На правах рукописи

Давыдов Алексей Алексеевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАЛЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Специальность 01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена в Государственном космическом научно-производственном центре им. М.В. Хруничева

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук профессор Сазонов Виктор Васильевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук профессор Мирер Сергей Александрович
	кандидат технических наук Тимаков Сергей Николаевич
Ведущая организация:	Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Защита состоится 27 марта 2012 г. в 11:00 часов на заседании Диссертационного совета Д 002.024.01 при Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН по адресу: 125047, Москва, Миусская пл., 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.

Автореферат разослан «   » _______ 201_ г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук Т.А. Полилова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одна из задач ФГУП ГКНПЦ им. М.В. Хруничева в последние годы – создание и эксплуатация малых космических аппаратов (МКА). На орбиту выведены МКА дистанционного зондирования Земли «Монитор-Э», геостационарные спутники связи «КазСат-1», «Экспресс-МД1» и «КазСат-2». В настоящее время в ГКНПЦ разрабатывается ряд новых МКА. Важной составной частью проектирования системы управления МКА является создание математической модели его вращательного движения и проверка с ее помощью предлагаемых алгоритмов управления. Ряд интересных задач, требующих применения математических моделей вращательного движения, возникает при анализе результатов летных испытаний МКА. В частности, на их основе можно создать интегральные статистические методики, позволяющие восстановить реальное движение МКА относительно центра масс по неполной или косвенной телеметрической информации.

Цель диссертации состоит в разработке математических моделей вращательного движения конкретных МКА и создании на их основе статистических методик реконструкции такого движения по телеметрической информации. Модели и методики предназначены для повышения качества процесса проектирования МКА и расширения возможностей инженерного сопровождения летных испытаний.

Научная новизна полученных результатов обусловлена уникальностью рассматриваемых МКА и новыми постановками задач, возникшими при реконструкции вращательных движений МКА в нештатных ситуациях.

Практическая ценность диссертации состоит в использовании разработанных моделей и методик при проектировании и проведении летных испытаний нескольких МКА. Полученные результаты позволили дать практические рекомендации по парированию нештатной ситуации на МКА «Монитор-Э», реконструировать вращательное движение этого МКА и МКА «КазСат-1», создать несколько математических моделей разной сложности, использовавшихся при разработке алгоритмов управления вращательным движением новых МКА.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

- X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011г.),
- XXXII, XXXIII и XXXV Академических чтениях по космонавтике (Москва, 2008, 2009 и 2011гг.),
- Международной конференции «Научные и технологические эксперименты на автоматических космических аппаратах и малых спутниках» (Самара, 2008г.),
- Научно-технической конференции «Системы управления беспилотными космическими и атмосферными летательными аппаратами» (Москва, 2010г.),

- Молодежных научно-технических конференциях «Аэрокосмическая техника: исследования, разработки, пути решения актуальных проблем» (Москва, 2007 и 2010гг.),

- Семинарах по механике космического полета им. В.А. Егорова на механико-математическом факультете МГУ. Руководители: чл.-корр. РАН В.В. Белецкий, доц. М.П. Заплетин и проф. В.В. Сазонов (Москва, 2008 и 2011гг.),

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ, в том числе 3 работы – в изданиях, входящих в перечень ВАК РФ.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из введения и четырех глав. Общий объем диссертации составляет 120 страниц.

Во **Введении** описаны решаемые задачи и кратко изложено содержание диссертации.

В **первой главе** проведено исследование режима гашения угловой скорости малого космического аппарата (далее – КА) в нештатной ситуации, вызванной невозможностью измерения компоненты угловой скорости КА вдоль одной из его связанных осей. Измерения угловой скорости использовались при управлении вращательным движением КА с помощью двигателей-маховиков. В рабочих режимах КА отсутствие измерений компенсировалось информацией, получаемой от звездного датчика. Однако при гашении достаточно большой угловой скорости использование этого датчика было невозможно. Возникла необходимость исследовать функционирование штатного алгоритма гашения угловой скорости при отсутствии измерений одной из ее компонент.

В принятой математической модели КА считается гиростатом. Он представляет собой твердое главное тело с расположенными на нем тремя двигателями-маховиками (симметричными роторами). Пусть система координат $x_1x_2x_3$ образована главными центральными осями инерции КА. В этой системе тензор инерции КА задан матрицей $\mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$, $\mathbf{H} = (h_1, h_2, h_3)$ – гиростатический момент КА (суммарный кинетический момент маховиков), $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – абсолютная угловая скорость главного тела. По физическому смыслу $I_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Оси вращения маховиков параллельны осям x_i, так что каждая компонента гиростатического момента h_i создается собственным маховиком.

В режиме гашения угловых скоростей управление кинетическим моментом маховиков описывается уравнениями $\dot{h}_i = k_i\omega_i$ $(i = 1, 2, 3)$, где k_i – положительные параметры. В нештатной ситуации измерения величины ω_3 отсутствовали, и маховик, создававший компоненту гиростатического момента h_3, не управлялся. Значение этой компоненты не менялось: $h_3 = h_{30} = \mathrm{const}$. В этой ситуации вращательное движение КА описывается уравнениями

$$\begin{gathered} I_1\dot{\omega}_1 + k_1\omega_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + h_2\omega_3 - h_{30}\omega_2\,, \\ I_2\dot{\omega}_2 + k_2\omega_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 + h_{30}\omega_1 - h_1\omega_3\,, \\ I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + h_1\omega_2 - h_2\omega_1\,, \\ \dot{h}_1 = k_1\omega_1\,, \quad \dot{h}_2 = k_2\omega_2\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь не учитываются действующие на КА внешние механические моменты и влияние вращательного движения КА на изменение собственных кинетических моментов маховиков. Такие упрощения оправданы быстротечностью процесса гашения угловой скорости и значительной величиной приложенных к маховикам управляющих моментов.

Система (1) имеет первый интеграл

$$G^2 = (I_1\omega_1 + h_1)^2 + (I_2\omega_2 + h_2)^2 + (I_3\omega_3 + h_{30})^2\,, \tag{2}$$

выражающий постоянство модуля кинетического момента КА в его движении относительно центра масс, и два семейства стационарных решений

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0\,, \quad h_1 = h_{10}\,, \quad h_2 = h_{20}\,; \tag{3}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = 0\,, \quad \omega_3 = \omega_{30}\,, \quad h_1 = h_2 = 0\,. \tag{4}$$

Здесь h_{10}, h_{20} и ω_{30} – произвольные постоянные, которые с постоянной G в решении (3) