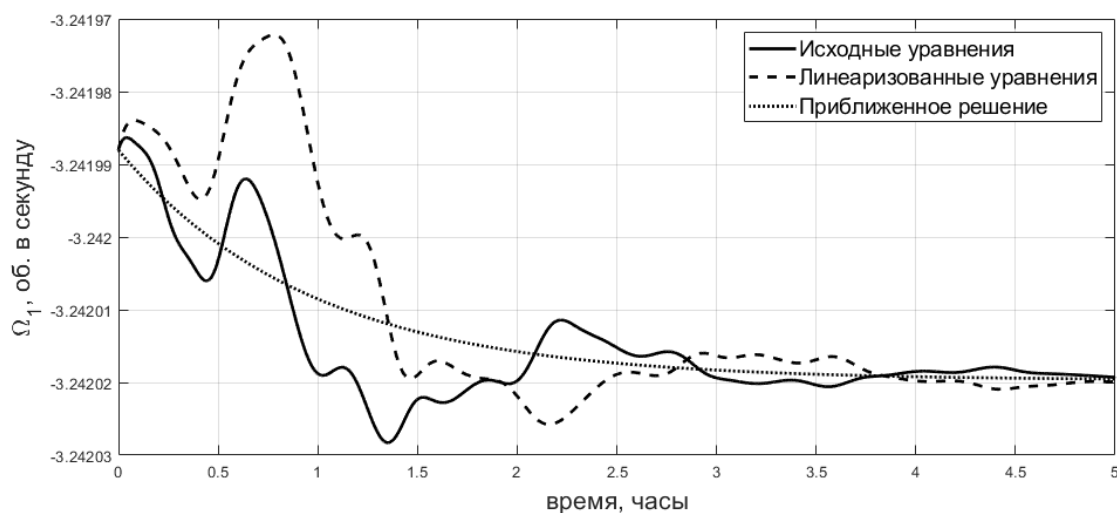
Проведем численное моделирование движения аппарата в окрестности требуемой ориентации для проверки применимости приближенного решения (3.5.15). При этом получим как численное решение исходных нелинейных уравнений движения с учетом возмущающих факторов, так и решение линейных уравнений. Таким образом можно будет получить представление как о точности примененного метода как такового, сравнивая приближенное решение (3.5.15) с решением линейных упрощенных уравнений, так и представление о перспективе применения решения (3.5.15) для описания движения реального аппарата, сравнивая приближенное решение с численным решением с учетом возмущающих факторов.

Примем следующие параметры спутника:

- Моменты инерции ( $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ ) спутника  $A=0.067$ ,  $B=0.052$ ,  $C=0.042$  в исходных уравнениях,  $B=C=0.052$  в линейных уравнениях и упрощенном решении.
- Наклонение орбиты  $51^\circ$ .
- Высота орбиты 350 км в упрощенных уравнениях, параметр орбиты 6721 км в исходных уравнениях при эксцентриситете 0.001 (орбита эллиптическая кеплерова).
- Параметры расчета аэродинамического момента:
  - o Длины сторон аппарата 30, 40, 20 см вдоль осей связанной системы координат,
  - o Смещение центра масс относительно центра давления – 1 см вдоль первой оси в упрощенных моделях, дополнительно 1 мм в исходной модели,
  - o Плотность атмосферы постоянная  $6.9\cdot 10^{-12}$   $\text{кг}/\text{м}^3$ , что соответствует средней солнечной активности.
- Момент инерции маховика  $5\cdot 10^{-4}$   $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ , скорость вращения  $30000 \omega_{\text{орб}}$  (кинетический момент маховика около 0.016 Н·м).
- Параметры управления  $k_p=180$  Н·м/Тл<sup>2</sup>,  $k_\omega=3.2\cdot 10^{-5}$  Н·м·с.
- Величина остаточного дипольного момента имеет порядок  $10^{-4}$  А·м<sup>2</sup>, что соответствует точности его оценки и последующей компенсации [159,160].
- Ошибка знания ориентации имеет нормальное распределение с математическим ожиданием и дисперсией 0.1 градуса, для угловой скорости аналогично  $10^{-4}$  с<sup>-1</sup>.
- Величина возмущающего момента неизвестной природы – примерно  $10^{-9}$  Н·м.

На Рис. 3.6.1-3.6.3 приведены углы, показывающие ориентацию оси вращения аппарата относительно вектора скорости, на Рис. 3.6.4 – скорость вращения аппарата.

Рис. 3.6.1. Угол  $\alpha$ Рис. 3.6.2. Угол  $\beta$ Рис. 3.6.3. Угол между осями  $X_1$  и  $x_1$

Рис. 3.6.4. Скорость вращения вокруг оси  $x_1$ 

На рисунках сплошной линией показано численное решение исходных уравнений движения, пунктирной — численное решение линеаризованных уравнений, точечной — приближенное решение (3.5.15). Рис. 3.6.1-3.6.3 показывают хорошую точность предсказания поведения оси вращения аппарата с помощью выражений (3.5.15). Описание эволюции скорости несколько менее точно согласно Рис. 3.6.4. Здесь однако стоит отметить, что изменение скорости относительно ее номинального значения мало, поэтому отличие трех решений может показаться существенным. При этом приближенное решение все еще весьма успешно описывает эволюцию вращения аппарата вокруг требуемой оси.

### Заключение

В третьей главе рассмотрено движение КА с активной магнитной системой ориентации и ротором (маховиком с постоянной скоростью вращения). В переходном режиме, когда КА выходит на режим ориентации осью установки маховика в плоскости орбиты, получены приближенные выражения для аналогов характеристических показателей системы с периодическими коэффициентами. Проведено сравнение нескольких алгоритмов демпфирования. Показано, что алгоритм  $-\dot{V}$ , обычно наименее эффективный, в данной задаче является предпочтительным. Для установившегося режима разработана численно-аналитическая методика поиска амплитуд периодических колебаний. В движении быстро вращающегося КА с ротором, компенсирующим его кинетический момент, предложено управление, поддерживающее ориентацию оси вращения по вектору линейной скорости в полусвязанной системе координат. Показана устойчивость требуемого режима движения, проведена адаптация алгоритма к условиям применения в контуре системы управления. Для



движения на низкой орбите, когда существенное влияние оказывает восстанавливающий аэродинамический момент, для описанного режима движения найдены аналоги характеристических показателей и приближенное решение, описывающее стремление КА к требуемому положению.

#### Глава 4. Управляемое движение космического аппарата, стабилизируемого вращением

Быстрое вращение КА вокруг оси симметрии позволяет усилить магнитную систему ориентации собственными динамическими свойствами аппарата, приобретающего свойства гироскопа. Хотя в этом случае доступна лишь одноосная ориентация, практическая значимость такого режима существенна: орбитальные телескопы и исследование солнечно-земных связей в околоземном пространстве, стабилизация на Солнце для заряда аккумуляторов обеспечиваются вращающимися КА.

##### 4.1. Переходные процессы под управлением связки трех алгоритмов ориентации

Рассмотрим движение осесимметричного КА, стабилизируемого вращением, под действием связки трех алгоритмов: гашения нутационных колебаний, поддержания скорости вращения, и переориентации оси симметрии. Выражения для управляющих дипольных моментов, реализующих эти режимы, были предложены в [161].

##### *Алгоритм гашения нутационных колебаний*

Рассмотрим первый этап управления ориентацией спутника, на котором осуществляется гашение нутационных колебаний. Заметим, что для этого можно использовать алгоритм  $-\dot{V}$ . Недостатком использования этого алгоритма в рассматриваемом случае является демпфирование всех трех компонент угловой скорости спутника. Так как на втором этапе необходимо обеспечить раскрутку вокруг оси симметрии, то гашение этой компоненты на первом этапе нецелесообразно. Применим другой алгоритм, реализующий схему управления  $-\dot{V}$  при помощи одной магнитной катушки, направленной вдоль оси симметрии. Дипольный магнитный момент спутника  $\mathbf{m}_x = (0, 0, m)$  в этом случае имеет вид

$$\mathbf{m}_x = -k \left( \frac{d\mathbf{B}_x}{dt} \mathbf{e}_3 \right) \mathbf{e}_3, \quad (4.1.1)$$

где  $\mathbf{e}_3$  – орт оси симметрии спутника. Далее исследуем движение КА, как это было сделано в разделе 2.1. После проведения аналогичных рассуждений, получаем усредненную систему уравнений

$$\frac{dl}{du} = -\frac{1}{2} \varepsilon l \left[ 2p + (1-3p) \sin^2 \rho \right] \sin^2 \theta,$$

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{du} &= \frac{1}{2}\varepsilon(3p-1)\sin\rho\cos\rho\sin^2\theta, \\ \frac{d\theta}{du} &= -\frac{1}{2}\varepsilon[2p+(1-3p)\sin^2\rho]\sin\theta\cos\theta, \\ \frac{d\sigma}{du} &= 0,\end{aligned}\tag{4.1.2}$$

где  $\varepsilon = kB_0'^2/\omega_{orb}C$ . Уравнения (4.1.2) допускают замену  $\rho \rightarrow -\rho, \rho \rightarrow \pi - \rho$  и  $\theta \rightarrow -\theta, \theta \rightarrow \pi - \theta$ . Решение уравнений (4.1.2) удастся найти в квадратурах. Остановимся сначала на двух частных случаях. Тривиальное уравнение для  $\sigma$  отделяется и далее исследоваться не будет. Рассмотрим два стационарных решения для  $\rho$ .

1. Начальное значение  $\rho_0 = 0$ . Тогда уравнения (4.1.2) принимают вид (здесь и далее тривиальные уравнения опускаем)

$$\begin{aligned}\frac{dl}{du} &= -\varepsilon pl \sin^2\theta, \\ \frac{d\theta}{du} &= -\varepsilon p \sin\theta \cos\theta.\end{aligned}\tag{4.1.3}$$

Их решение

$$|\operatorname{tg}\theta| = \exp(-\varepsilon pu + c_0), \quad l = \frac{1 + \exp(-2p\varepsilon u + 2c_0)}{1 + \exp(2c_0)},$$

где  $c_0 = \ln \operatorname{tg}\theta_0$ . Из этих выражений видно, что чем больше наклонение орбиты (а значит, и  $p$ ), тем больше быстродействие алгоритма. Заметим, что при интегрировании (4.1.3) в выражении  $\ln|\operatorname{tg}\theta|$  можно раскрыть модуль, так как  $\theta$  монотонно стремится к нулю или  $\pi$ . Будем далее считать, что  $\theta \in [0, \pi/2]$ , что не приведет к потере общности в силу возможности замены  $\theta \rightarrow -\theta, \theta \rightarrow \pi - \theta$  в уравнениях (4.1.2).

2. Случай  $\rho_0 = \pi/2$ . Уравнения аналогичны (4.1.3), их решение

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\theta &= \exp[-\varepsilon(1-p)u + c_0], \\ l &= \frac{1 + \exp[-2(1-p)\varepsilon u + 2c_0]}{1 + \exp(2c_0)}.\end{aligned}$$

В этом случае, напротив, быстродействие падает с ростом наклонения орбиты.

Рассмотрим общий случай. Разделим первое уравнение (4.1.2) на третье, получим

$$dl/l = \operatorname{tg}\theta d\theta.$$

Интегрирование этого выражения приводит к

$$\ln l = \ln \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta},$$

откуда получен первый интеграл  $I_1(l, \theta) = l \cos \theta$ , выражающий сохранение третьей компоненты угловой скорости в связанной системе координат. Разделим второе уравнение (4.1.2) на третье, получим

$$-\frac{2p + (1 - 3p) \sin^2 \rho}{(3p - 1) \sin \rho \cos \rho} d\rho = \operatorname{tg} \theta d\theta,$$

откуда определяем первый интеграл

$$I_2(\rho, \theta) = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) - \frac{2p}{3p - 1} \ln \operatorname{tg} \rho + \ln \cos \theta.$$

Заметим, что случай  $3p - 1 = 0$  может быть рассмотрен аналогично случаям 1 и 2. Найденные первые интегралы, удовлетворяющие условиям теоремы о неявной функции, позволяют получить решение системы (4.1.2) в квадратурах.

На быстродействие системы оказывают влияние три параметра:  $i, \rho_0, \theta_0$ . Как и следовало ожидать, с ростом  $\theta_0$  быстродействие системы (время уменьшения угла  $\theta$ , а значит, и экваториальной компоненты угловой скорости спутника  $l \sin \theta / A$ ) падает. Влияние  $i$  и  $\rho_0$  отражено на Рис. 4.1.1 и Рис. 4.1.2.

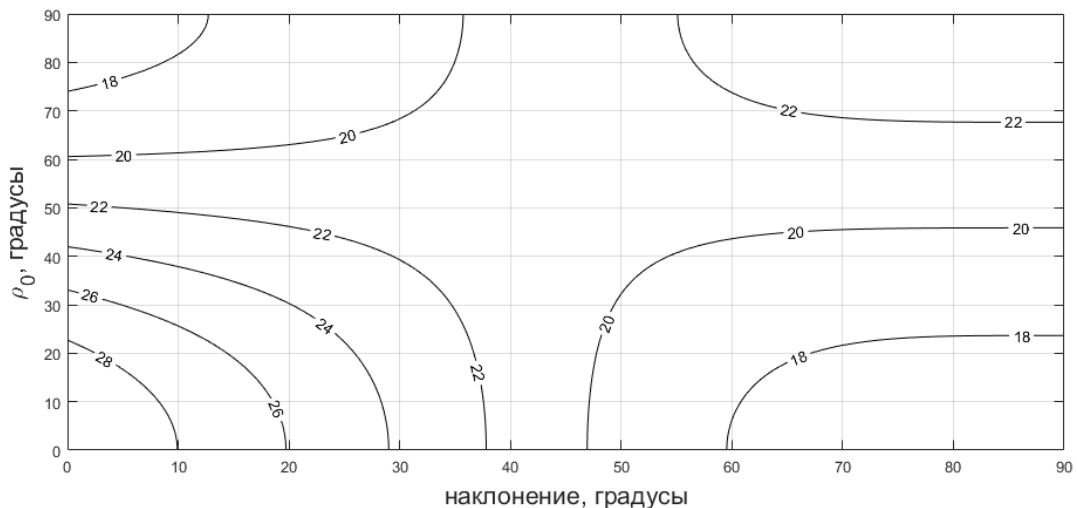


Рис. 4.1.1. Угол  $\theta$  через 2 витка,  $\theta_0 = 30^\circ$ .

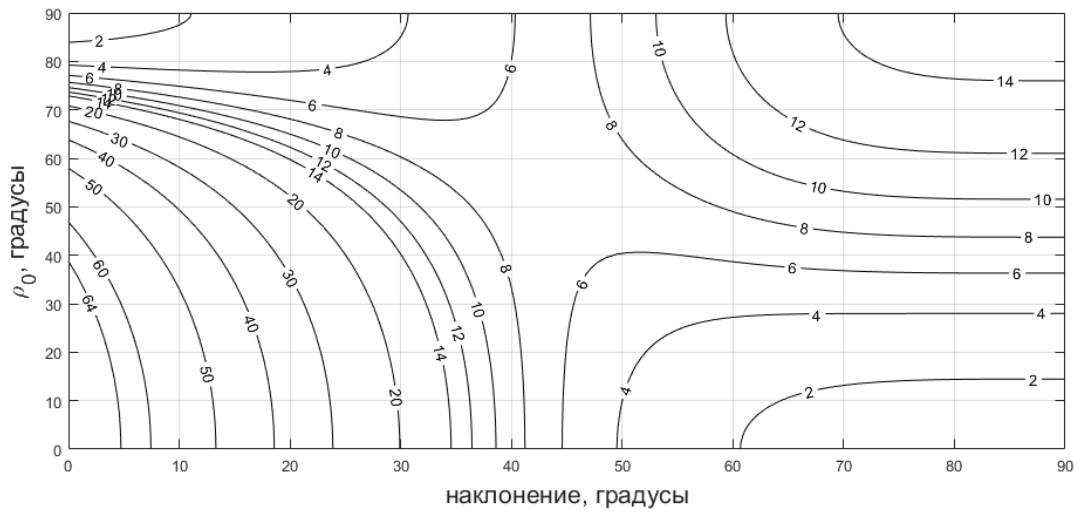


Рис. 4.1.2. Угол  $\theta$  через 15 витков,  $\theta_0 = 70^\circ$ .

На Рис. 4.1.1 и Рис. 4.1.2 представлено значение угла  $\theta$  через 2 и 15 витков соответственно. Как видно из Рис. 4.1.1, при величинах  $\rho_0$ , меньших приблизительно  $50^\circ$ , быстродействие растет с ростом наклона орбиты, при больших – падает (см. частные случаи 1 и 2). Рис. 4.1.2 показывает, что при увеличении времени работы алгоритма появляется область, в которой лучшее быстродействие достигается при наклоне около  $45^\circ$ . Однако, как видно из Рис. 4.1.2, при выборе большого наклона угол  $\theta$  в худшем случае не превысит  $14^\circ$ , тогда как при выборе малого наклона он может практически не измениться. Таким образом, для работы алгоритма гашения нутационных колебаний представляется предпочтительной орбита с большим наклоном.

#### **Алгоритм раскрутки**

На втором этапе управления происходит раскрутка спутника вокруг оси симметрии до заданного значения угловой скорости. Для этого используется дипольный момент

$$\mathbf{m}_x = kB'_0(B_{x2}, -B_{x1}, 0). \quad (4.1.4)$$

Это приведет к тому, что третья компонента угловой скорости будет возрастать, так как

$$C \frac{d\omega_3}{dt} = kB_0'^2 (B_{x1}^2 + B_{x2}^2).$$

Проведем исследование динамики спутника при помощи эволюционных переменных, как это было сделано в предыдущем разделе и разделе 2.1. Механический момент в системе  $OL$

$$\mathbf{M}_L = kB_0'^2 \begin{pmatrix} a_{13} - a_{13}B_{L1}^2 - a_{23}B_{L1}B_{L2} - a_{33}B_{L1}B_{L3} \\ a_{23} - a_{13}B_{L1}B_{L2} - a_{23}B_{L2}^2 - a_{33}B_{L2}B_{L3} \\ a_{33} - a_{13}B_{L1}B_{L3} - a_{23}B_{L2}B_{L3} - a_{33}B_{L3}^2 \end{pmatrix}.$$

Предположим опять, что механический момент, создаваемый при помощи магнитной системы ориентации, мал. Усредненные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dl}{du} &= \varepsilon [2p + (1-3p)\sin^2 \rho] \cos \theta, \\ \frac{d\rho}{du} &= -\varepsilon \frac{1}{l} (3p-1) \sin \rho \cos \rho \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{du} &= -\frac{1}{2l} \varepsilon [2-2p - (1-3p)\sin^2 \rho] \sin \theta, \\ \frac{d\sigma}{du} &= 0, \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

где  $\varepsilon = kB_0'^2 / \omega_{op0} L_0$  – малый параметр. Заметим, что при выводе уравнений (4.1.5) не использовалось предположение малости угла  $\theta$ . Предположим теперь, что в результате работы алгоритма гашения нутационных колебаний угол  $\theta$  мал. Тогда уравнения (4.1.5) можно переписать как

$$\begin{aligned} \frac{dl}{du} &= \varepsilon [2p + (1-3p)\sin^2 \rho], \\ \frac{d\rho}{du} &= -\varepsilon \frac{1}{l} (3p-1) \sin \rho \cos \rho, \\ \frac{d\theta}{du} &= -\frac{1}{2l} \varepsilon [2-2p - (1-3p)\sin^2 \rho] \theta. \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Если же в результате работы алгоритма гашения нутационных колебаний угол  $\theta$  близок к  $\pi$ , то необходимо проводить раскрутку в другую сторону, так как  $\omega_3(0) < 0$ . В этом случае правые части уравнений (4.1.5) поменяют знак, первые два уравнения (4.1.6) останутся в силе. Уравнение для  $\theta$  отделяется. Разделив первое уравнение (4.1.6) на второе, получим

$$\frac{dl}{l} = -\frac{2p + (1-3p)\sin^2 \rho}{(3p-1)\sin \rho \cos \rho} d\rho,$$

откуда находим первый интеграл

$$I_1(l, \rho) = \ln l - \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) + \frac{2p}{3p-1} \ln \operatorname{tg} \rho.$$

Заметим, что в случае  $3p-1=0$  последнее дифференциальное уравнение легко интегрируется и дает  $l = 2/3 \varepsilon u$ . Рассмотрим также два частных случая.

1. Если  $\rho_0 = 0$ , то на всем движении  $\rho = \rho_0$ , тогда  $l = 2\varepsilon \rho u$  и быстродействие алгоритма растет с увеличением наклонения орбиты.

2. Если  $\rho_0 = \pi/2$ , то аналогично  $l = \varepsilon(1-\rho)u$  и быстродействие алгоритма падает с увеличением наклонения орбиты.

Первый интеграл позволяет найти решение первых двух уравнений (4.1.6) в квадратурах, после чего третье уравнение также интегрируется.

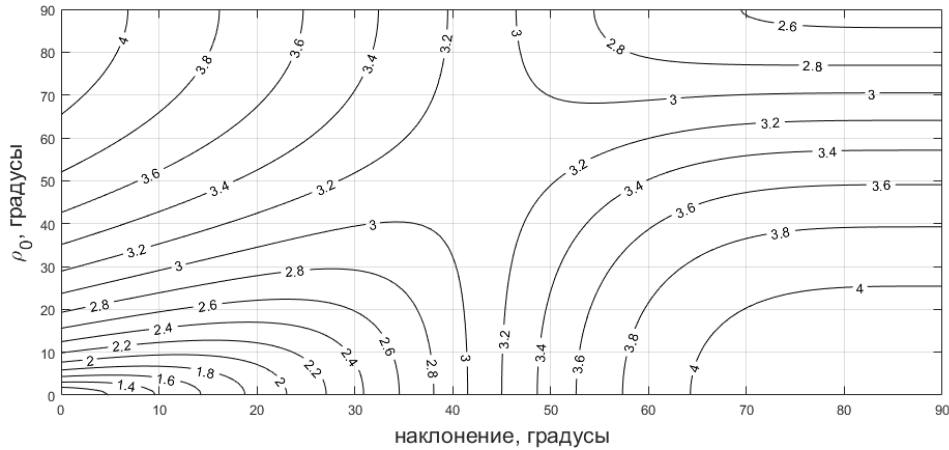


Рис. 4.1.3. Кинетический момент через 5 витков

Влияние  $\rho_0$  и  $i$  на быстродействие алгоритма раскрутки аналогично их влиянию на быстродействие алгоритма гашения нутаций (Рис. 4.1.3). На Рис. 4.1.3 представлено значение кинетического момента спутника через 5 витков при  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\theta_0 = 1^\circ$ . При небольших  $\rho_0$  увеличение наклонения приводит к увеличению быстродействия (частный случай 1), при  $\rho_0$ , близких к  $90^\circ$ , быстродействие падает с увеличением наклонения (частный случай 2). Однако, как и в случае гашения нутаций, выбор большого наклонения представляется предпочтительным, так как в этом случае нет опасности реализации режима с необоснованно низким быстродействием.

Экваториальная компонента угловой скорости не возрастает. Ее производная имеет вид

$$\frac{d(l \sin \theta)}{du} = \varepsilon [-2 + 2p + (1 - 3p) \sin^2 \rho] \sin \theta \cos \theta.$$

Поскольку угол  $\theta$  близок к нулю, в ходе раскрутки экваториальная компонента скорости уменьшается. Заметим, что одновременно с алгоритмом раскрутки может работать алгоритм гашения нутационных колебаний.

### **Алгоритм переориентации оси симметрии**

Рассмотрим алгоритм, приводящий спутник, быстро закрученный вокруг оси симметрии, в положение с заданной ориентацией этой оси в инерциальном пространстве. Дипольный магнитный момент  $\mathbf{m}_x = (0, 0, m)$ , создаваемый катушками, имеет вид

$$\mathbf{m}_x = k(\Delta\mathbf{L} \cdot [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}])\mathbf{e}_3,$$

где  $\Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}_f - \mathbf{L}$ ,  $\mathbf{L}_f$  – требуемое конечное значение кинетического момента. Динамику спутника опишем при помощи эволюционных переменных. Для этого необходимо задать механический момент в системе  $OL$ . Определим в этой системе все необходимые выражения. Требуемое значение кинетического момента  $\mathbf{L}_{fl} = \mathbf{Q}^T(L_1, L_2, L_3)$ , где компоненты  $L_i$  задают конечное положение вектора кинетического момента в инерциальном пространстве;  $\mathbf{e}_{3L} = (0, 0, 1)$ , так как спутник закручен вдоль оси симметрии, то есть  $A|\omega_i| \ll C|\omega_3|$ , ( $i = 1, 2$ );  $\mathbf{L}_L = L_0(0, 0, l)$ , где  $L_0$  – модуль кинетического момента в начальный момент времени,  $l$  – безразмерный кинетический момент, определяемый по формуле  $L = L_0 l$ .

Поскольку спутник закручен вокруг оси симметрии и дипольный момент в системе  $Ox$  имеет вид  $(0, 0, m)$ , то в системе  $OL$  момент  $\mathbf{m}_L$  имеет тот же вид. Отсюда  $\mathbf{M}_L = B'_0(-B_{L2}m, B_{L1}m, 0)$ , где  $m = k(\Delta\mathbf{L} \cdot [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}]) = kL_0 B'_0(L_{L2}B_{L1} - L_{L1}B_{L2})$ .

Запишем снова уравнения, описывающие эволюцию медленных переменных, в предположении слабого механического момента

$$\frac{dl}{du} = 0,$$

$$\frac{d\rho}{du} = \frac{1}{2} \varepsilon \sin^2 \Theta \frac{1}{l} (L_1 \cos \rho \cos \sigma + L_2 \cos \rho \sin \sigma - L_3 \sin \rho), \quad (4.1.7)$$

$$\frac{d\sigma}{du} = \frac{1}{2} \varepsilon \sin^2 \Theta \frac{1}{l \sin \rho} (-L_1 \sin \sigma + L_2 \cos \sigma).$$

$$\frac{d\theta}{du} = 0,$$



где  $\varepsilon = kB_0^2 / \omega_{op\bar{b}}$  – малый параметр. Уравнения (4.1.7) удастся проинтегрировать, если  $L_1 = L_2 = 0$ , то есть ось симметрии спутника требуется выставить вдоль оси конуса упрощенной дипольной модели геомагнитного поля. В этом случае уравнения принимают вид (тривиальные уравнения для  $l$ ,  $\sigma$  и  $\theta$  опускаем)

$$\frac{d\rho}{du} = -\xi \sin \rho,$$

где  $\xi = 1/2 \varepsilon L_3 \sin^2 \Theta$ , так как из первого уравнения (4.1.7) следует, что  $l \equiv 1$ . Решение этого уравнения получается в виде конечных формул

$$\rho = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} [c_0 \exp(-\xi u)],$$

где  $c_0 = \operatorname{tg} \rho_0 / 2$ . Быстродействие алгоритма, то есть скорость переориентации спутника в необходимом направлении, возрастает с ростом наклона орбиты. Угол  $\rho$  стремится к нулю, что асимптотически соответствует требуемой ориентации  $\mathbf{L}_f = (0, 0, L_3)$ .

Вообще,  $d\rho/du \sim \sin^2 \Theta$ ,  $d\sigma/du \sim \sin^2 \Theta$ . Поскольку разница между  $i$  и  $\Theta$  составляет не более  $11^\circ$ , можно считать, что  $d\rho/du \sim \sin^2 i$ ,  $d\sigma/du \sim \sin^2 i$ , и тогда скорость изменения углов растет с увеличением наклона, значит, и быстродействие алгоритма переориентации оси симметрии растет с увеличением наклона.

В случае  $L_2 = 0$ ,  $L_3 = 0$  удастся найти первый интеграл системы (4.1.7). Разделим второе уравнение (4.1.7) на третье

$$\frac{d\rho}{d\sigma} = \frac{\sin \rho (L_1 \cos \rho \cos \sigma + L_2 \cos \rho \sin \sigma - L_3 \sin \rho)}{-L_1 \sin \sigma + L_2 \cos \sigma}.$$

Для выбранного направления в инерциальном пространстве

$$\frac{d\rho}{d\sigma} = -\frac{\sin \rho \cos \rho \cos \sigma}{\sin \sigma},$$

откуда, после интегрирования, имеем

$$\ln(\operatorname{tg} \rho / \operatorname{tg} \rho_0) = \ln(\sin \sigma_0 / \sin \sigma),$$

Окончательно получаем первый интеграл

$$I_0 = \operatorname{tg} \rho \sin \sigma. \quad (4.1.8)$$

Наличие этого первого интеграла позволяет проинтегрировать систему (4.1.7). Обозначая

$$f(\rho, I_0) = \sqrt{1 - I_0^2 \operatorname{ctg}^2 \rho},$$

из (4.1.7) получаем

$$\int \frac{d\rho}{f(\rho, I_0) \cos \rho} = \frac{1}{2} \varepsilon \sin^2 \Theta u \text{ при } \sigma = \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right],$$

$$\int \frac{d\rho}{f(\rho, I_0) \cos \rho} = -\frac{1}{2} \varepsilon \sin^2 \Theta u \text{ при } \sigma = \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right],$$

что совместно с (4.1.8) позволяет найти решение системы (4.1.7) в квадратурах.

Таким образом, получена зависимость быстродействия всех трех алгоритмов от наклона орбиты. В случае алгоритмов гашения нутационных колебаний и раскрутки может быть выгоднее иметь орбиту с низким наклоном. Однако, представляются предпочтительными орбиты с высоким наклоном (приполярные орбиты). Для алгоритма переориентации лучший результат дают орбиты с высоким наклоном.

### ***Использование стабилизации вращением в задаче осмотра небесной сферы***

Рассмотрим задачу осмотра небесной сферы, возникающую, например, при исследовании реликтового излучения. Для этого будем использовать два подхода. Первый – практически хаотическое вращение КА, скорость которого поддерживается в некотором диапазоне с помощью алгоритма  $-V_{dot}$ , или, если нужно,  $+V_{dot}$ , то есть тем же законом управления, но с обратным знаком. Второй вариант – стабилизация вращением. Этот режим представляется естественным, так как позволяет равномерно сканировать всю небесную сферу с помощью полезной нагрузки, установленной перпендикулярно оси вращения. Сама ось вращения при этом поворачивается в инерциальном пространстве. Для обеспечения стабилизации вращением используются три алгоритма, рассмотренные выше. В номинальном режиме используется алгоритм переориентации. Рассматриваются три варианта изменения направления оси вращения в инерциальном пространстве. В наиболее естественном подходе ось медленно вращается, чтобы обеспечить равномерный осмотр небесной сферы. В этом случае, однако, не учитывается основной источник потери данных – попадание Земли в поле зрения полезной нагрузки. Поскольку КА располагается на низкой орбите, Земля закрывает почти половину всей небесной сферы. Чтобы снизить потерю данных, рассматривается режим ориентации оси вращения по радиус-вектору. В результате возникает необходимость вращения вектора кинетического момента КА в инерциальном пространстве с орбитальной скоростью. Чтобы это было возможно, приходится снижать скорость вращения. В результате снижается точность ориентации оси вращения, которая составляет в рассматриваемой ситуации несколько десятков градусов. Тем не менее, основная задача режима – снизить вероятность попадания Земли в поле зрения камеры –

успешно решается. Отметим, что к потере данных также приводит попадание в область обзора Солнца и Луны, но из-за их малого углового размера их влияние не так существенно. Наконец, рассматривается третий режим ориентации оси вращения на Солнце для поддержания заряда аккумуляторов. В этом случае половину времени КА проводит в режиме стабилизации по местной вертикали, половину – в режиме ориентации оси вращения на Солнце.

Результаты работы алгоритмов рассматриваются на интервалах в один день, месяц и один год. Небесная сфера делится сеткой с шагом в 5 градусов по широте и долготе, и для каждого узла сетки вычисляется количество секунд (наборов данных), в течение которых они были осмотрены.

#### *Стабилизация вращением с равномерным поворотом оси*

Чтобы задать режим эволюции оси вращения в инерциальном пространстве, введем плоскость, чья ориентация относительно инерциальной системы координат задается углами наклона и долготы восходящего угла, как это делается при введении элементов орбиты. «Наклонение» плоскости, в которой должна лежать ось вращения КА, равномерно меняется и делает полный оборот за десять дней. «Долгота восходящего узла» меняется с периодом в пятнадцать дней. Наконец, ось вращения КА делает полный оборот в указанной плоскости за сутки. На Рис. 4.1.4 приведено число наборов данных для всех точек небесной сферы, заданных долготами и широтами, в результате одних суток работы КА.

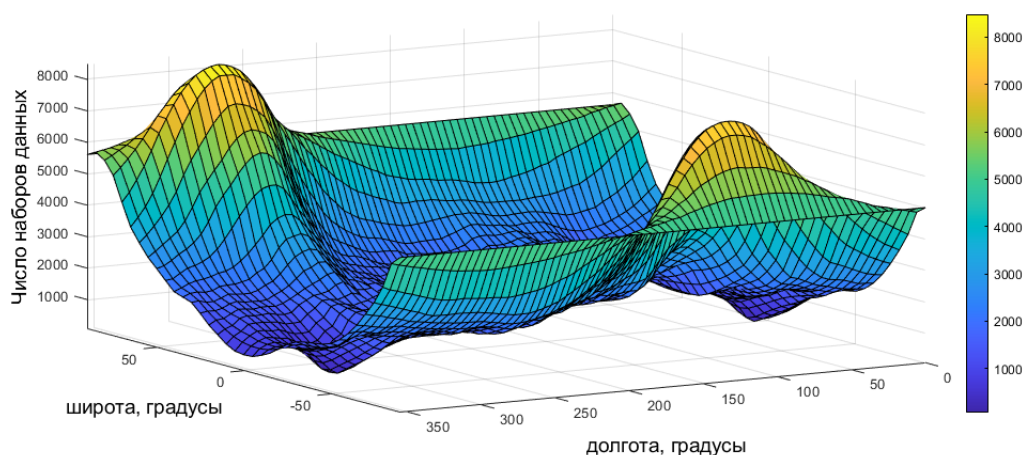


Рис. 4.1.4. Один день работы режима вращения

На Рис. 4.1.4 можно заметить\* две области, в которых получено особенно мало данных. Они соответствуют положению Луны и Солнца на небесной сфере, которые в течение суток практически неподвижны и задают недоступные для осмотра области. Две области с большим числом данных наблюдаются из-за особенности ориентации плоскости, в которой лежит ось вращения.

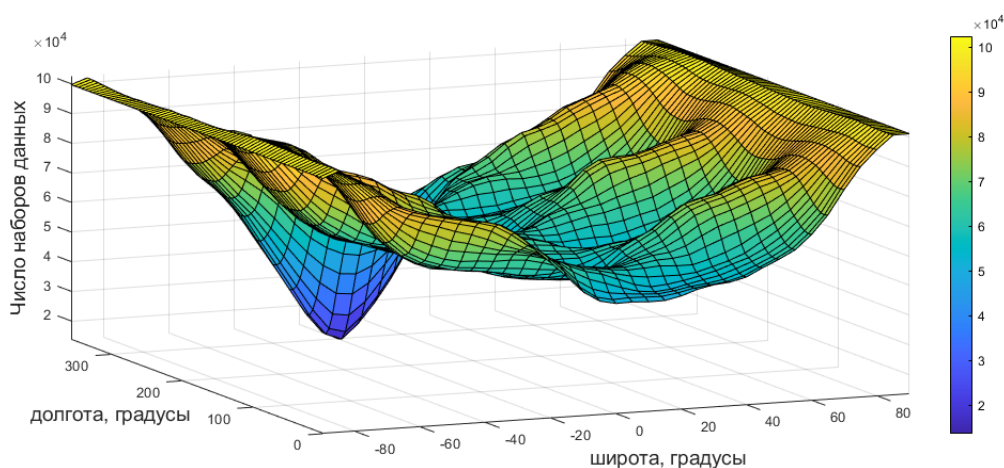


Рис. 4.1.5. Месяц работы режима вращения

При рассмотрении движения КА в течение месяца на Рис. 4.1.5 исчезает провал в наблюдениях, вызванный Луной. Также сглаживаются наилучшие результаты, так как плоскость, в которой лежит ось вращения КА, успевает сделать два оборота в инерциальном пространстве. Область с малым числом собранных данных отвечает положению Солнца, которое в течение месяца сместилось лишь незначительно. Как и следовало ожидать, при рассмотрении движения в течение года на Рис. 4.1.6 влияние Солнца снижается.

---

\* Результаты работы опубликованы в препринте Института прикладной математики № 47 за 2014 год, допускающем вращение приведенных на рисунках поверхностей в программе Adobe Reader. Препринт находится в открытом доступе на сайте онлайн-библиотеки Института по адресу <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-47>.

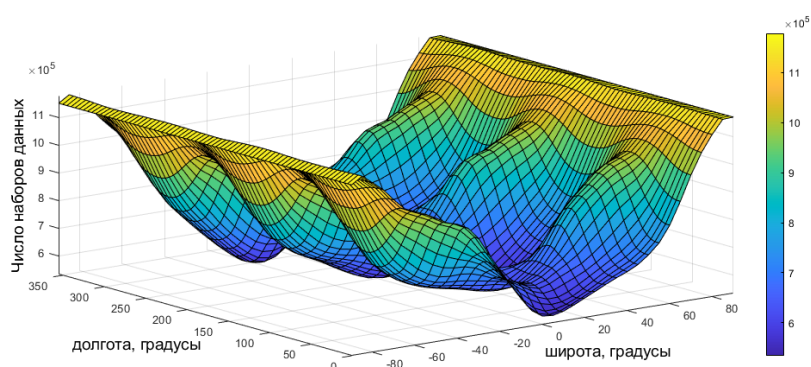


Рис. 4.1.6. Год работы

На всех трех рисунках можно наблюдать существенно лучшее покрытие приполярных областей по сравнению с приэкваториальными. Это связано с расположением всех трех ярких источников излучения: Земля не закрывает поле обзора только вблизи полюсов, Солнце и Луна движутся вблизи плоскости экватора. Минимальное число наборов вблизи экватора составляет 534.320, максимальное в приполярных областях 1.177.844.

#### *Вращение вокруг местной вертикали*

В режиме поддержания вращения вокруг местной вертикали с низкой точностью наблюдается обратная ситуация.

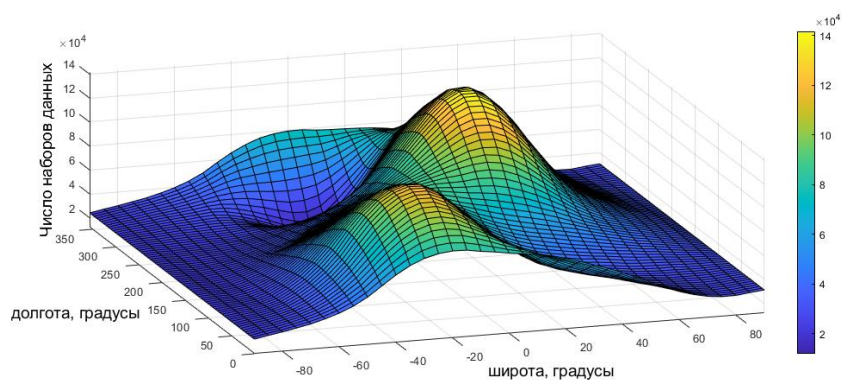


Рис. 4.1.7. Месяц работы в режиме вращения вокруг местной вертикали

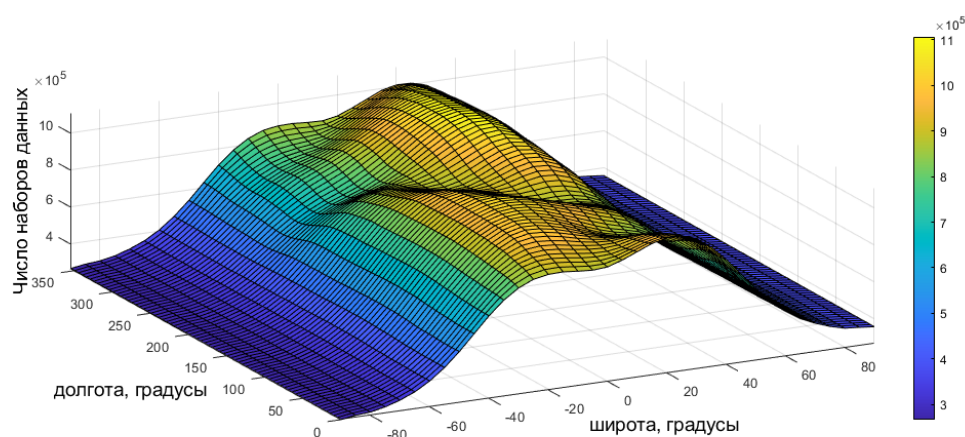


Рис. 4.1.8. Год работы в режиме вращения вокруг местной вертикали

Покрытие полярных областей в рассматриваемом случае зависит от ориентации орбиты КА, и при принятом наклонении в 60 градусов приводит к плохому осмотру полярных областей. Так, минимальное число наборов данных снижается в два раза и составляет 266.819, при этом общее число полученных наборов повышается лишь незначительно несмотря на попытки избежать попадания Земли в область обзора датчика. Это связано с низкой точностью поддержания ориентации оси вращения.

#### *Вращение с зарядом аккумуляторов*

В режиме попеременной стабилизации по местной вертикали и на Солнце отличие от первого режима заключается в том, что ось вращения КА переориентируется в инерциальном пространстве существенно медленнее. Тем не менее, можно ожидать относительно равномерный осмотр небесной сферы и повышение общего числа наборов данных, так как и Земля, и Солнце реже попадают в поле обзора датчика.

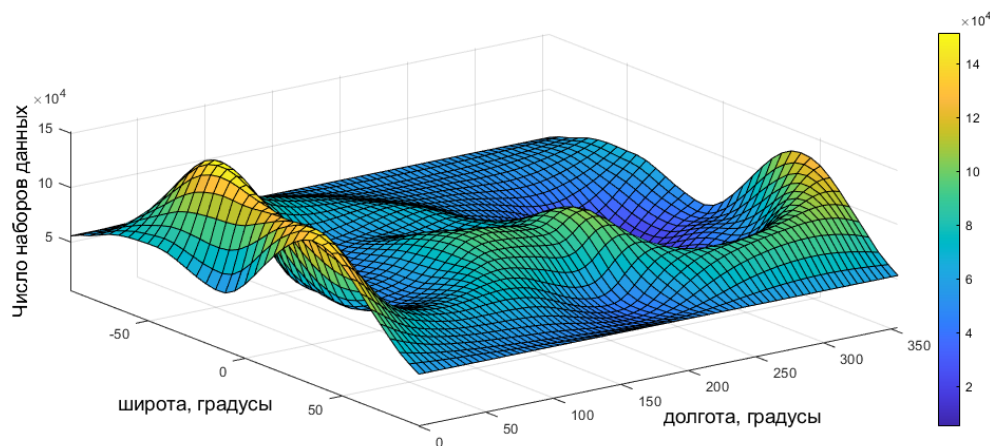


Рис. 4.1.9. Месяц работы в режиме стабилизации на Солнце



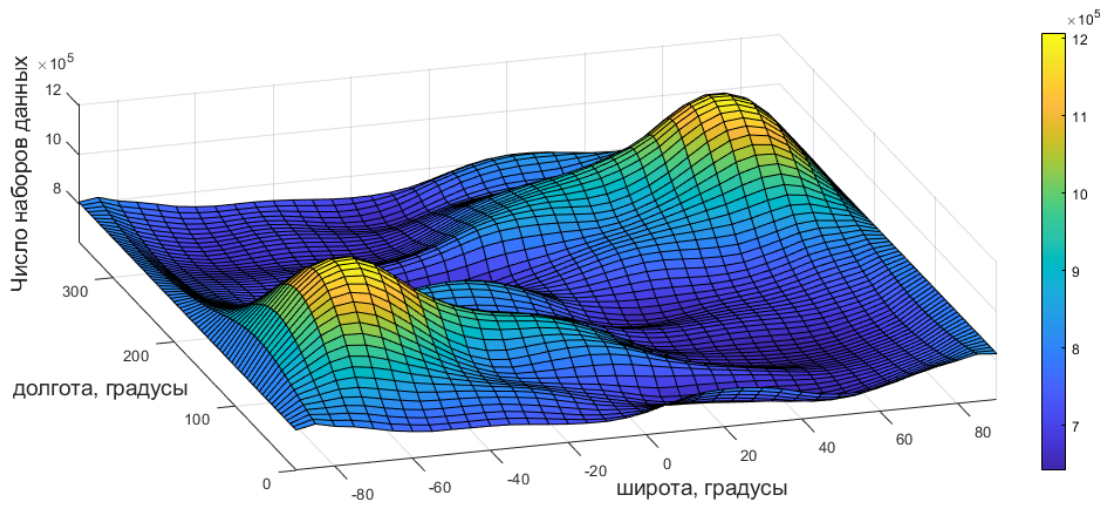


Рис. 4.1.10. Год работы в режиме стабилизации на Солнце

Рис. 4.1.9 и 4.1.10 подтверждают приведенные рассуждения. При этом во время переключения между режимами стабилизации по местной вертикали и по Солнцу в переходном процессе КА успевает сделать несколько оборотов в случайном направлении.

#### *Свободное вращение с поддержанием скорости*

Наиболее простой режим ориентации, фактически соответствующий хаотическому вращению КА, обеспечивает равномерный осмотр небесной сферы на Рис. 4.1.11 и 4.1.12.

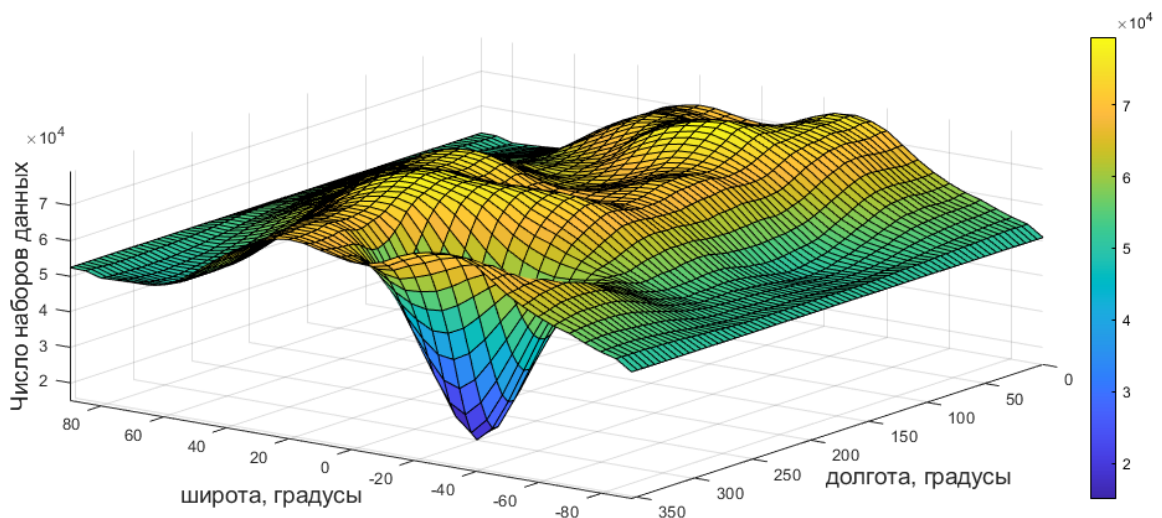


Рис. 4.1.11. Месяц работы в режиме свободного вращения

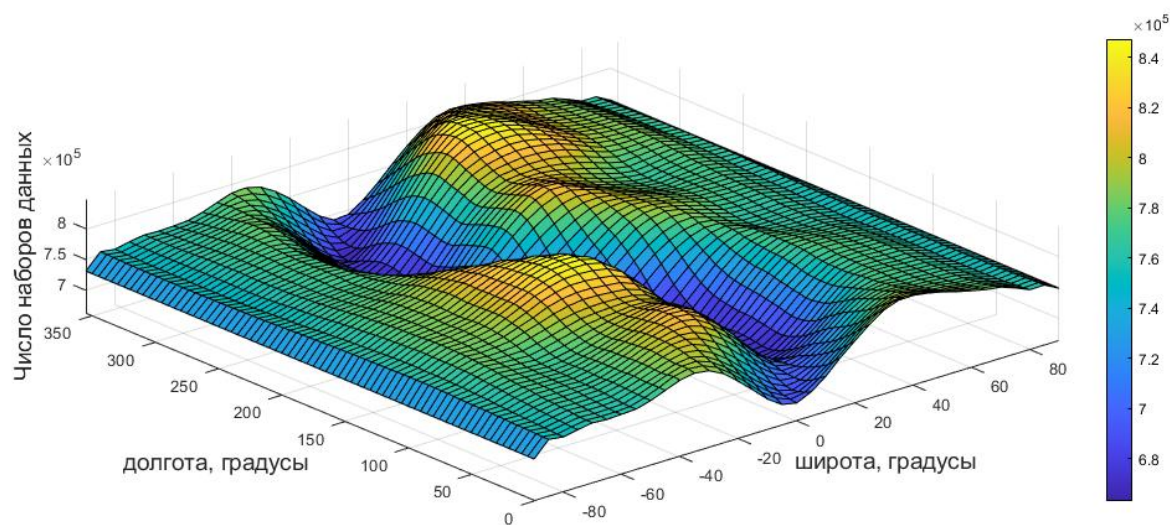


Рис. 4.1.12. Месяц работы в режиме свободного вращения

Полярные области осмотрены несколько хуже умеренных широт. Эта схожесть с режимом вращения вокруг местной вертикали связана с действием гравитационного момента, который в режиме свободного вращения стремится выставить ту же ось КА по местной вертикали. На Рис. 4.1.12 особенно хорошо видно, как годовое движение Солнца вблизи экватора приводит к снижению числа наборов данных в этой области.

#### *Сравнение режимов движения*

Сравнение режимов движения приведено в Таблице.

Режим	Наборов в год	Мин. число наборов данных	Макс. число наборов данных	Дипольный момент, $A \cdot m^2$
Вращение оси в инерц. пространстве	31.346.066 (100.3%)	534.320 (80.6%)	1.177.844 (139.0%)	0.05
Вращение вокруг местной вертикали	31.875.472 (102.1%)	266.819 (40.2%)	1.106.402 (130.6%)	0.15
Вращение вокруг местной вертикали, заряд	32.244.917 (103.3%)	641.783 (96.8%)	1.207.403 (142.5%)	0.15
Свободное вращение	31.229.476 (100%)	663.068 (100%)	847.258 (100%)	0.05

Основными параметрами при сравнении являются общее число наборов данных и минимальное число наборов для одной точки на небесной сфере. Свободное вращение дает наименьшее общее число наборов, но разница с другими режимами при этом незначительна. Равномерность осмотра небесной сферы оказывается наилучшей в режимах свободного вращения и стабилизации вращением с удержанием местной вертикали и зарядом



аккумуляторов. Эти два режима можно считать наилучшими, и выбор между ними зависит от конкретных требований по энергобалансу КА.

#### 4.2. Движение быстро вращающегося аппарата в окрестности требуемого режима

В предыдущем разделе рассматривались переходные процессы в движении КА. Рассмотрим теперь движение вблизи требуемого режима.

##### *Линеаризованные уравнения движения*

Движение аппарата будем описывать в инерциальной системе  $OS$ , конкретный выбор осей которой не принципиален. Будем далее рассматривать осесимметричный спутник ( $C = B$ ). Тогда уравнения (1.3.2) при учете лишь управляющего момента принимают вид

$$\begin{aligned} A d\omega_1/dt &= m_2 B_0 B_{3x} - m_3 B_0 B_{x2}, \\ B d\omega_2/dt + (A - B)\omega_1\omega_3 &= m_3 B_0 B_{x1} - m_1 B_0 B_{x3}, \\ B d\omega_3/dt + (B - A)\omega_1\omega_2 &= m_1 B_0 B_{x2} - m_2 B_0 B_{x1}. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Перейдем к уравнениям в полусвязанной системе. Для этого введем проекции абсолютной угловой скорости  $\tilde{\omega}_1 = \omega_1$ ,  $\tilde{\omega}_2 = \omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma$ ,  $\tilde{\omega}_3 = \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma$  и компоненты управляющего магнитного момента  $\tilde{m}_i$  на оси полусвязанной системы соответственно. Теперь перепишем уравнения (4.2.1) и (1.3.6) относительно вновь введенных проекций абсолютной угловой скорости,

$$\begin{aligned} A d\tilde{\omega}_1/dt &= \tilde{m}_2 B_0 (B_1 \sin \alpha + B_3 \cos \alpha) + \tilde{m}_3 B_0 (B_1 \cos \alpha \sin \beta - B_2 \cos \beta - B_3 \sin \alpha \sin \beta), \\ B d\tilde{\omega}_2/dt + (A - B)\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_3 &= -\tilde{m}_1 B_0 (B_1 \sin \alpha + B_3 \cos \alpha) + \\ &\quad \tilde{m}_3 B_0 (B_1 \cos \alpha \cos \beta + B_2 \sin \beta - B_3 \sin \alpha \cos \beta) - B\tilde{\omega}_3 (\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2 \operatorname{tg} \beta), \\ B d\tilde{\omega}_3/dt + (B - A)\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2 &= -\tilde{m}_1 B_0 (B_1 \cos \alpha \sin \beta - B_2 \cos \beta - B_3 \sin \alpha \sin \beta) - \\ &\quad \tilde{m}_2 B_0 (B_1 \cos \alpha \cos \beta + B_2 \sin \beta - B_3 \sin \alpha \cos \beta) + B\tilde{\omega}_2 (\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2 \operatorname{tg} \beta), \\ d\alpha/dt &= \frac{\tilde{\omega}_2}{\cos \beta}, \quad d\beta/dt = \tilde{\omega}_3, \quad d\gamma/dt = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2 \operatorname{tg} \beta. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Заметим, что матрица перехода  $\bar{\mathbf{A}}$  от инерциальной к полусвязанной системе задается выражением (1.3.1), в котором нужно положить  $\gamma = 0$ . Компоненты единичного вектора индукции  $B_i$  заданы в системе  $OS$ . Потребуем, чтобы первая ось этой системы совпала с направлением ориентации оси вращения спутника. Рассмотрим движение в окрестности требуемой ориентации аппарата. Линеаризуем уравнения (4.2.2), принимая во внимание, что скорость закрутки  $\omega_0$  остается постоянной и дипольный управляющий момент действует только вдоль первой оси спутника,

$$\begin{aligned}
B d\tilde{\omega}_2/dt + A\omega_0\tilde{\omega}_3 &= -\tilde{m}_1 B_0 (B_1\alpha + B_3), \\
B d\tilde{\omega}_3/dt - A\omega_0\tilde{\omega}_2 &= -\tilde{m}_1 B_0 (B_1\beta - B_2), \\
d\alpha/dt = \tilde{\omega}_2, \quad d\beta/dt &= \tilde{\omega}_3.
\end{aligned}$$

Рассмотрим действие на угловое движение аппарата двух законов управления. Аппарат должен быть стабилизирован первой осью в некотором направлении  $\mathbf{S}$  в инерциальном пространстве, вращаясь вокруг этой оси. Первый закон (4.1.1)

$$\mathbf{m}_{нум} = k_{нум} [\mathbf{e}_1 (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}), 0, 0] \quad (4.2.3)$$

служит для гашения нутационных колебаний – компонент скорости, перпендикулярных требуемой оси вращения.

Второй закон

$$\mathbf{m}_{оп} = k_{оп} [(\mathbf{S} - \kappa \mathbf{L})(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{B}), 0, 0] \quad (4.2.4)$$

служит для ориентации вектора кинетического момента аппарата  $\mathbf{L}$  (в силу закрутки аппарата кинетический момент направлен практически по оси симметрии) в заданном направлении. Коэффициент  $\kappa$  обычно выбирается так, чтобы достичь не только совпадения направления оси вращения, но и требуемой скорости закрутки. Если последняя задается значением  $\omega_0$ , то  $\kappa = 1/A\omega_0$ . Можно считать, что вектор кинетического момента в (4.2.4) нормируется на требуемую величину кинетического момента вращающегося аппарата. Заметим, что можно положить  $\kappa = 0$ , что даст менее точный, но, тем не менее, рабочий вариант алгоритма (4.2.4).

При линеаризации дипольных моментов (4.2.3) и (4.2.4) оказывается, что (4.2.3) с точностью до коэффициента совпадает со второй, влияющей на скорость, компонентой момента (4.2.4). Это верно для осесимметричного спутника в линейном приближении.

Уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned}
B d\tilde{\omega}_2/dt + A\omega_0\tilde{\omega}_3 &= k_1 B_0^2 b_3 (\tilde{\omega}_3 B_2 - \tilde{\omega}_2 B_3) + k_{оп} B_0^2 (-\alpha B_2 B_3 - \beta B_3^2), \\
B d\tilde{\omega}_3/dt - A\omega_0\tilde{\omega}_2 &= k_1 B_0^2 b_2 (\tilde{\omega}_2 B_3 - \tilde{\omega}_3 B_2) + k_{оп} B_0^2 (\alpha B_2^2 + \beta B_2 b_3), \\
d\alpha/dt = \tilde{\omega}_2, \quad d\beta/dt &= \tilde{\omega}_3.
\end{aligned}$$

Коэффициент усиления  $k_1 = k_{нум} + k_{оп} \kappa B$  можно рассматривать как новый коэффициент гашения нутационных колебаний с учетом вклада, даваемого управлением (4.2.4).

Запишем теперь безразмерные уравнения движения. В качестве меры скорости будем использовать скорость осевого вращения аппарата, в качестве меры времени – период осевого вращения. Перейдем к переменным  $\bar{\omega}_i = \tilde{\omega}_i / \omega_0$ ,  $\tau = \omega_0 t$ . Уравнения примут вид

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\omega}}_2 + \mu_A \bar{\omega}_3 &= \varepsilon \left[ B_3 (\bar{\omega}_3 B_2 - \bar{\omega}_2 B_3) + k (-\alpha B_2 B_3 - \beta B_3^2) \right], \\ \dot{\bar{\omega}}_3 - \mu_A \bar{\omega}_2 &= \varepsilon \left[ b_2 (\bar{\omega}_2 B_3 - \bar{\omega}_3 B_2) + k (\alpha B_2^2 + \beta B_2 B_3) \right], \\ \dot{\alpha} &= \bar{\omega}_2, \quad \dot{\beta} = \bar{\omega}_3.\end{aligned}\tag{4.2.5}$$

Здесь  $\mu_A = A/B$ , точка означает дифференцирование по новому времени  $\tau$ . Параметр  $\varepsilon = k_1 B_0^2 / B \omega_0$  задает характерную величину управляющего воздействия по сравнению с изменением кинетического момента спутника за один его оборот вокруг оси вращения. Параметр  $k = k_{op} / k_1 \omega_0$  задает относительную величину позиционной части управления, задаваемой моментом (4.2.4), по сравнению с демпфирующей. Отметим, что компоненты геомагнитного поля в (4.2.5) изменяются медленно. В самом деле,  $B_i = f(2\omega_{op\bar{o}} t) = f(2\tau/\xi)$ , где  $\xi = \omega_0 / \omega_{op\bar{o}}$ . При типичных скоростях закрутки спутника, стабилизируемого собственным вращением, параметр  $\xi$  заведомо больше 10, так что  $1/\xi = o(1)$ . Перейдем к исследованию уравнений (4.2.5).

### ***Исследование движения оси симметрии спутника***

Исследуем движение оси симметрии аппарата, предполагая, что влияние управления на это движение слабо.

#### *Уравнения с быстрой фазой*

Будем считать, что  $\varepsilon$  – малый параметр в уравнениях (4.2.5). Рассмотрим порождающую систему

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\omega}}_2 + \mu_A \bar{\omega}_3 &= 0, \quad \dot{\bar{\omega}}_3 - \mu_A \bar{\omega}_2 = 0, \\ \dot{\alpha} &= \bar{\omega}_2, \quad \dot{\beta} = \bar{\omega}_3.\end{aligned}$$

Ее решение

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_2 &= a \cos \nu, \quad \bar{\omega}_3 = a \sin \nu, \\ \alpha &= a / \mu_A \sin \nu + \alpha_0, \quad \beta = -a / \mu_A \cos \nu + \beta_0\end{aligned}$$

соответствует колебаниям оси симметрии, определяемым начальными значениями углов ориентации  $\alpha_0$  и  $\beta_0$ , амплитудой  $a$  и фазой  $\nu = \mu_A \tau + \varphi_0$ . Следуя методу ван-дер-Поля [133], будем считать эти параметры переменными величинами при введении в систему малого

момента. Дифференцируя выражения для углов ориентации, и учитывая кинематические соотношения в (4.2.5), получаем

$$\dot{\alpha} = (\dot{a} \sin \nu + a \dot{\nu} \cos \nu) / \mu_A + \dot{\alpha}_0 = a \cos \nu,$$

$$\dot{\beta} = (-\dot{a} \cos \nu + a \dot{\nu} \sin \nu) / \mu_A + \dot{\beta}_0 = a \sin \nu.$$

Дифференцируя выражения для компонент скорости, и учитывая динамические уравнения в (4.2.5), получаем

$$\dot{\omega}_2 = \dot{a} \cos \nu - a \dot{\nu} \sin \nu = -a \mu_A \sin \nu + \varepsilon M_2,$$

$$\dot{\omega}_3 = \dot{a} \sin \nu + a \dot{\nu} \cos \nu = a \mu_A \cos \nu + \varepsilon M_3,$$

где

$$\begin{aligned} M_2 &= B_3 (a \sin \nu B_2 - a \cos \nu B_3) + k \left[ -(a/\mu_A \sin \nu + \alpha_0) B_2 B_3 + (a/\mu_A \cos \nu - \beta_0) B_3^2 \right], \\ M_3 &= B_2 (a \cos \nu B_3 - a \sin \nu B_2) + k \left[ (a/\mu_A \sin \nu + \alpha_0) B_2^2 + (-a/\mu_A \cos \nu + \beta_0) B_2 B_3 \right]. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Разрешая эти уравнения, получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon (M_2 \cos \nu + M_3 \sin \nu) = \varepsilon X(a, \alpha_0, \beta_0, \tau, \nu), \\ \dot{\nu} &= \mu_A + \varepsilon/a (M_3 \cos \nu - M_2 \sin \nu) = \mu_A + \varepsilon Y(a, \alpha_0, \beta_0, \tau, \nu), \\ \dot{\alpha}_0 &= -\varepsilon/\mu_A M_3, \\ \dot{\beta}_0 &= \varepsilon/\mu_A M_2. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Уравнения (4.2.7) содержат одну быструю переменную – фазу  $\nu$  – и три медленные. Время  $\tau$  также можно считать медленной переменной, вводя ее в систему (4.2.7) в виде  $\dot{\tau} = \varepsilon c$ , где  $c = 1/\varepsilon \xi$ . Здесь необходимо отметить, что параметр  $\varepsilon$  при реалистичных параметрах спутника имеет величину около 0.2-0.3, так что константа  $c$  не является большой величиной в силу того, что  $\xi > 10$ . Также можно рассматривать (4.2.7) как систему с медленно меняющимися параметрами, применяя метод усреднения к ней напрямую, не вводя «фиктивную» медленную переменную.

### Эволюционные уравнения

Поскольку фаза  $\nu$  в нулевом приближении изменяется равномерно, достаточно провести усреднение (4.2.7) по этой переменной. Эволюционные уравнения первого приближения для медленных переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{a}} &= -1/2 \varepsilon \bar{a} (B_2^2 + B_3^2) (1 - k/\mu_A), \\ \dot{\bar{\alpha}}_0 &= -\varepsilon k/\mu_A (\bar{\alpha}_0 B_2^2 + \bar{\beta}_0 B_2 B_3), \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

$$\dot{\bar{\beta}}_0 = -\varepsilon k / \mu_A (\bar{\alpha}_0 B_2 B_3 + \bar{\beta}_0 B_3^2).$$

Уравнение для амплитуды отделяется. Его решение

$$\bar{a} = \bar{a}(0) \exp \left[ -1/2 \varepsilon' \int_0^\tau (B_2^2(u) + B_3^2(u)) du \right], \quad (4.2.9)$$

где  $\varepsilon' = \varepsilon(1 - k/\mu_A)$ .

Это решение верно для любой модели магнитного поля Земли. Приведем в явном виде решение после взятия интеграла при использовании модели прямого диполя. При этом необходимо иметь выражение для вектора геомагнитной индукции в некоторой инерциальной системе  $OS$ . Будем считать, что матрица перехода  $\mathbf{Q}$  с элементами  $q_{ij}$  задает переход от системы  $OP$ , в которой выражение для вектора индукции известно (1.2.5), к системе  $OS$ . Выражение (4.2.9) после взятия интеграла для произвольной матрицы  $\mathbf{Q}$  с элементами  $q_{ij}$  есть

$$\bar{a}(\tau) = \bar{a}(0) \exp \left[ -1/2 \varepsilon' f(\tau) \right], \quad (4.2.10)$$

где

$$f(\tau) = \int_0^\tau (B_2^2(u) + B_3^2(u)) du =$$

$$B_{11}(q_{21}^2 + q_{31}^2) + B_{22}(q_{22}^2 + q_{32}^2) + B_{33}(q_{23}^2 + q_{33}^2) +$$

$$2B_{12}(q_{21}q_{22} + q_{31}q_{32}) + 2B_{13}(q_{21}q_{23} + q_{31}q_{33}) + 2B_{23}(q_{22}q_{23} + q_{32}q_{33}),$$

$$B_{11} = \int_0^\tau B_{1P}^2(u) du = \frac{9}{4} \sin^2 i \int_0^\tau \sin^2 \frac{2}{\xi} u du = \frac{9}{32} \sin^2 i \left( 4\tau - \xi \sin \frac{4}{\xi} \tau \right),$$

$$B_{22} = \int_0^\tau B_{2P}^2(u) du = \frac{1}{4} \sin^2 i \int_0^\tau \left[ 9 \cos^2 \frac{2}{\xi} u - 6 \cos \frac{2}{\xi} u + 1 \right] du =$$

$$= \frac{1}{32} \sin^2 i \left( 44\tau + 9\xi \sin \frac{4}{\xi} \tau - 24\xi \sin \frac{2}{\xi} \tau \right),$$

$$B_{33} = \int_0^\tau B_{3P}^2(u) du = \cos^2 i \int_0^\tau du = \cos^2 i \cdot \tau,$$

$$B_{12} = \int_0^\tau B_{1P}(u) B_{2P}(u) du = -\frac{3}{4} \sin^2 i \int_0^\tau \left( \frac{3}{2} \sin \frac{4}{\xi} u - \sin \frac{2}{\xi} u \right) du =$$

$$= -\frac{3}{32} \sin^2 i \left( -3\xi \cos \frac{4}{\xi} \tau + 4\xi \cos \frac{2}{\xi} \tau - \xi \right),$$

$$B_{13} = \int_0^\tau B_{1P}(u) B_{3P}(u) du = -\frac{3}{2} \sin i \cos i \int_0^\tau \sin \frac{2}{\xi} u du = \frac{3\xi}{4} \sin i \cos i \left( \cos \frac{2}{\xi} \tau - 1 \right),$$

$$\begin{aligned} B_{23} &= \int_0^\tau B_{2P}(u) B_{3P}(u) du = \frac{1}{2} \sin i \cos i \int_0^\tau \left( 3 \cos \frac{2}{\xi} u - 1 \right) du = \\ &= \frac{1}{4} \sin i \cos i \left( 3\xi \sin \frac{2}{\xi} \tau - 2\tau \right). \end{aligned}$$

Заметим, что в этих выражениях можно отбросить периодические члены, оставив лишь вековые. В этом случае для функции  $f$  в (4.2.10) имеем

$$f_{век} = \left[ \frac{9}{8} \sin^2 i (q_{21}^2 + q_{31}^2) + \frac{11}{16} \sin^2 i (q_{22}^2 + q_{32}^2) + \cos^2 i (q_{23}^2 + q_{33}^2) - \sin i \cos i (q_{22}q_{23} + q_{32}q_{33}) \right] \tau.$$

Решение (4.2.9) показывает закон убывания амплитуды, если  $k < \mu_A$ , в противном случае амплитуда возрастает. В исходных обозначения коэффициентов усиления это условие имеет вид

$$k_{нум} > k_{оп} B(1/A\omega_0 - \kappa).$$

При использовании коэффициента  $\kappa = 1/A\omega_0$  достаточно, чтобы коэффициент гашения нутационных колебаний был положительным, так как в этом случае  $\varepsilon' = k_{нум} B_0^2 / B\omega_0$  и позиционная часть момента не оказывает влияния на уменьшение амплитуды колебаний. При использовании грубого алгоритма переориентации (4.2.4) при  $\kappa = 0$  имеем  $k_{нум}/k_{оп} > B/A\omega_0$ . Вообще, полученное соотношение задает ограничение на величину позиционной части управления по сравнению с демпфирующей. Величина  $\varepsilon'$  явно определяет скорость затухания амплитуды.

Необходимо рассмотреть вопрос выбора начального значения  $\bar{a}(0)$  в (4.2.9). Это выражение, хотя качественно верно описывает поведение амплитуды колебаний, количественно может заметно отличаться от исходной амплитуды в силу того, что параметр  $\varepsilon$  весьма велик. Чтобы определить значение начальной амплитуды, обратимся к процедуре метода усреднения. Для медленных переменных  $x$  будем, как обычно, искать замену переменной  $x \rightarrow \bar{x}$  в виде

$$x = \bar{x} + \varepsilon u(\bar{x}, \bar{v}) + O(\varepsilon^2). \quad (4.2.11)$$

Для переменной  $A$  уравнение должно принять вид  $\dot{\bar{a}} = \varepsilon X_0(a, \alpha_0, \beta_0, \tau)$ . Подставляя замену в уравнения движения, для определения функции  $u$  получаем уравнение

$\mu \cdot \partial u / d\varphi = \bar{X}$ . Здесь  $\bar{X} = X - X_0$  представляет собой правую часть уравнения (4.2.7) для амплитуды, в которой сохранены только периодические члены. В общем случае приходится иметь дело с разложением  $X$  в ряд Фурье, однако в рассматриваемом случае вид  $\bar{X}$  определяется непосредственно из (4.2.6) как

$$\bar{X} = aB_2B_3 \sin 2\nu - 1/2 a(B_2^2 + B_3^2) \cos 2\nu + k \left[ B_2B_3 (-a/\mu_A \sin 2\nu - \alpha_0 \cos \nu + \beta_0 \sin \nu) + B_3^2 (1/2 a/\mu_A \cos 2\nu - \beta_0 \cos \nu) + B_2^2 (-1/2 a/\mu_A \cos 2\nu + \alpha_0 \sin \nu) \right].$$

Заметим, что вообще функция  $\bar{X}$  задается новыми переменными  $\bar{x}$  и  $\bar{\nu}$ . Однако, при сохранении в выражениях членов лишь первого порядка по  $\varepsilon$  можно заменить новые переменные исходными. Интегрируя последнее выражение, полагая, что в начальный момент времени  $\nu(0) = \bar{\nu}(0) = 0$ , и подставляя в (4.2.11) получаем

$$\bar{a}(0) = a(0) - \varepsilon/\mu_A \left[ -1/2 a(0) B_2 B_3 + k \left( 1/2 a(0) / \mu_A B_2 B_3 - B_2^2 \alpha_0(0) - B_2 B_3 \beta_0(0) \right) \right]. \quad (4.2.12)$$

Выражение (4.2.12) при использовании модели прямого диполя суть

$$\bar{a}(0) = a(0) - \varepsilon/\mu_A \left[ -1/2 a(0) B_{23}^0 + k \left( 1/2 a(0) / \mu_A B_{23}^0 - B_{22}^0 \alpha_0(0) - B_{23}^0 \beta_0(0) \right) \right],$$

где

$$B_{23}^0 = (\sin i \cdot q_{22} + \cos i \cdot q_{23})(\sin i \cdot q_{32} + \cos i \cdot q_{33}), \quad B_{22}^0 = (\sin i \cdot q_{22} + \cos i \cdot q_{23})^2.$$

В качестве примера рассмотрим использование результата (4.2.9) с учетом (4.2.12) для следующих параметров спутника:

- моменты инерции  $A=0.07 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $B=0.05 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,
- орбитальная скорость  $\omega_{орб}=10^{-3} \text{ с}^{-1}$ , величина вектора индукции геомагнитного поля  $B_0=2.35 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$  соответствует орбите около 550 км, наклонение  $i=57^\circ$ ;
- скорость закрутки вокруг оси симметрии  $\omega_0=2.1 \text{ }^\circ/\text{с}$  (в этом случае  $\chi \approx 30$ );
- коэффициент нутации  $k_{нют}=2 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}/\text{Тл}^2$ , коэффициент позиционной компоненты управления  $k_{оп}=2 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{Тл}^2$ , коэффициент  $\kappa=1/A\omega_0$ , в этом случае  $\varepsilon \approx 0.18$ ;

матрицу перехода  $\mathbf{Q}$  зададим тремя поворотами на  $30^\circ$ , последовательность 2-3-1 (см. выражение (1.3.1)). Это соответствует относительно произвольно выбранному требуемому направлению вращения в инерциальном пространстве. Результаты численного интегрирования исходных уравнений (4.2.7) и использования соотношения (4.2.9) с учетом (4.2.12) представлены на Рис. 4.2.1.

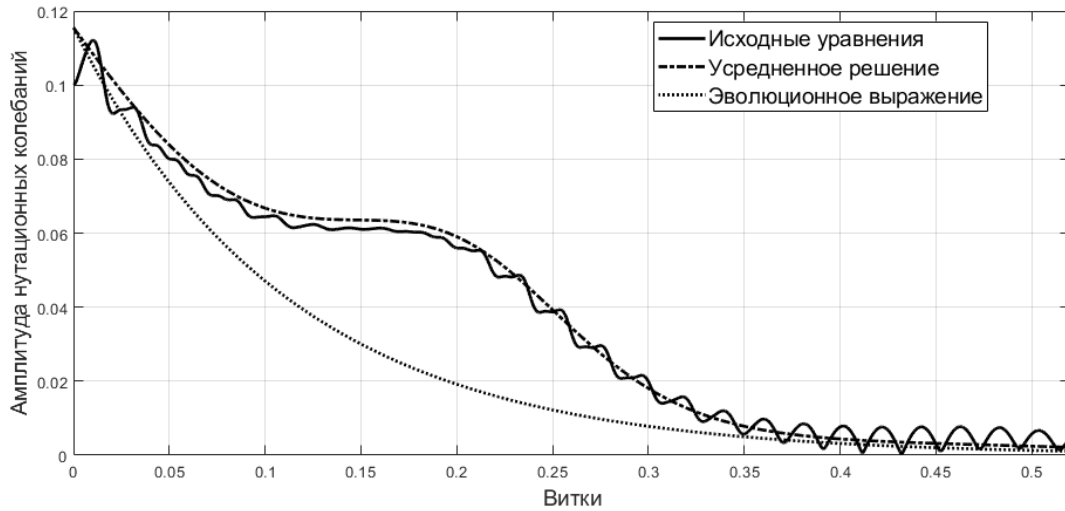


Рис. 4.2.1. Амплитуда колебаний

По Рис. 4.2.1 видно, что выражение (4.2.9) позволяет достаточно точно описать изменение амплитуды колебаний, не принимая во внимание быстрых колебаний малой амплитуды. Использование векового выражения отличается существенной потерей точности по сравнению с исходными уравнениями движения, но позволяет верно описать время переходного процесса. Перейдем теперь к величинам начальных значений углов ориентации.

Отделившаяся система для углов ориентации имеет вид

$$d\mathbf{x}/d\tau = \mathbf{C}(\tau)\mathbf{x},$$

где  $\mathbf{x} = (\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0)$ , матрица  $\mathbf{C}$  суть

$$\mathbf{C} = -\varepsilon k / \mu_A \begin{pmatrix} B_2^2 & B_2 B_3 \\ B_2 B_3 & B_3^2 \end{pmatrix},$$

причем  $B_i = B_i(2\tau/\xi)$ . Перейдем от времени  $\tau$  к времени  $u = \varepsilon k / \mu_A \cdot \tau$ . Тогда

$$d\mathbf{x}/du = \mathbf{C}(u)\mathbf{x}, \quad (4.2.13)$$

Матрица  $\mathbf{C}$  имеет вид

$$\mathbf{C}(u) = \begin{pmatrix} d & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

где  $d = -B_2^2$ ,  $c = -B_3^2$ ,  $b = -B_2 B_3$ ,  $B_i = B_i(2\mu/\varepsilon\xi k \cdot u) = B_i(\lambda u)$ . Заметим, что  $\varepsilon\xi$  не мало. Для примера, рассмотренного выше,  $\lambda = 2\mu_A/\varepsilon\xi k = 2A\omega_0\omega_{op\bar{o}}/k_{op}B_0^2 \approx 0.5$ . При этом использовался коэффициент  $\kappa = 1/A\omega_0$ . Параметр  $\lambda$  в этом случае не зависит от коэффициента усиления алгоритма гашения нутационных колебаний, равно как процесс



уменьшения амплитуды нутационных колебаний не зависел от позиционного коэффициента усиления. Относительно матрицы  $\mathbf{C}$  можно отметить некоторые ее свойства:

1.  $d \leq 0$ ,  $c \leq 0$ . При этом равенство нулю возможно лишь в некоторые моменты времени  $u$ , в общем случае  $d < 0$ ,  $c < 0$ .

2.  $\det(\mathbf{C}) = 0$ .

3.  $\mathbf{C}(u) = \mathbf{C}(u + T)$ ,  $T = 2\pi/\lambda$ .

Пользуясь первым и вторым свойствами, можно показать асимптотическую устойчивость положения  $\mathbf{x} = 0$ . Для этого используем в качестве кандидата в функцию Ляпунова  $V = 1/2(x_1^2 + x_2^2)$ . Производная этой функции в силу уравнений (4.2.13)

$$dV/du = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1(-B_2^2 x_1 - B_2 B_3 x_2) + x_2(-B_2 B_3 x_1 - B_3^2 x_2) = -(B_2 x_1 + B_3 x_2)^2.$$

Производная  $V$  отрицательна и равна нулю в положении  $\mathbf{x} = 0$ , либо при  $B_2 = B_3 = 0$ . Последнее условие может выполняться либо лишь в определенные моменты времени  $u$ , либо на экваториальной орбите в случае, когда требуемое направление оси вращения совпадает с нормалью к плоскости орбиты. Поэтому, за исключением последнего специфического случая, положение  $\mathbf{x} = 0$  устойчиво по теореме Барбашина-Красовского.

Задача розыска степени устойчивости решается численно поиском мультипликаторов  $\rho$  системы (4.2.13), имеющей периодические коэффициенты. На Рис. 4.2.2 приведен характеристический показатель  $\ln \rho / T$ , соответствующий меньшему мультипликатору, равно как и мультипликатор.

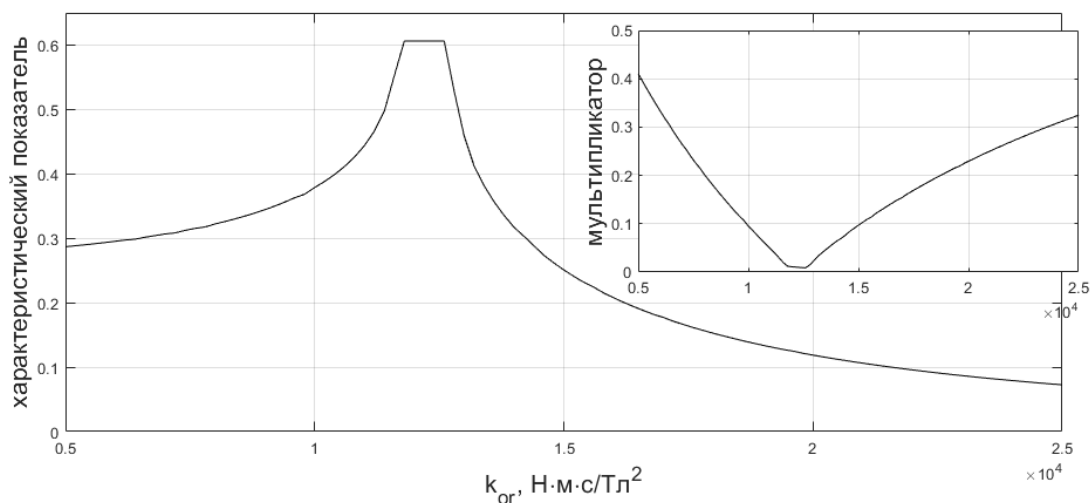


Рис. 4.2.2. Степень устойчивости системы, определяющей ориентацию оси вращения

Видно, что есть небольшой интервал оптимальных с точки зрения быстродействия значений коэффициента усиления. Его повышение сверх этих значений приводит к быстрому падению степени устойчивости, тогда как понижение сказывается не так заметно. Рис. 4.2.2 получен для скорости вращения  $\omega_0 = 2.1$  °/с, используемой выше. Из вида параметра  $\lambda$  видно, что с повышением скорости закрутки соответственно повышается и оптимальный коэффициент усиления.

Результаты, приведенные на Рис. 4.2.2, подтверждаются численным моделированием как эволюционных уравнений (4.2.8), так и исходных линеаризованных уравнений (4.2.7), эквивалентных уравнениям (4.2.5). Необходимо определить, насколько полученные упрощенные результаты переносятся на движение, описываемое нелинейными уравнениями (1.3.2)-(1.3.6).

### ***Численное моделирование***

Проведем численное моделирование исходных нелинейных уравнений с параметрами, заданными при получении Рис. 4.2.1. При этом возникает необходимость использовать дополнительные законы управления. В первую очередь это управление, позволяющее добиться закрутки аппарата вокруг оси симметрии. Для этого используется дипольный момент (4.1.4)

$$\mathbf{m}_{ep} = k_{ep} B_0 (0, B_{x3}, B_{x2}). \quad (4.2.14)$$

В этом случае управляющий механический момент, действующий вдоль первой оси аппарата, имеет вид  $M_1 = k_{ep} B_0^2 (B_{2x}^2 + B_{3x}^2)$ . Заведомо положительная компонента момента обеспечивает закрутку вокруг впервой оси. Возникают, однако, и возмущающие компоненты, приводящие к повышению уровня нутационных колебаний. Для их парирования служит управление (4.2.3). Кроме этого может потребоваться и снижение скорости вращения, если она превысит некоторое заданное значение. В этом случае применяется алгоритм (4.2.14) с отрицательным коэффициентом усиления совместно с (4.2.3), в результате обеспечивается как гашение нутационных колебаний, так и снижение скорости вращения.

Применяется логика переключения между алгоритмами, представленная на Рис. 4.2.3.



колебаний. Вообще, гашение нутационных колебаний производится постоянно независимо от каких-либо условий.

В целом, аппарат либо находится в режиме раскрутки, если его скорость вращения мала, либо в режиме гашения нутационных колебаний, если последние велики, либо в режиме ориентации оси симметрии.

Представленная логика работы нарушает упрощенную постановку, рассмотренную выше, где предполагалось, что аппарат подвержен действию лишь алгоритмов гашения нутационных колебаний и ориентации оси симметрии, находясь уже в окрестности требуемого положения со скоростью, близкой к необходимой. Тем не менее, полученные результаты сохраняются. Так, на Рис. 4.2.4 представлено время выхода аппарата на требуемый режим движения.

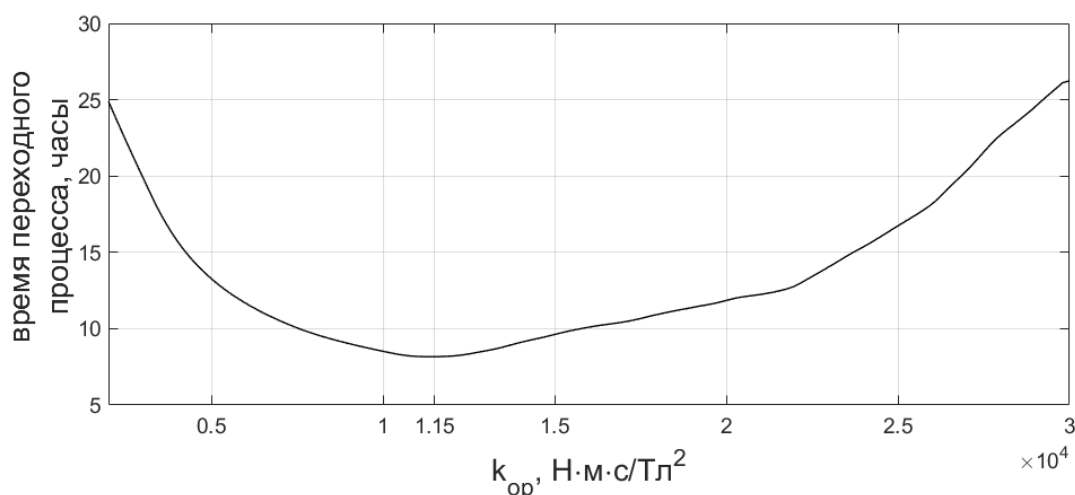


Рис. 4.2.4. Зависимость времени переориентации от коэффициента усиления алгоритма переориентации

При построении Рис. 4.2.4 проводилось численное моделирование движения аппарата с параметрами, использованными при получении Рис. 4.2.1. В качестве момента времени, характеризующего достижение требуемой ориентации, используется время, после которого в течение 100 секунд среднее отклонение оси симметрии аппарата от требуемого положения не превышает 0.01 градуса. Проведено сглаживание полученных данных. Коэффициент усиления алгоритма раскрутки  $k_{sp} = 1 \cdot 10^2 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{Тл}^2$ . Рис. 4.2.2 был получен в предположении, что аппарат вращается вокруг оси симметрии со скоростью 2.1 °/с. Рис. 4.2.4 получен при ограничении на скорость закрутки от 2.0 до 2.1 °/с. Поскольку при моделировании не учитывается действие каких-либо возмущений и аппарат является осесимметричным, после отключения алгоритма раскрутки скорость вращения остается неизменной и близкой к

верхней границе. Ограничение на величину нутационных колебаний составляет  $\omega_{\text{нут}} = 2$  угловые минуты в секунду. Из Рис. 4.2.4 видно, что общая тенденция, выделенная на Рис. 4.2.2, сохраняется. Оптимальное значение коэффициента усиления алгоритма ориентации, заданное с помощью Рис. 4.2.2, верно отражает и эффективность работы связки алгоритмов ориентации, работающих согласно логика переключения, приведенной на Рис. 4.2.3. Заметим, что при усилении требования по средней точности стабилизации, характеризующего момент времени «достижения» требуемого движения, эффективность работы системы ориентации падает быстрее с удалением коэффициента усиления от оптимального значения. Наоборот, при ослаблении требований зависимость эффективности алгоритмов от коэффициента усиления сглаживается. Так, если потребовать достижения точности стабилизации в 1 градус, увеличение коэффициента усиления практически не сказывается на времени достижения указанной точности, если только он не превышает критического значения около  $3.5 \cdot 10^4$  Н·м/Тл<sup>2</sup>. Понижение коэффициента усиления по-прежнему ощутимо сказывается на быстродействии.

Рассмотрим действие на аппарат возмущающих факторов. Основным фактором является его несимметричность. Примем моменты инерции аппарата равными  $A=0.07$  кг·м<sup>2</sup>,  $B=0.055$  кг·м<sup>2</sup>,  $A=0.045$  кг·м<sup>2</sup>. Первая ось более не является осью симметрии, но остается осью наибольшего момента инерции. Учтем также действие на аппарат гравитационного и постоянного возмущающего момента на уровне  $5 \cdot 10^{-9}$  Н·м, что примерно на порядок меньше гравитационного момента. В качестве модели геомагнитного поля будем использовать IGRF.

Результат численного моделирования движения аппарата приведен на Рис. 4.2.5.

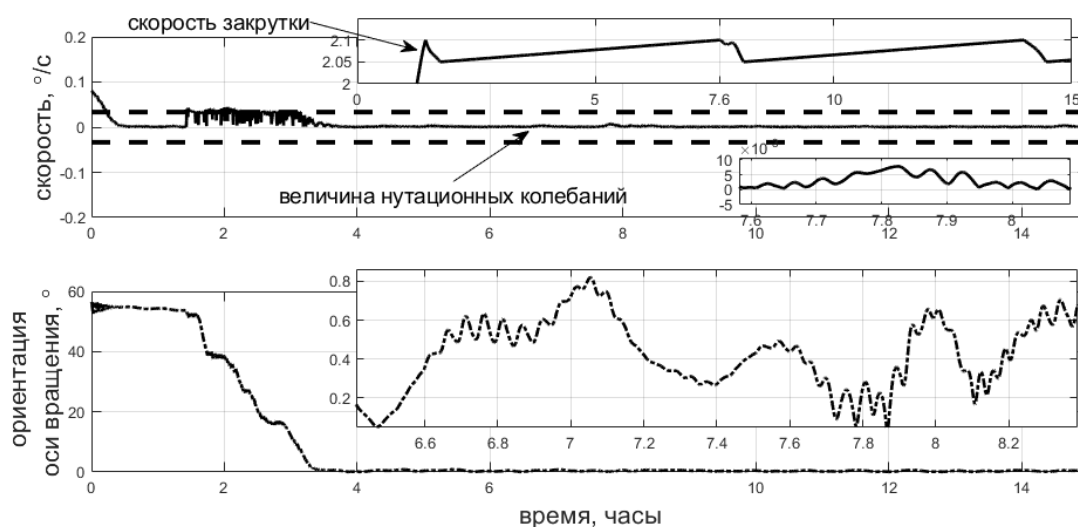


Рис. 4.2.5. Движение аппарата с учетом возмущающих факторов

Рис. 4.2.5 получен при коэффициенте  $k_{\text{нут}} = 1.2 \cdot 10^5$  Н·м·с/Гл. Видно, как из-за действия постоянного возмущающего момента скорость закрутки увеличивается и происходит ее уменьшение до заданного значения. При этом несколько возрастает амплитуда нутационных колебаний. На точности стабилизации оси вращения это, однако, не сказывается.

На Рис. 4.2.6 приведено время достижения требуемой ориентации в зависимости от коэффициента усиления алгоритма переориентации.

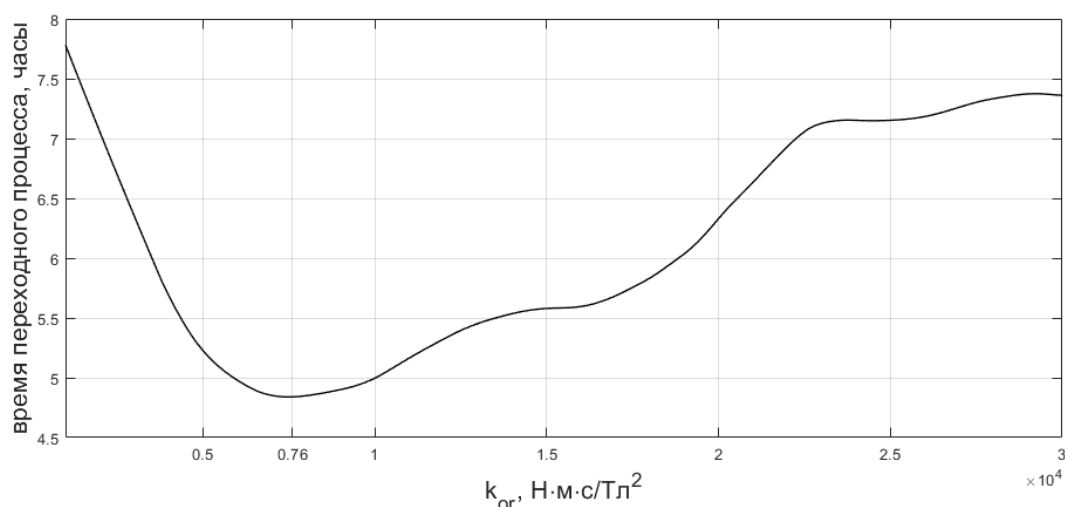


Рис. 4.2.6. Зависимость времени переориентации от коэффициента усиления алгоритма переориентации

Рис. 4.2.6 показывает время, после которого в течение получаса средняя точность стабилизации оказывается не хуже  $0.4^\circ$ , а максимальная ошибка ориентации, за исключением 10% худших случаев, не превышает  $0.5^\circ$ . Видно, что влияние возмущающих факторов приводит к значительным количественным изменениям. Время переходных процессов сокращается, смещается значение оптимального коэффициента усиления. Тем не менее, качественно результат, полученный в предыдущем разделе, сохраняется, и может использоваться при подборе коэффициента усиления при проектировании системы ориентации.

### 4.3. Одноосная стабилизация на основе требуемой величины скорости вращения

В настоящем разделе исследуется алгоритм стабилизации, основанный на текущих данных о требуемом направлении и скорости аппарата. Алгоритм был предложен в [65] для КА Prisma. Управление является наглядным и простым в реализации. Однако утверждения о стабилизации КА в нужном направлении, сделанные в [65] без полноценного исследования, оказались верны лишь при определенных параметрах управления и аппарата. Для уяснения

всех возможных положениях равновесия оси вращения КА относительно направления на Солнце, в диссертационной работе используются эволюционные переменные. Геомагнитное поле описывается упрощенной дипольной моделью.

### ***Построение алгоритма одноосной стабилизации***

Управление основано на рассогласовании угловой скорости аппарата с требуемым значением. Заданная величина скорости складывается из двух слагаемых,

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 (\mu \mathbf{S}_x + \mathbf{e}_3).$$

Первое слагаемое означает, что вектор угловой скорости должен совпадать с направлением на Солнце  $\mathbf{S}_x$ , заданным в связанной системе координат. Второе слагаемое указывает, что вращение при этом также должно происходить вокруг оси  $\mathbf{e}_3$ , которую считаем перпендикулярной плоскости солнечных панелей.

Коэффициент  $\mu$  является параметром управления, показывающим относительный вклад обеих компонент. Параметр  $\omega_0$  задает целевую скорость закрутки. Отметим, что можно ожидать выход скорости на значение  $\omega_0(1 + \mu)$ . Магнитное управление, которое обеспечивает заданный режим движения, имеет вид

$$\mathbf{m} = k (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) \times \mathbf{b}, \quad (4.3.1)$$

где  $\mathbf{b}$  – единичный (или близкий к единичному) вектор геомагнитной индукции,  $k$  – коэффициент усиления.

### ***Исследование устойчивости в эволюционных уравнениях***

Для применения метода усреднения необходимо разделить переменные на быстрые и медленные. В отсутствие управляющего момента кинетический момент в инерциальном пространстве сохраняется, что выражается в постоянстве его величины и углов ориентации в уравнениях (1.3.12). Также остается постоянным угол нутации  $\theta$ . Аппарат совершает регулярную прецессию, в которой быстро изменяются углы  $\varphi$  и  $\psi$ . При воздействии на систему управления постоянные в невозмущенном движении переменные начинают изменяться. Если величина управления достаточно мала, эти переменные можно считать медленными и уравнения (1.3.12) можно усреднить по быстрым переменным и времени.

Для формализации понятия медленного изменения уравнения движения должны быть записаны в безразмерном виде. Для этого в качестве меры времени в уравнениях (1.3.12)

используем период обращения по орбите и, соответственно, вместо времени – аргумент широты, кинетический момент относим к его невозмущенному значению  $L = L_0 l$ , и вводим малый параметр, характеризующий величину изменения кинетического момента за один виток по орбите  $\varepsilon = kB'_0/\omega_0 C$ . Безразмерные уравнения запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{dl}{du} &= \varepsilon l \bar{M}_{L3}, \quad \frac{d\rho}{du} = \varepsilon \bar{M}_{L1}, \quad \frac{d\sigma}{du} = \frac{\varepsilon}{\sin \rho} \bar{M}_{L2}, \\ \frac{d\varphi}{du} &= \eta_\varphi l \cos \theta + \frac{\varepsilon}{\sin \theta} (\bar{M}_{L1} \cos \psi + \bar{M}_{L2} \sin \psi), \\ \frac{d\psi}{du} &= \eta_\psi l - \varepsilon \bar{M}_{L1} \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \varepsilon \bar{M}_{L2} (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta), \\ \frac{d\theta}{du} &= \varepsilon (\bar{M}_{L2} \cos \psi - \bar{M}_{L1} \sin \psi), \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

где  $\eta_\varphi = L_0/\omega_{orb}(1/C - 1/A)$ ,  $\eta_\psi = L_0/A\omega_{orb}$ , компоненты безразмерного момента обозначены  $\bar{M}_{kL}$ . Параметры  $\eta_k$  являются большими по сравнению с  $\varepsilon$ . Движение КА описывается в системе  $OS$ , третья ось которой направлена на Солнце.

Для усреднения необходимо записать непосредственное выражение для управляющего момента, которое задается в связанной с аппаратом системе координат

$$\mathbf{M}_x = kB'_0 \{ (\boldsymbol{\omega}_x - \mu \omega_0 \mathbf{S}_x - \omega_0 \mathbf{e}_3) \times \mathbf{b}_x \} \times \mathbf{b}_x.$$

В уравнениях (4.3.2) необходимо задать момент в системе координат, связанной с вектором кинетического момента. Используя матрицы направляющих косинусов (1.3.9) и (1.3.10), момент запишем как

$$\mathbf{M}_L = \frac{kB'_0 L}{C} \left\{ \left( \frac{C}{L} \boldsymbol{\omega}_L - \mu \frac{L_{ref}}{L} \mathbf{Q}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{L_{ref}}{L} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \times \mathbf{Q}^T \mathbf{b}_S \right\} \times \mathbf{Q}^T \mathbf{b}_S. \quad (4.3.3)$$

Здесь  $L_{ref} = C\omega_0$ . Для того, чтобы определить выражение угловой скорости в системе  $OL$ , будем опираться на ее связь с кинетическим моментом  $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_x = \mathbf{L}_x$ . Кинетический момент при этом задан в системе  $OL$ ,  $\mathbf{L}_L = (0, 0, L)$ . Записывая его в системе  $Ox$  с помощью матрицы  $\mathbf{A}$ , и далее переходя в систему  $OL$ , имеем



$$\boldsymbol{\omega}_L = \frac{L}{C} \begin{pmatrix} \frac{C}{A} a_{11} a_{31} + \frac{C}{A} a_{12} a_{32} + a_{13} a_{33} \\ \frac{C}{A} a_{21} a_{31} + \frac{C}{A} a_{22} a_{32} + a_{23} a_{33} \\ \frac{C}{A} a_{31} a_{31} + \frac{C}{A} a_{32} a_{32} + a_{33} a_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.3.4)$$

Далее для определения эволюционных уравнений, показывающих изменение вектора кинетического момента и угла нутации, необходимо выражения (4.3.3)-(4.3.4) усреднить по быстрым переменным  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $u$ . Вид выражения для вектора индукции  $\mathbf{b}_s$  пока не определен. Этот вектор задан в системе  $OZ$  с помощью упрощенной модели, тогда как движение вектора кинетического момента описывается в системе  $OS$ . Не проводя пока усреднение по времени и обозначая  $b_k$  компоненты единичного вектора геомагнитной индукции в системе  $OL$ , получаем после усреднения по  $\psi$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon l} \dot{l} &= -(B_1^2 + B_2^2) \left( \cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right) + \mu \frac{l_{ref}}{l} \left\{ B_1 B_3 \sin \rho + (B_1^2 + B_2^2) \cos \rho \right\} + \frac{l_{ref}}{l} (B_1^2 + B_2^2) \cos \theta, \\ \frac{1}{\varepsilon} \dot{\rho} &= B_1 B_3 \left( \cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right) - \mu \frac{l_{ref}}{l} \left\{ B_1 B_3 \cos \rho + (B_2^2 + B_3^2) \sin \rho \right\} - \frac{l_{ref}}{l} B_1 B_3 \cos \theta, \\ \frac{1}{\varepsilon} \sin \rho \dot{\sigma} &= B_2 B_3 \left( \cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right) + \mu \frac{l_{ref}}{l} \left\{ B_1 B_2 \sin \rho - B_2 B_3 \cos \rho \right\} - \frac{l_{ref}}{l} B_2 B_3 \cos \theta, \\ \frac{1}{\varepsilon} \dot{\theta} &= \frac{A-C}{2A} (B_1^2 + B_2^2 + 2B_3^2) \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{l_{ref}}{l} (B_1^2 + B_2^2 + 2B_3^2) \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Отметим, что для усреднённых переменных сохраняются обозначения,  $l_{ref} = L_{ref} / L_0$  задает целевую величину вектора кинетического момента.

#### *Движение на орбите, близкой к солнечно-синхронной*

Дальнейший анализ требует конкретных выражений для компонент вектора индукции. Для этого нужно определить матрицу перехода от системы  $OZ$  к системе  $OS$ . Напомним, что в системе  $OS$  третья ось направлена на Солнце, тогда как две другие выбираются произвольным образом. Система  $OZ$ , напротив, задана единственным образом. Чтобы получить переход между  $OZ$  и  $OS$ , зададим ориентацию вектора направления на Солнце в системе  $OZ$ . Для этого можно применить тот же подход, как и при определении ориентации вектора кинетического момента в инерциальном пространстве и введении системы  $OL$ . А именно, задавая ориентацию направления на Солнце в системе  $OZ$  углами  $\rho^s$  и  $\sigma^s$  так, как

показано на Рис. 1.6, матрицу перехода  $\mathbf{Q}^S$  между системами  $OZ$  и  $OS$  зададим так же, как в выражении (1.3.9).

При определении компонент вектора индукции в системе  $OS$  возникают громоздкие выражения  $B_{kS} = \sum_{n=1}^3 q_{nk}^S B_{nZ}$ , содержащие постоянные элементы матрицы  $\mathbf{Q}^S$ , выраженные через постоянные углы  $\rho^S$ ,  $\sigma^S$ . Чтобы получить компактные выражения, пригодные для анализа, сделаем следующее упрощение. Рассмотрим движение аппарата на солнечно-синхронной орбите, практически перпендикулярной направлению на Солнце. Чтобы дополнительно упростить выражения, будем считать, что в (1.2.6)  $\sin \Theta \approx 1$ ,  $\cos \Theta \approx 0$ , так как  $\Theta \approx i \approx 90^\circ$ . Основным упрощающим фактором является практически полное совпадение систем  $OZ$  и  $OS$ . Действительно, третья ось системы  $OS$  направлена на Солнце, что для рассматриваемой конфигурации орбиты означает, что эта ось практически перпендикулярна к плоскости орбиты. Вместе с тем, третья ось  $OZ$  перпендикулярна плоскости орбиты, если  $\Theta = i = 90^\circ$ , и практически перпендикулярна для солнечно-синхронной орбиты.

Окончательно, считая, что системы  $OZ$  и  $OS$  совпадают (пренебрегая различием в направлении осей на уровне десятка градусов), и принимая  $\sin \Theta \approx 1$ ,  $\cos \Theta \approx 0$ , для вектора индукции в системе  $OS$  получаем простое выражение  $\mathbf{b}_z = (\sin 2u, \cos 2u, 0)$ . Тогда, используя переход  $\mathbf{b}_L = \mathbf{Q}^T \mathbf{b}_S$  и усредняя уравнения (4.3.5) по аргументу широты, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon l} \dot{l} &= -\frac{1}{2} (1 + \cos^2 \rho) \left( \cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right) + \mu \frac{l_{ref}}{l} \cos \rho + \frac{1}{2} \frac{l_{ref}}{l} (1 + \cos^2 \rho) \cos \theta, \\ \frac{1}{\varepsilon} \dot{\rho} &= \left\{ \frac{1}{2} \cos \rho \left( \cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right) - \mu \frac{l_{ref}}{l} - \frac{1}{2} \frac{l_{ref}}{l} \cos \rho \cos \theta \right\} \sin \rho, \\ \frac{1}{\varepsilon} \dot{\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{A-C}{A} \cos \theta - \frac{l_{ref}}{l} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \rho \right) \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

### *Исследование устойчивости*

Исследуем устойчивость полученной системы, чтобы выяснить, как ориентируется аппарат. Из второго и третьего уравнений видно, что положениям равновесия соответствуют  $\sin \rho = 0$  и  $\sin \theta = 0$ , а также некоторые «косые» конфигурации. В зависимости от того, чему равны углы  $\rho$  и  $\theta$ , аппарат выходит на разную скорость закрутки согласно первому уравнению в (4.3.6). Рассмотрим все положения равновесия отдельно.

1.  $\theta = 0, \rho = 0$  (требуемый режим движения)

Это положение равновесия представляет основной интерес, так как именно оно соответствует выходу аппарата на требуемый режим вращения вокруг направления на Солнце. Из первого уравнения (4.3.6) в положении равновесия имеем

$$\frac{1}{\varepsilon l} \dot{l} = -1 + \mu \frac{l_{ref}}{l} + \frac{l_{ref}}{l},$$

откуда заключаем, что аппарат выходит на вращение с кинетическим моментом  $l = (1 + \mu)l_{ref}$ . Далее, используя эту величину и линеаризуя два оставшихся уравнения в (4.3.6), получаем

$$\frac{1}{\varepsilon} \dot{\rho} = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{1 + \mu} \rho, \quad \frac{1}{\varepsilon} \dot{\theta} = -\frac{1}{2} \left( \frac{C - A}{A} + \frac{1}{\mu + 1} \right) \theta.$$

Отметим, что при  $C > A$  положение равновесия устойчиво. То есть, если требуется поддерживать вращение вокруг оси максимального момента инерции, заданный режим движения устойчив. Если же необходимо поддерживать вращение вокруг оси с меньшим моментом инерции, такое движение будет устойчиво, если

$$\frac{C - A}{A} + \frac{1}{\mu + 1} > 0,$$

откуда

$$C > A \frac{\mu}{1 + \mu}. \quad (4.3.7)$$

Так, при  $\mu = 1$   $C > 1/2 A$ , при  $\mu = 2$   $C > 2/3 A$ . При необходимости вращения вокруг оси минимального момента инерции его отличие от максимального не должно быть слишком велико. Причем чем меньше параметр  $\mu$ , тем большее отличие является допустимым.

2. Рассмотрим положение равновесия  $\theta = 0, \rho = \pi$  (ось  $\mathbf{e}_3$  развернута от Солнца).

Из первого уравнения (4.3.6) получаем, что аппарат выходит на вращение со скоростью  $l = (1 - \mu)l_{ref}$ , откуда заключаем, что положение равновесия может быть устойчиво только при  $\mu < 1$ . Линеаризуя второе уравнение (4.3.6), получаем

$$\frac{1}{\varepsilon} \dot{\rho} = \frac{1}{2} \frac{\mu}{1 - \mu} \rho,$$

что с учетом  $\mu < 1$  указывает на неустойчивость равновесия.

3. Положение равновесия  $\theta = \pi, \rho = 0$  (также ось  $\mathbf{e}_3$  развернута от Солнца).

Аппарат выходит на вращение  $l = (-1 + \mu)l_{ref}$ , откуда  $\mu > 1$ . Линеаризация дает

$$\frac{1}{\varepsilon} \dot{\rho} = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{-1+\mu} \rho, \quad \frac{1}{\varepsilon} \dot{\theta} = -\frac{1}{2} \left( \frac{C-A}{A} - \frac{1}{\mu-1} \right) \theta.$$

Из второго уравнения следует, что положение равновесия устойчиво, если

$$C > A \frac{\mu}{-1+\mu}.$$

Так, при  $\mu = 2$   $C > 2A$ , что, однако, невозможно в силу свойств тензора инерции осесимметричного спутника. При  $\mu = 3$   $C > 1.5A$ . Фактически, аппарат должен иметь весьма специфическую форму.

Подводя итог рассмотрению трех положений равновесия, можно заключить, что желательно принять параметр  $\mu$  в диапазоне 1-2, чтобы избежать устойчивости в случае 3, а также реализовывать вращение вокруг оси максимального момента инерции. Если же необходимо поддерживать вращение вокруг оси минимального момента инерции, его отличие от максимального не должно быть слишком существенным.

4. Рассмотрим теперь косые положения равновесия, получаемые из третьего уравнения (4.3.6)

$$\frac{A-C}{A} \cos \theta - \frac{l_{ref}}{l} = 0. \quad (4.3.8)$$

Аналогичные положения возможны и для  $\rho$  согласно второму уравнению в (4.3.6). Как оказалось, для их существования необходимо  $\mu = 0$ . Фактически, учитывая анализ случаев 1-3, можно заключить, что кинетический момент аппарата всегда оказывается направленным на Солнце, то есть  $\rho = 0$ . Относительно оси симметрии этого сказать нельзя. Возможна как ориентация КА в обратном направлении, так и движение в косых положениях.

Подставим выражение (4.3.8) в первое уравнение (4.3.6), в котором примем  $\rho = 0$ , и приравняем к нулю, что будет означать выход на некоторое вращение (равновесие по переменной  $l$ ),

$$-\left( \cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right) \frac{A}{A-C} \frac{1}{\cos \theta} + \mu + \cos \theta = 0,$$

откуда получаем

$$-\left( \frac{A}{A-C} \cos^2 \theta + \frac{C}{A-C} \sin^2 \theta \right) + \mu \cos \theta + \frac{A-C}{A-C} \cos^2 \theta = 0$$

и для положения равновесия имеем выражение

$$\cos \theta = \frac{1}{\mu} \frac{C}{A-C}. \quad (4.3.9)$$

Для кинетического момента получаем  $l = \mu A l_{ref} / C$ . В отличие от случаев 1 и 3, кинетический момент не направлен по оси  $e_3$ . Проекция кинетического момента на эту ось, задающая скорость вращения,

$$l_3 = \mu A l_{ref} \cos \theta / C = \frac{A}{A-C} l_{ref}. \quad (4.3.10)$$

Далее, чтобы такое положение равновесия существовало, необходимо

$$-1 < \frac{1}{\mu} \frac{C}{A-C} < 1. \quad (4.3.11)$$

Полагая, что  $C > A$ , отсюда получаем

$$C > \frac{\mu}{\mu+1} A \text{ и } C > \frac{\mu}{\mu-1} A.$$

Эти неравенства не выполняются при  $\mu \in [1, 2]$  в силу свойств тензора инерции. Таким образом, можно снова заключить, что параметр  $\mu$  следует брать в этом диапазоне, дабы исключить опасность попадания в косоое положение равновесия.

Если же  $C < A$ , то из (4.3.11) получаем

$$A > \frac{\mu-1}{\mu} C \text{ и } A > \frac{\mu+1}{\mu} C. \quad (4.3.12)$$

Так, при  $\mu=1$   $A > 2C$ , при  $\mu=2$   $A > 1.5C$ . Покажем устойчивость положения (4.3.9) при выполнении (4.3.12), чтобы убедиться, что аппарат выходит на косоое положение. Линеаризуя третье уравнение (4.3.6) около положения  $\theta_0$ ,  $\theta = \theta_0 + \alpha$ , получаем

$$\frac{1}{\varepsilon} \dot{\theta} = \frac{1}{2} \left( \lambda \{ \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \cdot \alpha \} - \frac{1}{\mu} \frac{C}{A} \right) \{ \sin \theta_0 + \cos \theta_0 \cdot \alpha \}.$$

Здесь

$$\lambda = \frac{A-C}{A} = \frac{1}{\cos \theta_0} \frac{1}{\mu} \frac{C}{A}.$$

Подставляя это выражение, получаем

$$\frac{1}{\varepsilon} \dot{\theta} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\mu} \frac{C}{A} \cos \theta_0 \tan^2 \theta_0 \cdot \alpha.$$

Положение равновесия устойчиво, если  $\cos \theta_0 > 0$ , то есть  $\frac{1}{\mu} \frac{C}{A-C} > 0$ , что выполняется для рассматриваемого случая  $A > \frac{\mu+1}{\mu} C$  согласно (4.3.12).

Сравнивая условия (4.3.12) и (4.3.7), можно обнаружить, что они по сути задают границу, когда при необходимости вращения вокруг оси минимального момента инерции аппарат выходит на требуемое вращение, а когда – выходит на движение в косом положении.

В целом можно заключить, что если минимальный момент инерции существенно меньше максимального, стабилизировать его в нужном положении не удастся.

Подводя итог исследованию, приведем условия успешной работы управления:

- Параметр  $\mu$  следует брать в диапазоне от 1 до 2.
- Желательно осуществлять закрутку вокруг оси максимального момента инерции.
- При вращении вокруг оси минимального момента инерции необходимо выполнить условие  $C > A\mu/(1+\mu)$ . В частности, оно выполняется при  $C > 1/2 A$  и  $\mu \in [1, 2]$ .

Если же при  $\mu = 1$  выполняется  $C < 1/2 A$ , аппарат выходит на косое положение.

### ***Моделирование движения КА***

Проведем численное моделирование движения аппарата под воздействием различных возмущающих факторов, не учтенных при исследовании устойчивости. Примем следующие параметры аппарата и его орбиты:

- Наклонение  $97^\circ$ , высота 550 км, эксцентриситет 0.01, долгота восходящего узла  $90^\circ$ ;
- Направление на Солнце в системе  $OY$  задано углами  $\rho^S$  и  $\sigma^S$ , равными 80 и 10 градусам. Таким образом, направление на Солнце близко к оси  $OY_1$ . К ней же близка нормаль к плоскости орбиты.
- Коэффициент усиления  $k = 600 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}/\text{Тл}$ , целевая скорость закрутки  $\omega_0 = 0.5 \text{ }^\circ/\text{с}$ .
- Вычисление аэродинамического момента:
  - спутник – параллелепипед со сторонами 30 см;
  - центр масс смещен относительно центра давления на 2, 3 и 4 см вдоль осей связанной системы;
  - плотность атмосферы  $1.8 \cdot 10^{-13} \text{ кг}/\text{м}^3$  (средняя солнечная активность);
- Остаточный дипольный момент  $2 \cdot 10^{-2} \text{ А}\cdot\text{м}^2$ , имеющий постоянную и нормально распределенную компоненты;

- Точность определения направления на Солнце 1 градус, угловой скорости –  $10^{-4} \text{ с}^{-1}$  (постоянное смещение и нормально распределенный шум);
- Помимо гравитационного и аэродинамического, действует момент неизвестной природы, примерно вдвое меньший, чем гравитационный.

На Рис. 4.3.1 приведен пример моделирования для аппарата с тензором инерции 1.0, 0.8, 1.3  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $\mu=1$ . Таким образом, вращение происходит вокруг оси максимального момента, что при  $\mu=1$  обеспечивает устойчивость требуемого режима движения.

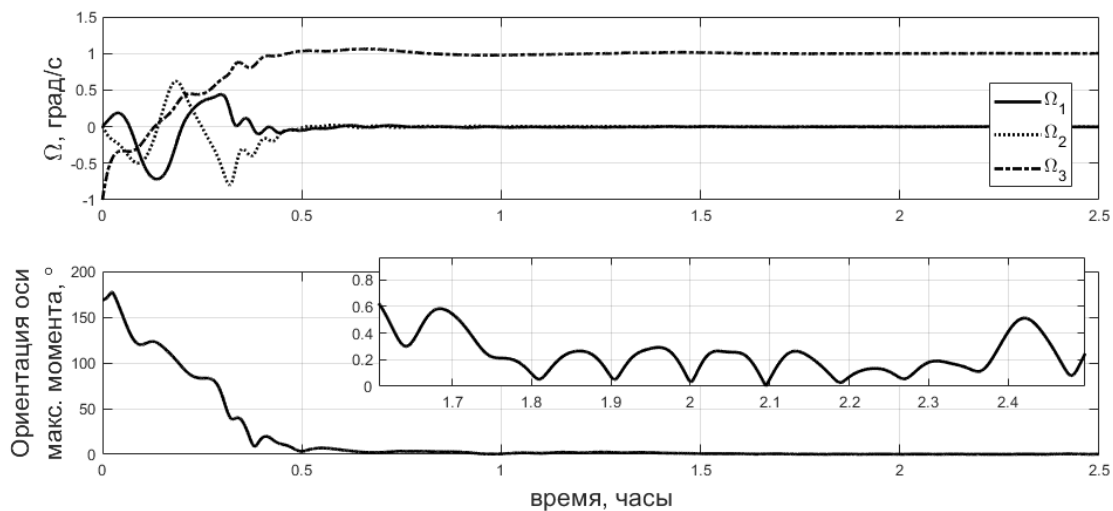


Рис. 4.3.1. Стабилизация в требуемом положении

На Рис. 4.3.1  $\Omega_k$  – компоненты угловой скорости аппарата в системе  $Ox$ . Пример выхода аппарата на стабилизацию в обратном направлении приведен на Рис. 4.3.2. Тензор инерции 1.0, 0.8, 1.6  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ , параметр  $\mu$  равен 3. Таким образом, выполняются условия случая 2 ( $C > 1.5A$  при  $\mu=3$ ).

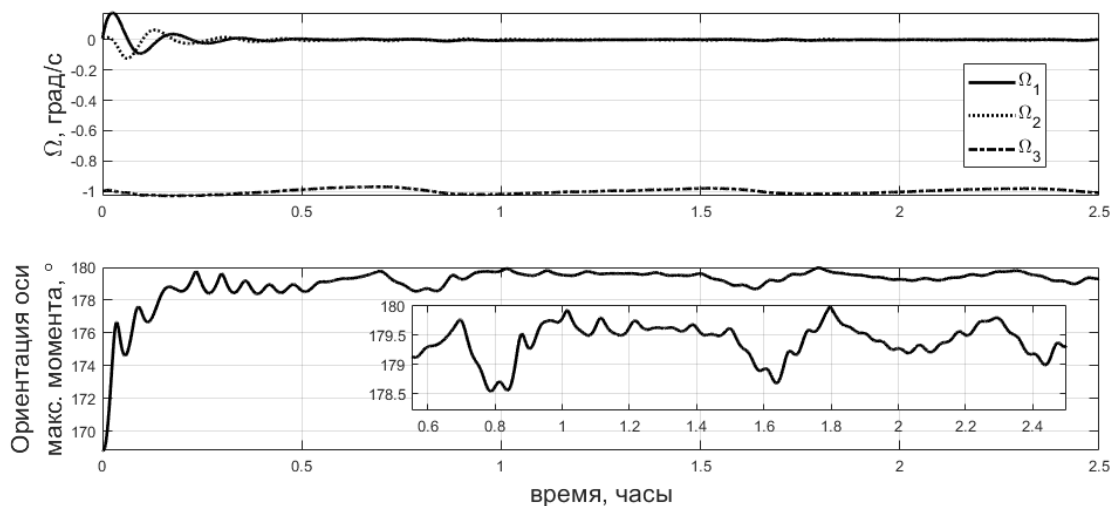


Рис. 4.3.2. Стабилизация в обратном положении

Отметим, что начальные данные выбраны таким образом, что аппарат изначально близок к стабилизации в обратном направлении. Такие же начальные данные можно видеть и на Рис. 4.3.1, где, однако, аппарат стабилизировался в требуемом направлении.

Наконец, на Рис. 4.3.3 приведен пример стабилизации в косом положении с тензором инерции 1.0, 0.8, 0.3 кг·м<sup>2</sup>, параметр  $\mu$  равен 1.

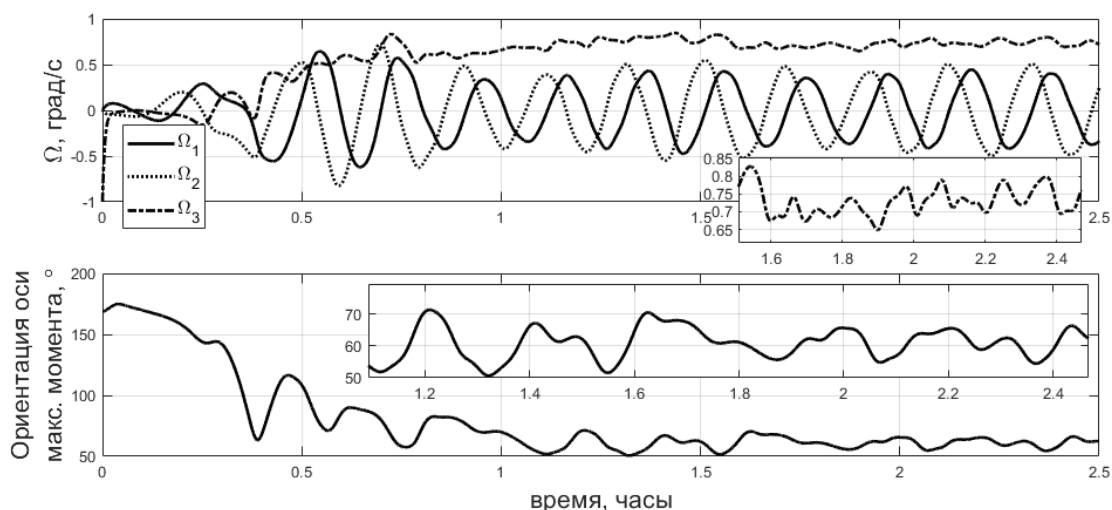


Рис. 4.3.3. Стабилизация в косом положении

Аппарат должен выйти на вращение с углом  $\theta \approx 60^\circ$  согласно (4.3.9) и скоростью вращения около 0.75 °/с согласно (4.3.10). При этом в силу отличия моментов инерции  $A$  и  $B$  в выражениях (4.3.9) и (4.3.10) принята средняя величина 0.9 кг·м<sup>2</sup> для  $A$ .

#### 4.4. Влияние недиагональных элементов тензора инерции на уровень нутационных колебаний

Важным вопросом в стабилизации вращением является компоновка КА. Предположение осесимметричности аппарата во многих случаях оправдано, так как при создании КА, стабилизируемого вращением, обычно прикладываются все усилия для достижения симметричности. Тем не менее, если точность ориентации оси симметрии КА и точность его стабилизации в терминах нутационных колебаний представляют особый интерес, требуется рассмотреть и несимметричный КА. Использование активных систем управления частично снимает необходимость аккуратной компоновки. Возмущающие моменты, как внешние, так и обусловленные неточностью компоновки, парируются системой управления. Однако, особую важность приобретает источник возмущений, обычно пренебрежимо малый для задач углового движения КА. А именно, существенное влияние на динамику оказывает отличие строительных осей от главных. Под строительными осями будем понимать оси, которые близки к главным центральным осям инерции, и которые мы,



равно как и система управления, таковыми считаем. В результате система управления пытается поддерживать вращение КА вокруг оси, немного отличающейся от оси максимального момента инерции. Аппарат, в свою очередь, стремится перейти во вращение вокруг оси максимального момента. Возникает принципиально неустранимая ошибка в ориентации и стабилизации КА. Анализ величины этой ошибки и влияния на нее динамических свойств КА представляет интерес с точки зрения применения стабилизации вращением на высокоточных миссиях.

Исследуем этот вопрос в трех различных сценариях движения:

1. Свободное вращение КА на круговой орбите. Динамические уравнения движения линеаризуются в окрестности требуемого вращения. Исследуется влияние на движение КА недиагональных элементов тензора инерции и начальных данных.

2. Движение под действием алгоритма гашения нутационных колебаний. Исследуется процесс гашения скорости и устанавливается неустранимый остаточный уровень нутационных колебаний.

3. Движение в нелинейной модели с учетом возмущений. Проводится численное моделирование уравнений движения для проверки полученных приближенных результатов.

Тензор инерции КА зададим в предположении, что отклонение оси максимального момента инерции имеет место в плоскости  $Ox_1x_2$  строительной системы координат. А именно, будем считать, что угол между осью максимального момента и первой строительной осью составляет  $\varepsilon$ . Связь недиагонального момента инерции с этим углом имеет вид

$$\tan \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{2J_{12}}{B - A}, \quad (4.4.1)$$

где  $J_{ij}$  – недиагональный элемент тензора инерции. Предполагая, что угол отклонения мал, можем опустить тангенс. Тогда тензор инерции будет иметь вид

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} A & \varepsilon(B - A) & 0 \\ \varepsilon(B - A) & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \quad (4.4.2)$$

В конкретных примерах будем использовать «главные» моменты  $A, B, C$  величиной 3.5, 3.2,  $0.6 \cdot 10^{-2}$  кг·м<sup>2</sup>, что соответствует 3U кубсату. При этом в любом случае считаем, что  $A$  – наибольший момент инерции.

### ***Свободное движение КА***

Будем считать, что КА движется в окрестности требуемого режима – вращения вокруг первой оси строительной системы координат. Чтобы получить и исследовать конкретные

выражения, характеризующие величину нутационных колебаний, дальнейшие выкладки разделим на несколько этапов:

1. Линеаризация уравнений движения и введение безразмерных переменных.
2. Решение линейных уравнений.
3. Сравнение решения с результатами численного моделирования, предварительное обсуждение факторов, влияющих на уровень нутационных колебаний.
4. Поиск максимального уровня нутационных колебаний в зависимости от моментов инерции КА в режиме точного вращения.

#### *Линеаризация уравнений движения*

Рассмотрим движение КА в окрестности требуемого режима вращения вокруг первой оси  $\boldsymbol{\omega}_0 = (\omega_0, 0, 0)$ . Уравнения (1.3.2) линеаризуются вблизи этого движения. Для этого представим скорость в виде суммы ее требуемого значения и некоторой небольшой ошибки  $\delta\boldsymbol{\omega}$ ,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \delta\boldsymbol{\omega}. \quad (4.4.3)$$

Подставляя в (1.3.2) и линеаризуя относительно компонент  $\delta\omega_i$  получаем

$$A d\delta\omega_1/dt - \varepsilon(B - A)\omega_0\delta\omega_3 = M_1,$$

$$B d\delta\omega_2/dt - \varepsilon(C - A)\omega_0\delta\omega_3 = M_2,$$

$$C d\delta\omega_3/dt + (B - A)\omega_0\delta\omega_2 + 2\varepsilon(B - A)\omega_0\delta\omega_1 + \varepsilon(B - A)\omega_0^2 = M_3.$$

Далее рассматриваем свободное движение КА, без учета управления. Введем безразмерные компоненты угловой скорости  $\bar{\omega}_i = \delta\omega_i/\omega_0$  и безразмерное время, выраженное в периодах обращения КА вокруг первой оси,  $\tau = \omega_0 t$ . Обозначая точкой дифференцирование по  $\tau$ , запишем уравнения свободного движения в виде

$$\dot{\bar{\omega}}_1 + \varepsilon\kappa_A^2\bar{\omega}_3 = 0,$$

$$\dot{\bar{\omega}}_2 + \kappa_B^2\bar{\omega}_3 = 0, \quad (4.4.4)$$

$$\dot{\bar{\omega}}_3 - \kappa_C^2\bar{\omega}_2 - 2\varepsilon\kappa_C^2\bar{\omega}_1 = \varepsilon\kappa_C^2,$$

где

$$\kappa_A^2 = (A - B)/A, \quad \kappa_B^2 = (A - C)/B, \quad \kappa_C^2 = (A - B)/C. \quad (4.4.5)$$

Квадраты выражений  $\kappa_k$  введены в (4.4.5), чтобы подчеркнуть положительность соответствующих параметров. Из-за этого обозначения в настоящем разделе отличаются от принятых в других местах в работе.

*Решение линейных уравнений свободного движения*

Собственные числа однородной части уравнений (4.4.4)

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm\lambda_0,$$

где  $\lambda_0^2 = \kappa_B^2 \kappa_C^2 + 2\varepsilon \kappa_A^2 \kappa_C^2$ .

Решение уравнений (4.4.4)

$$\bar{\omega}_1 = C_1 - \varepsilon C_2 \frac{\kappa_A^2}{\lambda_0} \sin \lambda_0 \tau + \varepsilon C_3 \frac{\kappa_A^2}{\lambda_B^2} \cos \lambda_0 \tau,$$

$$\bar{\omega}_2 = -\varepsilon(1 + 2C_1) - C_2 \frac{\kappa_B^2}{\lambda_0} \sin \lambda_0 \tau + C_3 \cos \lambda_0 \tau, \quad (4.4.6)$$

$$\bar{\omega}_3 = C_2 \cos \lambda_0 \tau + C_3 \frac{\lambda_0}{\kappa_B^2} \sin \lambda_0 \tau.$$

Величину нутационных колебаний – проекцию вектора угловой скорости на плоскость, перпендикулярную оси вращения – далее обозначим как  $\bar{\omega}_{2,3} = \sqrt{\bar{\omega}_2^2 + \bar{\omega}_3^2}$ . Константы  $C_k$  определяют как величину нутационных колебаний, так и скорость вращения. Параметр  $C_1$  указывает на некоторое постоянное отклонение скорости вращения  $\bar{\omega}_1$  от требуемого значения. Аналогично  $C_1$  приводит к появлению постоянного смещения в величине нутационных колебаний, так как эта константа присутствует в выражении для  $\bar{\omega}_2$ . Константы  $C_2$  и  $C_3$  определяют амплитуду нутационных колебаний. Все константы определяются начальными условиями движения,

$$C_1 = \frac{\bar{\omega}_1(0) - \varepsilon \kappa_A^2 / \kappa_B^2 [\bar{\omega}_2(0) + 1]}{1 + 2\varepsilon^2 \kappa_A^2 / \kappa_B^2},$$

$$C_2 = \bar{\omega}_3(0), \quad (4.4.7)$$

$$C_3 = \frac{2\varepsilon \bar{\omega}_1(0) + \bar{\omega}_2(0) + \varepsilon}{1 + 2\varepsilon^2 \kappa_A^2 / \kappa_B^2}.$$

Выражения (4.4.7) существенно упрощаются, если  $\bar{\omega}_1(0) = 0$ . Фактически, начальная скорость вращения КА вокруг первой оси назначается потребной скоростью вращения.

Таким образом, из рассмотрения убирается фактор, несущественный для проводимого анализа. Постоянные интегрирования в этом случае принимают вид

$$C_1 = \frac{-\varepsilon \kappa_A^2 / \kappa_B^2 [\bar{\omega}_2(0) + 1]}{1 + 2\varepsilon^2 \kappa_A^2 / \kappa_B^2},$$

$$C_2 = \bar{\omega}_3(0), \tag{4.4.8}$$

$$C_3 = \frac{\bar{\omega}_2(0) + \varepsilon}{1 + 2\varepsilon^2 \kappa_A^2 / \kappa_B^2}.$$

В первую очередь представляет интерес сравнение полученного решения с реальным движением КА. Для этого проведем моделирование движения КА с учетом возмущающих факторов, описанных в разделе 1.4, и со следующими параметрами:

- «главные» моменты инерции  $A, B, C - 3.5, 3.2, 0.6 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;
- высота орбиты 550 км, наклонение  $97^\circ$  \*.
- Компоненты начальной угловой скорости КА 4.85, 0.1, 0.1 градусов в секунду, то есть аппарат близок к режиму вращения вокруг первой оси. Начальная ориентация в инерциальной системе  $OY$  задается углами ориентации (последовательность поворотов 2-3-1) величиной  $5^\circ$ ;
- Отклонение оси максимального момента инерции от строительной оси  $Ox_1$  составляет  $\varepsilon = 0.36^\circ$ ;
- Постоянное смещение и шум в определении угловой скорости составляют 0.5 минут в секунду и 3 угловые минуты при определении ориентации;
- Величина остаточного дипольного момента  $2 \cdot 10^{-3} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ , что согласуется с возможностями его определения и компенсации [159,160,162];
- Размеры КА 10, 10, 30 см. Смещение центра масс КА относительно центра давления 10 мм вдоль первой оси и 3 мм вдоль второй и третьей осей;
- плотность атмосферы  $1.8 \cdot 10^{-13} \text{ кг/м}^3$  соответствует средней солнечной активности.

Сравнение решения (4.4.6)-(4.4.8) и результатов численного моделирования приведено на Рис. 4.4.1 для второй компоненты скорости  $\bar{\omega}_2$ .

---

\* Солнечно-синхронная орбита выбрана в силу ее важности для создания орбитальной солнечной обсерватории. Моделирование проводилось для других наклонений орбиты, существенных отличий в движении КА при этом не наблюдалось.

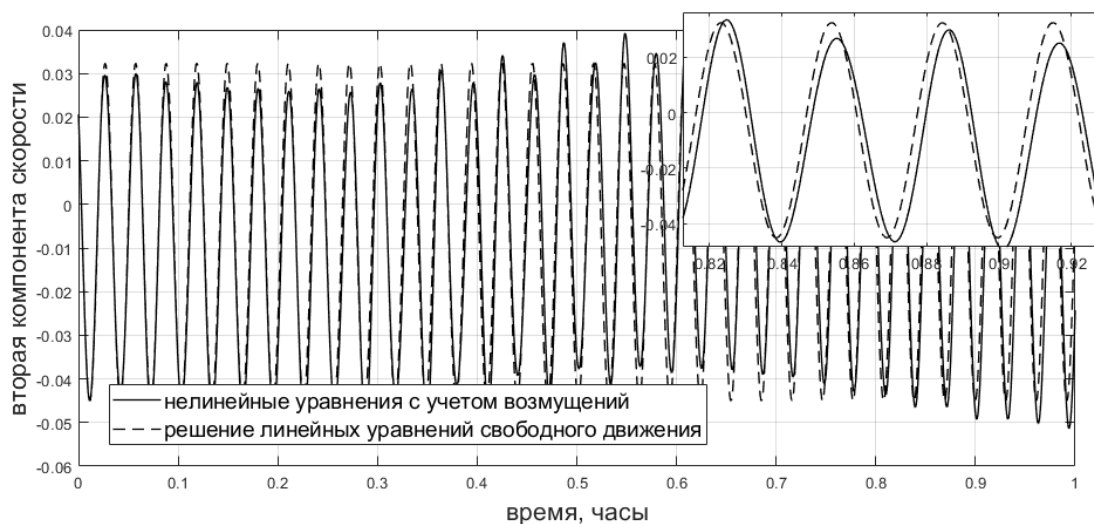


Рис. 4.4.1. Сравнение приближенного решения с результатами численного моделирования

По Рис. 4.4.1 видно, что полученное решение достаточно точно описывает движение КА. Это обусловлено небольшой величиной возмущающих моментов, не оказывающих существенного влияния на движение аппарата, стабилизируемого вращением. Отличие полученного решения от численного проявляется в двух факторах. Во-первых, полученное решение представляет собой гармонические колебания, тогда как численный расчет показывает небольшие изменения в амплитуде колебаний. Также с течением времени начинает изменяться и частота колебаний. Тем не менее, выражения (4.4.6)-(4.4.8) можно использовать для анализа движения КА.

Из первого выражения (4.4.6) видно, что амплитуда колебаний имеет порядок  $\varepsilon$ . Аналогично из первого выражения (4.4.8) заключаем, что постоянное смещение скорости вращения, определяемое постоянной  $C_1$ , также имеет порядок  $\varepsilon$ . Для нутационных колебаний видно, что их амплитуда имеет порядок начальной величины и определяется соотношениями между моментами инерции. Фактически получается, что при существенной величине начальных нутационных колебаний, когда  $\bar{\omega}_{2,3}(0) \gg \varepsilon$ , влияние отличия оси вращения от оси максимального момента незначительно. Исходные колебания столь велики, что на их фоне незаметны колебания, вызванные ошибками компоновки КА. Поскольку механизма демпфирования нутационных колебаний пока нет, данная ситуация не позволяет изучить влияние отклонения оси максимального момента инерции. Рассмотрим движение КА в предположении его точной начальной закрутки, то есть при  $\bar{\omega}_2(0) = \bar{\omega}_3(0) = 0$ . На Рис. 4.4.2 приведено сравнение величины нутационных колебаний, полученной численно и по выражениям (4.4.6)-(4.4.8) в этом случае.

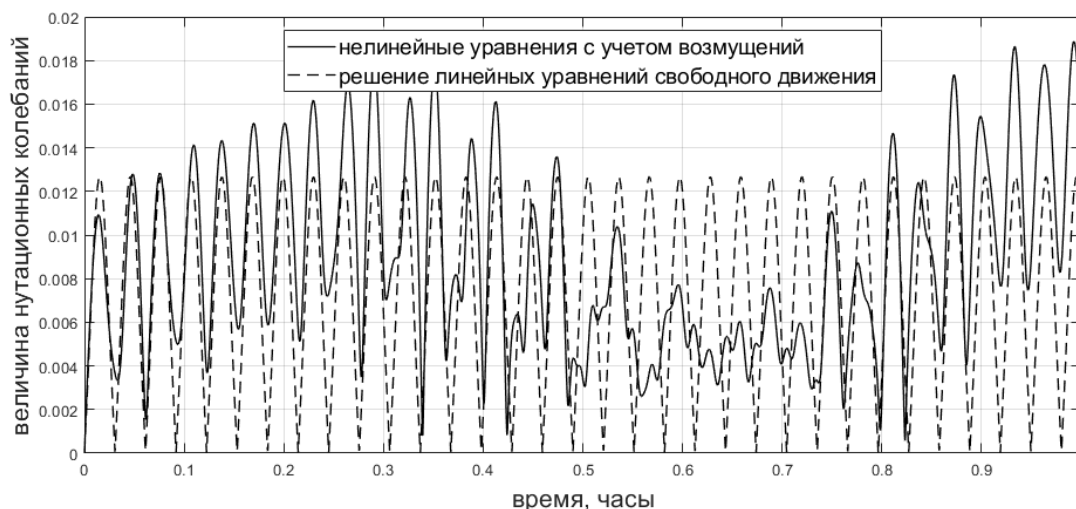


Рис. 4.4.2. Нутационные колебания при точной начальной закрутке КА

По Рис. 4.4.2 видно, что отличие полученного решения от численного является более существенным, нежели приведенное на Рис. 4.4.1. Это связано с тем, что не учитывается основной фактор, влияющий на величину нутационных колебаний — их начальное значение. В результате возмущающие факторы, учитываемые при численном интегрировании, приобретают больший вес в общем вкладе в величину нутационных колебаний. Тем не менее, можно заключить, что наибольший вклад — около  $\frac{3}{4}$  величины амплитуды — вносит отклонение оси максимального момента инерции. Поэтому выражения (4.4.6)-(4.4.8) можно использовать, чтобы получить оценку амплитуды нутационных колебаний в неуправляемом движении КА, ось максимального момента инерции которого отклоняется от требуемой оси вращения.

#### *Анализ влияния несимметричности КА на уровень нутационных колебаний*

Выражения (4.4.8) показывают, что уровень нутационных колебаний зависит от соотношений между моментами инерции, которые определяются параметрами  $\kappa_k$ . Константы  $C_k$  с точностью до  $\varepsilon^2$  имеют вид

$$C_1 = -\varepsilon \kappa_A^2 / \kappa_B^2, C_2 = 0, C_3 = \varepsilon.$$

Частота колебаний

$$\lambda_0 = \kappa_B \kappa_C \left( 1 + \varepsilon \kappa_A^2 / \kappa_B^2 + O(\varepsilon^2) \right). \quad (4.4.9)$$

С помощью этих приближенных выражений решение уравнений свободного движения (4.4.6)-(4.4.8) можно записать в компактной форме

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_2 &= -\varepsilon + \varepsilon \cos \nu, \\ \bar{\omega}_3 &= \varepsilon \kappa_C / \kappa_B \sin \nu,\end{aligned}\tag{4.4.10}$$

где  $\nu = \kappa_B \kappa_C \tau$ . Решение (4.4.10) далее будем исследовать в виде

$$(\bar{\omega}_2 + \varepsilon)^2 + (\bar{\omega}_3 \kappa_B / \kappa_C)^2 = \varepsilon^2.\tag{4.4.11}$$

Фактически, уравнение (4.4.11) задает эллипс в координатах  $\bar{\omega}_2$ ,  $\bar{\omega}_3$ . Координаты центра эллипса  $-\varepsilon$ ,  $0$ . Его полуоси равны  $\varepsilon$  и  $\varepsilon\mu$ , где  $\mu = \kappa_C / \kappa_B$ . Какая ось является большей, а какая малой зависит от величины параметра  $\mu$ , то есть от распределения масс КА. Соответствующие варианты приведены на Рис. 4.4.3. Мгновенная величина нутационных колебаний задается расстоянием от центра системы координат до точки на эллипсе  $r(\tau)$ . Амплитуда нутационных колебаний отвечает максимально возможному расстоянию от начала координат на эллипсе.

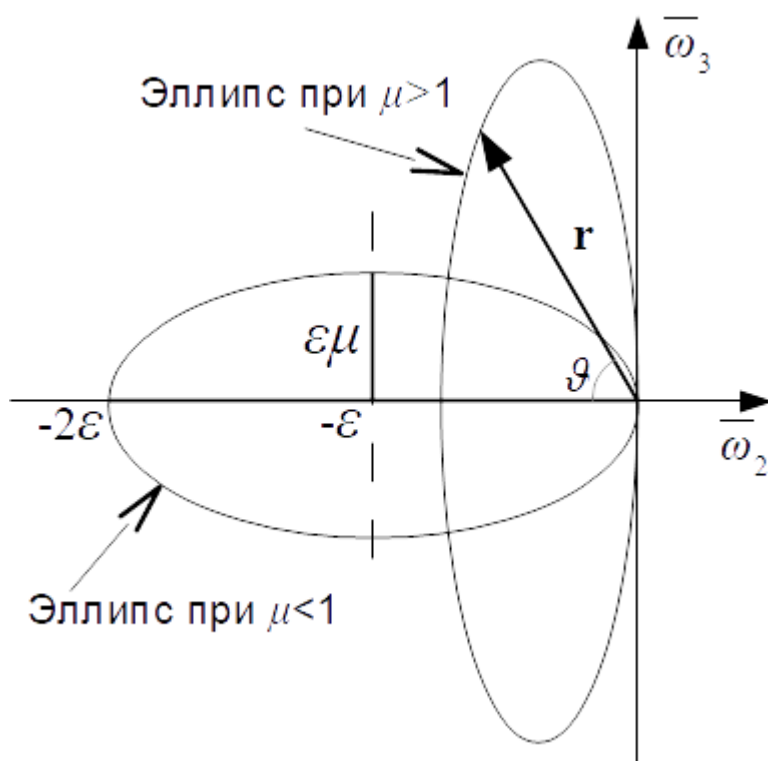


Рис. 4.4.3. Представление величины нутационных колебаний

Амплитуда нутационных колебаний зависит от параметра  $\mu$ . По Рис. 4.3.3 хорошо видно, что при  $\mu < 1$  эллипс вытянут вдоль оси  $\bar{\omega}_2$ , его большая полуось равна  $\varepsilon$ , а амплитуда нутационных колебаний равна  $2\varepsilon$ .

Случай  $\mu > 1$  требует более детального рассмотрения. Перейдем от декартовых координат  $\bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3$  к полярным  $r, \vartheta$ , выбор которых показан на Рис. 4.3.3. Переменные связаны как

$$\bar{\omega}_2 = -r \cos \vartheta, \quad \bar{\omega}_3 = r \sin \vartheta.$$

Подставляя эту замену переменных в (4.4.11) и решая уравнение относительно  $r$ , имеем

$$r = \varepsilon \frac{2\mu^2 \cos \vartheta}{\mu^2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta}. \quad (4.4.12)$$

В результате уравнения (4.4.10)-(4.4.11) и возникающая из них зависимость компонент угловой скорости от времени  $\bar{\omega}_k(\tau)$  заменяются на зависимость  $r(\vartheta)$ . Текущий радиус-вектор на эллипсе непосредственно задает уровень нутационных колебаний, так как  $r(\vartheta) = \bar{\omega}_{2,3} = \sqrt{\bar{\omega}_2^2 + \bar{\omega}_3^2}$ . Амплитуда нутационных колебаний соответствует экстремумам функции  $r(\vartheta)$ . Существуют два ее экстремума в зависимости от значения параметра  $\mu$ .

В случае  $\mu^2 \leq 2$  экстремум наблюдается при  $\sin \vartheta = 0$  и максимальное значение радиус-вектора  $r(\vartheta)$  равно  $2\varepsilon$ . Таким образом, тривиальный случай  $\mu < 1$  включается в случай  $\mu^2 \leq 2$  с той же амплитудой нутационных колебаний.

Обратимся к рассмотрению случая  $\mu^2 > 2$ . Точка экстремума определяется выражением  $\tan^2 \vartheta = \mu^2 - 2$ .

$$\tan^2 \vartheta = \mu^2 - 2. \quad (4.4.13)$$

Экстремальное значение  $r$  задается выражением (4.4.12) с учетом связи (4.4.13). В выражении (4.4.12) радиус-вектор является функцией угла  $\vartheta$  и параметра  $\mu$ . Однако с учетом связи (4.4.13) получаем зависимость экстремального значения только от параметра  $\mu$ . Возникает необходимость поиска экстремальных значений  $\mu^2$ .

Учитывая выражение  $\mu = \kappa_C / \kappa_B$  и (4.4.5), задающие  $\kappa_k$ , имеем

$$\mu^2 = \frac{A - B}{A - C} \frac{B}{C}.$$

Заменим моменты инерции их отношениями

$$\mu_1 = B/A, \quad \mu_2 = C/B.$$

Предположим, что  $B > C$ . В этом случае  $\mu_k < 1$ . Выражение для  $\mu^2$  имеет вид

$$\mu^2 = \frac{1 - \mu_1}{1 - \mu_1 \mu_2} \frac{1}{\mu_2}. \quad (4.4.14)$$



Поскольку для моментов инерции выполняется  $A < B + C$  имеем

$$\mu_1 > 1/(1 + \mu_2). \quad (4.4.15)$$

Выражение (4.4.14) зависит от двух параметров – отношений между моментами инерции. Однако (4.4.14) возрастает по мере падения  $\mu_1$ . Принимая минимальное значение  $\mu_1$ , удовлетворяющее ограничению (4.4.15), получаем зависимость от одного параметра  $\mu_2$ ,

$$\mu_{\max}^2(\mu_2) = \frac{1}{\mu_2(2 - \mu_2)}.$$

Максимум этого выражения не превосходит единицы. Амплитуда нутационных колебаний при этом вычисляется из выражений (4.4.13) и (4.4.12), где следует положить  $\mu = 1$ . В результате снова приходим к амплитуде, равной  $2\varepsilon$ .

Предположим теперь, что  $B < C$ . Введем отношения между моментами инерции

$$\mu_1 = C/A, \quad \mu_2 = B/C,$$

где снова  $\mu_k < 1$ . Ограничение (4.4.15) также сохраняется. Выражение для  $\mu^2$

$$\mu^2 = \mu_2 \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{1 - \mu_1}. \quad (4.4.16)$$

Выражение (4.4.16) следует исследовать на предмет условий, при которых  $\mu^2 > 2$ , то есть амплитуда нутационных колебаний превышает уровень  $2\varepsilon$ . Условие  $\mu^2 > 2$  с учетом (4.4.16) приводит к неравенству

$$\mu_1 \mu_2^2 - \mu_2 + 2 - 2\mu_1 < 0. \quad (4.4.17)$$

Рассмотрим его как квадратичное неравенство относительно  $\mu_2$ . У него есть решение, если дискриминант  $1 + 8\mu_1(\mu_1 - 1) > 0$ . Учитывая  $\mu_1 < 1$  отсюда получаем

$$\mu_1 > (8 + \sqrt{32})/16 \approx 0.85. \quad (4.4.18)$$

Таким образом, если отношение между средним и максимальным моментами инерции  $\mu_1 = C/A$  превышает 0.85, величина нутационных колебаний может превысить значение  $2\varepsilon$ . Однако это превышение наблюдается только при определенных значениях отношения между моментами инерции  $\mu_2 = B/C$ . Из неравенства (4.4.17) можно найти соответствующий интервал  $\mu_2 \in [\mu_2^{\min}, \mu_2^{\max}]$  в виде

$$\mu_2^{\min, \max} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8\mu_1(\mu_1 - 1)}}{2\mu_1}. \quad (4.4.19)$$

Наименьшее возможное значение  $\mu_1$ , при котором  $\mu^2 > 2$ , примерно равно 0.85. В этом случае  $\mu_2 = 1/2\mu_1 \approx 0.6$  согласно (4.4.19). При повышении параметра  $\mu_1$  параметр  $\mu_2$  принимает значения в диапазоне (4.4.19), и ширина этого диапазона также расширяется. Например, при  $\mu_1 = 0.9$   $\mu_2 \in (0.26, 0.85)$ ; при  $\mu_1 = 0.95$   $\mu_2 \in (0.1, 0.94)$ . На Рис. 4.4.4 показана поверхность  $\mu^2$  в зависимости от параметров  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Красная линия задает пары пограничных значений  $\mu_2$  для каждого  $\mu_1$  согласно (4.4.19), таким образом задавая границу  $\mu^2 = 2$ .

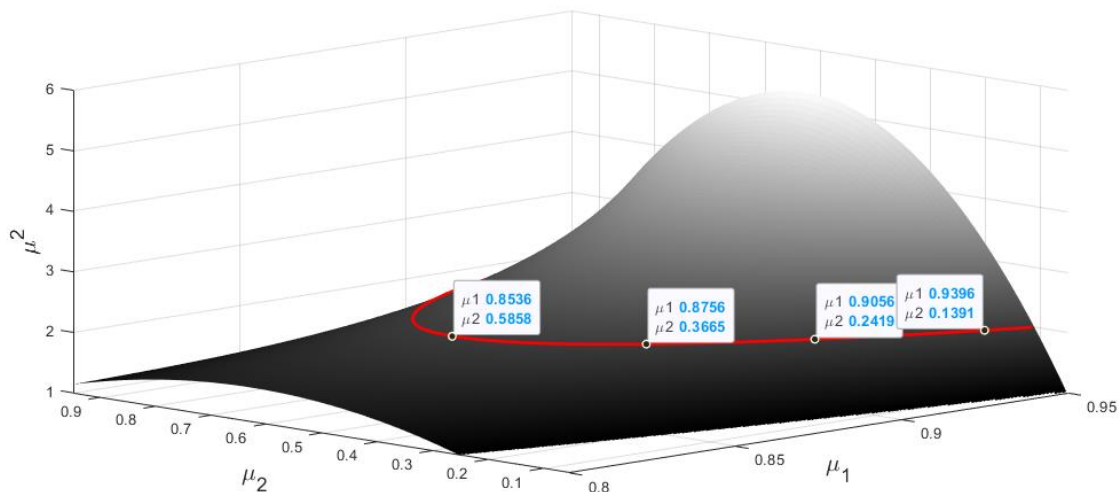


Рис. 4.4.4. Величина нутационных колебаний в случае  $B < C$

Из приведенных рассуждений можно заключить, что величина нутационных колебаний составляет  $2\varepsilon$  в следующих случаях:

- при  $B > C$  (второй момент инерции больше третьего),
- при  $B < C$  и при  $C/A < 0.85$  (третий момент инерции больше второго, но при этом заметно меньше максимального первого),
- при  $B < C$ ,  $C/A > 0.85$  и отношении  $B/C$ , не удовлетворяющем границам (4.4.19) (третий момент инерции больше второго, близок к максимальному первому, а также близок ко второму или, наоборот, существенно его меньше).

В случае, когда  $B < C$ ,  $C/A > 0.85$  и  $B/C$  удовлетворяет границам (4.4.19), амплитуда нутационных колебаний задается выражениями (4.4.12)-(4.4.13) и превышает  $2\varepsilon$ . Отметим, что важным условием здесь является то, что второй момент инерции является минимальным. Отклонение оси максимального момента инерции имеет место в плоскости  $Ox_1x_2$

строительной системы координат. Минимальный второй момент инерции означает, что отклонение главных осей от строительных будет более существенно сказываться на движении КА, если это отклонение имеет место в направлении наименьшего момента инерции. Вторым важным условием является близость максимального и среднего моментов инерции. Фактически, если максимальный момент инерции существенно превосходит два других, принцип стабилизации вращением снижает воздействие возмущающих факторов, включая ошибки в компоновке КА.

### *Эволюция величины нутационных колебаний под действием магнитного демпфирования*

Используем алгоритм гашения нутационных колебаний (4.2.3) для снижения их уровня.

#### *Эволюционные уравнения для $C_k$*

Для исследования влияния алгоритма демпфирования используем линейные уравнения (4.4.4). Вводя пока неизвестные компоненты момента  $M_2$ ,  $M_3$  (вдоль оси вращения момент не создается), запишем уравнения в виде

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\omega}}_1 + \varepsilon \kappa_A^2 \bar{\omega}_3 &= 0, \\ \dot{\bar{\omega}}_2 + \kappa_B^2 \bar{\omega}_3 &= M_2, \\ \dot{\bar{\omega}}_3 - \kappa_C^2 \bar{\omega}_2 - 2\varepsilon \kappa_C^2 \bar{\omega}_1 - \varepsilon \kappa_C^2 &= M_3.\end{aligned}\tag{4.4.20}$$

Предположим, что управляющий момент весьма мал. В этом случае решение, полученное ранее для свободного движения КА, будет медленно эволюционировать. Эта эволюция описывается изменением  $C_k$ . Подставляя выражения (4.4.6) в уравнения (4.4.20), и считая  $C_k$  переменными, получаем для них эволюционные уравнения

$$\begin{aligned}\dot{C}_1 &= \varepsilon \left[ -\frac{\kappa_A^2}{\kappa_A^2 + 2\varepsilon^2 \kappa_B^2} M_2 + \left( \frac{\kappa_A^2}{\lambda_0} - \frac{\kappa_A^2}{\kappa_B^2} \right) M_3 \sin \nu \cos \nu \right], \\ \dot{C}_2 &= -\frac{1}{\zeta} M_2 \sin \nu + M_3 \cos \nu, \\ \dot{C}_3 &= \frac{1}{\xi} M_2 \cos \nu + \frac{\kappa_B^2}{\lambda_0} M_3 \sin \nu,\end{aligned}$$

где

$$\zeta = \frac{\kappa_B^2}{\lambda_0} + 2\varepsilon^2 \frac{\kappa_A^2}{\lambda_0}, \quad \xi = 1 + 2\varepsilon^2 \frac{\kappa_A^2}{\kappa_B^2}, \quad \nu = \lambda_0 \tau.$$

Учитывая малость  $\varepsilon$ , упрощая выражения  $\xi$  и  $\zeta$ , принимая во внимание разложение (4.4.9), можно с точностью до  $\varepsilon^3$  переписать эти уравнения как

$$\begin{aligned}\dot{C}_1 &= \varepsilon \left[ -M_2 + \left( \frac{\kappa_A^2}{\lambda_0} - \frac{\kappa_A^2}{\lambda_B^2} \right) M_3 \sin \nu \cos \nu \right], \\ \dot{C}_2 &= -\zeta \frac{\kappa_C}{\kappa_B} M_2 \sin \nu + M_3 \cos \nu, \\ \dot{C}_3 &= \zeta M_2 \cos \nu + \frac{\kappa_B}{\kappa_C} M_3 \sin \nu,\end{aligned}\tag{4.4.21}$$

где  $\zeta = 1 - 2\varepsilon^2 \kappa_A^2 / \kappa_B^2$ ,  $\nu = \lambda_0' \tau$  and  $\lambda_0' = \kappa_B \kappa_C (1 + \varepsilon \kappa_A^2 / \kappa_B^2)$ .

#### *Влияние демпфирования на амплитуду нутационных колебаний*

Для дальнейшего исследования эволюции  $C_k$  необходимо получить явные выражения для действующих на КА моментов. Обращаясь к выражению для закона управления (4.2.3), для моментов имеем

$$M_2 = kB_0^2 (\bar{\omega}_3 B_2 B_3 - \bar{\omega}_2 B_3^2), \quad M_3 = kB_0^2 (\bar{\omega}_2 B_2 B_3 - \bar{\omega}_3 B_2^2).$$

Определение  $B_i$  в связанной системе координат требует знания ориентации. Чтобы избежать добавления трех кинематических соотношения к уравнениям (4.4.21), заметим, что КА вращается относительно быстро. В результате на небольших интервалах времени, в том числе, на периоде обращения КА, вектор геомагнитной индукции меняется слабо. Считая поле постоянным в инерциальном пространстве, для его выражения в связанной системе будем использовать выражение  $\mathbf{B} = (\cos \Theta, \cos(\tau + \tau_0) \sin \Theta, \sin(\tau + \tau_0) \sin \Theta)$ . То есть, будем считать, что поле движется по конусу при вращении КА точно вокруг первой оси, пренебрегая здесь также малыми нутационными колебаниями. Угол полураствора конуса  $\Theta$  и начальную фазу  $\tau_0$  задает положение вектора геомагнитной индукции в начальный момент времени. В рассматриваемом численном примере аппарат в начальный момент находится на экваторе, поэтому вектор геомагнитной индукции направлен практически вдоль оси вращения Земли. При этом ориентация связанной системы практически совпадает с инерциальной системой. Поэтому будем считать, что  $\sin \Theta = 1$ . В рассматриваемом численном примере  $\Theta = 84.4^\circ$  в модели прямого диполя и  $73.3^\circ$  в модели IGRF. Наконец, фаза  $\tau_0$  не играет роли в эволюционном движении КА. Она может быть задана нулевой удачным подбором начальных данных движения, например, она составляет  $-12^\circ$  в модели IGRF.

Поэтому также будем считать  $\tau_0=0$ . После этих рассуждений запишем моменты, действующие на КА, как

$$\begin{aligned} M_2 &= \eta(\bar{\omega}_3 \cos \tau \sin \tau - \bar{\omega}_2 \sin^2 \tau), \\ M_3 &= \eta\theta'_B(\bar{\omega}_2 \cos \tau \sin \tau - \bar{\omega}_3 \cos^2 \tau), \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

где  $\eta = kB_0^2/B\omega_0$ ,  $\theta'_B = B/C$ . Выражения для  $\bar{\omega}_i$  следует использовать из (4.4.6). Учитывая, что параметр  $\eta$ , характеризующий величину управляющего момента, является малым, можно принять  $\zeta \approx 1$  и пренебречь изменением смещения  $C_1$ , так как  $\dot{C}_1 \sim \varepsilon\eta$ . Уравнения для амплитуд колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{C}_2 &= \eta/4[-(1+\chi)C_2 + f_2(\tau)], \\ \dot{C}_3 &= \eta/4[-(1+\chi)C_3 + f_3(\tau)], \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

где

$$\begin{aligned} f_2(\tau) &= C_2 \left[ -\frac{\kappa_C}{\kappa_B}(1+\theta'_B)\sin 2\tau \sin 2\varphi + (1-\theta'_B)\cos 2\varphi + (1-\theta'_B)\cos 2\tau - (1+\theta'_B)\cos 2\tau \cos 2\varphi \right] + \\ & \frac{\kappa_C}{\kappa_B} C_3 \left[ \left( \theta'_B - \frac{\kappa_C}{\kappa_B} \right) \sin 2\tau - \left( \theta'_B + \frac{\kappa_C}{\kappa_B} \right) \sin 2\tau \cos 2\varphi + (1-\theta'_B)\sin 2\varphi - (\theta'_B + 1)\cos 2\tau \sin 2\varphi \right], \\ f_3(\tau) &= C_3 \left[ \left( \frac{\kappa_C}{\kappa_B} + \theta'_B \frac{\kappa_B}{\kappa_C} \right) \sin 2\tau \sin 2\varphi + (1-\theta'_B)\cos 2\varphi + (1-\theta'_B)\cos 2\tau - (1+\theta'_B)\cos 2\tau \cos 2\varphi \right] + \\ & C_2 \left[ \left( 1 - \theta'_B \frac{\kappa_B^2}{\kappa_C^2} \right) \sin 2\tau + \left( 1 + \theta'_B \frac{\kappa_B^2}{\kappa_C^2} \right) \sin 2\tau \cos 2\varphi + (1-\theta'_B)\frac{\kappa_B}{\kappa_C} \sin 2\varphi - (\theta'_B + 1)\frac{\kappa_B}{\kappa_C} \cos 2\tau \sin 2\varphi \right]. \end{aligned}$$

#### *Решение эволюционных уравнений*

Уравнения (4.4.23) имеют вид  $\dot{\mathbf{x}} = \eta\mathbf{f}(\mathbf{x}, \tau)$ . Усредняя их по времени, учтем, что средние значения  $f_k$  ( $k=2,3$ ) нулевые, если  $\lambda_0$  не близко к единице (что соответствовало бы вырожденному тензору инерции). После усреднения эволюционные уравнения непосредственно интегрируются,

$$C_k = C_k(0) \exp(-\eta(1+\theta'_B)/4) = C_k(0) \exp\left(-\frac{kB_0^2}{4\omega_0} \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right)\right). \quad (4.4.24)$$

Начальные значения  $C_k(0)$  задаются выражениями (4.4.7).

Отсюда можно заключить, что скорость демпфирования нутационных колебаний увеличивается с ростом моментов инерции  $B$  и  $C$ . Фактически, чем больше момент инерции

по оси, в направлении которой имеет место ошибка в задании главных осей, а значит тем меньше возмущающая компонента тензора  $\varepsilon(B-A)$ , тем быстрее происходит гашение возникших колебаний. Поскольку система управления обеспечивает стремление  $C_2$  и  $C_3$  к нулю, нутационные колебания задаются величиной  $\varepsilon(1+2C_1)$ , причем с учетом (4.4.7)

$$C_1 = \frac{\bar{\omega}_1(0) - \varepsilon \kappa_A^2 / \kappa_B^2 [\bar{\omega}_2(0) + 1]}{1 + 2\varepsilon^2 \kappa_A^2 / \kappa_B^2} \approx \bar{\omega}_1(0) - \varepsilon \kappa_A^2 / \kappa_B^2 [\bar{\omega}_2(0) + 1].$$

Таким образом, на остаточную величину нутационных колебаний оказывают влияние недиагональные элементы тензора инерции, соотношения между моментами инерции КА, ошибки в начальных компонентах угловой скорости, включая скорость закрутки  $\bar{\omega}_1(0)$ . Последняя имеет решающее значение. Если же считать, что ошибка в скорости закрутки отсутствует (КА предоставлено вращаться с начальной скоростью), то основной вклад в остаточный уровень колебаний, наряду с ошибкой в определении главных осей  $\varepsilon$ , вносит соотношение  $\kappa_A^2 / \kappa_B^2$ . Отметим, что  $\bar{\omega}_2(0)$  по сравнению с 1 можно пренебречь, так как здесь используется угловая скорость, отнесенная к скорости осевого вращения КА. Для конечной величины нутационных колебаний тогда получаем с учетом (4.4.5)

$$\bar{\omega}_{2,3}^{rem} \approx \varepsilon \left( 1 - 2 \frac{A-B}{A-C} \frac{B}{A} \right). \quad (4.4.25)$$

Выражение (4.4.25) можно исследовать аналогично выражениям (4.4.14) и (4.4.16). Опуская соответствующие выкладки, на Рис. 4.4.5 приведем конечную величину нутационных колебаний (без учета размерного параметра  $\varepsilon$ ) в зависимости от  $\mu_1 = B/A$  и  $\mu_2 = C/B$  в предположении  $B > C$ .

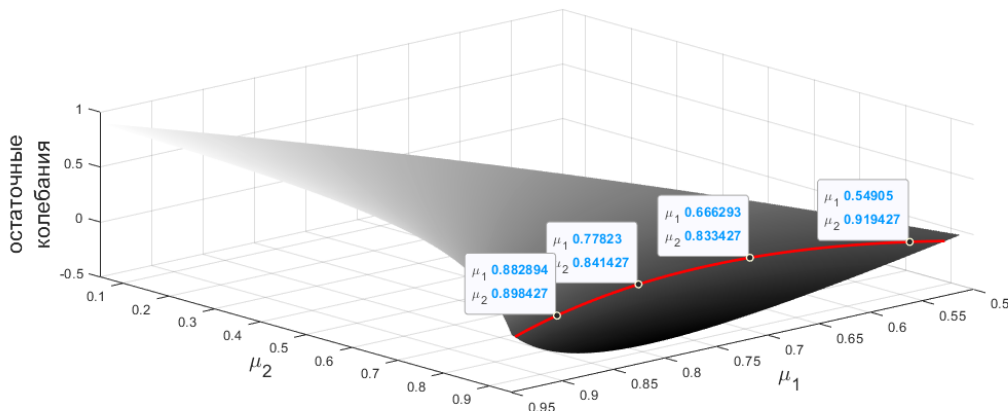


Рис. 4.4.5. Определение величины остаточных нутационных колебаний

На Рис. 4.4.5 также приведена линия, отвечающая  $\bar{\omega}_{2,3}^{term} = 0$  согласно (4.4.25). Отметим, что малая величина  $\bar{\omega}_{2,3}^{term}$  наблюдается при  $\mu_2$ , большем, чем примерно 0.8. Согласно (4.4.24) это соответствует малой скорости гашения нутационных колебаний, что снижает точность приближенного результата, полученного в предположении неподвижного в инерциальном пространстве вектора геомагнитной индукции. Тем не менее, сравнение с численными расчетами в наиболее полной модели движения показывает, что соотношение  $\bar{\omega}_{2,3}^{term} = 0$  в действительности соответствует меньшей величине остаточных нутационных колебаний. В случае  $C > B$  выражение (4.4.25) возрастает с ростом соотношения  $C/A$ , при этом оно всегда отрицательно. В целом величина (4.4.25) оказывается больше, чем в случае  $B > C$ . Это, как и при анализе свободного движения, объясняется выбором смещения главной оси в плоскости  $Ox_1x_2$  строительной системы координат. Величина (4.4.25) при этом в любом случае не превышает  $10 \varepsilon$ .

На Рис. 4.4.6 приведено сравнение полученного решения и результата моделирования исходных нелинейных уравнений с учетом всех возмущающих факторов, описанных в разделе 1.4.

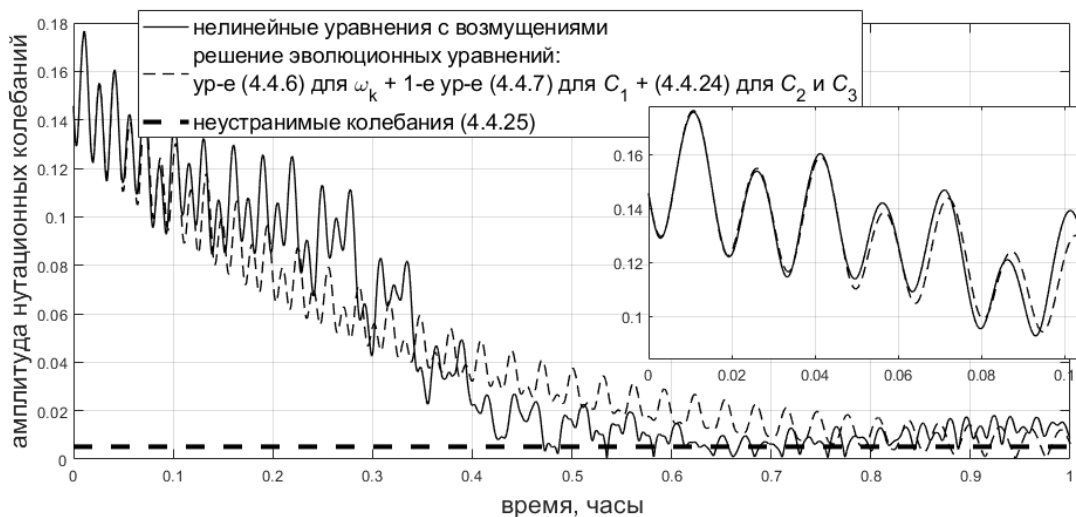


Рис. 4.4.6. Сравнение приближенного решения и результата численного интегрирования

Сплошная линия на Рис. 4.4.6 показывает решение нелинейных уравнений движения с учетом возмущений. Пунктирная линия задается примерным решением, структура которого имеет следующий вид:

- Выражения для  $\bar{\omega}_k$  заданы (4.4.6).
- Константа  $C_1$  в (4.4.6) задается первым выражением в (4.4.7).

- Переменные коэффициенты  $C_2$ ,  $C_3$  в (4.4.6) задаются выражениями (4.4.24).
- Начальные значения  $C_2$ ,  $C_3$  заданы в (4.4.7).

Жирная пунктирная линия задает неустрашимый уровень остаточных нутационных колебаний согласно (4.4.25).

Из Рис. 4.4.6 видно, что точность приближенного решения быстро падает с течением времени. Это в первую очередь связано с тем, что результат (4.4.24) получен для неподвижного в инерциальном пространстве вектора геомагнитной индукции. Поэтому лишь в течение нескольких минут наблюдается практически полное совпадение приближенного результата с численным расчетом. Далее точность постепенно ухудшается. Однако для описания эволюционного процесса, включая время гашения нутационных колебаний и величину, на которую выходят колебания, можно использовать результат (4.4.24)-(4.4.25).

### **Заключение**

В четвертой главе рассмотрен стабилизируемый вращением КА. Проведено исследование переходных процессов при применении трех алгоритмов активной магнитной ориентации: гашения нутационных колебаний, поддержания скорости вращения и переориентации оси вращения в инерциальном пространстве. Эволюционные уравнения решены в квадратурах. Рассмотрено движение вблизи требуемого режима. Для линеаризованных эволюционных уравнений получено выражение для амплитуды нутационных колебаний. Для одного алгоритма ориентации на Солнце исследована устойчивость возникающих положений равновесия, выявлены параметры, при которых КА стабилизируется в нежелательных положениях. Получены выражения, показывающие влияние недиагональных элементов тензора инерции на уровень нутационных колебаний в свободном движении. Рассмотрено влияние магнитного демпфирования, получены выражения для эволюции амплитуд нутационных колебаний и выражение для остаточного неустрашимого уровня колебаний.



## Глава 5. Алгоритм стабилизации на Солнце Sdot

В главе рассматривается работа алгоритма Sdot. Это управление было предложено С.О. Карпенко [97] для обеспечения ориентации КА Чибис-М [163] на Солнце. Алгоритм требует для работы два последовательных показания солнечных датчиков, и наличие на бортовом компьютере модели магнитного поля и направления на Солнце. Простота управления балансируется низкой точностью и неоднозначностью ориентации: КА может стабилизироваться как на Солнце, так и в обратном направлении. Изначально алгоритм создавался как средство на случай нештатных ситуаций. В этой роли он успешно использовался на Чибис-М после выхода из строя всех маховиков кроме одного. Далее в разделе 5.1 приводятся вспомогательные результаты, полученные совместно с С.О. Карпенко [93] и необходимые здесь для полноты описания динамики КА под управлением алгоритма Sdot. В разделах 5.2-5.4 излагаются результаты, полученные автором лично.

### 5.1. Вспомогательные сведения

Закон управления (2.1.1) обеспечивает демпфирование абсолютной угловой скорости. Аналогичное управление, основанное на показаниях солнечного датчика, формируется в виде алгоритма Sdot

$$\mathbf{m} = kB_0 \cos \delta (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}). \quad (5.1.1)$$

Угол  $\delta$  между направлением на Солнце  $\mathbf{S}$  и вектором геомагнитной индукции  $\mathbf{B}$  вычисляется при помощи моделей, задающих их в инерциальном пространстве для любой точки орбиты. В случае использования магнитометра  $\mathbf{S} = \mathbf{B}$  и, следовательно,  $\delta = 0$ . Тогда закон управления (5.1.1) принимает вид (2.1.3).

Вместо управления (5.1.1) обычно реализуется упрощенное выражение

$$\mathbf{m} = -k \cos \delta \frac{\mathbf{S}_k - \mathbf{S}_{k-1}}{\Delta t}, \quad (5.1.2)$$

использующее два последовательных показания солнечных датчиков. Исходно алгоритм Sdot задумывался как альтернативный способ демпфирования, базирующийся на показаниях солнечного датчика. В процессе его эксплуатации выяснилось, что алгоритм обладает также и восстанавливающими свойствами и может применяться для ориентации одной оси КА на Солнце. Приведем кратко результаты, полученные совместно с С.О. Карпенко [93] для переходных процессов в движении КА.

### *Анализ динамики осесимметричного спутника*

Для анализа переходных процессов используются эволюционные переменные (1.3.12).

При этом вместо угла  $\sigma$  вводится угол  $\mathcal{G}$  между  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{L}$ , то есть

$$\cos \mathcal{G} = S_{1Z}q_{13} + S_{2Z}q_{23} + S_{3Z}q_{33}.$$

Опуская выкладки, сопряженные с нахождением уравнений в новых переменных, приведем результат,

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{du} &= \varepsilon \frac{\cos \rho \cos \mathcal{G} - S_{3Z}}{\sin \rho} \left[ p \cos \mathcal{G} + S_{3Z} \cos \rho (q - p) \right] (\cos^2 \theta + \theta_A \sin^2 \theta), \\ \frac{d\theta}{du} &= \frac{1}{2} \varepsilon \lambda \left[ 2 \left( (1 - S_{3Z}^2) p + S_{3Z}^2 q \right) - p \sin^2 \mathcal{G} + (q - p) S_{3Z} (\cos \mathcal{G} \cos \rho - S_{3Z}) \right] \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{d\mathcal{G}}{du} &= -\varepsilon \sin \mathcal{G} \left[ p \cos \mathcal{G} + S_{3Z} \cos \rho (q - p) \right] (\cos^2 \theta + \theta_A \sin^2 \theta), \\ \frac{dl}{du} &= -\varepsilon l \left[ p \sin^2 \mathcal{G} + (q - p) (S_{3Z}^2 - S_{3Z} \cos \rho \cos \mathcal{G}) \right] (\cos^2 \theta + \theta_A \sin^2 \theta), \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

где  $\varepsilon = kB_0'^2/L_0$ ,  $\lambda = 1 - C/A$ . Найдем положения равновесия оси симметрии спутника. Для этого перепишем уравнения (5.1.3), опуская уравнение для  $l$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{G}}{du} &= -\varepsilon \sin \mathcal{G} \left[ A_1 \cos \mathcal{G} + A_2 \sin \mathcal{G} \right] (\cos^2 \theta + \theta_A \sin^2 \theta), \\ \frac{d\theta}{du} &= \frac{1}{2} \varepsilon \lambda \left[ A_1 (2 - \sin^2 \mathcal{G}) + A_2 \sin \mathcal{G} \cos \mathcal{G} \right] \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{d\rho}{du} &= \varepsilon \frac{\cos \rho \cos \mathcal{G} - S_{3Z}}{\sin \rho} \left[ A_1 \cos \mathcal{G} + A_2 \sin \mathcal{G} \right] (\cos^2 \theta + \theta_A \sin^2 \theta), \end{aligned}$$

где  $A_1 = p + (q - p)S_{3Z}^2$ ,  $A_2 = I_1 S_{3Z} (q - p)$ ,  $I_1 \sin \gamma = \cos \rho - \cos \gamma S_{3Z}$ . Выпишем положения равновесия:

1.  $\sin \mathcal{G} = 0$ ,  $\theta = 0$  или  $\theta = \pi/2$ ,  $\cos \rho - S_{3Z} = 0$ .
2.  $A_1 \cos \mathcal{G} + A_2 \sin \mathcal{G} = 0$ ,  $\theta = 0$  или  $\theta = \pi/2$ .

Асимптотически устойчиво положение равновесия  $\mathcal{G} = 0$  или  $\mathcal{G} = \pi$ ;  $\theta = 0$  (если  $\lambda < 0$ , то есть  $C > A$ ), или  $\theta = \pi/2$  (при  $C < A$ );  $\cos \rho - S_{3Z} = 0$ .

### *Анализ динамики спутника, близкого к осесимметричному*

Рассмотрим теперь, как будет влиять слабая несимметричность на динамику аппарата. Введем малый параметр  $\eta = (B - A)/C \ll 1$ . Будем считать, что произведение величин  $\eta$  и  $\varepsilon$  является величиной более высокого порядка малости по сравнению с  $\varepsilon$  и учитываться не будет. После усреднения по  $u$  и  $\psi$  уравнения движения примут вид

$$\frac{d\vartheta}{du} = -\varepsilon \sin \vartheta [A_1 \cos \vartheta + A_2 \sin \vartheta] (\cos^2 \theta + \theta_A \sin^2 \theta),$$

$$\frac{d\rho}{du} = \varepsilon \frac{\cos \rho \cos \vartheta - S_{3Z}}{\sin \rho} [A_1 \cos \vartheta + A_2 \sin \vartheta] (\cos^2 \theta + \theta_A \sin^2 \theta),$$

$$\frac{dl}{du} = -\varepsilon l [A_1 \sin^2 \vartheta - A_2 \cos \vartheta \sin \vartheta] (\cos^2 \theta + \theta_A \sin^2 \theta),$$

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{L_0}{\omega_0} \frac{C}{A^2} \eta \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \varepsilon \lambda [A_1 (2 - \sin^2 \vartheta) + A_2 \sin \vartheta \cos \vartheta] \sin \theta \cos \theta,$$

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{L_0}{\omega_0} \lambda l \cos \theta + \frac{L_0}{\omega_0} \frac{C}{A^2} \eta \cos^2 \varphi \cos \theta - \varepsilon S_{3Z} \lambda (q - p) \cos \theta \sin \rho S_{2L}.$$

Результат анализа устойчивости этой системы приведен в Таблице 5.2.1.

Таблица 5.2.1. Положения равновесия и их устойчивость в зависимости от соотношений между моментами инерции КА

Соотношения между моментами инерции		$\theta$	$\varphi$	$\rho$	$\vartheta$
$C, A$	$B, A$				
$C > A$	-	0 и $\pi$	-	$\cos \rho + (-1)^{k+1} S_{3Z} = 0$	$\pi k$
$C < A$	$B > A$	$\pi/2$ и $3\pi/2$	0 и $\pi$		
	$B < A$	$\pi/2$ и $3\pi/2$	$\pi/2$ и $3\pi/2$		
	$B = A$	$\pi/2$ и $3\pi/2$	-		

Таблица 5.2.1 показывает, что вектор кинетического момента всегда направлен по оси максимального момента инерции КА. Аналогично, он устанавливается по направлению на Солнце. В обоих случаях, однако, устойчивы два противоположных положения равновесия. В результате КА может ориентироваться требуемой осью как в направлении Солнца, так и от него.

## 5.2. Движение в окрестности стабилизации на Солнце

Исследование, проведенное в [93,97] и кратко изложенное в предыдущем разделе, основано на эволюционных переменных, часто называемых переменными Белецкого-Чернуосько. Эти переменные включают в себя величину вектора кинетического момента, два угла его ориентации в инерциальном пространстве, и углы Эйлера ориентации аппарата относительно системы координат, связанной с вектором кинетического момента. Недостатком этих переменных в рассматриваемом случае является вырождение уравнений

движения при стремлении вектора кинетического момента к одной из осей инерциальной системы координат и при стремлении к нулю угла нутации. Используем теперь модифицированные эволюционные переменные и уравнения (1.3.18)-(1.3.19).

**Уравнения движения в окрестности требуемой ориентации**

Движение КА вдали от требуемой ориентации рассмотрено в предыдущем разделе, и показано, что КА стремится к требуемому положению (или обратному). Упростим уравнения движения, рассматривая окрестность требуемой ориентации, недоступную для исследования в переменных, использованных в предыдущем разделе. А именно, линеаризуем уравнения (1.3.18)-(1.3.19) движения, предполагая, что  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$  блики к нулю,

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= M_3, \quad \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{L}M_2, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{L}M_1, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= L\theta\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) + \frac{1}{L}(-M_1 \sin \psi + M_2 \cos \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{L}{C} + \frac{1}{L}M_2(\theta \cos \psi + \sigma) - \frac{1}{L}M_1\theta \sin \psi, \\ \frac{d\theta}{dt} &= L\varphi\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) - \frac{1}{L}(M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi).\end{aligned}$$

Далее необходимо получить явное выражение для управляющего дипольного (5.1.1) и механического моментов. Движение КА будем рассматривать в системе  $OS$ , третья ось которой направлена на Солнце. Вектор направления на Солнце в системе  $OL$  имеет вид  $\mathbf{S} = \mathbf{Q}^T(0, 0, 1) = (-\sigma, \rho, 1)$ .

Здесь использовалась линеаризованная матрица перехода (1.3.13). Для вектора угловой скорости в системе  $OL$  имеем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_x = \mathbf{A}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{A}^T(0, 0, L) = \\ &= L \begin{pmatrix} -\frac{1}{A}\theta \cos \psi - \frac{1}{B}\varphi \sin \psi + \frac{1}{C}(\theta \cos \psi + \varphi \sin \psi) \\ -\frac{1}{A}\theta \sin \psi + \frac{1}{B}\varphi \cos \psi + \frac{1}{C}(\theta \sin \psi - \varphi \cos \psi) \\ \frac{1}{C} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Имея выражения для скорости и вектора направления на Солнце в системе  $OL$ , находим выражение для управляющего дипольного момента,

$$\mathbf{m} = k \cos \delta \begin{pmatrix} \omega_2 - \rho\omega_3 \\ -\omega_1 - \sigma\omega_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Угол между вектором индукции и направлением на Солнце совпадает с углом между вектором индукции и осью  $OS_3$ . При этом не будем конкретизировать выражение для вектора геомагнитной индукции, считая, что в системе  $OS$  он имеет вид  $\mathbf{B}_s = B_0 \nu(t)(b_1, b_2, b_3)$ , где

$$\nu(t) = \sqrt{1 + 3 \sin^2 \omega_{op\sigma} t \sin^2 i} \text{ и компоненты } b_j \text{ составляют единичный вектор. Тогда } \cos \delta = b_3.$$

Вектор индукции, выраженный в системе  $OL$ , суть

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^T \mathbf{B}_s = B_0 \nu \begin{pmatrix} b_1 - \sigma b_3 \\ b_2 + \rho b_3 \\ b_3 + \sigma b_1 - \rho b_2 \end{pmatrix}.$$

Подставляя полученные выражения для дипольного момента и вектора индукции в выражение для механического момента, получаем

$$\mathbf{M} = kB_0 \nu(t) b_3(t) L \begin{pmatrix} -(\sigma\omega_3 + \omega_1) b_3(t) \\ (\rho\omega_3 - \omega_2) b_3(t) \\ (\sigma\omega_3 + \omega_1) b_1(t) - (\rho\omega_3 - \omega_2) b_2(t) \end{pmatrix}.$$

Подставляя это выражение в линеаризованные уравнения, окончательно получаем линеаризованные уравнения управляемого движения

$$\frac{dL}{dt} = kB_0 \nu b_3 L \left[ b_1 \left\{ \frac{1}{C} (\sigma + \theta \cos \psi + \varphi \sin \psi) - \frac{1}{A} \theta \cos \psi - \frac{1}{B} \varphi \sin \psi \right\} - b_2 \left\{ \frac{1}{C} (\rho - \theta \sin \psi + \varphi \cos \psi) + \frac{1}{A} \theta \sin \psi - \frac{1}{B} \varphi \cos \psi \right\} \right],$$

$$\frac{d\rho}{dt} = kB_0 \nu b_3^2 \left[ \frac{1}{C} (-\rho + \theta \sin \psi + \varphi \cos \psi) - \frac{1}{A} \theta \sin \psi + \frac{1}{B} \varphi \cos \psi \right],$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = -kB_0 \nu b_3^2 \left[ \frac{1}{C} (\sigma + \theta \cos \psi + \varphi \sin \psi) - \frac{1}{A} \theta \cos \psi - \frac{1}{B} \varphi \sin \psi \right],$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = L\theta \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) + kB_0 \nu b_3^2 \left[ \frac{1}{C} (\sigma \sin \psi + \rho \cos \psi) + \varphi \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) \right],$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{L}{C},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = L\varphi \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) + kB_0 \nu b_3^2 \left[ \frac{1}{C} (\sigma \cos \psi - \rho \sin \psi) + \varphi \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \right].$$

Перейдем к исследованию полученной системы уравнений.

### **Исследование уравнений движения**

Из уравнений движения видно, что угол  $\psi$  изменяется равномерно. Это отражает режим движения, на который выходит аппарат – вращение вокруг оси максимального момента инерции. Интуитивно можно ожидать, что углы  $\varphi$  и  $\theta$ , задающие ориентацию этой оси, равно как углы ориентации и величина кинетического момента, меняются медленно. Структура уравнений движения, однако, не позволяет использовать это соображение для проведения усреднения по быстрому вращению КА. Предположим, что управление слабо меняет кинетический момент на некотором характерном интервале времени. В этом случае его величина и углы ориентации меняются медленно, что выражается во введении в правой части первых трех уравнений малого параметра. Чтобы перейти к новому времени и ввести малый параметр, рассмотрим свободное движение КА. В этом случае

$$d\psi/dt = L_0/C = const.$$

Здесь  $L_0$  – величина кинетического момента в невозмущенном движении. В возмущенном движении это – начальная величина кинетического момента. В качестве нового времени будем использовать  $\tau = L_0/Ct$ . Тогда, вводя параметр  $\varepsilon = kB_0/L_0$ , и величину кинетического момента относительно его невозмущенной величины  $l = L/L_0$ , запишем безразмерные уравнения движения в новом времени как

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \varepsilon v l b_3 \left[ b_1 \left\{ \sigma + \theta \cos \psi + \varphi \sin \psi - \frac{C}{A} \theta \cos \psi - \frac{C}{B} \varphi \sin \psi \right\} - \right. \\ &\quad \left. b_2 \left\{ \rho - \theta \sin \psi + \varphi \cos \psi + \frac{C}{A} \theta \sin \psi - \frac{C}{B} \varphi \cos \psi \right\} \right], \\ \dot{\rho} &= \varepsilon v b_3^2 \left[ -\rho + \theta \sin \psi + \varphi \cos \psi - \frac{C}{A} \theta \sin \psi + \frac{C}{B} \varphi \cos \psi \right], \\ \dot{\sigma} &= -\varepsilon v b_3^2 \left[ \sigma + \theta \cos \psi + \varphi \sin \psi - \frac{C}{A} \theta \cos \psi - \frac{C}{B} \varphi \sin \psi \right], \\ \dot{\varphi} &= l \theta \left( 1 - \frac{C}{A} \right) + \varepsilon v b_3^2 \left[ \sigma \sin \psi + \rho \cos \psi + \varphi \left( 1 - \frac{C}{B} \right) \right], \\ \dot{\psi} &= l, \\ \dot{\theta} &= l \varphi \left( \frac{C}{B} - 1 \right) + \varepsilon v b_3^2 \left[ \sigma \cos \psi - \rho \sin \psi + \varphi \left( 1 - \frac{C}{A} \right) \right]. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Для того, чтобы получить медленные переменные, описывающие движение оси максимального момента КА, перейдем к амплитудам колебаний.

*Переход к амплитудам колебаний аппарата*

Предположим, что КА движется без действия управляющего момента. В этом случае ориентация оси максимального момента инерции изменяется в соответствии с уравнениями

$$\dot{\varphi} = -\lambda_{\varphi}^2 \theta, \quad \dot{\theta} = \lambda_{\theta}^2 \varphi,$$

где  $\lambda_{\varphi}^2 = l(C/A - 1)$ ,  $\lambda_{\theta}^2 = l(C/B - 1)$ . Решение этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= a \cos(\lambda_{\varphi} \lambda_{\theta} \tau) - b \lambda_{\varphi} / \lambda_{\theta} \sin(\lambda_{\varphi} \lambda_{\theta} \tau), \\ \theta &= a \lambda_{\theta} / \lambda_{\varphi} \sin(\lambda_{\varphi} \lambda_{\theta} \tau) + b \cos(\lambda_{\varphi} \lambda_{\theta} \tau), \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

где  $a = \varphi(0)$ ,  $b = \theta(0)$ .

Предположим теперь, что на аппарат действует управляющий момент. В этом случае как амплитуды колебаний, так и частота, зависящая от величины кинетического момента, будут переменными. Продифференцируем невозмущенное решение для угла  $\varphi$ , и подставим полученное выражение в уравнения движения, где для углов  $\varphi$  и  $\theta$  будем использовать полученные выражения через амплитуды,

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \dot{a} \cos(\lambda_{\varphi} \lambda_{\theta} \tau) - a \tau \frac{d\lambda_{\varphi} \lambda_{\theta}}{d\tau} \sin(\lambda_{\varphi} \lambda_{\theta} \tau) - a \lambda_{\varphi} \lambda_{\theta} \sin(\lambda_{\varphi} \lambda_{\theta} \tau) - \\ & b \frac{\lambda_{\varphi}}{\lambda_{\theta}} \sin(\lambda_{\varphi} \lambda_{\theta} \tau) - b \frac{\lambda_{\varphi}}{\lambda_{\theta}} \tau \frac{d\lambda_{\varphi} \lambda_{\theta}}{d\tau} \cos(\lambda_{\varphi} \lambda_{\theta} \tau) - b \frac{\lambda_{\varphi}}{\lambda_{\theta}} \cos(\lambda_{\varphi} \lambda_{\theta} \tau) = \\ & -\lambda_{\varphi}^2 \left( a \frac{\lambda_{\theta}}{\lambda_{\varphi}} \sin(\lambda_{\varphi} \lambda_{\theta} \tau) + b \cos(\lambda_{\varphi} \lambda_{\theta} \tau) \right) + \varepsilon M_{\varphi} + \\ & \varepsilon \nu b_3^2 \left( 1 - \frac{C}{B} \right) \left( a \cos(\lambda_{\varphi} \lambda_{\theta} \tau) - b \frac{\lambda_{\varphi}}{\lambda_{\theta}} \sin(\lambda_{\varphi} \lambda_{\theta} \tau) \right), \end{aligned}$$

где  $M_{\varphi} = \nu b_3^2 (\sigma \sin \psi + \rho \cos \psi)$ . Для изменения частоты имеем

$$\frac{d\lambda_{\varphi} \lambda_{\theta}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left( l \sqrt{(C/A - 1)(C/B - 1)} \right) = \varepsilon \xi M_l,$$

где  $\xi = \sqrt{(C/A - 1)(C/B - 1)}$ , выражение для  $M_l$  задается правой частью первого уравнения в (5.2.1). Учитывая это соотношение и сокращая одинаковые члены, получаем

$$\dot{a} \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) - \dot{b} \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\theta} \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) = \varepsilon \xi \tau a M_l \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) + \varepsilon \xi \tau b M_l \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\theta} \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) + \varepsilon M_\varphi + \varepsilon \nu b_3^2 \left(1 - \frac{C}{B}\right) \left(a \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) - b \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\theta} \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau)\right).$$

Аналогично, дифференцируя выражение для  $\theta$ , получаем

$$\dot{a} \frac{\lambda_\theta}{\lambda_\varphi} \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) + \dot{b} \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) = -\varepsilon \xi \tau a M_l \frac{\lambda_\theta}{\lambda_\varphi} \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) + \varepsilon \xi \tau b M_l \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) + \varepsilon M_\theta + \varepsilon \nu b_3^2 \left(1 - \frac{C}{A}\right) \left(a \frac{\lambda_\theta}{\lambda_\varphi} \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) + b \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau)\right),$$

где  $M_\theta = \nu b_3^2 (\sigma \cos \psi - \rho \sin \psi)$ .

Разрешая эти выражения относительно производных амплитуд, получаем

$$\dot{a} = \varepsilon \xi \tau b \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\theta} M_l + \varepsilon M_a + \varepsilon \nu a b_3^2 \left(1 - \frac{C}{B} \cos^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) - \frac{C}{A} \sin^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau)\right) + \varepsilon \nu b b_3^2 \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\theta} \left(\frac{C}{B} - \frac{C}{A}\right) \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau),$$

$$\dot{b} = -\varepsilon \xi \tau a M_l + \varepsilon M_b + \varepsilon \nu b b_3^2 \left(1 - \frac{C}{B} \sin^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) - \frac{C}{A} \cos^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau)\right) + \varepsilon \nu a b_3^2 \frac{\lambda_\theta}{\lambda_\varphi} \left(\frac{C}{B} - \frac{C}{A}\right) \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau),$$

где

$$M_a = M_\varphi \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) + \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\theta} M_\theta \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau),$$

$$M_b = -\frac{\lambda_\theta}{\lambda_\varphi} M_\varphi \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) + M_\theta \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau).$$

Таким образом, окончательно для описания движения КА и вектора его кинетического момента вблизи требуемой ориентации получаем систему уравнений

$$\dot{i} = \varepsilon \nu l b_3 \left[ b_1 \left\{ \sigma + \theta \cos \psi + \varphi \sin \psi - \frac{C}{A} \theta \cos \psi - \frac{C}{B} \varphi \sin \psi \right\} - b_2 \left\{ \rho - \theta \sin \psi + \varphi \cos \psi + \frac{C}{A} \theta \sin \psi - \frac{C}{B} \varphi \cos \psi \right\} \right],$$

$$\dot{\rho} = \varepsilon \nu b_3^2 \left[ -\rho + \theta \sin \psi + \varphi \cos \psi - \frac{C}{A} \theta \sin \psi + \frac{C}{B} \varphi \cos \psi \right],$$



$$\begin{aligned}
\dot{\sigma} &= -\varepsilon\nu b_3^2 \left[ \sigma + \theta \cos \psi + \varphi \sin \psi - \frac{C}{A} \theta \cos \psi - \frac{C}{B} \varphi \sin \psi \right], \\
\dot{a} &= \varepsilon \xi \tau b \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\theta} M_l + \varepsilon M_a + \varepsilon \nu a b_3^2 \left( 1 - \frac{C}{B} \cos^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) - \frac{C}{A} \sin^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \right) + \\
&\quad \varepsilon \nu b b_3^2 \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\theta} \left( \frac{C}{B} - \frac{C}{A} \right) \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau), \\
\dot{b} &= -\varepsilon \xi \tau a M_l + \varepsilon M_b + \varepsilon \nu b b_3^2 \left( 1 - \frac{C}{B} \sin^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) - \frac{C}{A} \cos^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \right) + \\
&\quad \varepsilon \nu a b_3^2 \frac{\lambda_\theta}{\lambda_\varphi} \left( \frac{C}{B} - \frac{C}{A} \right) \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau), \\
\dot{\psi} &= l,
\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

При этом в первых трех уравнениях для выражения углов ориентации оси максимального момента инерции  $\varphi(a, b)$  и  $\theta(a, b)$  через новые переменные – амплитуды колебаний – следует использовать выражения (5.2.2).

#### *Усреднение уравнений движения*

Уравнения (5.2.3) пригодны для проведения процедуры усреднения, так как содержат одну быструю фазу  $\psi$  – скорость вращения вокруг оси максимального момента инерции, и пять медленных переменных – величину вектора кинетического момента, углы его ориентации в инерциальном пространстве, и амплитуды колебаний оси максимального момента инерции относительно вектора кинетического момента. Уравнения (5.2.3) также содержат время, от которого зависят компоненты вектора геомагнитной индукции. Усреднение по времени не проводится, так как считаем (5.2.3) системой с медленно меняющимся параметром. Это означает, что характерная частота вращения КА вокруг оси максимального момента инерции много больше орбитальной частоты. Также будем предполагать, что между этими частотами не возникает резонанса.

В результате усреднения уравнения (5.2.3), содержащие тригонометрические функции  $\psi$  в первых трех уравнениях, а также в  $M_a$  и  $M_b$ , существенно упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned}
\dot{l} &= \varepsilon \nu l b_3 (b_1 \sigma - b_2 \rho), \\
\dot{\rho} &= -\varepsilon \nu b_3^2 \rho, \\
\dot{\sigma} &= -\varepsilon \nu b_3^2 \sigma,
\end{aligned}$$

$$\dot{a} = \varepsilon \xi \tau b \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\theta} M_l + \varepsilon \nu a b_3^2 \left( 1 - \frac{C}{B} \cos^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) - \frac{C}{A} \sin^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \right) + \quad (5.2.4)$$

$$\varepsilon \nu b b_3^2 \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\theta} \left( \frac{C}{B} - \frac{C}{A} \right) \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau),$$

$$\dot{b} = -\varepsilon \xi \tau a M_l + \varepsilon \nu b b_3^2 \left( 1 - \frac{C}{B} \sin^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) - \frac{C}{A} \cos^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \right) +$$

$$\varepsilon \nu a b_3^2 \frac{\lambda_\theta}{\lambda_\varphi} \left( \frac{C}{B} - \frac{C}{A} \right) \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau),$$

где  $M_l = \nu l b_3 (b_1 \sigma - b_2 \rho)$ .

В полученной системе сразу независимо интегрируются уравнения для углов ориентации вектора кинетического момента, при этом оба экспоненциально стремятся к нулю. Затем интегрируется выражение для величины вектора кинетического момента, которая, по мере стремления к нулю углов ориентации, выходит на некоторое постоянное значение. Вопрос об эволюции вектора кинетического момента, таким образом, решается с помощью интегрирования первых трех уравнений движения.

#### *Поведение амплитуд колебаний оси максимального момента инерции*

Движение оси максимального момента инерции описывается двумя последними уравнениями системы (5.2.4). Их решение затруднительно. Однако, можно показать асимптотическую устойчивость положения  $a = b = 0$ , что будет означать стремление КА к требуемой ориентации. Чтобы упростить эти уравнения, рассмотрим их на большом интервале времени, когда величина кинетического момента вышла на постоянное значение и потому  $M_l \approx 0$ . Отбрасывая первое слагаемое, имеем

$$\dot{a} = \varepsilon \nu a b_3^2 \left( 1 - \frac{C}{B} \cos^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) - \frac{C}{A} \sin^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \right) + \quad (5.2.5)$$

$$\varepsilon \nu b b_3^2 \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\theta} \left( \frac{C}{B} - \frac{C}{A} \right) \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau),$$

$$\dot{b} = \varepsilon \nu b b_3^2 \left( 1 - \frac{C}{B} \sin^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) - \frac{C}{A} \cos^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \right) +$$

$$\varepsilon \nu a b_3^2 \frac{\lambda_\theta}{\lambda_\varphi} \left( \frac{C}{B} - \frac{C}{A} \right) \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau).$$

Покажем асимптотическую устойчивость, введя новые переменные. Замена

$$a' = a \sqrt{\lambda_\theta / \lambda_\varphi}, \quad b' = b \sqrt{\lambda_\varphi / \lambda_\theta} \quad (5.2.6)$$

позволяет переписать систему (5.2.5) в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{a}' \\ \dot{b}' \end{pmatrix} = \varepsilon \nu b_3^2 \begin{pmatrix} 1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{2} \varepsilon \nu b_3^2 \begin{pmatrix} \frac{C}{B} - \frac{C}{A} & -\cos(2\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \\ \sin(2\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) & \cos(2\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}. \quad (5.2.7)$$

Следующая невырожденная замена

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) & \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \\ -\sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) & \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (5.2.8)$$

переводит систему (5.2.7) в

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \varepsilon \nu b_3^2 \begin{pmatrix} 1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \varepsilon \nu b_3^2 \begin{pmatrix} \frac{C}{B} - \frac{C}{A} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \lambda_\varphi \lambda_\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Для доказательства асимптотической устойчивости рассматривается функция Ляпунова  $V = 1/2(u^2 + v^2)$ , которая всюду положительна, кроме нулевого положения равновесия.

Производная этой функции в силу уравнений движения есть

$$\dot{V} = \varepsilon \nu b_3^2 (1 - C/B) u^2 + \varepsilon \nu b_3^2 (1 - C/A) v^2.$$

При  $C > A$  и  $C > B$   $\dot{V} < 0$  при отличных от нуля фазовых переменных  $(u, v)$ , поэтому положение равновесия асимптотически устойчиво по теореме Ляпунова. Так как замены представляют собой растяжение (5.2.6) и поворот (5.2.8), то и в исходных переменных положение равновесия будет асимптотически устойчивым.

Можно дополнительно упростить уравнения (5.2.5), проведя усреднение по времени. Для этого необходимо выделить в уравнениях зависящие от времени компоненты. Напомним, что компонента вектора геомагнитной индукции  $b_3$  в (5.2.5) относится к единичному вектору, характерная величина вектора индукции  $B_0$  включена в параметр  $\varepsilon$ , а коэффициент  $\nu$  фактически задает текущую величину вектора индукции. Используя постоянную матрицу перехода  $\mathbf{Q}^B$  между системами  $OS$  и  $OP$ , запишем

$$\nu b_3^2 = \frac{1}{\nu B_0^2} \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 q_{3k}^B q_{3m}^B b_{Pk} b_{Pm}. \quad (5.2.9)$$

Вектор  $\mathbf{B}$ , напомним, не является единичным, его величина равна  $\nu B_0$ . Компоненты  $b_j$ , равно как и коэффициент  $\nu$ , зависят от времени с частотой  $\eta = 2\omega_0 C/L_0$ . Чтобы провести усреднение, необходимо записать  $1/\nu$  в виде ряда периодических по  $\tau$  функций (3.4.21).

Поскольку в ряду параметр  $\chi$  встречается в степени  $2j$ , можно оставить лишь первый член ряда, так как уже  $\chi^2 \approx 0.055$ . Далее, для вычисления  $1/\nu$  необходимо извлечь корень из выражения (3.4.21). Опираясь на малость  $\chi^2$  и разлагая в ряд Тейлора, получаем

$$1/\nu = (1 + 3 \sin^2 i)^{-1/4} (1 + \chi^2 \cos \eta \tau) + O(\chi^4).$$

Далее подставляем в (5.2.9) полученное выражение, выражения для компонент вектора геомагнитной индукции, а также представляя квадраты тригонометрических функций в (5.2.5) через функции двойного угла, запишем (5.2.5) в виде

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon a (1 + 3 \sin^2 i)^{-1/4} (1 + \chi^2 \cos \eta \tau) (\beta_0 + \beta_1 \cos \eta \tau + f_T(j\eta \tau)) \times \left( 1 - \frac{C}{2B} - \frac{C}{2A} + f_T(\zeta \tau) \right) + \\ &\quad \varepsilon b (1 + 3 \sin^2 i)^{-1/4} (1 + \chi^2 \cos \eta \tau) (\beta_0 + \beta_1 \cos \eta \tau + f_T(j\eta \tau)) \times \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\theta} \left( \frac{C}{B} - \frac{C}{A} \right) f_T(\zeta \tau), \\ \dot{b} &= \varepsilon b (1 + 3 \sin^2 i)^{-1/4} (1 + \chi^2 \cos \eta \tau) (\beta_0 + \beta_1 \cos \eta \tau + f_T(j\eta \tau)) \times \left( 1 - \frac{C}{2B} - \frac{C}{2A} + f_T(\zeta \tau) \right) + \\ &\quad \varepsilon a (1 + 3 \sin^2 i)^{-1/4} (1 + \chi^2 \cos \eta \tau) (\beta_0 + \beta_1 \cos \eta \tau + f_T(j\eta \tau)) \times \frac{\lambda_\theta}{\lambda_\varphi} \left( \frac{C}{B} - \frac{C}{A} \right) f_T(\zeta \tau). \end{aligned}$$

Здесь  $j = 1, 2$ ,  $\zeta = \lambda_\varphi \lambda_\theta$ ,  $f_T$  – некоторые тригонометрические функции указанного аргумента, коэффициенты

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \alpha_0^2 + 1/2 \alpha_1^2 + 1/2 \alpha_2^2, & \alpha_0 &= q_{33}^B \cos i - 1/2 q_{32}^B \sin i, \\ \beta_1 &= 2\alpha_0 \alpha_1, & \alpha_1 &= -3/2 q_{31}^B \sin i, \\ & & \alpha_2 &= 3/2 q_{32}^B \sin i \end{aligned}$$

получены из выражений (1.2.5). В полученных уравнениях предполагаем, что частота  $\zeta$ , зависящая от моментов инерции КА, и частота  $\eta$ , зависящая от высоты орбиты, максимального момента инерции и кинетического момента вращения КА, рационально несоизмеримы. В этом случае при усреднении полученных уравнений слагаемые вида  $f_T(j\eta \tau)$ ,  $f_T(\zeta \tau)$ ,  $f_T(j\eta \tau) f_T(\eta \tau)$  будут иметь нулевое среднее. Для амплитуд получаем одинаковые элементарные эволюционные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon (1 + 3 \sin^2 i)^{-1/4} \left( \beta_0 + \frac{1}{2} \chi^2 \beta_1 \right) \left( 1 - \frac{C}{2B} - \frac{C}{2A} \right) a, \\ \dot{b} &= \varepsilon (1 + 3 \sin^2 i)^{-1/4} \left( \beta_0 + \frac{1}{2} \chi^2 \beta_1 \right) \left( 1 - \frac{C}{2B} - \frac{C}{2A} \right) b, \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

которые немедленно интегрируются и показывают экспоненциальное падение амплитуд колебаний оси максимального момента инерции относительно вектора кинетического момента.

### *Моделирование движения КА*

Проведем моделирование движения аппарата с использованием исходных нелинейных уравнений движения (1.3.18)-(1.3.19), линеаризованных уравнений (5.2.3), усредненных уравнений (5.2.4) и дважды усредненных уравнений (5.2.10). Будем считать, что

- аппарат имеет тензор инерции с диагональными элементами 1.1, 1.3 и 1.5 кг·м<sup>2</sup>,
- наклонение орбиты 51.7°,
- характерная величина геомагнитно поля  $B_0=35000$  нТл,
- орбитальная скорость  $\omega_0=10^{-3}$  с<sup>-1</sup> (орбита высотой около 350 км),
- переход от системы  $OY$  к системе  $OS$  для определения выражения вектора геомагнитной индукции задается матрицей перехода (1.3.13) при  $\rho = \sigma = 50^\circ$ ,
- коэффициент усиления в управлении  $k=60$  кг·м<sup>2</sup>/с·Тл.

Для сравнения результатов расчета с использованием разных уравнений движения в первую очередь следует определить соотношения между начальными данными. При переходе от исходных уравнений к линеаризованным возникает необходимость корректировки начального значения величины кинетического момента. Заметим, что линеаризованная матрица перехода более не является ортогональной. При переходе между системами координат вектор «растягивается». Обычно это не представляет проблемы, так как переменные в конце концов оказываются нулевыми при исследовании линейного приближения. В рассматриваемом случае, однако, величина кинетического момента оказывается не нулевой, а выходит на некоторое значение. В результате использования в выкладках неортогональных матриц это значение отличается от получаемого в нелинейной постановке. Разница при этом не превышает ошибки, неизбежно допускаемой при линеаризации уравнений движения. Тем не менее, желательно уточнить начальное значение величины вектора кинетического момента. В частности, потребуем, чтобы вектор кинетического момента имел одинаковую начальную длину в инерциальном пространстве в нелинейных и линейных уравнениях движения. В этом случае

$$L_{\text{лин}}(0) = L_{\text{нелин}}(0) / \|\mathbf{q}_{j3}\| = L_{\text{нелин}}(0) / \sqrt{1 + \sigma^2(0) + \rho^2(0)}.$$

Углы ориентации вектора кинетического момента и КА в линейных и нелинейных уравнениях считаем совпадающими.

Уточнение начальных значений углов может потребоваться при переходе к усредненным уравнениям движения, так как усредненные и исходные переменные, вообще говоря, не совпадают в начальный момент времени. В большинстве случаев, включая рассматриваемый, оказывается достаточным использовать одинаковые начальные данные исходных и усредненных уравнений движения.

На Рис. 5.2.1 приведена величина вектора кинетического момента.

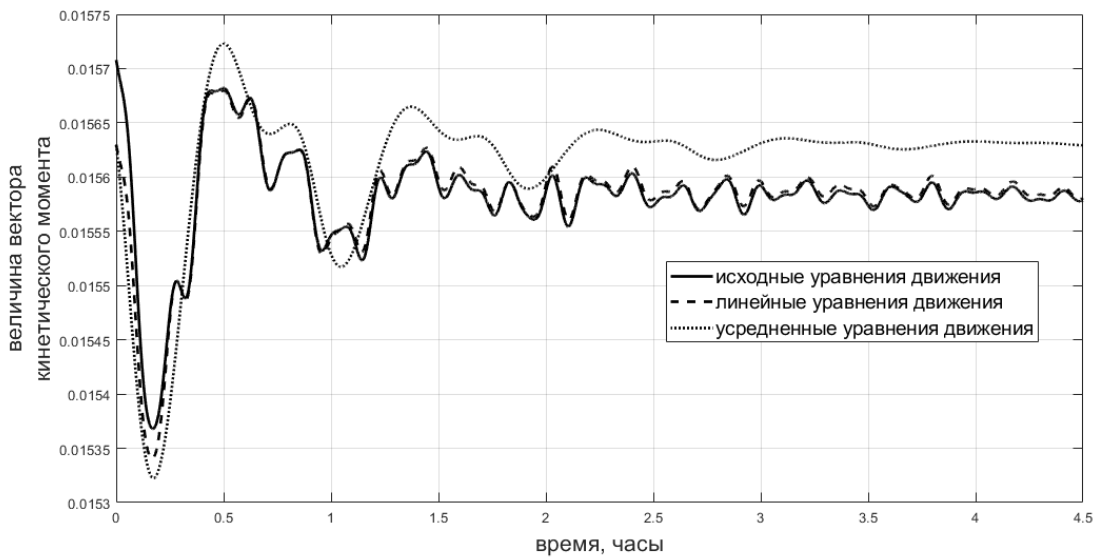


Рис. 5.2.1. Величина вектора кинетического момента

Из Рис. 5.2.1 видно, что величина вектора кинетического момента в целом практически не изменяется. Это связано с рассматриваемым режимом движения – КА уже вышел на вращение вокруг оси максимального момента инерции, и происходит гашение остаточных нутационных колебаний. Отличие усредненных уравнений движения может показаться значительным. Однако, ошибка находится в пределах  $\varepsilon^2$  – точности асимптотического метода. Более того, из-за малого общего изменения величины кинетического момента им можно вовсе пренебречь. Именно это по сути и делается при усреднении по вращению вокруг оси максимального момента инерции, когда частота вращения принимается постоянной и равной исходной.

На Рис. 5.2.2 приведены углы ориентации вектора кинетического момента.

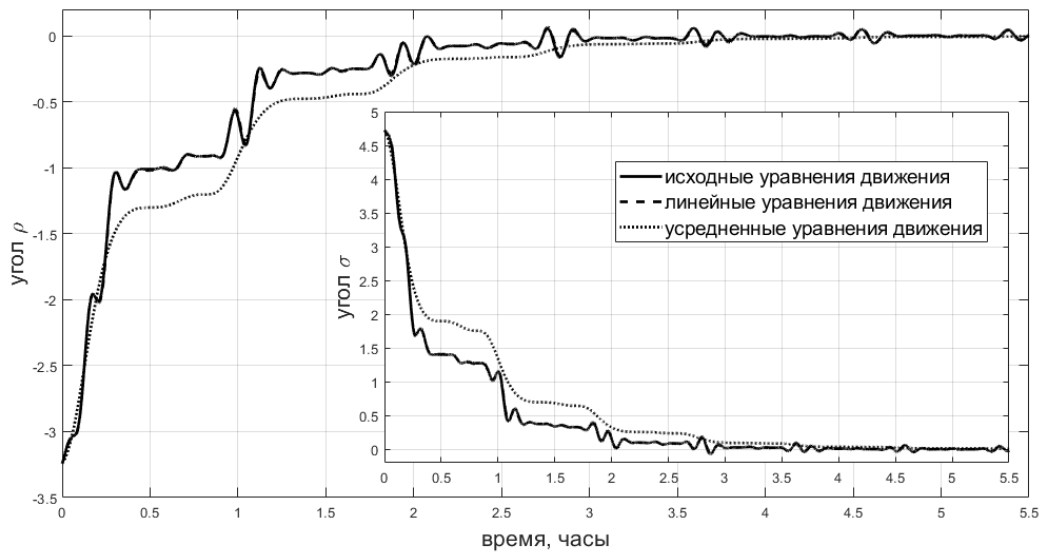


Рис. 5.2.2. Ориентация вектора кинетического момента

Из Рис. 5.2.2 видно, что усредненные уравнения, хотя несколько отличаются от исходных в переходном процессе, в целом верно описывают движение вектора в инерциальном пространстве и показывают время стабилизации аппарата.

Для амплитуд колебаний на Рис. 5.2.3 проводится сравнение с дважды усредненными уравнениями.

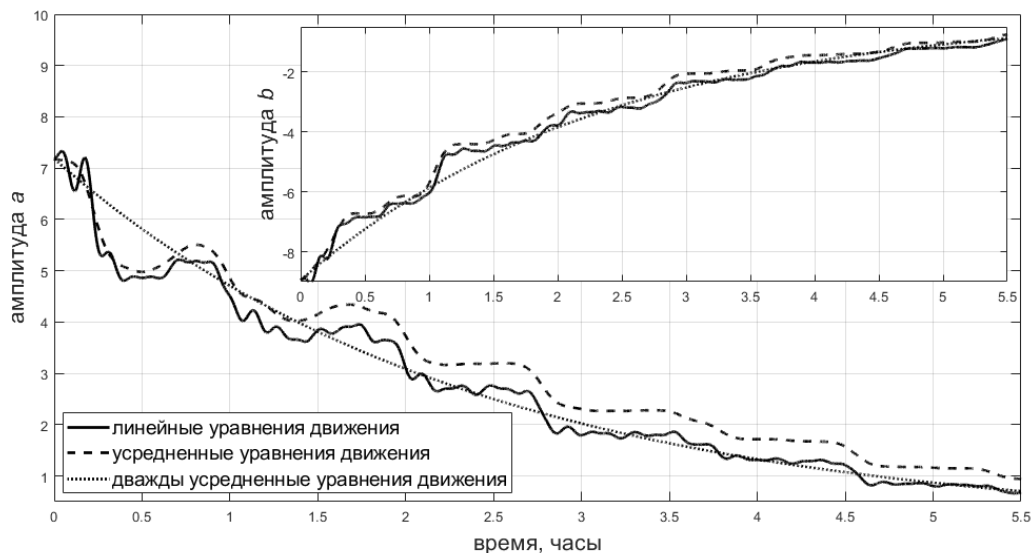


Рис. 5.2.3. Амплитуды колебаний аппарата относительно вектора кинетического момента

Рис. 5.2.3 показывает, что использование максимально простых уравнений (5.2.10) оправданно и позволяет достаточно точно описать поведение амплитуд колебаний. По информации об этих амплитудах можно восстановить угол  $\theta_H$  между осью максимального

момента инерции и вектором кинетического момента (Рис. 5.2.4) согласно соотношениям  $\cos \theta_H = \cos \theta \cos \varphi$  и (5.2.2).

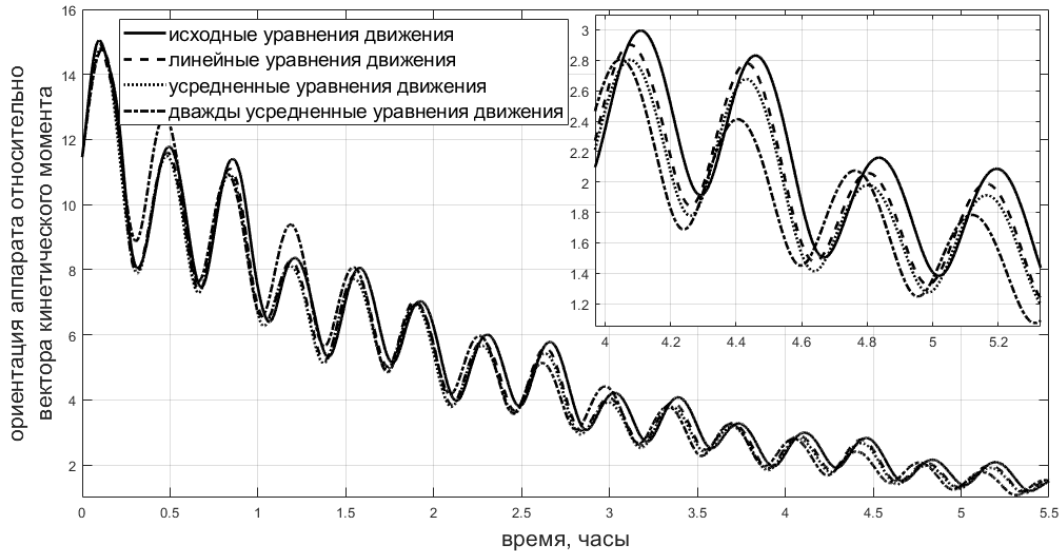


Рис. 5.2.4. Угол между вектором кинетического момента и осью вращения

Из Рис. 5.2.4 видно, что определенные приближенные амплитуды позволяют весьма точно описать изменение угла между осью максимального момента инерции и вектором кинетического момента, показывая переход аппарата во вращение вокруг этой оси. Также заметно небольшое изменение фазы, вызванное тем, что в усредненных уравнениях движения фактически принимается постоянная частота вращения аппарата. Ее незначительное изменение в исходных уравнениях, иллюстрируемое Рис. 5.2.1, приводит к сдвигу фазы на Рис. 5.2.4.

### 5.3. Моделирование движения аппарата под управлением алгоритма Sdot и дополнительных алгоритмов, использующих показания магнитометра

Алгоритм Sdot имеет две основные проблемы. Во-первых, КА может ориентироваться в направлении, обратном направлению на Солнце. Во-вторых, из-за естественного демпфирования снижается скорость вращения, а вместе с ней и точность стабилизации на Солнце. Для устранения первой проблемы используется простой подход, заключающийся в реализации магнитными катушками постоянного дипольного момента. В частности, будем считать, что такой режим активируется на 15 минут, если КА находится в режиме стабилизации в направлении, противоположном направлению на Солнце, в течение 2 минут. В результате КА фактически переходит в режим стабилизации по вектору геомагнитной





$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1.0255 & 0.0014 & -0.0724 \\ 0.0014 & 1.5393 & 0.0019 \\ -0.0724 & 0.0019 & 1.8172 \end{pmatrix} \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Наклонение орбиты  $51.7^\circ$ , высота 550 км. Коэффициент усиления алгоритма Sdot  $10^2 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}/\text{Тл}$ . В этом случае управляющий дипольный момент оказывается порядка нескольких  $\text{А}\cdot\text{м}^2$ . Коэффициент усиления алгоритма демпфирования  $10^6 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}/\text{Тл}^2$ . При таком выборе вклад алгоритмов демпфирования и Sdot оказывается сравнимым. Коэффициент усиления алгоритма закрутки  $10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{Тл}^2$ . Дипольные моменты катушек в любом случае ограничиваются величиной  $10 \text{ А}\cdot\text{м}^2$ . Долгота восходящего узла орбиты выбирается таким образом, что Солнце лежит практически в плоскости орбиты. Таким образом, рассматривается наихудший сценарий, в котором на каждом витке КА заходит в тень Земли и продолжительность пребывания в тени максимальна. На это время алгоритм Sdot отключается в силу отсутствия показаний солнечного датчика. Направление на Солнце измеряется с точностью в два градуса. Угловая скорость КА определяется с точностью  $10^{-4} \text{ с}^{-1}$ . На Рис. 5.3.2 приведен пример работы управления.

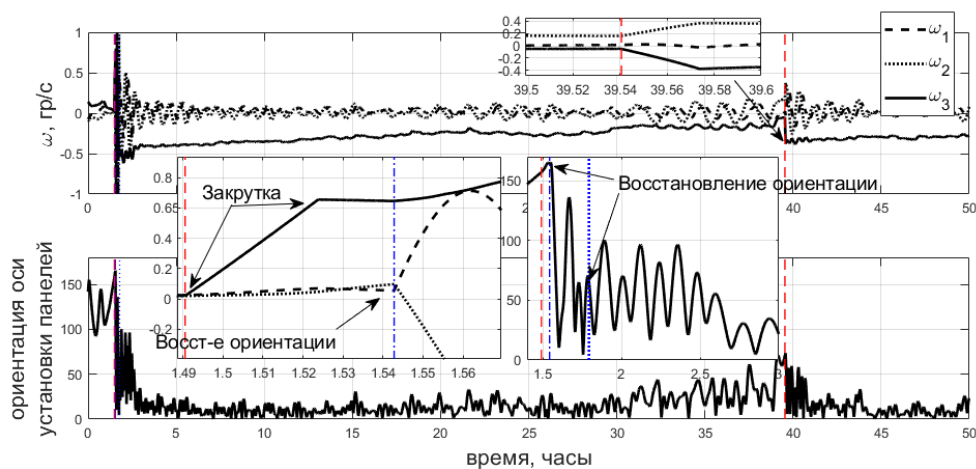


Рис. 5.3.2. Пример движения КА

Точность стабилизации в основном составляет около 20-30 градусов. Однако КА столкнулся с двумя проблемными ситуациями. Во-первых, начальные условия были специально выбраны так, что аппарат был близок к стабилизации в направлении, противоположном Солнцу. Кроме того, начальная угловая скорость была низкой, что затрудняет управление с помощью алгоритма Sdot. В результате алгоритм восстановления ориентации включается примерно через полтора часа. После того, как КА приобрел некоторую скорость вращения, он начал стабилизироваться против Солнца. Включился алгоритм восстановления ориентации. Этот процесс хорошо виден на графике угловой

скорости крупным планом. По мере стабилизации спутника в направлении, противоположном Солнцу, компоненты его угловой скорости, перпендикулярные стабилизированной оси, уменьшаются. Включение схемы восстановления ориентации приводит к увеличению этих компонент. КА начинает отворачиваться от Солнца. Крупный план графика ориентации оси установки панелей показывает процесс восстановления ориентации и последующую стабилизацию в требуемом положении по Солнцу. КА оставался в стабилизированном режиме примерно до 40 часов. Скорость вращения при этом медленно снижалась (за счет искусственно введенного демпфирования). Это, в свою очередь, привело к постепенному ухудшению точности стабилизации. Наконец при слишком низкой скорости вращения включается алгоритм закрутки. Затем спутник восстановил среднюю точность стабилизации в 20-30 градусов.

Наблюдаемая точность стабилизации спутника в 20-30 градусов и до 50 градусов при уменьшении скорости вращения является приемлемой с точки зрения условий освещенности солнечных панелей. Низкая точность стабилизации обусловлена целым рядом факторов. Предлагаемое управление использует необработанные измерения солнечного датчика и датчика угловой скорости. Алгоритм Sdot изначально разработан для осесимметричного КА, в то время как принятый тензор инерции сильно несимметричен. Компенсация возмущений отсутствует, за исключением алгоритмов вращения и демпфирования, которые реализованы в упрощенной логике переключения алгоритмов управления. Эта ситуация описывает компромисс между точностью стабилизации и простотой реализации управления, принятый для режима ориентации при зарядке аккумуляторов.

Два фактора, оказывающих наибольшее влияние на точность стабилизации КА – скорость вращения и проход в тени Земли. На Рис. 5.3.3 показано их влияние.

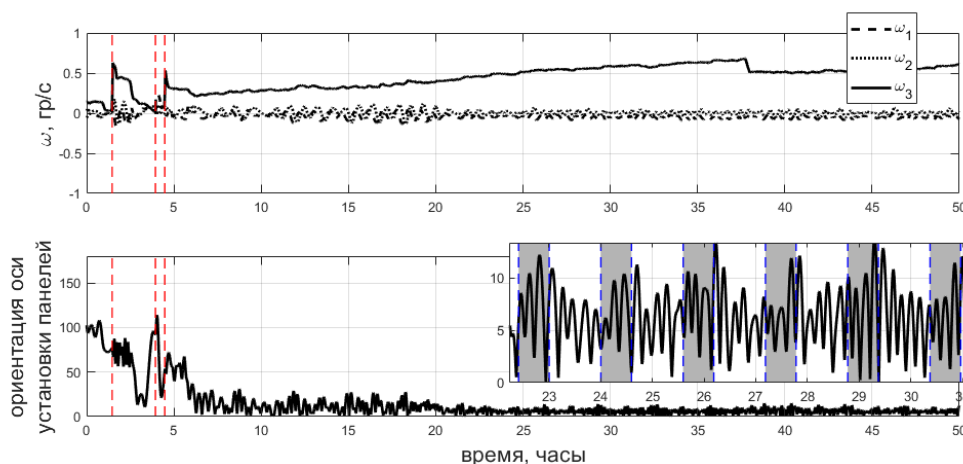


Рис. 5.3.3. Влияние скорости вращения и тени

На Рис. 5.3.3 видна средняя точность стабилизации в 5-10 градусов, что существенно лучше результата, наблюдаемого на Рис. 5.3.2. Это связано с большей скоростью вращения, что приводит к лучшей оценке производной направления на Солнце в управлении (5.1.2). Влияние прохождения в тени показано крупным планом на Рис. 5.3.3. Заштрихованные области соответствуют отсутствующим измерениям солнечного датчика при проходе тени. Управление Sdot в эти периоды не работает. Видно, что средняя точность стабилизации значительно ниже в заштрихованных областях. Это приводит к снижению точности и на освещенной части орбиты. КА после выхода из тени сначала восстанавливает ориентацию, частично утраченную во время прохода в тени. Однако в целом ориентация, как правило, сохраняется во время прохода тени из-за эффекта стабилизации вращением.

Сравнение различных сценариев реализации управления представлено на Рис. 5.3.4 и 5.3.5. Были рассмотрены четыре сценария:

1. Описанная выше логика работы системы управления.
2. Модификация, учитывающая дрейф скорости в положительном направлении (см. Рис. 5.3.2 и 5.3.3). А именно, раскрутка всегда также осуществляется в положительном направлении, даже если в текущий момент КА вращается с отрицательной скоростью (на Рис. 5.3.2 в сценарии 1 производится поддержание отрицательной скорости вращения).
3. Сценарий 1 без захода КА в тень (долгота восходящего узла орбиты повернута на 90 градусов).
4. Сценарий 2 без захода КА в тень.

Для каждого сценария проводилось 500 сеансов моделирования с различными начальными условиями. Начальные углы ориентации были равномерно распределенными между 0 и 180 градусами. Компоненты угловой скорости равномерно распределены в диапазоне от  $-10 \omega_{orb}$  до  $10 \omega_{orb}$ . Случайные начальные условия были выбраны с учетом того факта, что спутник может находиться в направлении, противоположном Солнцу, что требует алгоритма восстановления ориентации.

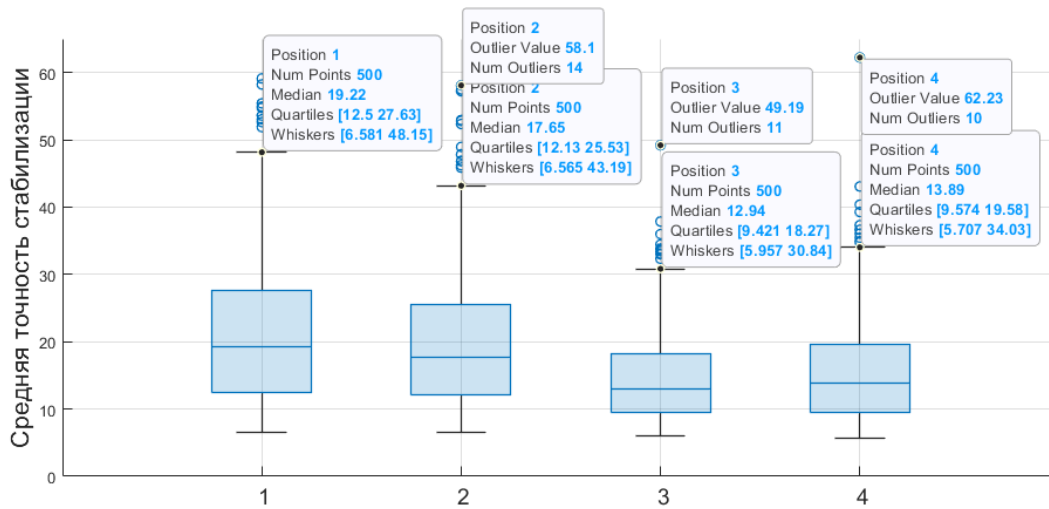


Рис. 5.3.4. Средняя точность ориентации в разных сценариях

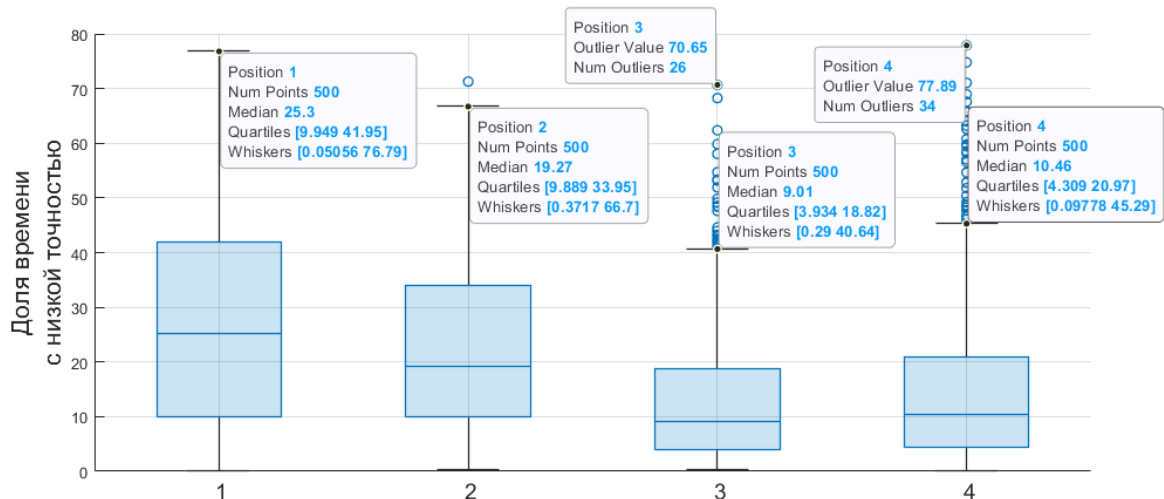


Рис. 5.3.5. Доля времени, когда точность стабилизации была хуже 20°

Используются два показателя эффективности работы управления. Первый – средняя точность стабилизации оси максимального момента инерции КА относительно направления на Солнце. Второй показатель – доля времени, в течение которого эта точность была хуже 20 градусов.

Два первых сценария соответствуют регулярному заходу КА в тень. Как и следовало ожидать, показатели работы системы ориентации в этом случае существенно хуже, чем при постоянном освещении КА. Сравнение сценариев 1 и 2 показывает, что следует учитывать тенденцию скорости вращения КА к смещению в положительном направлении. Сравнение сценариев 3 и 4, однако, демонстрирует обратное. Оказалось, что в сценариях без захода КА в тень его скорость вращения не всегда дрейфует в положительном направлении, поэтому раскрутка с поддержанием текущего направления вращения оказывается предпочтительной.

На Рис. 5.3.4 и 5.3.5 виден ряд отклонений с особенно низкой точностью стабилизации. Это соответствует двум возможным сценариям движения спутника. Во-первых, возможна неоднократная стабилизации в направлении, противоположном Солнцу после отработки алгоритма восстановления ориентации. Это приводит к низкой средней точности, даже несмотря на то, что КА в конечном итоге оказался в требуемом положении. Во-вторых, КА может выйти на режим стабилизации с относительно низкой скоростью вращения и одновременно с относительно высокой амплитудой колебаний оси вращения. Эти колебания медленно подавляются алгоритмом Sdot с постепенным повышением точности стабилизации. В целом, наблюдаемая эффективность работы системы управления приемлема для режима зарядки аккумуляторов.

#### **5.4. Обеспечение однозначной стабилизации аппарата, используя только показания солнечного датчика**

Рассмотрим снова задачу доработки управления (5.1.1), обеспечивающей поддержание вращения КА вокруг направления на Солнце. При этом единственный источник информации об ориентации – солнечный датчик, выдающий направление на Солнце в связанной с КА системе координат. Выявить вращение вокруг этого направления с помощью солнечного датчика невозможно. Также модификация должна обеспечивать однозначность стабилизации КА в направлении Солнца.

##### *Дополнительные алгоритмы управления и логика переключения между ними*

Используем следующее соображение для обеспечения закрутки КА вокруг направления на Солнце. При движении аппарата под управлением алгоритма Sdot в номинальном режиме происходит вращение связанной системы относительно направления на Солнце вокруг одной оси. Используем инерциальную систему  $OS$ , третья ось которой направлена на Солнце, ориентация двух других осей выбирается произвольным образом. Для определенности будем считать, что третья ось КА является осью максимального момента инерции. Тогда в номинальном режиме, обеспечиваемом алгоритмом Sdot, оси  $OS_3$  и  $Ox_3$  совпадают, и происходит вращение вокруг их направления.

Далее, рассмотрим алгоритм раскрутки аппарата вокруг третьей оси (4.1.4)

$$\mathbf{m} = k'(B_{x_2}, -B_{x_1}, 0), \quad (5.4.1)$$

Под действием управляющего дипольного момента (5.4.1) по третьей оси КА создается механический момент  $k'B_0(B_{x_1}^2 + B_{x_2}^2) > 0$ , который и обеспечивает закрутку. Проблемой

является невозможность определить  $B_{kx}$  в связанной системе, так как отсутствует необходимая информации об ориентации КА, а значит нет матрицы перехода между инерциальной системой, в которой поле может быть вычислено по модели IGRF, и связанной системой, в которой требуется задать управляющий момент. Также отсутствуют показания магнитометра, которые могли бы дать значения  $B_{kx}$  напрямую в связанной СК. Предположим, однако, что в результате работы алгоритма Sdot аппарат находится в номинальном режиме вращения вокруг оси  $OS_3$  и скорость вращения равна  $\omega_0$ . Тогда компоненты вектора геомагнитной индукции в связанной системе  $B_{kx}$  задаются через его компоненты в инерциальной системе  $B_k$  как

$$B_{x1} = B_1 \cos \zeta + B_2 \sin \zeta, \quad B_{x2} = -B_1 \sin \zeta + B_2 \cos \zeta,$$

где угол поворота между связанной и инерциальной системами задается как  $\zeta = \omega_0 t + \zeta(0)$ .

Имея на борту дополнительные датчики ориентации, можно было бы определить угол  $\zeta$ , равно как и скорость вращения  $\omega_0$ . При наличии только солнечного датчика эта информация недоступна. Тем не менее, полагая  $\zeta(0) = 0$  и предполагая, что аппарат близок к вращению с некоторой скоростью  $\omega_0$ , будем применять алгоритм закрутки

$$\mathbf{m} = k'(-B_1 \sin \omega_0 t + B_2 \cos \omega_0 t, -B_1 \cos \omega_0 t - B_2 \sin \omega_0 t, 0). \quad (5.4.2)$$

Можно надеяться, что в случае близости вращения требуемому этот алгоритм будет поддерживать вращение КА вокруг оси максимального момента инерции. При этом, опираясь на предшествующий анализ работы алгоритма Sdot, можно ожидать выхода КА на вращение. Однако сделать предположение о скорости вращения  $\omega_0$  не представляется возможным. Ее приходится выбирать произвольно.

Есть, однако, опасность, что КА не только не выйдет на вращение со скоростью, близкой к заданной  $\omega_0$ , но вообще не выйдет на режим вращения вокруг оси максимального момента инерции. Такая ситуация наблюдается, если алгоритм Sdot включается при относительно низкой скорости вращения аппарата, в частности, если она близка к орбитальной. Фактически, алгоритм Sdot обеспечивает некоторое демпфирование угловой скорости КА и выход на заданный режим ориентации. Если исходная скорость вращения мала, выход на вращение вокруг направления на Солнце происходит со скоростью, не позволяющей обеспечить стабилизацию КА в реалистичных условиях. Чтобы обеспечить предварительную раскрутку аппарата, используем алгоритм вращения

$$\mathbf{m} = k'' \frac{\mathbf{S}_k - \mathbf{S}_{k-1}}{\Delta t}. \quad (5.4.3)$$

Этот алгоритм закрутки используется первым и работает в течение установленного времени, в рассматриваемом случае – одного часа. При этом алгоритм прекращает работу, если оценка скорости вращения  $|\boldsymbol{\omega}| \sim |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}| \approx |\mathbf{S}_k - \mathbf{S}_{k-1}| / \Delta t$  больше некоторой заданной величины, в рассматриваемом случае  $10^{-2} \text{ с}^{-1}$  (примерно десятикратная орбитальная скорость). Также закрутка останавливается, если аппарат оказывается вблизи ориентации в обратном от Солнца направлении. Алгоритм активируется снова, если в течение часа аппарат не выходит на режим ориентации на Солнце (точность стабилизации хуже  $20^\circ$ ), и работает в течение получаса. Описанные меры позволяют избежать ситуации, когда аппарат выходит на движение с малой скоростью по всем трем осям.

Наконец, несколько особняком стоит алгоритм нарушения стабилизации. Он активируется, если аппарат находится в положении, обратном направлению на Солнце, в течение более двух минут. В этом случае реализуется постоянный дипольный момент по третьей оси ССК в течение 15 минут,

$$\mathbf{m} = (0, 0, m_0). \quad (5.4.4)$$

По сути КА переходит в режим стабилизации третьей оси по вектору геомагнитной индукции, что нарушает стабилизацию в обратном от Солнца направлении.

Таким образом, имеем три алгоритма управления. Первый представляет собой связь исходного алгоритма  $\dot{\mathbf{S}}$  и алгоритма искусственной закрутки (5.4.2). Вторым алгоритмом (5.4.3) обеспечивается раскрутка аппарата. Третий алгоритм (5.4.4) обеспечивает выход из нежелательной ориентации от Солнца. Логика переключения между алгоритмами, описанная выше, также приведена на Рис. 5.4.1.



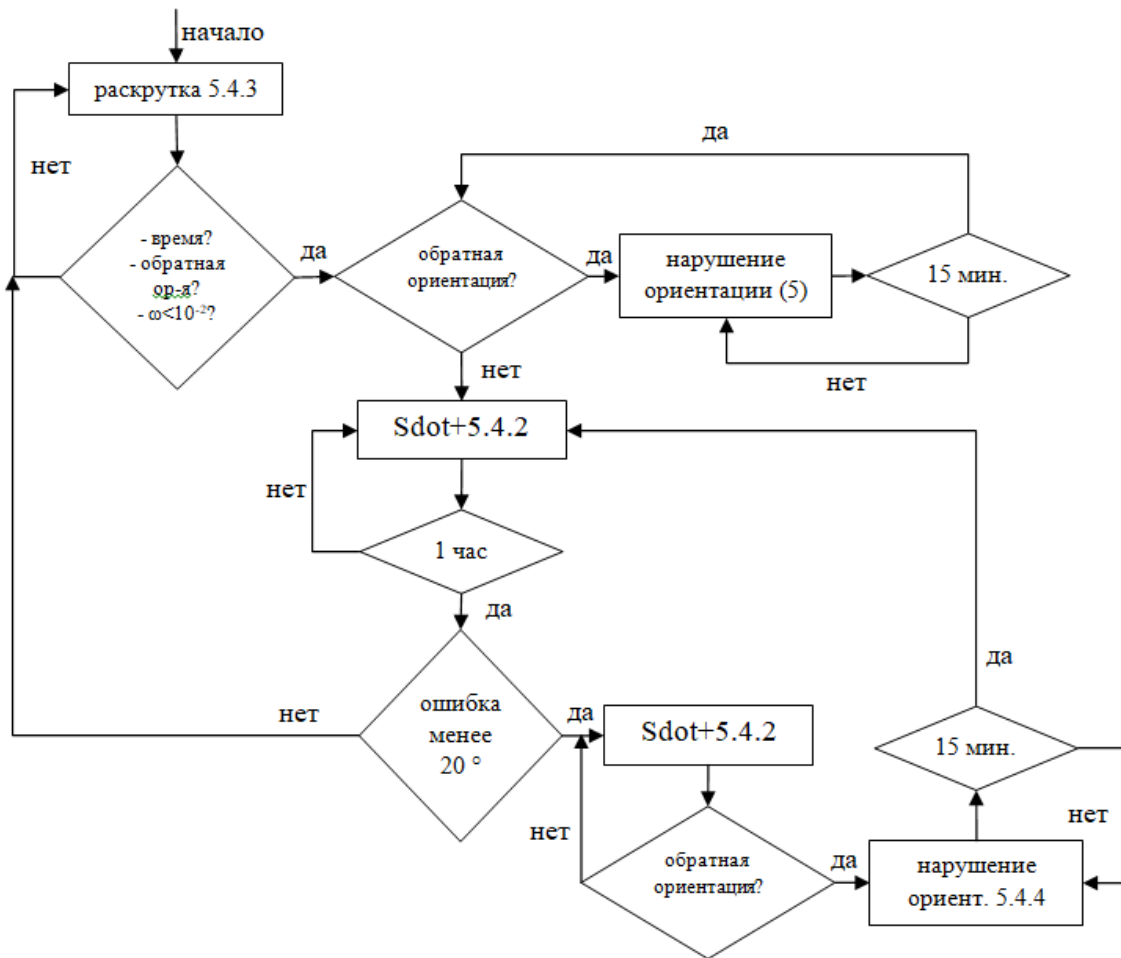


Рис. 5.4.1. Блок-схема алгоритма управления

Исследование работоспособности приведенной связи алгоритмов потребовало проведения значительного числа сеансов моделирования. Циклограмма на Рис. 5.4.1 во многом опирается на заданные интервалы работы различных алгоритмов. Это связано с тем, что солнечный датчик предоставляет весьма ограниченный объем информации о скорости и ориентации КА, в том числе нет возможности выявить особенно важную скорость вращения вокруг направления на Солнце. Из-за этого нет возможности задать условия переключения между алгоритмами на основе текущего состояния КА. Вместо этого, выбраны фиксированные интервалы работы. В некоторых случаях их оказывается достаточно, в некоторых приходится несколько раз пройти ветки циклограммы со вспомогательными алгоритмами. Большое значение имеют и начальные условия движения КА, определяющие, в какое положение он попадет (на Солнце или от Солнца) и какова будет скорость вращения. Наконец, алгоритм (5.4.2) в принципе построен на предположении, что КА выйдет на некоторое вращение, которое это управление способно поддерживать.

### *Сценарии моделирования для различных орбит и моментов инерции КА*

В моделировании использовались несколько сценариев. Во-первых, эффективность работы любого алгоритма, основанного на вращении, зависит от соотношений между моментами инерции. Чем существеннее максимальный момент отличается от двух других, тем выше точность стабилизации. В случае алгоритмов, непосредственно управляющих скоростью и осью вращения, это требование смягчается, и зачастую можно поддерживать вращение и вокруг оси минимального момента инерции. В случае алгоритма Sdot приходится полагаться на естественное стремление КА выйти на вращение вокруг оси максимального момента инерции. Чтобы уяснить влияние соотношений между моментами инерции, в моделировании использовались два тензора: тензор (1) с диагональными моментами 18.3, 29.3, 31.4 кг·м<sup>2</sup>, и тензор (2) с моментами 18.3, 19.3, 31.4 кг·м<sup>2</sup>. Таким образом, выбраны два варианта аппаратов, близких к осесимметричным. В случае (1) близки два больших момента, что делает этот сценарий неблагоприятным. В случае (2), наоборот, максимальный момент инерции существенно превалирует над двумя другими, что позволяет ожидать лучших показателей работы алгоритма, основанного на вращении КА.

Еще один существенный фактор, влияющий на результат работы управления – ориентация орбиты. В силу свойств вектора геомагнитной индукции, движение на приполярной орбите может иметь существенные особенности. Вместе с тем, именно на такие орбиты выводится значительное число околоземных КА, в частности, аппаратов дистанционного зондирования. Поэтому моделирование проводилось для двух наклонений орбиты – 57 и 97 градусов, то есть для типичной низкой орбиты (НО) и солнечно-синхронной орбиты (ССО). Также рассматривались два варианта ориентации орбиты относительно Солнца. В одном случае вектор направления на Солнце лежит практически в плоскости орбиты, так что на каждом витке КА оказывается в тени Земли, причем продолжительность пролета в тени близка к максимальной. Это – наименее благоприятная конфигурация, так как в тени управление не работает. Второй вариант ориентации орбиты соответствует повороту долготы восходящего угла на 90 градусов. КА не попадает в тень, а в случае ССО направление на Солнце оказывается практически перпендикулярным к плоскости орбиты.

Для различных комбинаций тензора инерции, типа орбиты и ее ориентации было проведено 160 расчетов моделирования движения КА со случайно заданными начальными данными. При этом начальная скорость во всех случаях близка к орбитальной, что требует использования первоначального этапа раскрутки (5.4.3).

### ***Параметры аппарата и моделей внешней среды***

Приведем используемые в моделировании параметры:

- Высота орбиты 550 км, эксцентриситет 0.01;
- Направление на Солнце в системе  $OX$  задано углами  $\rho$  и  $\sigma$ , равными 78 и 5 градусам. Первый угол – между направлением на Солнце и осью  $OX_3$ , второй угол задает поворот направления на Солнце вокруг оси  $OX_3$ , отсчитываемый от оси  $OX_1$ . Таким образом, направление на Солнце близко к оси  $OX_1$ .
- Коэффициенты усиления:
  - алгоритм Sdot  $k = 2 \cdot 10^3 \text{ А} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}$
  - алгоритм раскрутки (5.4.3)  $k'' = 2 \cdot 10^4 \text{ А} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}$  (раскрутка осуществляется аналогично Sdot, но с десятикратным коэффициентом усиления)
  - алгоритм поддержания вращения (5.4.2)  $k' = 10 \text{ А} \cdot \text{м}^2$  (это, фактически, характерная величина дипольных моментов катушек)
  - алгоритм нарушения стабилизации  $m_0 = 10 \text{ А} \cdot \text{м}^2$  (непосредственно величина дипольного момента)
  - алгоритм искусственного демпфирования  $k_d = 2 \cdot 10^2 \text{ А} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}$
- Вычисление аэродинамического момента:
  - спутник – параллелепипед со сторонами 1.1, 1.8, 0.2 см (такая форма отвечает упрощенной конфигурации КА с солнечными панелями);
  - центр масс смещен относительно центра давления на 4, 6 и 8 см вдоль осей связанной системы;
  - плотность атмосферы  $1.8 \cdot 10^{-13} \text{ кг/м}^3$  (средняя солнечная активность);
- Остаточный дипольный момент  $2 \cdot 10^{-3} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ , имеющий постоянную и нормально распределенную компоненты;
- Точность определения направления на Солнце 1 градус;
- Время моделирования 200 часов, метод Рунге-Кутты 4 порядка с шагом 1 с.

### ***Результаты моделирования***

На Рис. 5.4.2-5.4.4 приведен результат расчетов со случайными начальными данными для разных сценариев.

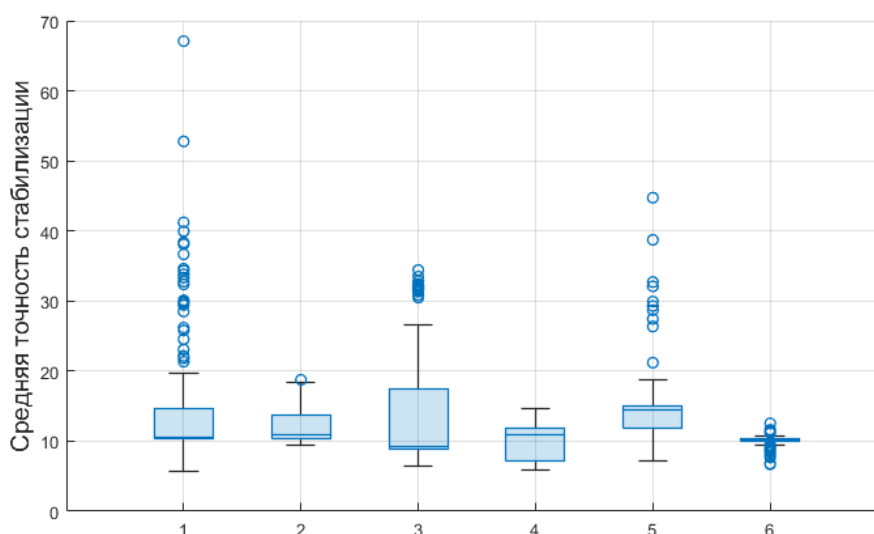


Рис. 5.4.2. Средняя точность стабилизации

На Рис. 5.4.2 приведена средняя точность стабилизации на второй половине интервала интегрирования. То есть, отсекается начальный этап работы алгоритмов раскрутки и, возможно, парирования стабилизации КА в направлении, обратном направлению на Солнце. Номерами обозначены следующие сценарии:

1. Тензор инерции (1), ССО, Солнце практически в плоскости орбиты
2. Тензор инерции (1), ССО, орбита перпендикулярна направлению на Солнце
3. Тензор инерции (2), ССО, Солнце практически в плоскости орбиты
4. Тензор инерции (2), ССО, орбита перпендикулярна направлению на Солнце
5. Тензор инерции (1), НО, Солнце практически в плоскости орбиты
6. Тензор инерции (2), НО, орбита перпендикулярна направлению на Солнце

Сценарии можно разбить на следующие пары.

Сценарии 1 и 2 соответствуют движению аппарата с тензором инерции, плохо подходящим для алгоритма *Sdot*. Выявляется зависимость работоспособности управления от входа КА в тень Земли на солнечно-синхронной орбите. Согласно Рис. 5.4.2, вход КА в тень оказывает существенное влияние на точность стабилизации. В значительном числе случаев сценария 1 средняя точность стабилизации оказывается низкой, что вызвано частой потерей ориентации или закрутки. Если же КА не входит в тень Земли, таких ситуаций практически не наблюдается и КА в среднем стабилизируется в направлении на Солнце с точностью до  $20^\circ$  несмотря на неудачное распределение масс.

Сценарии 3 и 4 можно сравнить с 1 и 2 для уяснения зависимости эффективности работы *Sdot* от компоновки КА. Пары 1-3 и 2-4 соответствуют одинаковым орбитам, но в

сценариях 3 и 4 КА должен вращаться вокруг оси ярко выраженного максимального момента в отличие от сценариев 1 и 2. По результатам сценария 3 видно, что даже в случае захода КА в тень Земли на каждом витке ориентация в целом поддерживается на уровне не хуже 30 градусов. Это связано с тем, что практически осесимметричный аппарат с ярко выраженным максимальным моментом инерции успешно преодолевает периоды неуправляемого движения в тени за счет поддержания стабилизации собственным вращением. Аналогично, сценарий 4 показывает лучшую точность, чем сценарий 2, хотя выигрыш в эффективности работы здесь не столь существенный.

Наконец, сценарии 5 и 6 соответствуют движению на низкой орбите с наклоном 57 градусов. Сравнение сценариев 2 и 5 (неудачная компоновка КА, аппарат не входит в тень, отличается наклоном орбиты) показывает, что солнечно-синхронная орбита существенно более благоприятна для работы алгоритма Sdot. Если же аппарат имеет удачную компоновку (сценарии 4 и 6), разница практически не наблюдается.

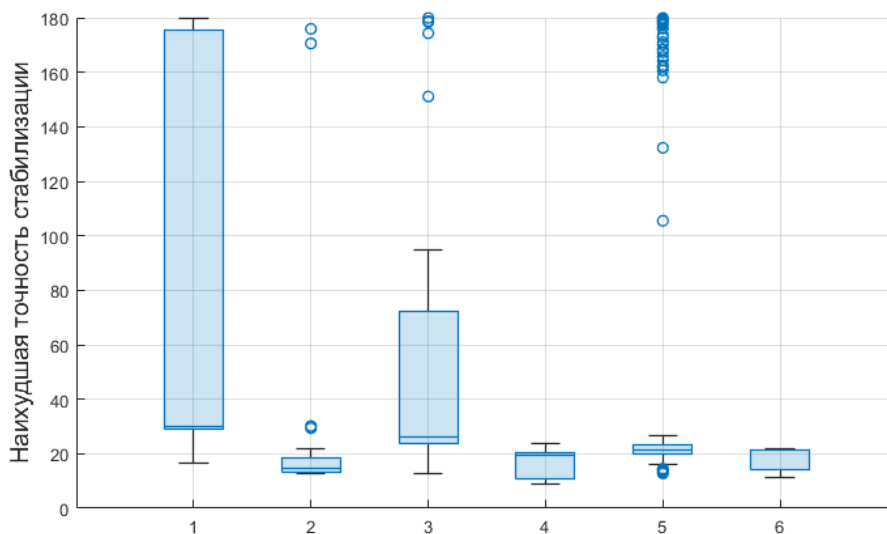


Рис. 5.4.3. Максимальное отклонение от направления на Солнце

На Рис. 5.4.3 приведено максимальное отклонение от направления на Солнце, наблюдавшееся на второй половине интервала моделирования. В сценарии 1 на солнечно-синхронной орбите полная потеря ориентации, пусть и кратковременная, оказывается неизбежной в половине случаев. Также потеря ориентации очень часто наблюдается для орбиты наклоном 57 градусов, в сценарии 5, соответствующем неудачной компоновке КА. В целом же выводы, сделанные на основе Рис. 5.4.2, сохраняются.

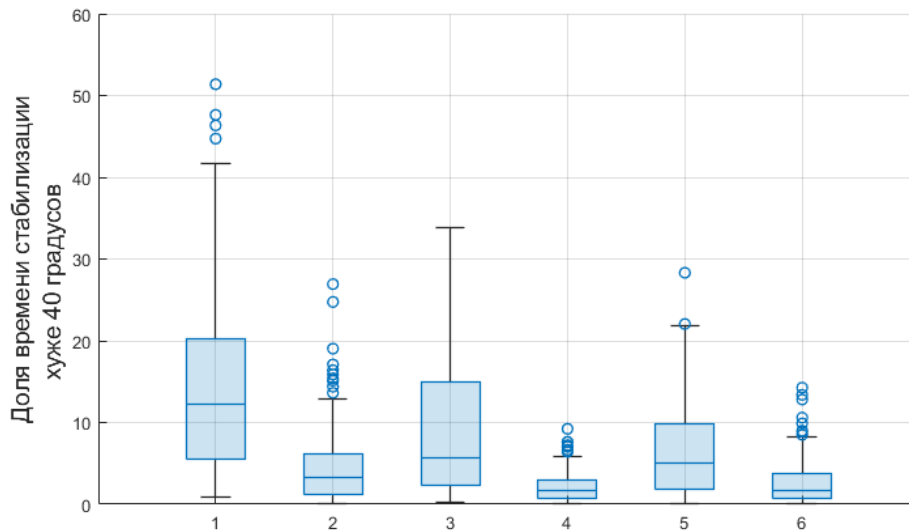


Рис. 5.4.4. Доля времени в стабилизации с точностью хуже 40 градусов

Наконец, на Рис. 5.4.4 приведена доля времени, в течение которого КА был отвернут от направления на Солнца более чем на 40 градусов, что можно считать неприемлемым для эффективного заряда батарей. Оказывается, даже в самом неблагоприятном сценарии 1 большую часть времени КА проводит в ориентации, пригодной для заряда батарей. Если же ориентация орбиты благоприятна (сценарии 2, 5), то более 80% времени можно ожидать требуемой ориентации. В случае благоприятной компоновки КА и ориентации орбиты (сценарии 4, 6), КА практически все время проводит в нужной ориентации.

На Рис. 5.4.5 приведен пример частой потери ориентации в Сценарии 1.

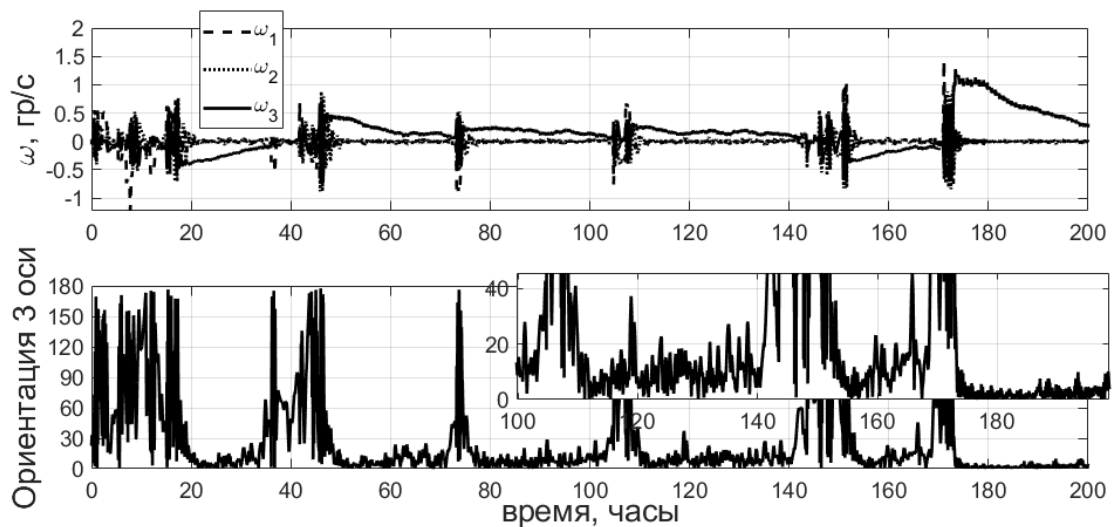


Рис. 5.4.5. Работа алгоритма Sdot в неблагоприятной ситуации

По Рис. 5.4.5 видно, что КА регулярно теряет ориентацию, что приводит к включению алгоритма (5.4.4) и иногда также алгоритма (5.4.3) из-за потери скорости вращения.

На Рис. 5.4.6 приведен пример моделирования в наиболее благоприятном сценарии 4.

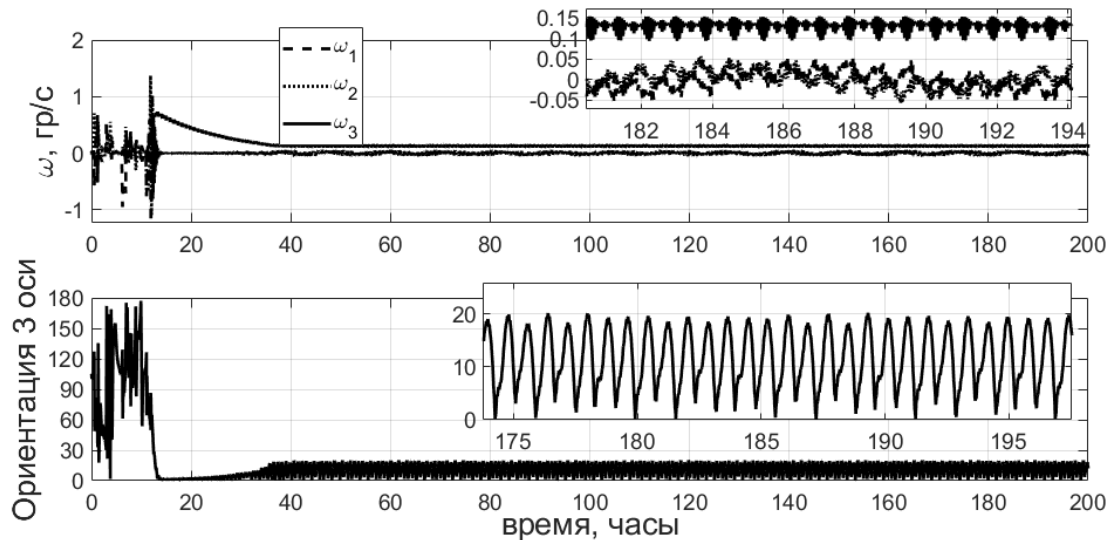


Рис. 5.4.6. Работа алгоритма Sdot в благоприятном сценарии

На Рис. 5.4.6 видно, что КА уверенно вышел на режим вращения со скоростью около 0.1 градуса в секунду и точностью стабилизации оси вращения около 20 градусов. Переходный процесс при этом занял около 12 часов, хотя по циклограмме на Рис. 5.4.1 на начальный этап раскрутки отводится час или полтора. КА провел несколько сеансов начального этапа управления, прежде чем вышел на вращение. Отметим, что большей точности стабилизации можно добиться, повысив скорость закрутки. Управление этой скоростью, однако, напрямую невозможно с помощью алгоритма (5.4.2).

### Заключение

В Главе 5 рассмотрено движение КА в режиме ориентации на Солнце с помощью алгоритма Sdot. Исследовано движение аппарата вблизи требуемой ориентации. Введены новые эволюционные переменные, свободные от вырождения в требуемой ориентации и включающие в себя амплитуды колебаний оси максимального момента инерции относительно вектора кинетического момента. Получено решение усредненных эволюционных уравнений в квадратурах. Предложены две схемы доработки алгоритма Sdot, исследованные с помощью численного моделирования.

## Глава 6. Обеспечение трехосной ориентации с помощью магнитной системы

Трехосная ориентация КА с помощью магнитной системы представляется наиболее проблематичной как с теоретической, так и с инженерной точек зрения. Ограничение на направление управляющего момента должно преодолевать без опоры на дополнительные динамические принципы, как это делалось в Главах 3 и 4, но режим стабилизации при этом не является специфически ограниченным, как в Главах 2 и 5.

### 6.1. Выбор параметров управления с обратной связью

Наиболее распространенным подходом в реализации трехосной магнитной ориентации является использование простого управления с обратной связью

$$\mathbf{m} = -k_{\omega} \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} - k_a \mathbf{B} \times \mathbf{S}, \quad (6.1.1)$$

где

$$\mathbf{S} = (a_{23} - a_{32}, a_{31} - a_{13}, a_{12} - a_{21}). \quad (6.1.2)$$

Вектор  $\mathbf{S}$  задает отклонение текущей ориентации КА от требуемой. Отметим, что построение закона управления (6.1.1) обычно основывается на функции Ляпунова. Используем кандидат в функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + k_a \sum_{i=1}^3 (1 - a_{ii}).$$

Здесь матрица  $\mathbf{A}$  и ее компоненты  $a_{ii}$  задают ориентацию КА относительно некоторой инерциальной системы координат. Положению равновесия соответствует  $\boldsymbol{\omega} = 0$ ,  $\mathbf{A} = \text{diag}(1,1,1)$ , то есть совпадение осей инерциальной и связанной систем. Найдем производную этой функции в силу уравнений движения (1.3.2)-(1.3.8)

$$\frac{dV}{dt} = \boldsymbol{\omega} (\mathbf{M}_{\text{уп}} + \mathbf{M}_{\text{зуп}} + k_a \mathbf{S}). \quad (6.1.3)$$

Потребуем отрицательность производной функции везде кроме положения равновесия,

$$\frac{dV}{dt} = -k_{\omega} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}. \text{ Отсюда имеем}$$

$$\mathbf{M}_{\text{уп}} + k_a \mathbf{S} = -k_{\omega} \boldsymbol{\omega},$$

так как  $\boldsymbol{\omega} \mathbf{M}_{\text{зуп}} = 0$ . В результате получаем выражение для управляющего момента

$$\mathbf{M}_{\text{уп}} = -k_{\omega} \boldsymbol{\omega} - k_a \mathbf{S}. \quad (6.1.4)$$

Выражение (6.1.4) задает механический, а не дипольный момент. Стандартная схема получения дипольного момента на основе (6.1.4) – реализация только перпендикулярной



локальному вектору геомагнитной индукции компоненты. То есть, вместо управляющего момента, определяемого выражением (6.1.4), используется момент

$$\mathbf{M} = (\mathbf{b} \times \mathbf{M}_{упр}) \times \mathbf{b},$$

что и приводит к выражению (6.1.1) для дипольного момента. Этот дипольный момент, однако, уже не доставляет системе тех же свойств асимптотической устойчивости, что и механический момент (6.1.4). Покажем, что этот закон управления, тем не менее, позволяет добиться трехосной ориентации спутника в инерциальном пространстве и найдем ограничения, позволяющие его реализовать.

Перейдем к исследованию динамики спутника под управлением магнитной системы ориентации, реализующей закон управления (6.1.1). Получить конкретные результаты в общем случае движения аппарата представляется затруднительным, поэтому выделим несколько режимов движения и основных допущений, которые позволят получить представление о работе алгоритма (6.1.1) на всем цикле управления.

Рассмотрим быстрое вращение аппарата. Запишем закон управления (6.1.1) в виде

$$\mathbf{m} = -k'_\omega \mathbf{B} \times \bar{\boldsymbol{\omega}} - k'_a \mathbf{B} \times \mathbf{S}, \quad (6.2.1)$$

где введена безразмерная скорость  $\bar{\boldsymbol{\omega}} = \omega_{опо} \bar{\boldsymbol{\omega}}$  и, соответственно, новый коэффициент усиления демпфирующей части. Предположим теперь, что коэффициенты  $k'_\omega$  и  $k'_a$  имеют один порядок (их безразмерное отношение имеет порядок единицы, размерность обоих коэффициентов Н·м/Тл<sup>2</sup>). Вопрос наилучшего выбора этих коэффициентов будет рассмотрен далее. При таких предположениях при быстрых вращениях демпфирующая компонента момента превалирует над позиционной, так как  $|\bar{\boldsymbol{\omega}}| \gg 1$ . Момент тогда приближенно можно представить в виде

$$\mathbf{m} = -k'_\omega \mathbf{B} \times \bar{\boldsymbol{\omega}}.$$

Однако в этом случае имеем дело с движением аппарата под управлением алгоритма -Vdot. Динамика спутника в этом случае и работа алгоритма были ранее рассмотрены во второй главе. Перейдем поэтому к следующему выделенному этапу движения аппарата.

Основываясь на результатах, полученных во второй главе, можно утверждать гашение угловой скорости аппарата до величины порядка орбитальной,  $|\bar{\boldsymbol{\omega}}| = O(1)$ . В этом случае пренебрегать позиционной частью механического момента будет уже некорректно. Поэтому рассмотрим движение спутника с законом управления (6.1.1), но будем предполагать, что

создаваемый при этом механический момент мал. В этом случае можно провести рассуждения, аналогичные проведенным во второй главе.

Для исследования динамики спутника будем использовать эволюционные уравнения (1.3.12), а сам спутник будем считать осесимметричным. Далее необходимо провести усреднение правой части уравнений. Чтобы получить усредненные уравнения, необходимо вычислить выражения  $\langle M_{Lk} \rangle_{u,\varphi,\psi}$ ,  $\langle M_{Lk} \cos \psi \rangle_{u,\varphi,\psi}$  и  $\langle M_{Lk} \sin \psi \rangle_{u,\varphi,\psi}$ . Однако момент представляет собой сумму позиционной и демпфирующей компонент. Результат усреднения демпфирующей компоненты был получен во второй главе. Покажем, что позиционная компонента не оказывает эволюционного влияния на демпфирование угловой скорости аппарата, то есть  $\langle (\mathbf{S} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \rangle = 0$ .

Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие  $\langle \mathbf{S} \rangle_{\psi,\varphi} = 0$ . Очевидно,  $\mathbf{S}_L = \mathbf{A} \mathbf{S}_x$ , причем матрица перехода между инерциальной и связанной системой задается выражением  $\mathbf{D} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T$ . Это приводит к усреднению выражений вида  $a_{ij} a_{kl}$  по быстрым углам  $\psi$  и  $\varphi$ . Для первой компоненты  $\mathbf{S}_L$  имеем

$$S_{L1} = q_{32} (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) + q_{33} (a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31}) + q_{22} (a_{13} a_{21} - a_{11} a_{23}) + \\ + q_{23} (a_{13} a_{31} - a_{11} a_{33}) + q_{12} (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) + q_{13} (a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32}).$$

Учитывая выражения для  $a_{ij}$  (1.3.10) и для  $q_{ij}$  (1.3.9), после усреднения по  $\psi$  получаем  $\langle S_{L1} \rangle_{\psi} = q_{12} \sin \varphi \sin \theta$  и окончательно  $\langle S_{L1} \rangle_{\psi,\varphi} = 0$ . Аналогичные выкладки нетрудно провести для  $S_{L2}$  и  $S_{L3}$ . В результате получаем нулевое эволюционное влияние позиционной части механического момента, то есть он не оказывает воздействия на демпфирование угловой скорости. Это позволяет перейти к следующему режиму движения спутника и исследованию устойчивости.

### ***Исследование устойчивости***

После того, как было показано, что закон управления (6.1.1) приводит к демпфированию угловой скорости спутника, коэффициенты  $k'_\omega$  и  $k'_a$  теперь могут быть разного порядка,  $|\bar{\omega}| = o(1)$ , а спутник обладает трехосным тензором инерции. Запишем уравнения движения (1.3.2)-(1.3.6) в безразмерном виде, перейдя к дифференцированию по аргументу широты и безразмерному моменту,

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{\omega}_1}{du} &= \frac{(B-C)}{A} \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_3 + \varepsilon \bar{M}_{x1}, \\
\frac{d\bar{\omega}_2}{du} &= -\frac{(A-C)}{B} \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_3 + \varepsilon \frac{A}{B} \bar{M}_{x2}, \\
\frac{d\bar{\omega}_3}{du} &= -\frac{(B-A)}{C} \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 + \varepsilon \frac{A}{C} \bar{M}_{x3}, \\
\frac{d\alpha}{du} &= \frac{1}{\cos \beta} (-\bar{\omega}_3 \sin \gamma + \bar{\omega}_2 \cos \gamma), \\
\frac{d\beta}{du} &= \bar{\omega}_2 \sin \gamma + \bar{\omega}_3 \cos \gamma, \\
\frac{d\gamma}{du} &= \bar{\omega}_1 - \operatorname{tg} \beta (\bar{\omega}_2 \cos \gamma - \bar{\omega}_3 \sin \gamma),
\end{aligned} \tag{6.2.2}$$

где  $\varepsilon = k'_a B_0'^2 / A$  – малый параметр. Для того чтобы сделать уравнения (6.2.2) удобными для анализа методами усреднения, приведем все переменные к одному порядку величины (углы имеют порядок единицы, тогда как угловые скорости малы), введя соотношение  $\bar{\omega} = \varepsilon' \mathbf{w}$ , где  $\varepsilon' = |\bar{\omega}(0)|$ . Далее, вводя вектор  $\mathbf{x} = (\alpha, \beta, \gamma, w_1, w_2, w_3)$ , запишем уравнения (6.2.2) в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, u, \varepsilon, \varepsilon', \mu). \tag{6.2.3}$$

Здесь

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \beta} (-w_3 \sin \gamma + w_2 \cos \gamma) \\ w_2 \sin \gamma + w_3 \cos \gamma \\ w_1 - \operatorname{tg} \beta (w_2 \cos \gamma - w_3 \sin \gamma) \\ \frac{(B-C)}{A} w_2 w_3 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2} \bar{M}_{1x} \\ -\frac{(A-C)}{B} w_1 w_3 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2} \frac{A}{B} \bar{M}_{2x} \\ -\frac{(B-A)}{C} w_1 w_2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2} \frac{A}{C} \bar{M}_{3x} \end{pmatrix}.$$

Предположим пока, что  $\varepsilon/\varepsilon'^2 = O(1)$ , чтобы исключить появление в системе двух малых параметров, существенно усложняющих анализ [164]. Вид уравнения (6.2.3) позволяет использовать для его анализа формальную процедуру усреднения по явно входящему аргументу широты [132]. Однако в силу того, что усредненные уравнения затем линеаризуются для исследования устойчивости, целесообразно сначала провести линеаризацию, и только потом проводить усреднение.

Линеаризованные уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{dw_1}{du} &= \varepsilon' \kappa \left( -(B_2^2 + B_3^2) \chi w_1 + B_1 B_2 \chi w_2 + B_1 B_3 \chi w_3 + 2B_1 B_2 \alpha + 2B_1 B_3 \beta - 2(B_2^2 + B_3^2) \gamma \right), \\ \frac{dw_2}{du} &= \varepsilon' \kappa \frac{A}{B} \left( B_1 B_2 \chi w_1 - (B_1^2 + B_3^2) \chi w_2 + B_2 B_3 \chi w_3 - 2(B_1^2 + B_3^2) \alpha + 2B_2 B_3 \beta + 2B_1 B_2 \gamma \right), \\ \frac{dw_3}{du} &= \varepsilon' \kappa \frac{A}{C} \left( B_1 B_3 \chi w_1 + B_2 B_3 \chi w_2 - (B_1^2 + B_2^2) \chi w_3 + 2B_2 B_3 \alpha - 2(B_1^2 + B_2^2) \beta + 2B_1 B_3 \gamma \right), \\ \frac{d\alpha}{du} &= \varepsilon' w_2, \quad \frac{d\beta}{du} = \varepsilon' w_3, \quad \frac{d\gamma}{du} = \varepsilon' w_1,\end{aligned}\tag{6.2.4}$$

где  $\kappa = k'_\omega / k'_a$ . Уравнения первого приближения имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma} + \varepsilon \kappa (p+q) \dot{\gamma} + 2\varepsilon (p+q) \gamma &= 0, \\ \ddot{\alpha} + \varepsilon \kappa (p+q) A/B \dot{\alpha} + 2\varepsilon (p+q) A/B \alpha &= 0, \\ \ddot{\beta} + 2\varepsilon \kappa p A/C \dot{\beta} + 4\varepsilon p A/C \beta &= 0.\end{aligned}\tag{6.2.5}$$

где  $p = 1/2 \sin^2 \Theta$ ,  $q = \cos^2 \Theta$ . Таким образом, по каждому углу получаем линеаризованные уравнения затухающих колебаний. Из (6.2.5) видно, что если  $k_a$  мало ( $\kappa$  велико), то степень устойчивости уменьшается – один из корней характеристического уравнения приближается к мнимой оси. Аналогично, если  $k_\omega$  мало ( $\kappa$  мало), то степень устойчивости мала – оба корня близки к мнимой оси. Выпишем корни характеристического многочлена для всех трех уравнений,

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left( -\varepsilon \kappa (p+q) \pm \sqrt{\varepsilon^2 \kappa^2 (p+q)^2 - 8\varepsilon (p+q)} \right), \\ \lambda_{3,4} &= \frac{1}{2} \left( -\varepsilon \kappa (p+q) \frac{A}{B} \pm \sqrt{\varepsilon^2 \kappa^2 (p+q)^2 \left( \frac{A}{B} \right)^2 - 8\varepsilon (p+q) \frac{A}{B}} \right), \\ \lambda_{5,6} &= -\varepsilon \kappa p \frac{A}{C} \pm \sqrt{\varepsilon^2 \kappa^2 p^2 \left( \frac{A}{C} \right)^2 - 4\varepsilon p \frac{A}{C}}.\end{aligned}$$

Введем параметры

$$\theta_1 = B/A, \quad \theta_2 = C(p+q)/2pA$$

и новые коэффициенты усиления при помощи выражений

$$K_\omega = \frac{B_0'^2}{A\omega_0^2} (p+q) k'_\omega, \quad K_a = \frac{B_0'^2}{A\omega_0^2} (p+q) k'_a.$$

Тогда, учитывая выражения для  $\varepsilon$  и  $\kappa$ , корни характеристического многочлена можно записать в виде

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left( -K_\omega \pm \sqrt{K_\omega^2 - 8K_a} \right) \\ \lambda_{3,4} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{K_\omega}{\theta_1} \pm \frac{1}{\theta_1^2} \sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_1 K_a} \right) \\ \lambda_{5,6} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{K_\omega}{\theta_2} \pm \frac{1}{\theta_2^2} \sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_2 K_a} \right)\end{aligned}\tag{6.2.6}$$

Выберем моменты инерции аппарата так, чтобы  $C > B > A$ . В этом случае  $\theta_1 > 1$ . Рассмотрим далее три варианта.

I.  $\theta_2 > \theta_1 > 1$ . Этот случай имеет место для орбит с низким наклонением, когда  $q$  велико, а  $p$  мало. Коэффициенты усиления могут попасть в одну из трех областей.

1.  $8K_a > K_\omega^2$ . В этом случае все подкоренные выражения в (6.2.6) отрицательны и степень устойчивости определяется из выражения

$$\xi = \min \left( \frac{1}{2} K_\omega, \frac{1}{2\theta_1} K_\omega, \frac{1}{2\theta_2} K_\omega \right).$$

Отсюда в силу условия, задаваемого случаем I, получаем

$$\xi_1 = K_\omega / 2\theta_2.$$

2.  $8\theta_2 K_a < K_\omega^2$ . В этом случае все подкоренные выражения положительны и степень устойчивости определяется из выражения

$$\xi = \frac{1}{2} \min \left( K_\omega - \sqrt{K_\omega^2 - 8K_a}, \frac{K_\omega}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_1^2} \sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_1 K_a}, \frac{K_\omega}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_2^2} \sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_2 K_a} \right).$$

Можно показать, что

$$\xi_2 = K_\omega - \sqrt{K_\omega^2 - 8K_a}.$$

3.  $8K_a < K_\omega^2 < 8\theta_2 K_a$ . В этом случае одно или два подкоренных выражения в (6.2.6) положительны, и степень устойчивости может быть равна либо  $\xi_1$ , либо  $\xi_2$ .

Однако, наибольший интерес представляет случай, когда  $\xi_1 = \xi_2$ , что дает

$$K_\omega^2 = \frac{8\theta_2^2}{2\theta_2 - 1} K_a,$$

или, возвращаясь к исходным обозначениям,

$$k'_a = \frac{2\theta_2 - 1}{8\theta_2^2} \frac{B_0'^2}{A\omega_0^2} (p + q) k_\omega'^2. \quad (6.2.7)$$

Перейдем к рассмотрению других вариантов.

II.  $\theta_1 > \theta_2 > 1$ . В этом случае рассуждения, очевидно, принципиально не изменятся, оптимальная парабола задается выражением

$$k'_a = \frac{2\theta_1 - 1}{8\theta_1^2} \frac{B_0'^2}{A\omega_0^2} (p + q) k_\omega'^2 \quad (6.2.8)$$

III.  $\theta_1 > 1 > \theta_2$ . Такое соотношение верно для орбит с высоким наклонением. Проведем рассуждения, аналогичные варианту I.

1.  $8\theta_2 K_a > K_\omega^2$ . Все подкоренные выражения в (6.2.6) отрицательны, степень устойчивости

$$\xi_1 = \frac{1}{2\theta_1} K_\omega.$$

2.  $8\theta_1 K_a < K_\omega^2$ . В этом случае все подкоренные выражения положительны и степень устойчивости

$$\xi_2 = \frac{K_\omega}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_2^2} \sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_2 K_a}.$$

3.  $8\theta_1 K_a < K_\omega^2 < 8\theta_2 K_a$ . В этом случае одно или два подкоренных выражения в (6.2.6) положительны, и степень устойчивости может быть равна либо  $\xi_1$ , либо  $\xi_2$ . Оптимальная парабола задается выражением

$$k'_a = \frac{1}{8\theta_1} \left( 2 - \frac{\theta_2}{\theta_1} \right) \frac{B_0'^2}{A\omega_0^2} (p + q) k_\omega'^2. \quad (6.2.9)$$

На Рис. 6.1.1 представлены изолинии значений степени устойчивости для аппарата с тем же тензором инерции  $\mathbf{J} = \text{diag}(1, 1.5, 2)$  кг·м<sup>2</sup>, находящегося на орбите наклонением 70° и высотой 350 км.

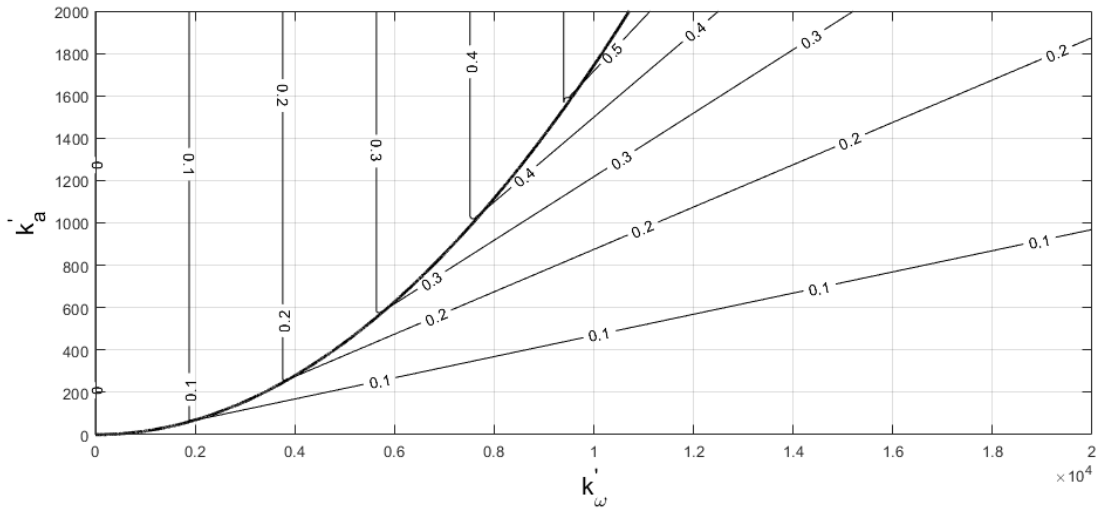


Рис. 6.1.1. Оптимальная парабола для орбиты с высоким наклонением.

Рис. 6.1.1 раскрывает смысл параболы (6.2.9) – она указывает на оптимальное соотношение параметров  $k'_a$  и  $k'_\omega$ . Выбрав значение степени устойчивости, коэффициенты усиления следует выбирать на соответствующей точке параболы для получения наименьшего управляющего воздействия, доставляющего эту степень устойчивости. В целом, соотношения (6.2.7) и (6.2.9) позволяют в зависимости от тензора инерции аппарата и наклонения его орбиты выбирать оптимальные коэффициенты усиления. На Рис. 6.1.1 видно, что с повышением величины коэффициентов усиления парабола начинает отклоняться от изломов численно полученных изолиний из-за снижения точности приближенного решения, полученного в предположении слабого действия управляющего момента.

Вернемся теперь к уравнениям (6.2.3). Приведенные выше рассуждения касались случая  $\varepsilon/\varepsilon'^2 = O(1)$ . Предположим теперь, что это соотношение не выполняется, вместо него имеет место  $\varepsilon = \varepsilon'^n$ , причем  $n$  может быть как больше 2, так и меньше. Обозначая  $\mathbf{y} = (\alpha, \beta, \gamma)$ , запишем уравнения (6.2.3) в виде

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \varepsilon' \mathbf{f}_1(\boldsymbol{\omega}) + \varepsilon'^{n-1} \mathbf{f}_2(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{y}),$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \varepsilon' \mathbf{f}_3(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{y}).$$

Если  $n > 2$ , то уравнения, полученные формальным усреднением, верны с точностью  $\varepsilon'$  на интервале времени  $u \sim 1/\varepsilon'$ , если же  $n < 2$ , то усреднение верно на интервале времени  $u \sim 1/\varepsilon'^{n-1}$ . В первом случае на характерном интервале времени успевают заметно (на величину порядка 1) измениться только углы (в силу незначительного влияния управляющего момента), во втором случае – только скорости. При  $n = 2$  углы и скорости меняются

одинаково, что и было рассмотрено выше. Однако усреднение можно провести в любом случае, и полученная усредненная система имеет положение равновесия и оказывается асимптотически устойчивой. Тогда [131] для исходной системы существует предельный цикл (также асимптотически устойчивый), и ее движение не отклоняется от положения равновесия усредненной системы более, чем на  $\varepsilon'^k$ , где  $k = \min(1, n-1)$ . Но это позволяет использовать формальное усреднение на бесконечном интервале времени и распространить полученный выше результат на любое значение  $n$ .

### Численное моделирование

Полученные в предыдущем разделе результаты верны, если параметры  $k'_a$  и  $k'_\omega$  невелики и соизмеримы. В результате удается показать асимптотическую устойчивость требуемого положения равновесия и найти оптимальное соотношение между параметрами управления за счет простых формул (6.2.7), (6.2.8) или (6.2.9). Распространим эти результаты на общий случай, пользуясь теорией Флоке [165]. Сначала построим численно изолинии характеристических показателей системы (6.2.4) для тех же параметров системы, которые были использованы при построении Рис. 6.1.1.

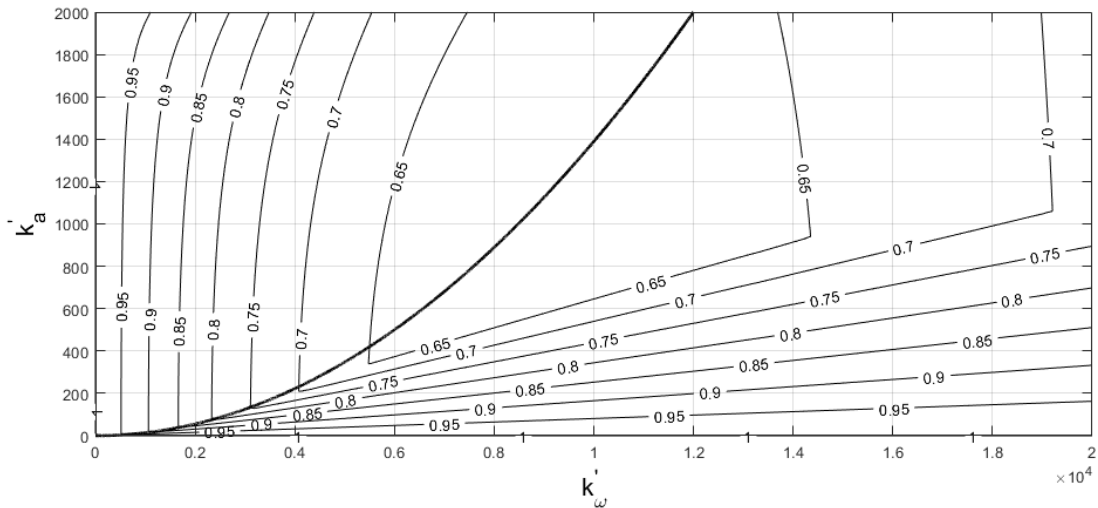


Рис. 6.1.2. Сравнение численных и аналитических результатов

Из Рис. 6.1.2 видно, что с увеличением коэффициентов усиления наблюдается все увеличивающееся расхождение численных и аналитических результатов. Это объясняется тем, что по мере роста этих коэффициентов усиливается управляющий механический момент, что противоречит предположению о малом моменте.

На Рис. 6.1.3 представлены характеристические показатели для превалирования позиционной части момента.



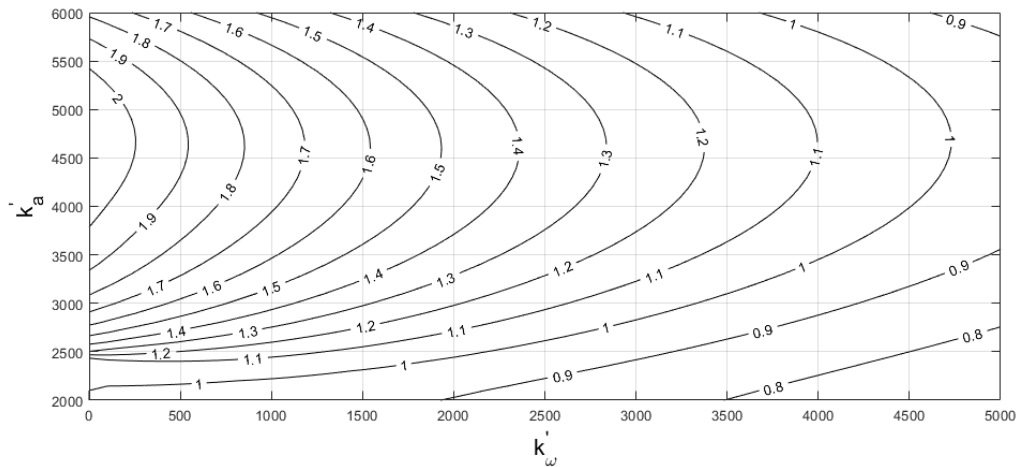


Рис. 6.1.3. Устойчивость при сильном позиционном моменте

Из Рис. 6.1.3 видно, что существует область неустойчивости, которой нет в аналитических результатах. Это обусловлено тем, что численно можно рассматривать превалирование одной из компонент момента, тогда как аналитические результаты получены для примерно равных коэффициентов усиления. Неустойчивость вызвана «разбалтыванием» аппарата позиционным моментом: скорость, получаемая им на каждом этапе цикла управления, настолько велика, что демпфирующая компонента момента оказывается неспособна ее парировать. Впрочем, из Рис. 6.1.2 также видно, что не следует допускать превалирования одной из компонент момента. Ограничение на величину механического момента имеет важное значение для успешности применения управления и не является искусственным ограничением, необходимым для проведения аналитического исследования (введения малого параметра). Это накладывает ограничение на достижимую точность. В частности, для спутника с рассмотренными выше параметрами управляющий механический момент должен быть не более  $5 \cdot 10^{-6}$  Н·м. Этот момент оказывается лишь в несколько раз больше возмущающего гравитационного, в результате точность ориентации оказывается немногим лучше  $10^\circ$ . Для спутников других конфигураций, в частности, для Кубсатов, точность может быть выше, до нескольких градусов. Однако для аппарата малой массы величина управляющего момента также должна быть меньше чтобы сохранялось условие малого изменения кинетического момента по сравнению с его величиной.

### *Движение в орбитальной системе координат*

Аналогичные результаты могут быть получены и для движения КА в орбитальной системе координат. Уравнения (1.3.3)-(1.3.6), линеаризованные в окрестности орбитальной ориентации КА, имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{\Omega}_1}{du} &= -K_\omega \frac{B_0^2}{A\omega_0^2} \left[ (B_2^2 + B_3^2)\bar{\Omega}_1 - B_1B_2\bar{\Omega}_2 - B_1B_3\bar{\Omega}_3 \right] - \\
&\quad -2k_a \frac{B_0^2}{A\omega_0^2} \left[ -B_1B_2\alpha - B_1B_3\beta + (B_2^2 + B_3^2)\gamma \right] + \omega_2 + \frac{B-C}{A}(\bar{\Omega}_2 + \gamma), \\
\frac{d\bar{\Omega}_2}{du} &= -K_\omega \frac{B_0^2}{B\omega_0^2} \left[ -B_1B_2\bar{\Omega}_1 + (B_1^2 + B_3^2)\bar{\Omega}_2 - B_2B_3\bar{\Omega}_3 \right] - \\
&\quad -2k_a \frac{B_0^2}{B\omega_0^2} \left[ (B_1^2 + B_3^2)\alpha - B_2B_3\beta - B_1B_2\gamma \right] - \bar{\Omega}_1 + \frac{C-A}{B}(\bar{\Omega}_1 - 4\alpha), \\
\frac{d\bar{\Omega}_3}{du} &= -K_\omega \frac{B_0^2}{C\omega_0^2} \left[ -B_1B_3\bar{\Omega}_1 - B_2B_3\bar{\Omega}_2 + (B_1^2 + B_2^2)\bar{\Omega}_3 \right] - \\
&\quad -2k_a \frac{B_0^2}{C\omega_0^2} \left[ -B_2B_3\alpha + (B_1^2 + B_2^2)\beta - B_1B_3\gamma \right] + 3\frac{A-B}{C}\beta, \\
\frac{d\alpha}{du} &= \bar{\Omega}_2, \quad \frac{d\beta}{du} = \bar{\Omega}_3, \quad \frac{d\gamma}{du} = \bar{\Omega}_1.
\end{aligned} \tag{6.2.10}$$

Демпфирующий коэффициент усиления  $k_\omega$  заменен на  $K_\omega = k_\omega \omega_{orb}$ , безразмерные компоненты скорости относительно орбитальной системы задаются как  $\bar{\Omega}_i = \Omega_i / \omega_{orb}$ . На Рис. 6.1.4 приведен пример поиска коэффициентов усиления для КА с моментами инерции 0.15, 0.13, 0.11 кг·м<sup>2</sup> на орбите высотой 550 км и наклонением 57 градусов.

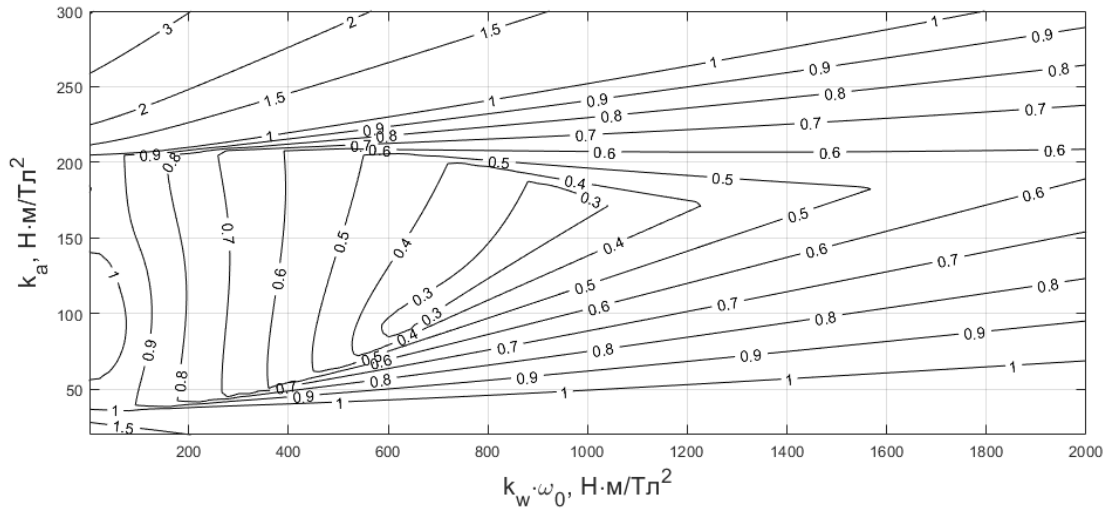


Рис. 6.1.4. Поиск коэффициентов усиления при стабилизации в орбитальных осях

Дальнейший поиск наилучших коэффициентов усиления проводится вручную. В частности, на Рис. 6.1.4 видно, что область устойчивости вытянута по параметру  $k_\omega$ , так что его имеет смысл искать в диапазоне 400-1000 Н·м/Тл. Примеры применения Рис. 6.1.4 будут даны в разделе 6.3.

### Моделирование в реалистичном сценарии

Проведем моделирование движения КА под действием управления (6.1.1) с учетом различных возмущающих факторов. Примем следующие параметры:

- круговая орбита высотой 750 км, наклонение  $60^\circ$ ;
- моменты инерции 5.8, 3.6, 2.5 кг·м<sup>2</sup>;
- максимальный дипольный момент катушек 10 А·м<sup>2</sup>, при его превышении потребный управляющий дипольный момент масштабируется;
- коэффициенты усиления  $k_\omega = 3 \cdot 10^4 / \omega_{orb}$  Н·м/Тл<sup>2</sup>,  $k_a = 10^4$  Н·м/Тл<sup>2</sup>.

На Рис. 6.1.5 приведен пример моделирования при точном знании ориентации и случайном возмущающем моменте. Это соответствует практически идеальным условиям работы управления и точность стабилизации при этом оказывается лучше одного градуса.

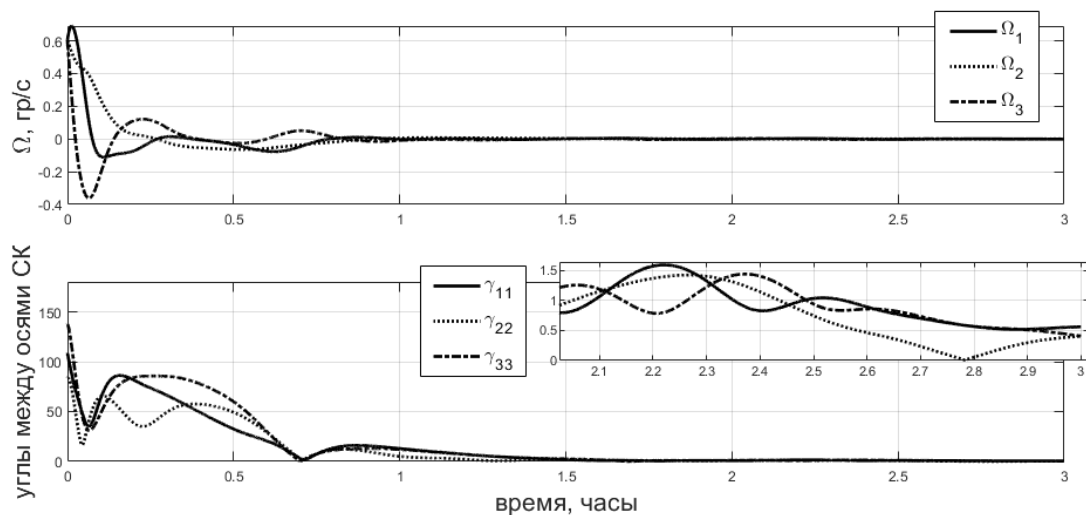


Рис. 6.1.5. Стабилизация при точном знании ориентации

Проведем теперь моделирование работы полностью магнитной системы ориентации. Управление обеспечивается магнитными катушками, идентификация состояния происходит с помощью обработки показаний магнитометра фильтром Калмана\*. Будем считать, что показания магнитометра имеют постоянное смещение 300 нТл и шум на уровне 100 нТл.

---

\* Разработка фильтра Калмана, использующего показания одного магнитометра, принадлежит Д.С. Иванову. Общее описание фильтра приведено в [176]. Встраивание фильтра Калмана в программный комплекс, моделирование и анализ его результатов проведены автором диссертации.

Ковариационная матрица ошибок изменений  $\mathbf{R} = \text{diag}(\sigma_{meas}^2, \sigma_{meas}^2, \sigma_{meas}^2)$ , где  $\sigma_{meas} = 100$  нТл. Оценка начального вектора состояния КА принимается нулевой. Начальная ковариационная матрица инициализируется заведомо большими ошибками знания ориентации в виде  $\mathbf{P}_0 = (\sigma_{q_0}^2, \sigma_{q_0}^2, \sigma_{q_0}^2, \sigma_{\omega_0}^2, \sigma_{\omega_0}^2, \sigma_{\omega_0}^2)$ , где ошибка по ориентации составляет  $\sigma_{q_0} = \pi/2$ , по угловой скорости –  $\sigma_{\omega_0} = 10$  градусов в секунду.

При совместном использовании магнитных катушек и магнитометра возникает необходимость разнесения сеансов управления и определения ориентации, так как работающие магнитные катушки вносят неприемлемо большую ошибку в показания магнитометра, не позволяя определить внешнее магнитное поле. На определение ориентации будем отводить одну секунду (при частоте опроса магнитометра 1 Гц), на управление отведем 5 секунд. Таким образом, после одного такта определения ориентации она в течение 5 секунд считается неизменной при формировании управляющих моментов. На Рис. 6.1.6 и 6.1.7 приведены результаты работы системы управления и системы определения ориентации, когда показания магнитометра не имеют ошибки, а на движение КА по-прежнему оказывает влияние лишь небольшой случайный момент. Точность определения ориентации (среднеквадратичное отклонение) составила около  $0.2^\circ$  и  $7 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ , что можно считать пределом возможности идентификации движения, если используются лишь показания магнитометра.

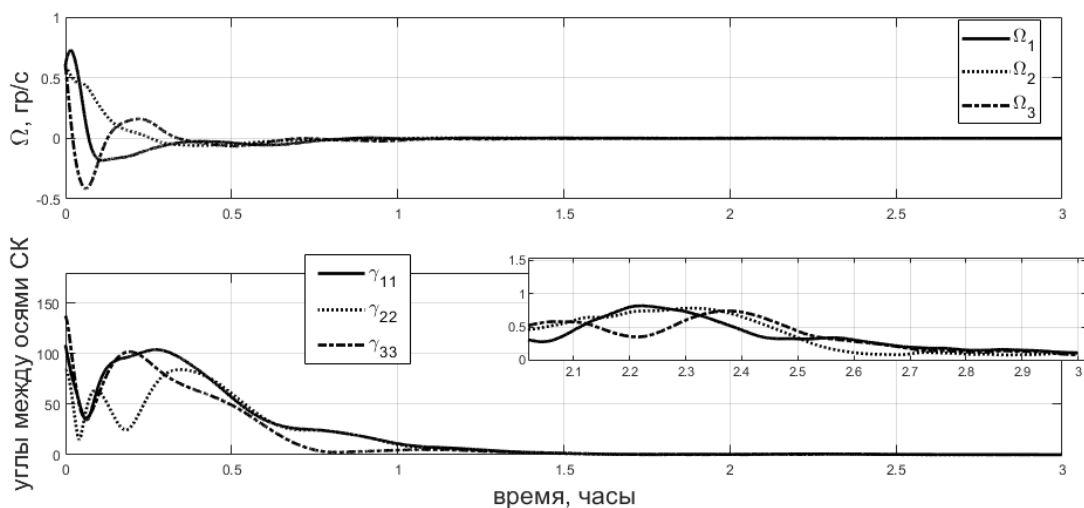


Рис. 6.1.6. Стабилизация с применением фильтра Калмана

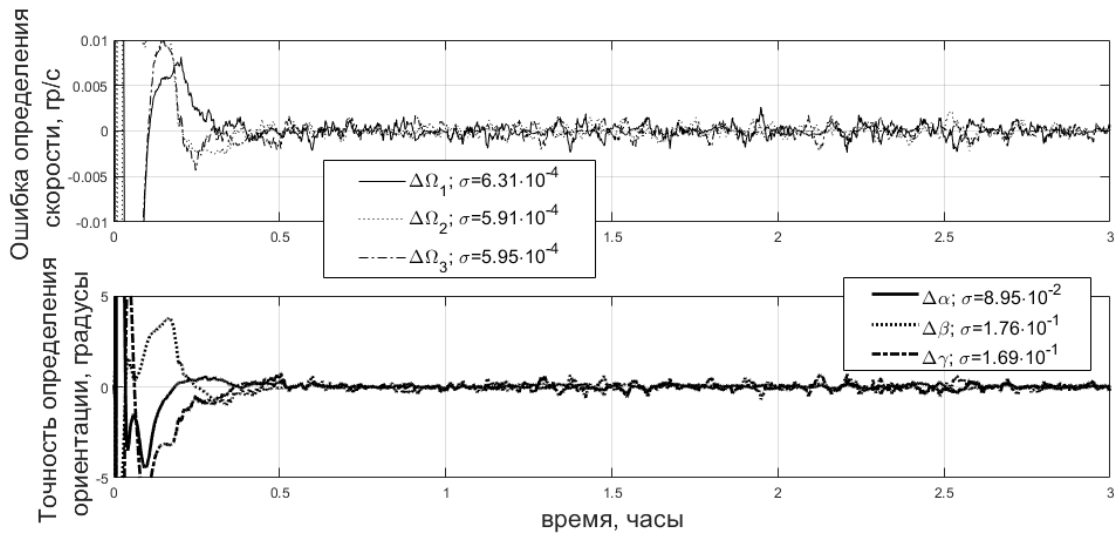


Рис. 6.1.7. Точность определения ориентации

Работа фильтра Калмана не оказала существенного влияния на точность стабилизации КА. Сравнение Рис. 6.1.5 и 6.1.6 показывает схожий переходный процесс, на котором ошибка определения ориентации практически не сказывается. Конечная точность также в основном оказывается определяемой собственными проблемами магнитных катушек. Рассмотрим далее влияние различных возмущающих факторов, чтобы получить представление об их влиянии на конечную точность определения и обеспечения ориентации. Примем во внимание постоянный возмущающий момент величиной  $5 \cdot 10^{-7}$  Н·м. Существенный момент, не учитываемый в модели движения прогноза фильтра Калмана, приводит к ошибке в определении ориентации около  $0.7^\circ$ , и иногда до  $2^\circ$ . Стабилизация КА при этом обеспечивается с точностью до  $5^\circ$ , Рис. 6.1.8 и 6.1.9.

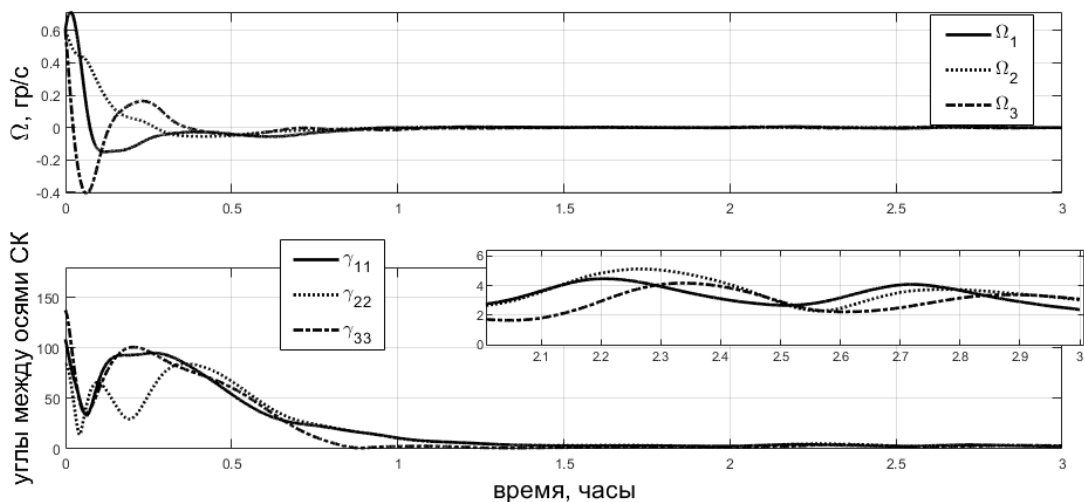


Рис. 6.1.8. Стабилизация с учетом постоянного возмущающего момента

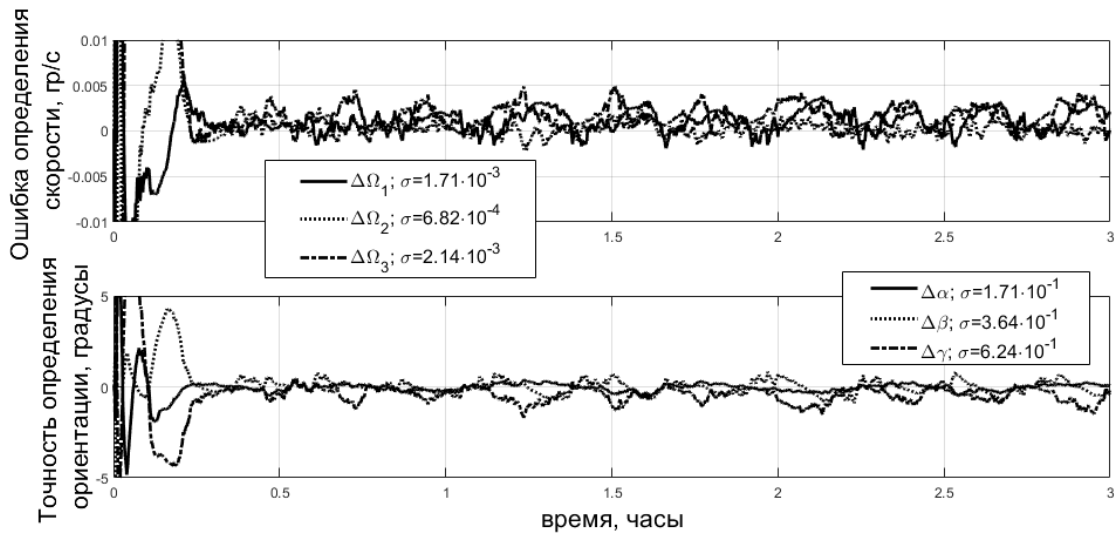


Рис. 6.1.9. Точность определения ориентации

Следующим важным возмущающим фактором является ошибка в знании моментов инерции на уровне 10% от номинальных значений. Такая ситуация типична для малых аппаратов, при производстве которых зачастую наблюдается некоторая вольность как в сборке, так и в создании их моделей в пакетах проектирования. В случае стабилизации КА магнитной системой такая ошибка может существенно сказаться на получаемых результатах. Это связано с чувствительностью коэффициентов усиления к изменению моментов инерции. Даже небольшое изменение моментов может привести к существенному изменению области устойчивости на Рис. 6.1.4. На Рис. 6.1.10 и 6.1.11 приведен пример работы системы в случае, когда реальные моменты инерции КА имеют значения 5.2, 3.2, 2.2 кг·м<sup>2</sup>. Этот тензор используется в модели движения КА, тогда как в модели, используемой в прогнозе фильтра Калмана, по-прежнему используются номинальные моменты 5.8, 3.6, 2.5 кг·м<sup>2</sup>.

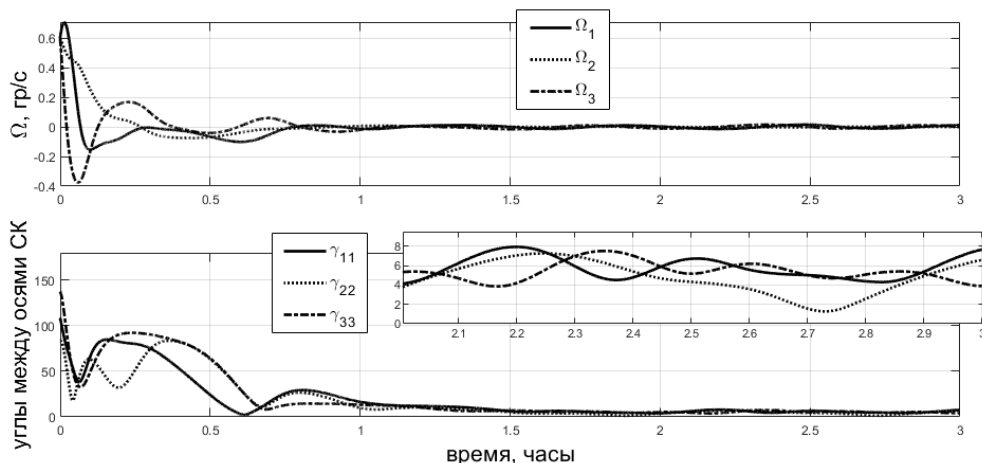


Рис. 6.1.10. Стабилизация с учетом ошибки знания моментов инерции

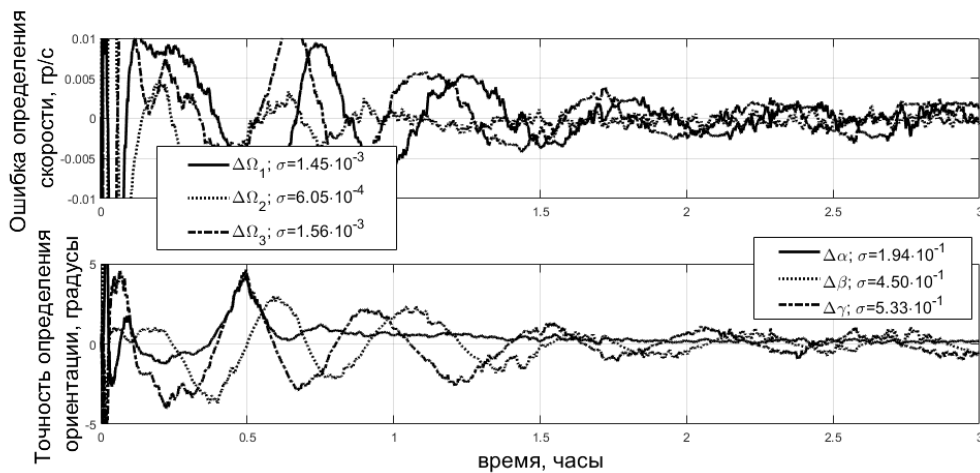


Рис. 6.1.11. Точность определения ориентации

Использование ошибочных моментов инерции в прогнозе не приводит к существенному снижению точности определения ориентации на Рис. 6.1.11 по сравнению с Рис. 6.1.9. Однако точность стабилизации на Рис. 6.1.10 падает до  $8^\circ$  по сравнению с  $5^\circ$  на Рис. 6.1.8. Это связано с использованием коэффициентов усиления управления (6.1.1), не вполне подходящих для реального тензора инерции.

Последним фактором, который будет рассмотрен, является смещение нуля измерений магнитометра, вызываемое в первую очередь остаточным дипольным моментом КА. Рассмотрим влияние неучтенного смещения нуля, задавая модель измерений фильтра Калмана в виде  $\mathbf{V}_{изм} = \mathbf{A}\mathbf{V}_X + \Delta\mathbf{V} + \boldsymbol{\eta}_V$ ,  $\Delta\dot{\mathbf{V}} = \boldsymbol{\eta}_{\Delta V}$ , где кроме нормально распределенного шума  $\boldsymbol{\eta}_V$  присутствует смещение  $\Delta\mathbf{V}$ , равное 300 нТл по каждому каналу управления. На Рис. 6.1.12 и 6.1.13 приведены результаты с учетом как смещения нуля, так и всех рассмотренных до этого возмущений.

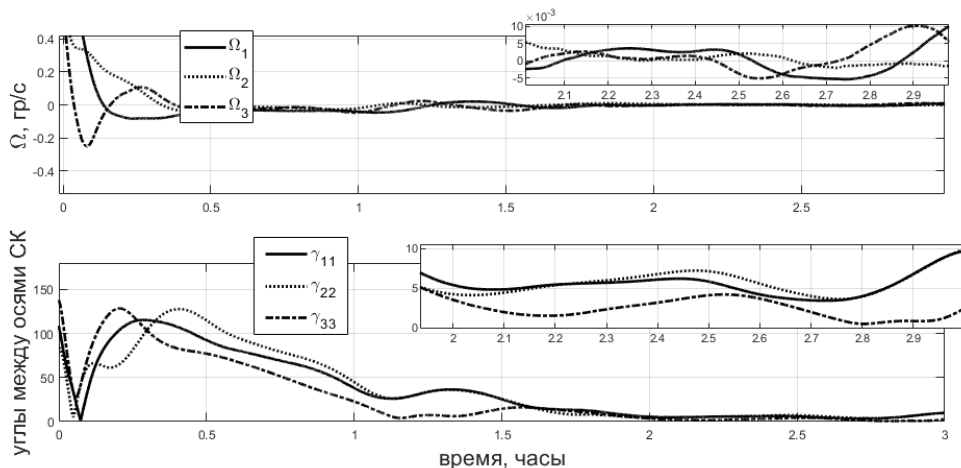


Рис. 6.1.12. Стабилизация с учетом всех рассматриваемых возмущений

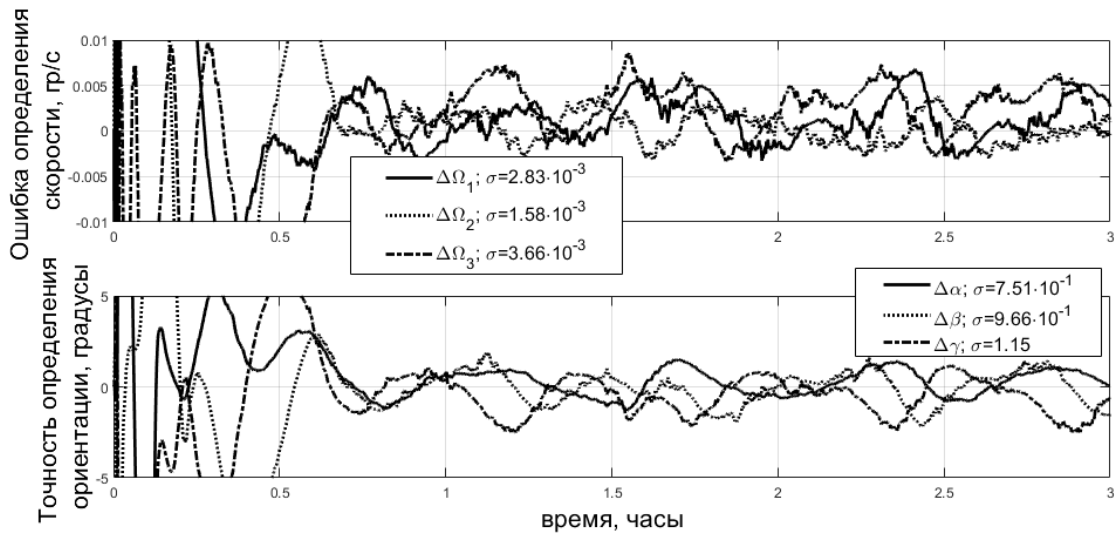


Рис. 6.1.13. Точность определения ориентации

Точность определения ориентации составила около  $1.2^\circ$ , стабилизации – около  $10^\circ$ . В целом можно сказать, что процесс определения ориентации не вносит существенных ошибок в конечную точность ориентации. Она определяется в первую очередь действующими возмущениями, которые магнитная система ориентации не может компенсировать. Определяющими факторами среди них являются ошибки знания тензора инерции и остаточный дипольный момент КА.

## 6.2. Управление на скользящих режимах

Проблема ограниченности направления управляющего момента имеет в случае использования магнитной системы ориентации важную особенность. Вектор геомагнитной индукции вращается в пространстве, так что нет выделенного направления, вдоль которого ни в какой момент времени нельзя было бы создать механический момент. Это позволяет надеяться, что можно построить траекторию, приводящую спутник к требуемой ориентации, то есть в заданное положение и с заданной скоростью, причем в каждый момент времени управляющий механический момент должен быть перпендикулярен вектору геомагнитной индукции. Для построения этой траектории используем управление на скользящих режимах. Фактически, в этом подходе задача ориентации КА в требуемом положении заменяется на приведение аппарата на некоторую траекторию, удовлетворяющую заданным ограничениям – поверхность скольжения. Поверхность строится так, что при движении по ней КА неизбежно попадет в требуемое положение. Правильно подбирая параметры поверхности, фактически, изменяя ее ориентацию в пространстве в зависимости от ориентации КА и вектора геомагнитной индукции, можно надеяться получить такую поверхность, что при



движении по ней потребный механический момент будет практически перпендикулярен вектору геомагнитной индукции.

### *Построение поверхности скольжения*

Перейдем к построению управления на основе скользящего режима. Управление строится в два этапа. Вначале необходимо построить поверхность в фазовом пространстве  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{A}, t) = 0$ , движению по которой должен соответствовать вектор состояния КА. Если движение спутника удовлетворяет этому соотношению, требуемая ориентация оказывается асимптотически устойчивой. На втором этапе построения управления необходимо обеспечить движение по этой поверхности. Обычно ее уравнение представляется в виде

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} + \Lambda \mathbf{S}(\mathbf{A}) = 0,$$

где  $\Lambda$  – положительно-определенная постоянная матрица, вектор  $\mathbf{S}$  характеризует отклонение спутника от требуемой ориентации. Вектор  $\mathbf{S}$  имеет тот же вид, что при построении Ляпуновского управления (6.1.2). Положение  $\mathbf{S} = 0$  соответствует диагональной матрице направляющих косинусов. Уравнение поверхности не зависит от времени, а матрица  $\Lambda$  не зависит от вектора состояния спутника. Однако при движении спутника в магнитном поле важна ориентация вектора геомагнитной индукции, так как от нее зависит доступное направление управляющего механического момента. Поэтому уравнение поверхности должно допускать изменение ее ориентации так, чтобы механический момент оказался перпендикулярен вектору геомагнитной индукции. Зададим более общую поверхность

$$\mathbf{x} = \lambda(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{S}, t)\boldsymbol{\omega} + \Lambda(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{S}, t)\mathbf{S} = 0, \quad (6.3.1)$$

где  $\Lambda$  также положительно-определенная, но уже переменная матрица.  $\lambda$  – положительное число, характеризующее вклад «демпфирующей» части в управление. Использование вместо числа матрицы  $\lambda$  позволило бы учитывать отдельный вклад демпфирования вдоль каждой из связанных осей. Такой подход может быть оправдан в случае специфической динамической конфигурации аппарата, однако здесь такие варианты не рассматриваются. Матрица  $\Lambda$  характеризует вклад «позиционной» части. Покажем, что если движение спутника удовлетворяет  $\mathbf{x} = 0$ , то положение  $\boldsymbol{\omega} = 0$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{E}$  является асимптотически устойчивым.

В силу  $\mathbf{S} = 4q_0\mathbf{q}$  уравнение поверхности (6.3.1) можно записать как

$$\mathbf{x} = \lambda\boldsymbol{\omega} + 4q_0\Lambda\mathbf{q} = 0. \quad (6.3.2)$$

Используя (1.3.7), можно получить

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\omega}, \quad (6.3.3)$$

где

$$\mathbf{Q} = q_0 \mathbf{E} + \begin{pmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

С учетом (6.3.2) уравнение (6.3.3) переписывается в виде

$$\dot{\mathbf{q}} = -4\lambda^{-1}q_0\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{q} \text{ или } \dot{\mathbf{q}} = -4\lambda^{-1}q_0^2\Lambda\mathbf{q} - 4\lambda^{-1}q_0\mathbf{q} \times \Lambda\mathbf{q}.$$

Умножая скалярно обе части этого выражения на  $\mathbf{q}$ , получаем

$$\mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}} = -4\lambda^{-1}q_0^2\mathbf{q}^T\Lambda\mathbf{q} \text{ или } \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\mathbf{q}^T\mathbf{q}) = -4\lambda^{-1}q_0^2\mathbf{q}^T\Lambda\mathbf{q} \leq 0.$$

Таким образом, модуль векторной части кватерниона, а согласно (6.3.2) и угловая скорость, при движении по поверхности скольжения уменьшается. В результате вектор состояния спутника придет в положение равновесия, а спутник – к требуемой ориентации. Задача управления при таком подходе сводится к обеспечению движения точки по поверхности. В случае же использования магнитной системы ориентации дополнительно возникает задача построения такой поверхности скольжения, движение по которой может быть обеспечено ограниченным по направлению управлением.

#### ***Построение управляющего дипольного момента***

Для обеспечения движения фазового вектора по поверхности скольжения будем искать управление, реализующее соотношение

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{x}, \quad (6.3.4)$$

где  $\mathbf{P}$  – положительно-определенная матрица. Эта матрица характеризует быстродействие алгоритма приведения фазового вектора КА к поверхности скольжения. Тензор инерции введен в (6.3.4) для удобства дальнейших выкладок. Обращаясь к (6.3.1), получаем из (6.3.4)

$$\lambda\dot{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} + \lambda\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{S} + \mathbf{J}\boldsymbol{\Lambda}\dot{\mathbf{S}} = -\lambda\mathbf{P}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}. \quad (6.3.5)$$

Выражение для  $\dot{\mathbf{S}}$  определяется с помощью (6.1.2) и (1.3.8),

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} -\omega_3 a_{13} + \omega_1 a_{33} - \omega_2 a_{12} + \omega_1 a_{22} \\ \omega_2 a_{11} - \omega_1 a_{21} - \omega_3 a_{23} + \omega_2 a_{33} \\ \omega_3 a_{22} - \omega_2 a_{32} - \omega_1 a_{31} + \omega_3 a_{11} \end{pmatrix}.$$

Чтобы определить управляющий момент, необходимо определить производную матрицы позиционной части управления.

#### ***Построение производной матрицы в специальной системе координат***

Принимая во внимание динамические уравнения (1.3.2), получаем для движения в инерциальном пространстве

$$\lambda \mathbf{m} \times \mathbf{B} = -\dot{\lambda} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \lambda (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{M}) - \dot{\Lambda} \mathbf{J} \mathbf{S} - \Lambda (\mathbf{J} \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{P} \mathbf{S}) - \lambda \mathbf{P} \boldsymbol{\omega}. \quad (6.3.6)$$

При получении этого выражения были переставлены пары матриц  $\mathbf{J}$ ,  $\Lambda$  и  $\mathbf{J}$ ,  $\dot{\Lambda}$ . Вообще говоря, эти матрицы не перестановочны. Однако при реализации управления выяснилось, что такая модификация приводит к большей эффективности его работы, при условии малых недиагональных элементов  $\Lambda$  и  $\dot{\Lambda}$ . Выражение (6.3.6) указывает, какой дипольный момент катушек следует задавать. При этом необходимо сначала задать выражения для  $\lambda$  и  $\Lambda$ . Коэффициент, определяющий вклад демпфирующей компоненты, будем считать известным. В большинстве случаев это может быть постоянное значение, либо выражение, задающее увеличенный вклад демпфирования скорости вблизи требуемой ориентации. Основная задача – поиск матрицы  $\Lambda$ . Далее рассматривается итерационный подход к ее конструированию.

Представим производную матрицы  $\Lambda$  в виде

$$\dot{\Lambda} = \frac{\Lambda(k+1) - \Lambda(k)}{\Delta t}, \quad (6.3.7)$$

где  $\Delta t$  – шаг расчета выдачи управляющего воздействия магнитными катушками. Будем считать, что на  $k+1$  шаге известна оценка матрицы, полученная на прошлом шаге  $\Lambda(k)$ , вектор состояния системы и ориентация вектора геомагнитной индукции. Необходимо найти матрицу  $\Lambda(k+1)$ . Далее опускаем индекс « $k+1$ », обозначающий величину вектора на  $k+1$ -м шаге, везде кроме  $\Lambda(k+1)$ , и индекс « $k$ » у матрицы  $\Lambda(k)$ . Подставляя аппроксимирующую формулу в (6.3.6), получим

$$\lambda \Delta t \mathbf{m} \times \mathbf{B} = \left( -\dot{\lambda} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \lambda (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{M}) - \Lambda (\mathbf{J} \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{P} \mathbf{S}) - \lambda \mathbf{P} \boldsymbol{\omega} \right) \Delta t - \Lambda(k+1) \mathbf{J} \mathbf{S} + \Lambda \mathbf{J} \mathbf{S}. \quad (6.3.8)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{a} = \left( -\dot{\lambda} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \lambda (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{M}) - \Lambda (\mathbf{J} \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{P} \mathbf{S}) - \lambda \mathbf{P} \boldsymbol{\omega} \right) \Delta t + \Lambda \mathbf{J} \mathbf{S},$$

$$\mathbf{c} = -\mathbf{J} \mathbf{S},$$

$$\mathbf{d} = \lambda \Delta t \mathbf{B}$$

и перепишем (6.3.8) в виде

$$\mathbf{a} + \Lambda(k+1) \mathbf{c} = \mathbf{m} \times \mathbf{d}. \quad (6.3.9)$$

Чтобы определить вид матрицы  $\Lambda(k+1)$ , перейдем в новую систему координат, задаваемую базисом

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{c}}{|\mathbf{d} \times \mathbf{c}|}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1.$$

Матрицу перехода от этой системы координат к связанной обозначим  $\mathbf{D}$ . Тогда  $\mathbf{D} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]$ . Умножим (6.3.9) скалярно на  $\mathbf{d}$ ,

$$(\Lambda(k+1)\mathbf{c})\mathbf{d} = -\mathbf{ad}.$$

Учитывая, что в новом базисе  $\mathbf{d} = (d_1, 0, 0)$  и  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, 0)$ , получаем

$$\Lambda_{11}(k+1)c_1 + \Lambda_{12}(k+1)c_2 = -a_1. \quad (6.3.10)$$

Выражение (6.3.10) задает условие перпендикулярности управляющего момента и вектора геомагнитной индукции. Для построения матрицы  $\Lambda(k+1)$  сначала выбираем  $\Lambda_{11}(k+1) > 0$ , например,  $\Lambda_{11}(k+1) = \Lambda_{11}(k)$ . Затем с помощью (6.3.10) определяется  $\Lambda_{12}(k+1)$  и  $\Lambda_{21}(k+1)$ ,

$$\Lambda_{12}(k+1) = \Lambda_{21}(k+1) = (-a_1 - \Lambda_{11}(k+1)c_1)/c_2.$$

Величина  $\Lambda_{22}(k+1)$  должна удовлетворять соотношению

$$\Lambda_{11}(k+1)\Lambda_{22}(k+1) - \Lambda_{12}^2(k+1) > 0. \quad (6.3.11)$$

Например,  $\Lambda_{22}(k+1) = \Lambda_0 + \Lambda_{12}^2(k+1)/\Lambda_{11}(k+1)$ ,  $\Lambda_0$  – положительная величина. Однако если  $\Lambda_{22}(k)$  удовлетворяет (6.3.11), можно использовать значение прошлого шага. Наконец,  $\Lambda_{33}(k+1) = \Lambda_{33}(k)$ . В результате получаем матрицу  $\Lambda(k+1)$ , которая переводится в связанную систему, и с помощью (6.3.9) определяется управляющий механический и дипольный моменты. На первом шаге можно считать, что  $\Lambda(k+1) = \Lambda(k) = \Lambda_0 \mathbf{E}$ .

Приведенный способ построения  $\Lambda(k+1)$  неприменим в окрестности требуемой ориентации, так как  $c_1$  и  $c_2$  близки к нулю. Поэтому для поиска  $\Lambda_{12}(k+1)$  используется выражение

$$\Lambda_{12}(k+1) = -\frac{a_1 + \Lambda_{11}(k+1)c_1}{c_2 + \delta c_2},$$

где  $\delta c_2$  – небольшая положительная величина. Внесение этой ошибки в конструирование матрицы  $\Lambda(k+1)$  приводит к тому, что механический момент, определяемый согласно (6.3.9), отклоняется от плоскости, перпендикулярной вектору геомагнитной индукции. Магнитная система реализует проекцию этого момента на плоскость.

Реализация описанного управления сопряжена с подбором коэффициента (или функции)  $\lambda$ , величины вклада позиционной части управления  $\Lambda_0$  и матрицы  $\mathbf{P}$ . При подборе необходимо принимать во внимание примерную величину реализуемого магнитными катушками дипольного момента и соотношение между позиционной и демпфирующей частями управления. На Рис. 6.2.1 приведен результат моделирования для КА со следующими параметрами:

- моменты инерции 0.009, 0.007, 0.011 кг·м<sup>2</sup>,
- параметры управления
  - $\Lambda_0 = 10^{-4}$ ,
  - $\delta c_2 = 0.001$ ,
  - $\lambda = 0.1$  с,
  - $\mathbf{P} = 10^{-5} \mathbf{E}$  кг·м<sup>2</sup>/с,
  - магнитные катушки создают дипольный момент не более 3.2 А·м<sup>2</sup>,
  - шаг расчета и выдачи управляющих воздействий 1 с,
- высота круговой орбиты 550 км, наклонение 60 градусов,
- модель геомагнитного поля – наклонный диполь,
- при построении управления учитывается действие возмущающего гравитационного момента,
- в моделировании на КА также действует аэродинамический момент, не учтенный в управлении, и момент неизвестной природы.

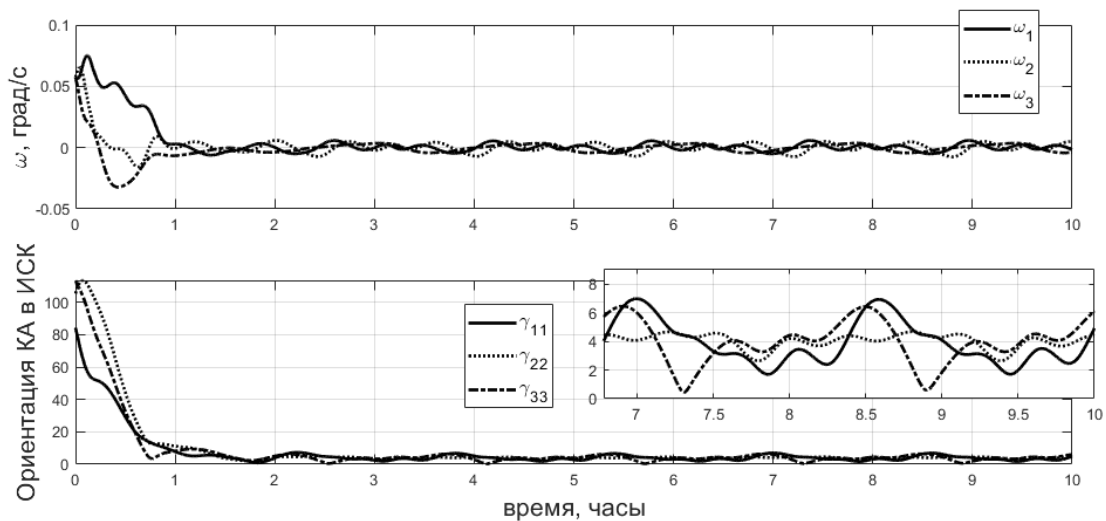


Рис. 6.2.1. Приведение КА в инерциальную ориентацию

Выражение (6.3.8) получено для движения в инерциальной системе координат, этот случай рассмотрен и на Рис. 6.2.1. Можно аналогично записать выражение для стабилизации в орбитальной системе, используя уравнения (1.3.3). Точность стабилизации при действии возмущений оказывается около 7 градусов. На Рис. 6.2.2 приведен аналогичный результат при учете ошибок знания ориентации ( $1^\circ$  по углам ориентации,  $10^{-4} \text{ c}^{-1}$  по угловой скорости).

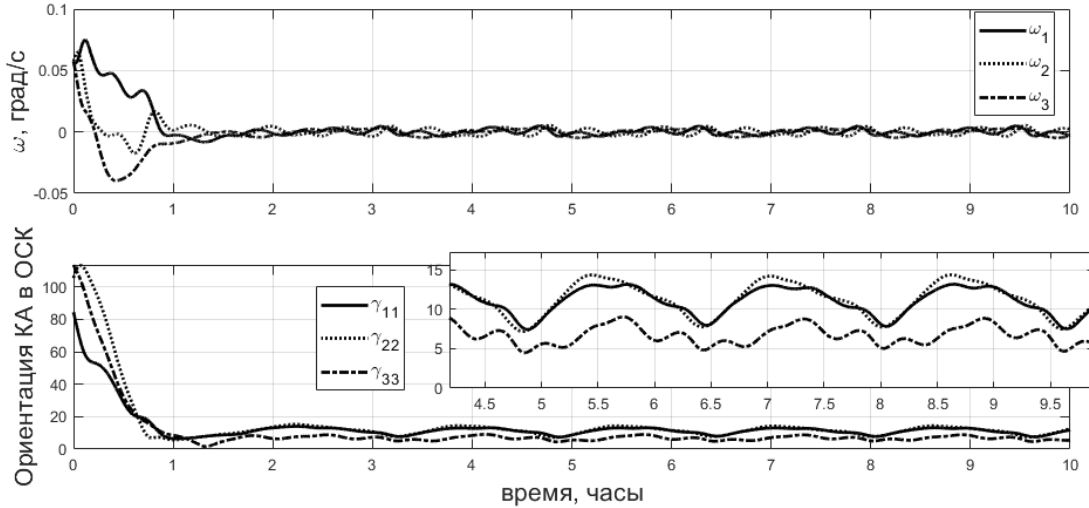


Рис. 6.2.2. Стабилизация при наличии ошибок определения ориентации

Точность в этом случае снижается до 15 градусов. В целом, рассмотренное в предыдущем разделе управление с обратной связью и управление на скользящих режимах имеют схожие показатели эффективности работы управления.

### *Построение производной матрицы из требования ее минимизации*

Зададимся теперь поверхностью скольжения в виде

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S} = 0.$$

Сохраняя потребный закон изменения поверхности (6.3.4), принимая во внимание динамические уравнения (1.3.2) или (1.3.3), получаем

$$\mathbf{m} \times \mathbf{V} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{J} \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\mathbf{M}} - \dot{\boldsymbol{\Lambda}} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S} - \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{S}} - \mathbf{P} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{P} \mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}. \quad (6.3.12)$$

Здесь  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  может обозначать как абсолютную скоростью, так и относительную в зависимости от того, в какой системе координат производится стабилизация КА. Соответственно,  $\tilde{\mathbf{M}}$  может включать либо только учитываемые при построении управления возмущающие моменты, либо также выражение (1.3.4). Далее будем считать, что стабилизация производится в орбитальной системе координат, при построении управления учитывается гравитационный момент. Снова представляя производную матрицы  $\boldsymbol{\Lambda}$  в виде (6.3.7), запишем выражение (6.3.12) как

$$\Lambda(k+1)\mathbf{c} + \mathbf{a} = \mathbf{m} \times \mathbf{d} = \mathbf{M}_{\text{упр}}, \quad (6.3.13)$$

$$\mathbf{a} = (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{J}\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\mathbf{M}} - \Lambda(k)\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{S}} - \mathbf{P}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{P}\mathbf{J}^{-1}\Lambda(k)\mathbf{J}^{-1}\mathbf{S})\Delta t + \Lambda(k)\mathbf{J}^{-1}\mathbf{S},$$

$$\mathbf{c} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{S},$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{B}\Delta t.$$

Отметим, что форма выражения (6.3.13) такая же, как в выражении (6.3.9), но переход в специальную систему координат не производится.

Далее для поиска  $\Lambda(k+1)$  решается оптимизационная задача. При анализе работы алгоритма, приведенного выше, оказалось, что основную практическую проблему составляет быстрый неконтролируемый рост матрицы  $\Lambda$ . Поэтому в качестве целевой функции выбрана сумма двух слагаемых,

$$F = k_F \|\Lambda(k+1) - \Lambda(k)\| + \|\Lambda(k+1)\|^*.$$

Первое слагаемое означает, что матрица  $\Lambda$  должна изменяться по возможности мало по сравнению с ее предыдущим значением. Второе слагаемое означает, что элементы матрицы должны по возможности уменьшаться. Коэффициент  $k_F$  в конкретном примере ниже выбран равным 100.

В задаче оптимизации присутствуют два основных ограничения. Первым является направление результирующего механического момента согласно (6.3.13). А именно, отклонение момента от плоскости, перпендикулярной вектору геомагнитной индукции, не должно превышать 5 градусов. Второе базовое ограничение – положительная определенность матрицы  $\Lambda(k+1)$ . Вводятся также два дополнительных ограничения. А именно, величина потребного управляющего момента не должна превышать некоторой величины, в примере ниже  $2 \cdot 10^{-6}$  Н·м, что с учетом типичных значений вектора геомагнитной индукции означает, что дипольный момент должен ограничиваться примерно  $0.1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ . Также вводится ограничение на величину изменения нормы матрицы  $\Lambda$  в виде  $\|\Lambda(k+1) - \Lambda(k)\| / \|\Lambda(k+1)\| < 0.1$ .

---

\* Для минимизации используется функция `fmincon` в программной среде Matlab. При этом минимизируется не матрица, а вектор, состоящий из шести элементов матрицы с учетом ее симметричности.

На Рис. 6.2.3 приведен результат работы связки описанного алгоритма построения поверхности скольжения и управления с обратной связью (6.1.1).

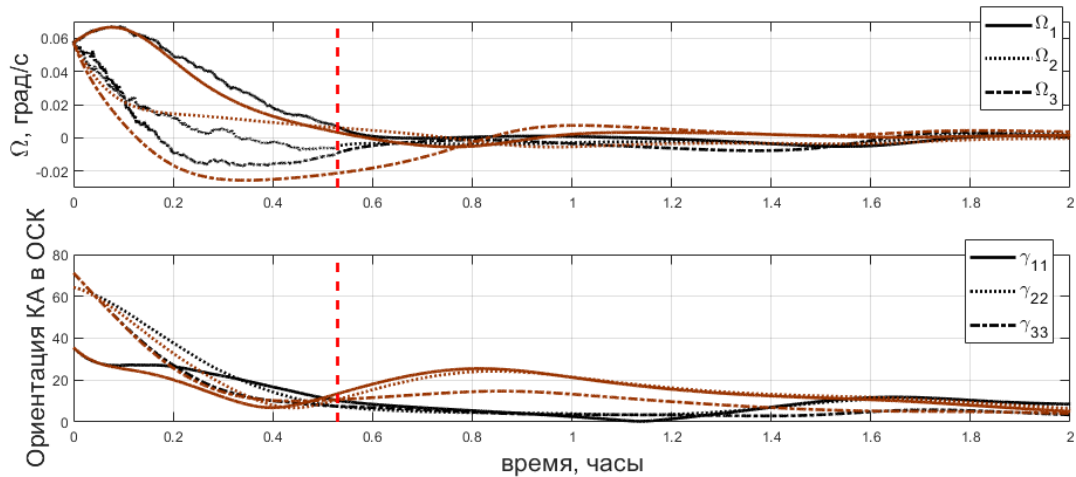


Рис. 6.2.3. Работа управления на скользящих режимах в связке с ляпуновским

Красной линией на Рис. 6.2.3 отмечен момент переключения с управления на скользящем режиме на управление с обратной связью. Как оказалось, рассматриваемая методика построения поверхности скольжения не позволяет поддерживать ориентацию КА в окрестности требуемого движения. Возникает быстрый рост элементов матрицы  $\Lambda$  из-за попытки компенсации возмущающего гравитационного момента. При этом переключение на ляпуновское управление позволяет получить удовлетворительную точность в требуемом режиме движения, а скользящий режим позволяет добиться меньшего времени переходного процесса: коричневыми линиями на Рис. 6.2.3 показана работа управления (6.1.1), которое приводит к большему времени сходимости (хотя конечная точность стабилизации не отличается).

### 6.3. Сравнение различных подходов к построению управления с обратной связью

Перейдем к более детальному сравнению различных подходов к построению трехосного магнитного управления.

Первым методом является построение управления с обратной связью на основе функции Ляпунова, изложенное в разделе 6.1. Управление на скользящем режиме здесь отдельно рассматривать не будем, так как оно дает тот же результат по точности стабилизации.

Далее рассмотрена модификация управления с обратной связью, предложенная в [112]. Смысл модификации состоит в замене постоянного коэффициента усиления  $k_a$  позиционной



части управления (6.1.1) на положительно определенную матрицу  $\mathbf{K}_a$ . Для поиска этой матрицы в [112] предложена процедура, аналогичная разработанной в разделе 6.1. А именно, с помощью теории Флоке ищутся мультипликаторы линеаризованной системы при разных значениях элементов матрицы  $\mathbf{K}_a$ , и далее выбирается матрица, дающая наименьший мультипликатор.

Третий подход к управлению заключается в поиске специальной траектории, на которой потребный управляющий момент практически перпендикулярен вектору геомагнитной индукции, как это делалось в разделе 6.2. Для поиска такой траектории используется оптимизационный метод роя частиц [121]. Управление строится в два этапа. Сначала задается траектория вблизи требуемой – например, в окрестности орбитальной ориентации – в виде

$$\alpha = a_1 \sin u + a_2 \cos u + a_3 \sin 2u + a_4 \cos 2u,$$

$$\beta = b_1 \sin u + b_2 \cos u + b_3 \sin 2u + b_4 \cos 2u,$$

$$\gamma = g_1 \sin u + g_2 \cos u + g_3 \sin 2u + g_4 \cos 2u,$$

где углы задают не ориентацию КА относительно орбитальной системы, а угловую траекторию, на которой должен находиться КА. Эта траектория является периодической, так что отсутствует необходимость ее постоянного расчета на борту. Далее коэффициенты траектории выбираются так, чтобы доставить минимум функционалу, характеризующему направление управляющего момента на этой траектории. Например, можно использовать функционал

$$\Phi_1 = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{n=1}^N \phi_n^2} \rightarrow \min,$$

$\phi_n = (\mathbf{M}_{yup} / |\mathbf{M}_{yup}|, \mathbf{B} / |\mathbf{B}|)$ . На втором этапе управления строится закон управления с обратной связью, обеспечивающий отслеживание найденной траектории. Здесь используется управление (6.1.1), в котором в качестве ошибки ориентации и скорости следует брать ориентацию КА относительно построенной программной траектории и скорость относительно программной, вычисленной как производные углов ориентации траектории. Для поиска коэффициентов усиления строится отдельная процедура метода роя, в которой также минимизируется проекция потребного управляющего момента на вектор геомагнитной индукции. Например,

$$\Phi_2 = \left( \sum_{n=1}^N \left( (\boldsymbol{\omega}_{omn}^T \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{M}_{yup}^T \mathbf{B}) \right)^2 + \sum_{n=1}^N \left( (\mathbf{S}^T \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{M}_{yup}^T \mathbf{B}) \right)^2 \right) \rightarrow \min,$$

где  $\omega_{отн}$  – скорость КА относительно требуемой. В работе [166] рассмотрено применение нескольких других функционалов для поиска управления.

Четвертый подход к управлению описан в [10,106] и основан на методике, разработанной в [105]. Проводится линеаризация уравнений движения в окрестности требуемой ориентации и вводится специальная замена, переводящая систему с периодическими коэффициентами в систему с постоянными коэффициентами большей размерности. Для этой системы строится линейно-квадратичный регулятор. Далее вводятся дополнительные переменные, необходимые для обратного перехода к исходным переменным, и сам переход. Таким образом удастся получить управление, заданное уже в связанной с КА системе координат.

Перейдем к сравнению описанных подходов к управлению\*. Примем следующие параметры моделирования:

- Моменты инерции КА 0.15 (вариант 1) или 0.2 (вариант 2), 0.13, 0.11 кг·м<sup>2</sup>;
- Высота орбиты 550 км, наклонение 57°;
- Размеры КА для расчета аэродинамического момента 10, 20, 30 см, смещение центра масс относительно центра давления 1 см по второй оси связанной системы;
- Случайное и постоянно действующие возмущения на уровне 10<sup>-9</sup> Н·м;
- Возможна ошибка знания главных моментов инерции до 5% от номинальных значений.

Стабилизация происходит в орбитальной системе координат. Выбраны два тензора инерции, соответствующие КА с относительно равномерным распределением масс и несколько вытянутому КА.

Приведем сначала результаты, полученные по методике раздела 6.1. На Рис. 6.3.1 приведены мультипликаторы линеаризованной системы для варианта 1.

---

\* Во втором подходе используются коды математического моделирования, написанные лично автором. При этом матрица коэффициентов усиления, используемая в моделировании, рассчитана Я.В. Маштаковым и У.В. Монаховой совместно с автором диссертации. В третьем подходе используются графики, полученные А.С. Охитиной и С.С. Ткачевым совместно с автором диссертации. В четвертом подходе используются коды математического моделирования и построения управления, написанные лично автором диссертации в соответствии с методикой, описанной В.М. Морозовым и В.И. Каленовой в их публикациях.

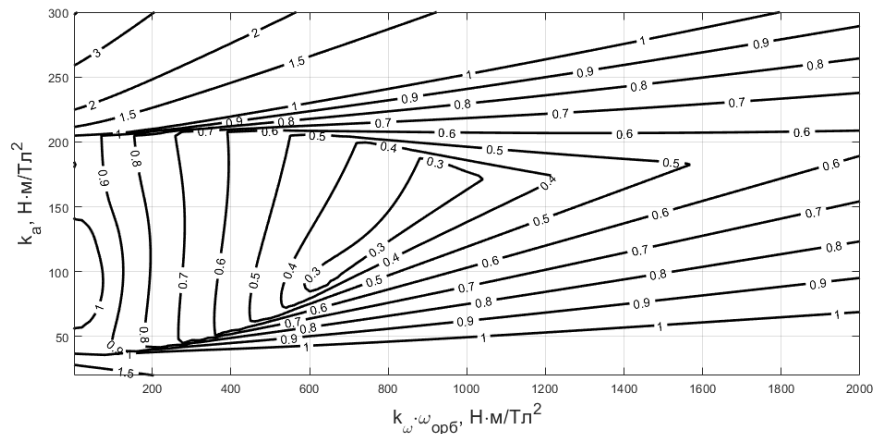


Рис. 6.3.1. Выбор коэффициентов усиления для Ляпуновского управления

Для моделирования были выбраны коэффициенты усиления  $800/\omega_{\text{орб}}$   $\text{Н}\cdot\text{м}/\text{Тл}^2$ ,  $150 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{Тл}^2$ . На Рис. 6.3.2 приведены аналогичные результаты для варианта 2.

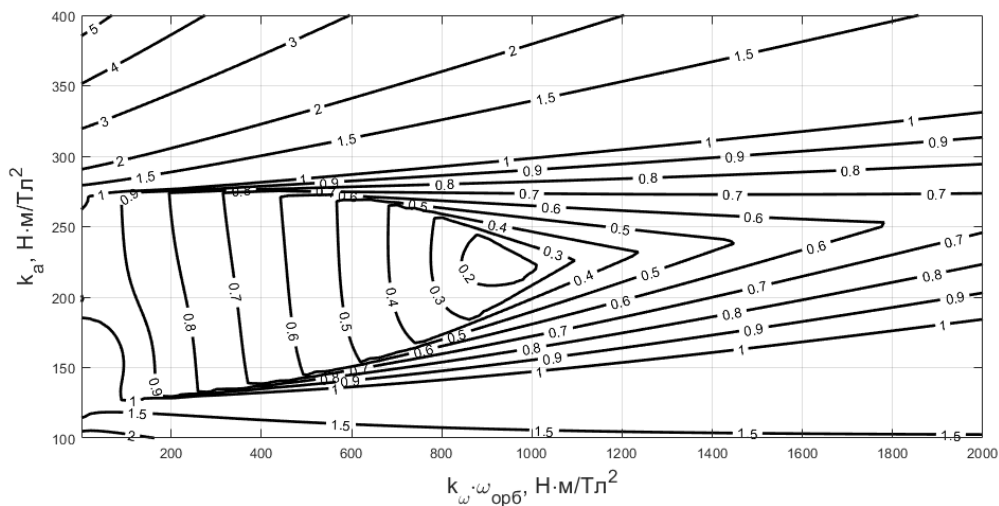


Рис. 6.3.2. Выбор коэффициентов управления для КА с существенно разными моментами инерции

Для этого случая по результатам моделирования были выбраны коэффициенты  $360/\omega_{\text{орб}}$   $\text{Н}\cdot\text{м}/\text{Тл}^2$ ,  $220 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{Тл}^2$ . Коэффициенты, таким образом, существенно смещены влево по сравнению с наилучшими, даваемыми Рис. 6.3.2. Это связано с существенно отличными моментами инерции, что негативно сказывается на работе алгоритма стабилизации раздела 6.1. На Рис. 6.3.3 приведен пример моделирования для варианта 2 при точном знании моментов инерции КА, а на Рис. 6.3.4 – при наличии ошибки знания моментов инерции.

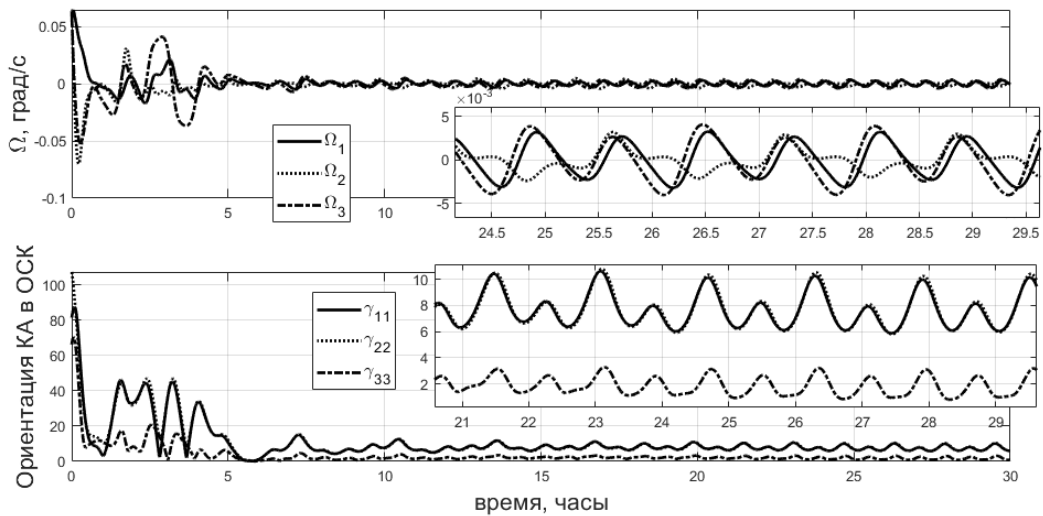


Рис. 6.3.3. Работа управления с обратной связью

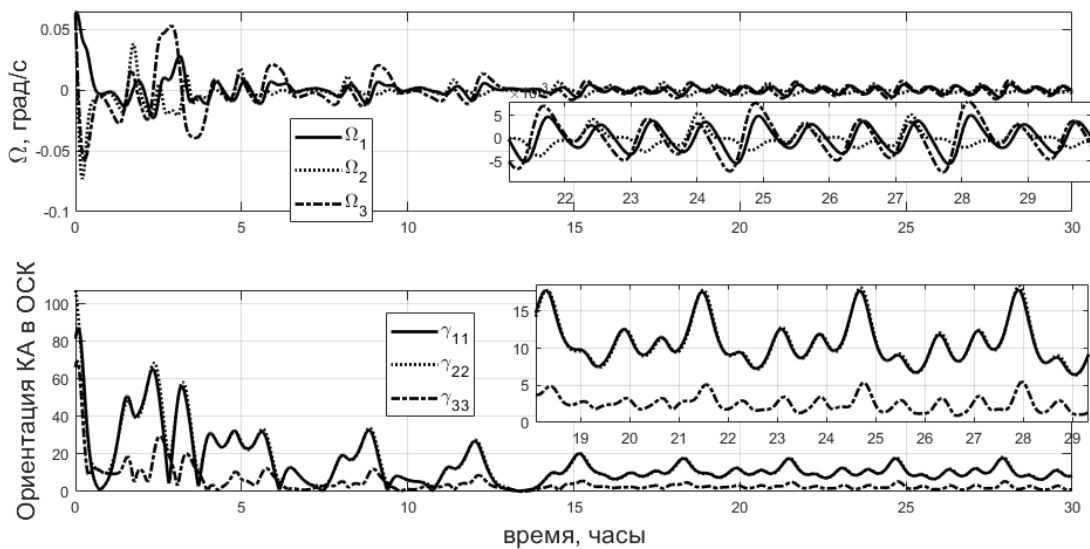


Рис. 6.3.4. Работа управления с обратной связью при наличии ошибки в моментах инерции

Точность стабилизации оказывается на уровне около  $12^\circ$  для точного знания моментов инерции КА и  $18^\circ$  при наличии ошибки в моментах инерции. Это связано с существенной чувствительностью областей устойчивости на Рис. 6.3.1 и 6.3.2 даже к небольшому изменению моментов инерции. В целом точность в рассмотренном примере оказалась на ожидаемом для управления (6.1.1) уровне в 10-15 градусов. Для варианта 1 – КА с относительно равномерным распределением масс – точности оказываются около 7 и 10 градусов соответственно. Применение управления на скользящих режимах приводит к аналогичным результатам.

При использовании второй методики точность оказывается существенно ниже.

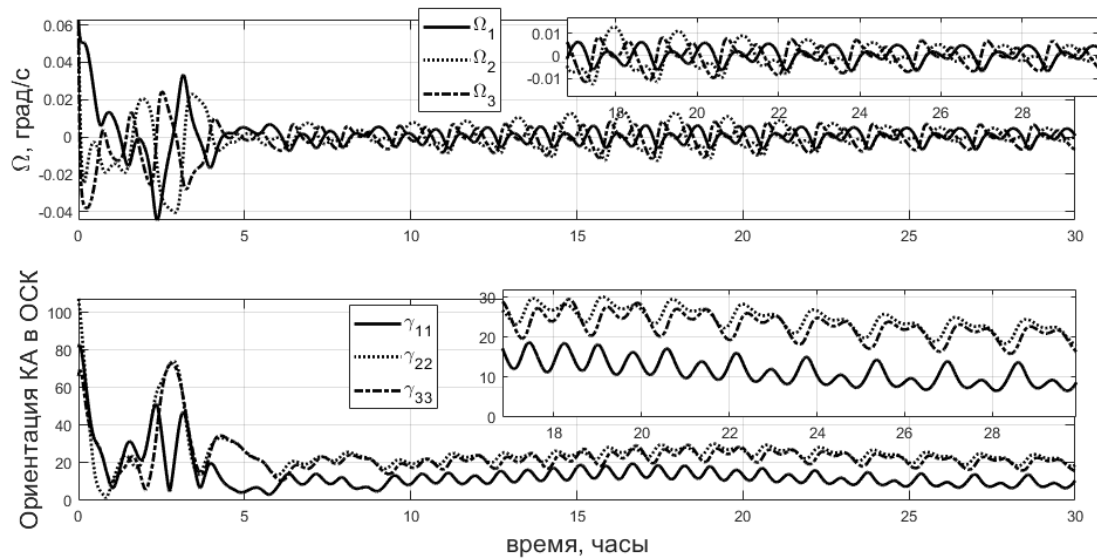


Рис. 6.3.5. Работа модифицированного Ляпуновского управления

Точность стабилизации, даже при точном знании моментов инерции, составляет  $30^\circ$ . У второго метода, однако, есть качественное преимущество в работоспособности в двух специфических ситуациях: в случае сильно вытянутого КА и при стабилизации в косом положении в орбитальных осях, тогда как обычное управление на основе функции Ляпунова в этих ситуациях зачастую не работает.

Третий подход, основанный на методе роя частиц, показывает наилучшие показатели точности стабилизации. На Рис. 6.3.6 приведен результат моделирования для варианта 2 с учетом неточности знания моментов инерции, точность оказывается около 6 градусов.

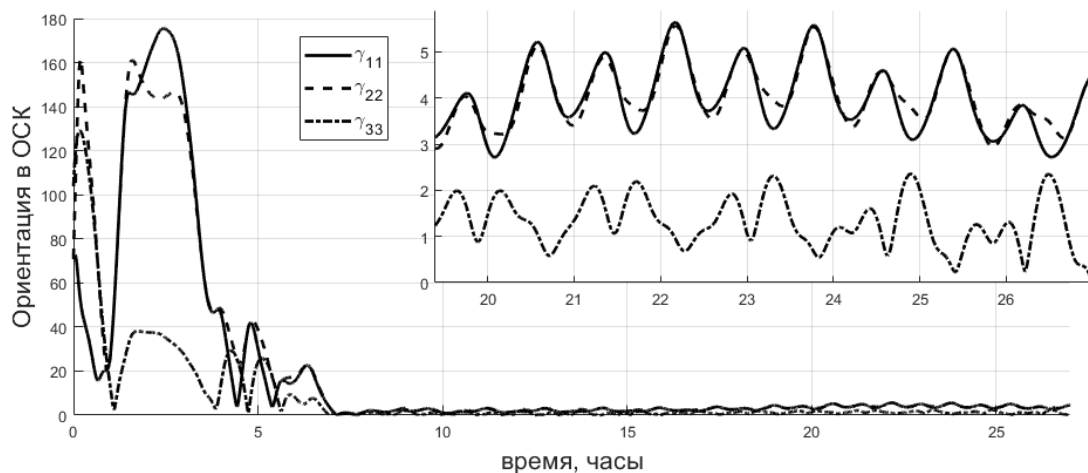


Рис. 6.3.6. Работа метода роя частиц

Рассмотрим теперь метод, основанный на построении линейно-квадратичного регулятора для расширенной линейной системы с постоянными коэффициентами.

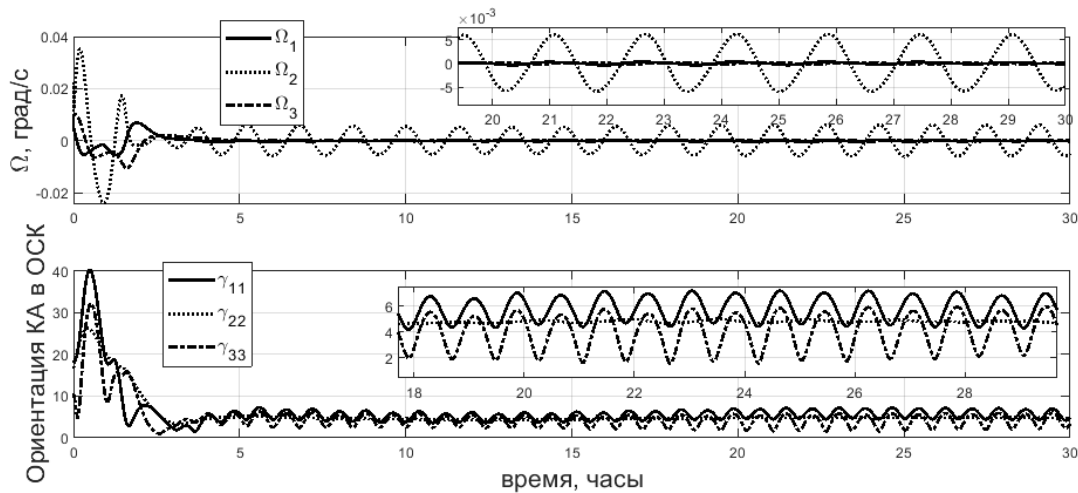


Рис. 6.3.7. Стабилизация с помощью линейно-квадратичного регулятора

Рис. 6.3.7 получен без учета ошибки знания тензора инерции. Точность стабилизации оказывается аналогичной использованию управления (6.1.1), так как оба метода являются, по сути, управлением с обратной связью. У линейно-квадратичного регулятора, предложенного в [10], обнаружилось два существенных недостатка: невозможность стабилизации не из линейной окрестности и высокая чувствительность к неточности знания тензора инерции.

Подведем итог сравнения разных методов трехосной стабилизации КА:

- Управление на основе функции Ляпунова простое в реализации, обеспечивает точность около 10 градусов для КА с близкими моментами инерции, около 18 градусов для КА с заметно отличающимися моментами инерции, но не работает при сильном отличии в моментах инерции (например, для 3U кубсата);
- Модификация этого метода, использующая матрицу коэффициентов усиления позиционной части, обеспечивает существенно худшую точность, но работает в случае сильного отличия между моментами инерции КА и при стабилизации в косом положении в орбитальных осях;
- Управление с построением специальной траектории с помощью метода роя частиц обеспечивает наилучшую точность – около 6 градусов – но требует существенных расчетов и регулярного (каждые несколько витков) обновления параметров траектории и стабилизирующего управления на борту КА;
- Линейно-квадратичный регулятор показывает ту же точность, что и управление на основе функции Ляпунова, но работает только в линейной окрестности.

### **Заключение**

В Главе 6 рассмотрено движение КА в режиме трехосной стабилизации. Для управления с обратной связью показано, что устойчивая стабилизация возможна как в инерциальном пространстве, так и в орбитальных осях. Предложена конструктивная методика выбора параметров управления. Разработан алгоритм управления на основе скользящего режима, обеспечивающий переориентацию КА по траектории, на которой управляющий момент практически перпендикулярен вектору геомагнитной индукции. Проведено сравнение с другими подходами к построению трехосного магнитного управления.

### Заключение и выводы

В диссертационной работе изучена динамика КА с активной магнитной системой ориентации в ключевых режимах движения. Предложены новые перспективные алгоритмы управления движением. Получены приближенные решения уравнений движения КА под управлением активной магнитной системы ориентации и выражения для различных характеристик движения. Результаты работы существенно дополняют общую теорию управляемого движения КА. Полученные в диссертации результаты позволяют значительно сократить время анализа и подбора параметров системы ориентации КА на этапе эскизного проектирования, предоставляя при этом общее понимание динамики его управляемого движения, связи параметров движения и параметров спутника и его системы ориентации. Результаты работы использовались и используются на успешно запущенных аппаратах Чибис-М, ТаблетСат-Аврора, СириусСат СХВН-2, Зоркий, аппаратах, разрабатываемых АО РКС, АО ИСС им. М.Ф. Решетнева, АО ВНИИЭМ, ООО Спутникс. Получены следующие конкретные результаты:

- Для движения КА в режиме гашения угловой скорости в переходном процессе получено решение эволюционных уравнений в квадратурах и явный вид решения для сферически-симметричного спутника. Установлена экспоненциальная зависимость времени переходных процессов от наклона орбиты. Изучена зависимость времени переходного процесса от начальной ориентации вектора кинетического момента. В установившемся режиме выявлено, что аппарат выходит на вращение вокруг нормали к плоскости орбиты осью максимального момента инерции со скоростью, близкой к  $9/5$  орбитальной. Получена оценка отклонения оси вращения от нормали к плоскости орбиты.
- Для КА с тангажным маховиком в переходном режиме, когда КА выходит на режим ориентации осью установки маховика по нормали к плоскости орбиты, получены приближенные выражения для характеристических показателей системы с периодическими коэффициентами. Проведено сравнение трех основных алгоритмов демпфирования. Показано, что алгоритм  $-\dot{V}$ , обычно наименее эффективный, в данной задаче является предпочтительным. Разработана численно-аналитическая методика поиска амплитуд периодических колебаний для установившегося движения в плоскости полярной орбиты и движений, рождающихся из плоских на приполярной орбите. Показана устойчивость таких движений.



- В движении быстро вращающегося КА с ротором, компенсирующим кинетический момент корпуса аппарата, предложено управление, поддерживающее ориентацию оси вращения по касательной к орбите в полусвязанной системе координат. Показана устойчивость требуемого режима движения, проведена адаптация алгоритма к условиям применения в контуре системы управления. Для движения на низкой орбите, когда существенное влияние оказывает восстанавливающий аэродинамический момент, для описанного режима движения найдены аналоги характеристических показателей и приближенное решение, показывающее переход КА в требуемое положение.
- Для стабилизируемого вращением КА проведено исследование переходных процессов при применении трех алгоритмов активной магнитной ориентации: гашения нутационных колебаний, поддержания скорости вращения и переориентации оси вращения в инерциальном пространстве. Эволюционные уравнения решены в квадратурах. Рассмотрено движение вблизи требуемого режима. Для линеаризованных эволюционных уравнений получено выражение для амплитуды нутационных колебаний. Для алгоритма ориентации на Солнце по рассогласованию вектора угловой скорости исследована устойчивость возникающих положений равновесия, выявлены значения параметров, которые препятствуют стабилизации КА в расчетном положении. Получены выражения, показывающие влияние недиагональных элементов тензора инерции на уровень нутационных колебаний в свободном движении. Рассмотрено влияние магнитного демпфирования, получены выражения для эволюции амплитуд нутационных колебаний и выражение для остаточного неустраняемого уровня колебаний.
- Для движения КА в режиме стабилизации на Солнце под управлением алгоритма  $S_{dot}$  исследовано поведение аппарата вблизи требуемой ориентации. Введены новые эволюционные переменные, свободные от вырождения в требуемом режиме движения и включающие в себя амплитуды колебаний оси максимального момента инерции относительно вектора кинетического момента. Получено решение усредненных эволюционных уравнений в квадратурах. Предложены и исследованы с помощью численного моделирования две схемы доработки алгоритма  $S_{dot}$ , снимающие проблемы неоднозначности ориентации КА и потери скорости вращения.
- Для движения КА в режиме трехосной стабилизации под управлением алгоритма с обратной связью показано, что устойчивая стабилизация возможна как в инерциальном пространстве, так и в орбитальных осях. Предложена конструктивная численно-

аналитическая методика выбора параметров управления. Разработан алгоритм управления на основе скользящего режима, обеспечивающий переориентацию КА по траектории, на которой управляющий момент практически перпендикулярен вектору геомагнитной индукции. Проведено сравнение разных подходов к обеспечению трехосной ориентации КА.

**Библиография**

1. Fischell R.E. Magnetic damping of the angular motions of Earth satellites // American Rocket Society Journal. 1961. Vol. 31, № 9. P. 1210–1217.
2. Grasshoff L.H. A method for controlling the attitude of a spin-stabilized satellite // ARS Journal. 1961. Vol. 31, № 5. P. 646–649.
3. Белецкий В.В., Зонов Ю.В. Вращение и ориентация третьего советского спутника // Сборник “Искусственные спутники Земли”. АН СССР, 1961. № 7. с. 32–55.
4. Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Магнитные системы ориентации ИСЗ // Итоги науки и техники, Серия Исследование космического пространства, Т. 23. Москва: ВИНТИ, 1985. 104 с.
5. Овчинников М.Ю., Пеньков В.И., Ролдугин Д.С., Иванов Д.С. Магнитные системы ориентации малых спутников. Москва: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. 368 с.
6. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S. A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites // Progress in Aerospace Sciences. 2019. Vol. 109. P. 100546.
7. Polat H.C., Virgili-Llop J., Romano M. Survey, statistical analysis and classification of launched cubesat missions with emphasis on the attitude control method // Journal of Small Satellites. 2016. Vol. 5, № 3. P. 513–530.
8. Bhat S.P. Controllability of nonlinear time-varying systems: applications to spacecraft attitude control using magnetic actuation // IEEE Transactions on Automatic Control. 2005. Vol. 50, № 11. P. 1725–1735.
9. Bhat S.P., Dham A.S. Controllability of spacecraft attitude under magnetic actuation // 42nd IEEE International Conference on Decision and Control. Maui, HI, USA: IEEE, 2003. Vol. 3. P. 2383–2388.
10. Морозов В.М., Каленова В.И. Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации // Космические исследования. 2020. Т. 58, № 3. с. 199–207.
11. Yang Y. Controllability of spacecraft using only magnetic torques // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2016. Vol. 52, № 2. P. 954–961.
12. Liu S., Huang Q. Controllability and observability of discretized satellite magnetic attitude control system // AIMS Mathematics. 2023. Vol. 8, № 4. P. 7899–7916.
13. Stickler A.C. A magnetic control system for attitude acquisition // Ithaco, Inc., report N 90345. 1972.

14. Stickler A.C., Alfriend K.T. Elementary magnetic attitude control system // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1976. Vol. 13, № 5. P. 282–287.
15. Яншин А.М. Торможение вращения проводящих оболочек геомагнитным полем // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1988. № 1. с. 170–176.
16. Мартыненко Ю.Г. Влияние вихревых токов на вращение и ориентацию спутника // *Космические исследования*. 1985. Т. 23, № 3. с. 347–357.
17. Белецкий В.В., Грушевский А.В. Эволюция осевых вращений спутника под действием диссипативного магнитного момента // *Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР*. 1990. № 136. 22 с.
18. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Оценка влияния диссипативного магнитного момента от вихревых токов на быстрое вращение спутника // *Космические исследования*. 1982. Т. 20, № 2. с. 297–300.
19. Lovera M. Magnetic satellite detumbling: The b-dot algorithm revisited // *Proceedings of the American Control Conference*. Chicago, 2015. P. 1867–1872.
20. Драновский В.И., Яншин А.М. Влияние диссипативных моментов от вихревых токов на ориентацию спутника, стабилизированного вращением // *Космические исследования*. 1975. Т. 13, № 4. с. 487–493.
21. Сазонов В.В., Сарычев В.А. Влияние диссипативного магнитного момента на вращение спутника относительно центра масс // *Изв. АН СССР, Мех. тв. тела*. 1983. Т. 2. с. 3–12.
22. Avanzini G., Giulietti F. Magnetic detumbling of a rigid spacecraft // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2012. Vol. 35, № 4. P. 1326–1334.
23. Wisniewski R., Blanke M. Fully magnetic attitude control for spacecraft subject to gravity gradient // *Automatica*. 1999. Vol. 35, № 7. P. 1201–1214.
24. Семкин Н.Д., Любимов В.В., Малышев В.И. Моделирование законов функционирования магнитных исполнительных органов при ориентации микроспутника по местной вертикали // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2012. Т. 15, № 1. с. 103–108.
25. Глухов В.И., Макеич С.Г., Нехамкин Л.И., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Рябиков В.С., Туманов М.В. Способ ориентации космического аппарата и устройство для реализации способа. Патент № 2618664. РФ, 2016.
26. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Tkachev S.S., Penkov V.I. B-dot algorithm steady-state motion performance // *Acta Astronautica*. 2018. Vol. 146. P. 66–72.

27. Roldugin D.S., Ovchinnikov M.Y., Ivanov D.S., Shachkov M.O., Koptev M.D., Pantsyrnyi O.A., Fedorov I.O. Saving mission yet to be launched: Tight schedule for an unexpected project // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2018. Vol. 163. P. 377–391.
28. Ovchinnikov M.Y., Ivanov D.S., Ivlev N.A., Karpenko S.O., Roldugin D.S., Tkachev S.S. Development, integrated investigation, laboratory and in-flight testing of Chibis-M microsatellite ADCS // *Acta Astronautica*. 2014. Vol. 93. P. 23–33.
29. Иванов Д.С., Ивлев Н.А., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Ткачев С.С. Результаты летных испытаний системы ориентации микроспутника Чибис-М // *Космические исследования*. 2014. Т. 52, № 3. с. 218–228.
30. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Карпенко С.О., Пеньков В.И. Исследование быстродействия алгоритма активного магнитного демпфирования // *Космические исследования*. 2012. Т. 50, № 2. с. 176–183.
31. Иванов Д.С., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Ткачев С.С. Испытания алгоритмов управления ориентацией микроспутника “Чибис-М” на лабораторном стенде // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2012. № 1. с. 118–137.
32. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников // *Итоги науки и техники. Серия: Исследование космического пространства*. Т.11. М: ВИНТИ, 1978. 221 с.
33. Goel P.S., Rajaram S. Magnetic attitude control of a momentum-biased satellite in near-equatorial orbit // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1979. Vol. 2, № 4. P. 334–338.
34. Guelman M., Waller R., Shiryayev A., Psiaki M. Design and testing of magnetic controllers for Satellite stabilization // *Acta Astronautica*. 2005. Vol. 56, № 1–2. P. 231–239.
35. Martel F., Pal P.K., Psiaki M. Active magnetic control system for gravity gradient stabilized spacecraft // *Proceedings of the 2nd Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites*. Logan, USA, 1988. P. 1–19.
36. Pittelkau M.E. Optimal periodic control for spacecraft pointing and attitude determination // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1993. Vol. 16, № 6. P. 1078–1084.
37. Hablani H.B. Comparative stability analysis and performance of magnetic controllers for bias momentum satellites // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1995. Vol. 18, № 6. P. 1313–1320.
38. Lovera M., Astolfi A. Spacecraft attitude control using magnetic actuators // *Automatica*.

2004. Vol. 40, № 8. P. 1405–1414.
39. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I. Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study // *Acta Astronautica*. 2015. Vol. 110. P. 279–286.
  40. Tregouet J.-F., Arzelier D., Peaucelle D., Ebihara Y., Pittet C., Falcoz A. Periodic H2 synthesis for spacecraft attitude control with magnetorquers and reaction wheels // *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. Orlando, FL, USA : IEEE, 2011. P. 6876–6881.
  41. Calloni A., Corti A., Zanchettin A.M., Lovera M. Robust attitude control of spacecraft with magnetic actuators // *2012 American Control Conference (ACC)*. Montreal: IEEE, 2012. P. 750–755.
  42. Wang P., Shtessel Y. Satellite attitude control via magnetorquers using switching control laws // *IFAC Proceedings Volumes*. 1999. Vol. 32, № 2. P. 8021–8026.
  43. Desouky M.A.A., Prabhu K., Abdelkhalik O. On spacecraft magnetic attitude control // *Space Flight Mechanics Meeting*. Reston, Virginia, 2018. P. AIAA 2018-0205.
  44. de Ruiter A. Magnetic control of dual-spin and bias-momentum spacecraft // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2012. Vol. 35, № 4. P. 1158–1168.
  45. de Angelis E.L., Giulietti F., de Ruiter A.H.J., Avanzini G. Spacecraft attitude control using magnetic and mechanical actuation // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2016. Vol. 39, № 3. P. 564–573.
  46. Forbes J.R., Damaren C.J. Geometric approach to spacecraft attitude control using magnetic and mechanical actuation // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2010. Vol. 33, № 2. P. 590–595.
  47. Doroshin A.V. Analytical solutions for dynamics of dual-spin spacecraft and gyrostat-satellites under magnetic attitude control in omega-regimes // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017. Vol. 96. P. 64–74.
  48. Болдырев В.В., Ильгасов П.А., Панцов В.Ю., Прохоров Ю.Н., Стрельников Н.И., Черный И.В., Чернявский Г.М., Яковлев В.В., Барсуков И.А. Микроволновый сканер/зондировщик МТВЗА-ГЯ КА “МЕТЕОР-М” №1 // *Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ*. 2008. Т. 107. с. 22–25.
  49. Морозов В.М., Каленова В.И. Стабилизация относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов с учетом аэродинамических сил // *Космические исследования*. 2022. Т. 60, № 3. с. 246–253.
  50. Roberson R.E. Attitude control of a satellite vehicle—an outline of the problems // *VIIIth*

- International Astronautical Congress. Barcelona, 1958. P. 317–339.
51. Wall J.K. The feasibility of aerodynamic attitude stabilization of a satellite vehicle // American Rocket Society Preprints. 1959. № 787.
  52. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S. Magnetic attitude control and periodic motion for the in-orbit rotation of a dual-spin satellite // Acta Astronautica. 2021. Vol. 186. P. 203–210.
  53. Ovchinnikov M.Y., Penkov V.I., Roldugin D.S., Tkachev S.S. Single axis stabilization of a fast rotating satellite in the orbital frame using magnetorquers and a rotor // Acta Astronautica. 2020. Vol. 173. P. 195–201.
  54. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S. Comparison of two magnetic damping laws for the attitude acquisition of a dual spin satellite // International Journal of Space Science and Engineering. 2019. Vol. 5, № 4. P. 369–383.
  55. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Пеньков В.И., Варатарая Р., Рябиков В.С. Движение спутника, оснащенного тангажным маховиком и магнитными катушками, в гравитационном поле // Космические исследования. 2017. Т. 55, № 3. с. 218–225.
  56. Sternberg S., Schnapf A. Performance and evaluation of satellites Tiros I and Tiros II // ARS Journal. 1961. Vol. 31, № 11. P. 1495–1505.
  57. Коваленко А.П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. Москва: Машиностроение, 1975. 248 с.
  58. Avanzini G., de Angelis E.L., Giulietti F. Spin-axis pointing of a magnetically actuated spacecraft // Acta Astronautica. 2014. Vol. 94, № 1. P. 493–501.
  59. de Ruiter A. A fault-tolerant magnetic spin stabilizing controller for the JC2Sat-FF mission // Acta Astronautica. 2011. Vol. 68, № 1–2. P. 160–171.
  60. Alfriend K.T. Magnetic attitude control system for dual-spin satellites // AIAA Journal. 1975. Vol. 13, № 6. P. 817–822.
  61. Wheeler P.C. Spinning spacecraft attitude control via the environmental magnetic field // Journal of Spacecraft and Rockets. 1967. Vol. 4, № 12. P. 1631–1637.
  62. Ergin E.I., Wheeler P.C. Magnetic attitude control of a spinning satellite // Journal of Spacecraft and Rockets. 1965. Vol. 2, № 6. P. 846–850.
  63. Shigehara M. Geomagnetic attitude control of an axisymmetric spinning satellite // Journal of Spacecraft and Rockets. 1972. Vol. 9, № 6. P. 391–398.
  64. Ильин А.А., Пеньков В.И., Овчинников М.Ю. Обеспечение ориентации малого спутника, стабилизируемого собственным вращением // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2004. № 83. 28 с.

65. Chasset C., Berge S., Bodin P., Jakobson B. 3-axis magnetic control with multiple attitude profile capabilities in the PRISMA mission // 57th International Astronautical Congress. Valencia, 2006. Paper IAC-06-C1.2.3.
66. Thomson W.T. Spin stabilization of attitude against gravity torque // *Journal of Astronautical Science*. 1962. Vol. 9, № 1. P. 31–33.
67. Kane T.R., Marsh E.L., Wilson W.G. Letter to the editor // *Journal of the Astronautical Sciences*. 1962. Vol. 9. P. 108–109.
68. Pringle R. Bounds on the librations of a symmetrical satellite // *AIAA Journal*. 1964. Vol. 2, № 5. P. 908–912.
69. Артюхин Ю.П., Каргу Л.И., Симаев В.Л. Системы управления космических аппаратов, стабилизированных вращением. Москва: Наука, 1979. 295 с.
70. Thomson W.T., Reiter G.S. Motion of an asymmetric spinning body with internal dissipation // *AIAA Journal*. 1963. Vol. 1, № 6. P. 1429–1430.
71. Wheeler P. Two-pulse attitude control of an asymmetric spinning satellite; Appendix - Effect of nodal regression upon bank and yaw error // *Guidance and Control Conference*. Reston, Virginia, 1963.
72. Haseltine W.R. Passive damping of wobbling satellites: general stability theory and example // *Journal of the Aerospace Sciences*. 1962. Vol. 29, № 5. P. 543–549.
73. Metzger R. A simple stability criterion for spinning satellites with flexible appendages // *Automatica*. 1980. Vol. 16, № 5. P. 481–486.
74. McIntyre J.E., McIntyre J.M. Some effects of propellant motion on the performance of spinning satellites // *Acta Astronautica*. 1982. Vol. 9, № 11. P. 645–661.
75. Di Gennaro S. Output stabilization of flexible spacecraft with active vibration suppression // *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 2003. Vol. 39, № 3. P. 747–759.
76. Gasbarri P., Sabatini M., Pisculli A. Dynamic modelling and stability parametric analysis of a flexible spacecraft with fuel slosh // *Acta Astronautica*. 2016. Vol. 127. P. 141–159.
77. Huo J., Meng T., Song R., Jin Z. Adaptive prediction backstepping attitude control for liquid-filled micro-satellite with flexible appendages // *Acta Astronautica*. 2018. Vol. 152. P. 557–566.
78. Xu S., Cui N., Fan Y., Guan Y. Flexible satellite attitude maneuver via adaptive sliding mode control and active vibration suppression // *AIAA Journal*. 2018. Vol. 56, № 10. P. 4205–4212.
79. Thakur D., Srikant S., Akella M.R. Adaptive attitude-tracking control of spacecraft with



- uncertain time-varying inertia parameters // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2015. Vol. 38, № 1. P. 41–52.
80. Hess J.A., Swenson E.D., Leve F., Black J., Goff G.M. Adaptive estimation of nonlinear spacecraft attitude dynamics with time-varying moments of inertia using on-board sensors // *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. Reston, Virginia, 2016.
81. Hu Q., Xiao L., Wang C. Adaptive fault-tolerant attitude tracking control for spacecraft with time-varying inertia uncertainties // *Chinese Journal of Aeronautics*. 2019. Vol. 32, № 3. P. 674–687.
82. Ashayeri L., Doustmohammadi A., Fani Saberi F. Fault-tolerant control of flexible satellite with infinite-dimensional model // *Advances in Space Research*. 2021. Vol. 68, № 1. P. 43–53.
83. Thomson W.T. *Introduction to space dynamics*. Dover, 1986. 357 p.
84. Попов В.И. Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов. Москва: Машиностроение, 1977. 183 с.
85. Devey W.J., Field C.F., Flook L. An active nutation control system for spin stabilised satellites // *IFAC Proceedings Volumes*. 1975. Vol. 8, № 1. P. 345–354.
86. Ролдугин Д.С. Устойчивость стабилизации космического аппарата в направлении Солнца магнитными исполнительными органами на солнечно-синхронной орбите // *Космические исследования*. 2023. Т. 61, № 2. с. 1–9.
87. Roldugin D.S., Ovchinnikov M.Y. Wobble of a spin stabilized satellite with cross products of inertia and magnetic attitude control // *Advances in Space Research*. 2023. Vol. 71, № 1. P. 408–419.
88. Roldugin D.S., Testani P. Spin-stabilized satellite magnetic attitude control scheme without initial detumbling // *Acta Astronautica*. 2014. Vol. 94, № 1. P. 446–454.
89. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I. Asymptotic study of a complete magnetic attitude control cycle providing a single-axis orientation // *Acta Astronautica*. 2012. Vol. 77. P. 48–60.
90. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Пеньков В.И. Исследование связки трех алгоритмов магнитного управления угловой скоростью и ориентацией спутника, стабилизируемого вращением // *Космические исследования*. 2012. Т. 50, № 4. с. 326–334.
91. Roldugin D.S., Testani P. Active magnetic attitude control system for sun-pointing of a spin-stabilized satellite without initial detumbling // *Advances in the Astronautical Sciences*.

2012. Vol. 145. P. 669–688.
92. Roldugin D., Ovchinnikov M. Terminal one axis stabilization properties of a spinning satellite employing simple magnetic attitude control // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, № 6. P. 1530.
  93. Карпенко С.О. Исследование движения спутника с активной магнитной системой ориентации по информации от солнечного датчика. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2021. 120 с.
  94. Jan Y.W., Tsai J.-R. Active control for initial attitude acquisition using magnetic torquers // *Acta Astronautica*. 2005. Vol. 57, № 9. P. 754–759.
  95. Kim J., Worrall K. Sun tracking controller for UKube-1 using magnetic torquer only // *IFAC Proceedings Volumes*. 2013. Vol. 46, № 19. P. 541–546.
  96. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Tkachev S.S., Karpenko S.O. New one-axis one-sensor magnetic attitude control theoretical and in-flight performance // *Acta Astronautica*. 2014. Vol. 105, № 1. P. 12–16.
  97. Karpenko S.O., Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Tkachev S.S. One-axis attitude of arbitrary satellite using magnetorquers only // *Cosmic Research*. 2013. Vol. 51, № 6. P. 478–484.
  98. Ролдугин Д.С. Моделирование сценариев однозначной магнитной стабилизации космического аппарата на Солнце по данным солнечных датчиков // *Математическое моделирование*. 2023. Т. 35, № 3. с. 20–34.
  99. Roldugin D., Tkachev S., Ovchinnikov M. Asymptotic Motion of a Satellite under the Action of Sdot Magnetic Attitude Control // *Aerospace*. 2022. Vol. 9, № 11. Paper 639.
  100. Roldugin D.S., Tkachev S.S., Ovchinnikov M.Y. Satellite angular motion under the action of Sdot magnetic one axis sun acquisition algorithm // *Cosmic Research*. 2021. Vol. 59, № 6. P. 529–536.
  101. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Боргес Р.А., Каппелетти Ш., Баттистини С. Моделирование движения макета космического аппарата на аэродинамическом подвесе для отработки режима одноосной стабилизации магнитными катушками // *Математическое моделирование*. 2019. Т. 31, № 11. с. 36–46.
  102. Lovera M., Astolfi A. Global magnetic attitude control of inertially pointing spacecraft // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2005. Vol. 28, № 5. P. 1065–1072.
  103. Chasset C., Noteborn R., Bodin P., Larsson R., Jakobsson B. 3-Axis magnetic control: flight

- results of the TANGO satellite in the PRISMA mission // *CEAS Space Journal*. 2013. Vol. 5, № 1–2. P. 1–17.
104. Bodin P., Larsson R., Nilsson F., Chasset C., Noteborn R., Nylund M. PRISMA: an in-orbit test bed for guidance, navigation, and control experiments // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2009. Vol. 46, № 3. P. 615–623.
105. Каленова В.И., Морозов В.М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 207 с.
106. Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г. Стабилизация стационарных движений спутника около центра масс в геомагнитном поле // *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*. 2023. Часть 1: Т. 220, с. 71-85, Часть 2: Т. 221, с. 71-92, Часть 3: Т. 222, с. 42-63, Часть 4: Т. 223, с. 84-106, Часть 5: Т. 224, с. 115-124.
107. Rossa F.D., Bergamasco M., Lovera M. Bifurcation analysis of the attitude dynamics for a magnetically controlled spacecraft // *51st IEEE Conference on Decision and Control*. Maui, HI, USA: IEEE, 2012. P. 1154–1159.
108. Ivanov D.S., Ovchinnikov M.Y., Penkov V.I., Roldugin D.S., Doronin D.M., Ovchinnikov A.V. Advanced numerical study of the three-axis magnetic attitude control and determination with uncertainties // *Acta Astronautica*. 2017. Vol. 132. P. 103–110.
109. Celani F. Robust three-axis attitude stabilization for inertial pointing spacecraft using magnetorquers // *Acta Astronautica*. 2015. Vol. 107. P. 87–96.
110. Bruni R., Celani F. A robust optimization approach for magnetic spacecraft attitude stabilization // *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2017. Vol. 173, № 3. P. 994–1012.
111. Wood M., Chen W. Attitude control of magnetically actuated satellites with an uneven inertia distribution // *Aerospace Science and Technology*. 2013. Vol. 25, № 1. P. 29–39.
112. Mashtakov Y.V., Ovchinnikov M.Y., Wöske F., Rievers B., List M. Attitude determination & control system design for gravity recovery missions like GRACE // *Acta Astronautica*. 2020. Vol. 173. P. 172–182.
113. Wang P., Shtessel Y., Wang Y. -q. Satellite attitude control using only magnetorquers // *Proceedings of the Thirtieth Southeastern Symposium on System Theory*. Morgantown, West Virginia, 1998. P. 500–504.
114. Wisniewski R. Sliding mode attitude control for magnetic actuated satellite // *IFAC Proceedings Volumes*. 1998. Vol. 31, № 21. P. 179–184.

115. Sofyali A., Jafarov E.M. Purely magnetic spacecraft attitude control by using classical and modified sliding mode algorithms // 12th International Workshop on Variable Structure Systems. Mumbai: IEEE, 2012. P. 117–123.
116. Sofyali A., Jafarov E.M. Integral sliding mode control of small satellite attitude motion by purely magnetic actuation // IFAC Proceedings Volumes. 2014. Vol. 47, № 3. P. 7947–7953.
117. Sofyali A., Jafarov E.M., Wisniewski R. Robust and global attitude stabilization of magnetically actuated spacecraft through sliding mode // Aerospace Science and Technology. 2018. Vol. 76. P. 91–104.
118. Janardhanan S., Nabi M., Tiwari P.M. Attitude control of magnetic actuated spacecraft using super-twisting algorithm with nonlinear sliding surface // 2012 12th International Workshop on Variable Structure Systems. IEEE, 2012. P. 46–51.
119. Schlanbusch R., Kristiansen R., Nicklasson P.J. Spacecraft magnetic control using dichotomous coordinate descent algorithm with box constraints // Modeling, Identification and Control. 2010. Vol. 31, № 4. P. 123–131.
120. Kennedy J., Eberhart R. Particle swarm optimization // Proceedings of International Conference on Neural Networks. IEEE, 1995. Vol. 4. P. 1942–1948.
121. Okhitina A., Roldugin D., Tkachev S. Application of the PSO for the construction of a 3-axis stable magnetically actuated satellite angular motion // Acta Astronautica. 2022. Vol. 195. P. 86–97.
122. Okhitina A., Roldugin D., Tkachev S., Ovchinnikov M. Academy transaction note “Closed form solution for a minimum deviation magnetically controllable satellite angular trajectory” // Acta Astronautica. 2023. Vol. 203. P. 60–64.
123. Roldugin D.S., Ivanov D.S., Tkachev S.S., Zharkih R.N., Kudryavtsev A. Flight experimentation with magnetic attitude control system of SiliusSat-1&2 nanosatellites // Advances in the Astronautical Sciences. 2020. Vol. 173. P. 449–462.
124. Roldugin D.S., Guerman A.D., Ivanov D.S., Ovchinnikov M.Y. Three-axis magnetic control for a nanosatellite: practical limitations due to a residual dipole moment // Advances in the Astronautical Sciences. 2020. Vol. 173. P. 427–436.
125. Guerman A.D., Ivanov D.S., Roldugin D.S., Tkachev S.S., Okhitina A.S. Infante maritime surveillance satellite // Advances in the Astronautical Sciences. 2020. Vol. 173. P. 617–623.
126. Ivanov D., Ovchinnikov M., Roldugin D. Three-Axis Attitude Determination Using Magnetorquers // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2018. Vol. 41, № 11. P. 2455–2462.

127. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I., Tkachev S.S., Mashtakov Y.V. Fully magnetic sliding mode control for acquiring three-axis attitude // *Acta Astronautica*. 2016. Vol. 121. P. 59–62.
128. Ovchinnikov M.Y., Penkov V.I., Roldugin D.S., Guerman A.D. Active magnetic attitude control system providing three-axis inertial attitude // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2015. Vol. 153. P. 2569–272.
129. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Ivanov D.S., Penkov V.I. Choosing control parameters for three axis magnetic stabilization in orbital frame // *Acta Astronautica*. 2015. Vol. 116. P. 74–77.
130. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. Москва: Наука, 1967. 472 с.
131. Арнольд В.И., Нейштадт А.И., Козлов В.В. Динамические системы-3 / под ред. Арнольд В.И. Москва: ВИНТИ, 1985. 303 с.
132. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. 408 с.
133. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. Москва: Наука, 1969. 379 с.
134. Красильников П.С. Прикладные методы исследования нелинейных колебаний. Москва: URSS, 2015. 528 с.
135. Артемьев Н.А. Метод определения характеристических показателей и приложение его к двум задачам небесной механики // *Известия АН СССР. Серия математическая*. 1944. Т. 8, № 2. с. 61–100.
136. Малкин И.Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 248 с.
137. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. Москва: Наука, 1972. 720 с.
138. Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Ткачев С.С., Трофимов С.П., Шестаков С.А., Ширококов М.Г. Программный комплекс для моделирования орбитального и углового движения спутников // *Математическое моделирование*. 2019. Т. 31, № 12. с. 44–56.
139. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Москва: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. 630 с.

140. Ovchinnikov M.Y., Penkov V.I., Roldugin D.S., Pichuzhkina A.V. Geomagnetic field models for satellite angular motion studies // *Acta Astronautica*. 2018. Vol. 144. P. 171–180.
141. Гаусс К.Ф. Избранные труды по земному магнетизму. Ленинград: АН СССР, 1952. 343 с.
142. Яновский Б.М. Земной магнетизм. Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1978. 592 с.
143. Alken P. et al. International Geomagnetic Reference Field: the thirteenth generation // *Earth, Planets and Space*. 2021. Vol. 73, № 1. P. 49.
144. Antipov K.A., Tikhonov A.A. Multipole models of the geomagnetic field: Construction of the Nth approximation // *Geomagnetism and Aeronomy*. 2013. Vol. 53, № 2. P. 257–267.
145. Белецкий В.В., Новогребельский А.Б. Существование устойчивых относительных равновесий искусственного спутника в модельном магнитном поле // *Астрономический журнал*. 1973. Т. 50, № 2. с. 327–335.
146. Zajac E.E. Some simple solutions relating to magnetic attitude control of satellites // 4th US National Congress on Applied Mechanics. Berkeley, 1962. P. 449–456.
147. Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // *Прикладные математика и механика*. 1963. Т. 27, № 3. с. 473–483.
148. Белецкий В.В., Яншин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наукова Думка, 1984. 187 с.
149. Гребеников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. Москва: Наука, 1986. 256 с.
150. Тер-Крикоров А.М. Курс математического анализа : Учеб. пособие для студентов физ.-мат. и инж.-физ. специальностей вузов. Москва: МФТИ, 2000. 716 с.
151. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. Москва: Наука, 1965. 414 с.
152. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 496 с.
153. Гантмахер Ф.Р. Теория Матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.
154. Румянцев В.В. Об устойчивости движения гироскопов // *Прикладная математика и механика*. 1961. Т. 25, № 1. с. 9–16.
155. Utkin V.I. Sliding modes in control and optimization. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 286 p.
156. Каленова В.И., Морозов В.М. О влиянии диссипативных и гироскопических сил на устойчивость одного класса линейных нестационарных систем // *Прикладная*

математика и механика. 2013. Т. 77, № 3. с. 386–397.

157. Овчинников М.Ю. Периодические движения осесимметричного гравитационно-ориентированного спутника с демпфером // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1982. № 90. 28 с.
158. Артемьев Н.А. Исследование осуществимости периодических движений // Известия АН СССР. Серия математическая. 1941. Т. 5, № 2. с. 127–158.
159. Busch S., Bangert P., Dombrovski S., Schilling K. UWE-3, in-orbit performance and lessons learned of a modular and flexible satellite bus for future pico-satellite formations // Acta Astronautica. 2015. Vol. 117. P. 73–89.
160. Inamori T., Sako N., Nakasuka S. Magnetic dipole moment estimation and compensation for an accurate attitude control in nano-satellite missions // Acta Astronautica. 2011. Vol. 68, № 11–12. P. 2038–2046.
161. Ильин А.А. Динамика быстро вращающихся малых спутников в геомагнитном поле. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006. 151 с.
162. Inamori T., Sako N., Nakasuka S. Compensation of time-variable magnetic moments for a precise attitude control in nano- and micro-satellite missions // Advances in Space Research. 2011. Vol. 48, № 3. P. 432–440.
163. Зелёный Л.М. и др. Академический микроспутник Чибис-М // Космические исследования. 2014. Т. 52, № 2. с. 93–105.
164. Красильников П.С. Об усреднении дифференциальных уравнений с двумя независимыми малыми параметрами // Доклады академии наук. 2011. Т. 3, № 436. с. 332–335.
165. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 432 с.
166. Okhitina A.S., Tkachev S.S., Roldugin D.S. Comparative cost functions analysis in the construction of a reference angular motion implemented by magnetorquers // Aerospace. 2023. Vol. 10, № 5. Paper 468.
167. Каленова В.И., Морозов В.М. Стабилизация положения относительного равновесия спутника при помощи магнитных и лоренцевых моментов // Космические исследования. 2021. Т. 59, № 5. с. 393–407.
168. Александров А.Ю., Тихонов А.А. Электродинамическое управление с распределенным запаздыванием для стабилизации исз на экваториальной орбите // Космические исследования. 2022. Т. 60, № 5. с. 404–412.

169. Александров А.Ю., Андриянова Н.Р., Тихонов А.А. Метод усреднения в задаче о лоренцевой стабилизации непрямого положения равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8, № 1. с. 123–137.
170. Aleksandrov A.Y., Tikhonov A.A. Application of a PID-like control to the problem of triaxial electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the orbital frame // Aerospace Science and Technology. 2022. Vol. 127. Paper 107720.
171. Aleksandrov A., Tikhonov A.A. Monoaxial electrodynamic stabilization of an artificial earth satellite in the orbital coordinate system via control with distributed delay // IEEE Access. 2021. Vol. 9. P. 132623–132630.
172. Giri D.K., Sinha M. Three-axis attitude control of Earth-pointing isoinertial magneto-Coulombic satellites // International Journal of Dynamics and Control. 2017. Vol. 5, № 3. P. 644–652.
173. Giri D.K., Sinha M. Finite-time continuous sliding mode magneto-coulombic satellite attitude control // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2016. Vol. 52, № 5. P. 2397–2412.
174. Булгаков Б.В. Прикладная теория гироскопов. Москва: Гостехиздат, 1939. 258 с.
175. Белецкий В.В. Эволюция вращения динамически-симметричного спутника // Космические исследования. 1963. Т. 1, № 3. с. 339–385.
176. Платонов А.К., Иванов Д.С. Методы обработки измерений: учеб. пособие. М.: МФТИ, 2013. 107 с.



### Приложение. Основные обозначения

Обозначения систем координат:

$OY$	Связана с осью вращения Земли и восходящим узлом орбиты КА
$OZ$	Связана с моделью упрощенного диполя
$OP$	Связана с нормалью к орбите и восходящим узлом орбиты КА
$OS$	Связана с некоторым направлением в инерциальном пространстве (обычно на Солнце)
$OX$	Орбитальная система
$Ox$	Связанная система
$O\tilde{x}$	Полусвязанная система (оси Резаля)
$OL$	Связана с вектором кинетического момента

Обозначения, единые для всей работы:

$\mathbf{m}$	управляющий дипольный момент	$\mathbf{M}$	управляющий механический момент
$\mathbf{B}$	вектор индукции	$u$	аргумент широты (безразмерное время)
$\mathbf{b}$	безразмерный вектор индукции	$\mathbf{e}_k$	орты связанной системы координат
$i$	наклонение орбиты, мнимая единица	$k$	коэффициент усиления управления
$B_0$	характерная величина поля в модели прямого диполя	$\omega$	абсолютная угловая скорость спутника
$\tilde{\mathbf{x}}$	вектор в полусвязанной системе координат	$\Omega$	угловая скорость спутника относительно орбитальной системы координат
$B'_0$	величина вектора индукции в упрощенной модели	$M_{xk}$	компоненты момента, причем « $x$ » определяет систему координат
$\Theta$	угол полураствора конуса упрощенной модели поля	$B_k$	компоненты безразмерного вектора индукции
$\alpha, \beta, \gamma$	самолетные углы (последовательность 2-3-1)	$\mathbf{A}$	матрица ориентации связанной системы относительно опорной

<b>J</b>	тензор инерции	$A, B, C$	главные моменты инерции
<b>h</b>	кинетический момент ротора	$h$	величина кинетического момента ротора
$M_{gp}$	гравитационный момент	$M_{aэpo}$	аэродинамический момент
$M_{возм}$	возмущающий момент неизвестной природы	$\omega_{orb}$	орбитальная скорость
$W_x$	матрица векторного произведения на вектор $x$	$\omega_{orb}$	величина орбитальной скорости
$(q_c, \mathbf{q})$	кватернион ориентации	$\varphi, \psi, \theta$	углы ориентации осей системы $Ox$ относительно $OL$
<b>Q</b>	матрица перехода $OL \rightarrow OZ$	<b>D</b>	матрица перехода $Ox \rightarrow OL$
$\rho, \sigma$	углы ориентации вектора кинетического момента в инерциальном пространстве	$\bar{M}_x$	безразмерный момент
$l$	безразмерный кинетический момент	$L_0$	начальный кинетический момент спутника
$\varepsilon$	малый параметр	$\gamma_{kk}$	углы между осями связанной и опорной систем координат
$\lambda_j$	характеристические числа	$\omega_0$	скорость вращения вокруг заданной оси
$\Phi_k$	собственный вектор	$\Psi_k$	поправка к собственному вектору
$J_r$	момент инерции ротора	$\bar{A} = A + J_r$	момент инерции КА и ротора
$\tau = \omega_0 t$	безразмерное время	$\omega_r$	скорость вращения ротора
$k$	коэффициент усиления управления	$\Omega_r$	безразмерная скорость вращения ротора
$q = \cos^2 \Theta, p = 1/2 \sin^2 \Theta, \chi = \left( \frac{\sqrt{1+3\sin^2 i} - 1}{\sqrt{3} \sin i} \right)^2, v = \frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2 i}},$ $\operatorname{tg} \Theta = \frac{3 \sin 2i}{2(1 - 3 \sin^2 i + \sqrt{1+3\sin^2 i})} \quad (\Theta \approx i)$			

<p>Соотношения между моментами инерции и их комбинации с безразмерным кинетическим моментом маховика:</p> $\theta_A = C/A, \theta'_A = A/C, \theta_B = C/B, \lambda_A = (B-C)/A, \lambda_B = (C-A)/B, \lambda_C = (B-A)/C,$ $h_A = h/A\omega_{орб}, h_C = h/C\omega_{орб}, \xi_A = h_A + \lambda_A, \xi_C = h_C + \lambda_C, \mu_A = A/B$
<p>Нижний индекс «0» – значение переменной в начальный момент времени (кроме <math>\omega_0</math>)</p>

Обозначения, специфические для определенных разделов:

Глава 1:			
$B_{0incl}$	величина поля в дипольной модели	$\mathbf{k}$	единичный вектор в направлении диполя
$\mathbf{r}$	радиус-вектор центра масс спутника	$r$	расстояние от центра Земли до центра масс КА
Раздел 2.1:			
$\eta_\varphi = L_0/\omega_{орб}(1/C-1/A), \eta_\psi = L_0/A\omega_{орб}, \lambda = 1/2(1-C/A), i_0 \approx 46^\circ$			
$C_j$	коэффициенты характеристического уравнения	$\lambda_j = \mu_j + \varepsilon\eta_j$	представление характеристического числа
Раздел 2.2:			
$\kappa = \omega_0 - 2 \ll 1, \delta = \pi/2 - i$			
Раздел 3.2:			
$\kappa_A = (B-C)/A - h/2A\omega_{орб}, \kappa_B = (C-A)/B + h/2B\omega_{орб},$			
$\lambda_j = \lambda_j^{(0)} + \varepsilon\lambda_j^{(1)}$ – представление характеристического показателя невозмущенной системы			
$\mu_i$ – поправка к характеристическому показателю для периодической системы			
Раздел 3.3:			
$\zeta$ – число, характеризующее вклад позиционной части управления по сравнению с демпфирующей			
$\alpha_d$ – заданный угол поворота в плоскости орбиты			
$\alpha'$ – примерное положение КА в плоскости орбиты с учетом действия гравитационного момента			
$\mu = \varepsilon C/B \ll 1, \lambda = 3\lambda_B$			

Раздел 3.5:	
$w_j = \delta\omega_j/\omega_0$	отнесенные к требуемой компоненты отклонения угловой скорости аппарата от требуемой
$\kappa = 0.5c\rho \mathbf{V} Sd/\omega_0^2$ , $\xi = \kappa/B$	характерная величина аэродинамического момента
Раздел 4.2:	
$k_1 = k_{\text{нм}} + k_{\text{оп}}\kappa B$ , $\xi = \omega_0/\omega_{\text{об}}$ , $k = k_{\text{оп}}/k_1\omega_0$ , $\varepsilon' = \varepsilon(1 - k/\mu_A)$	
Раздел 4.4:	
$\kappa_A^2 = (A - B)/A$ , $\kappa_B^2 = (A - C)/B$ , $\kappa_C^2 = (A - B)/C$ , $\mu = \kappa_C/\kappa_B$	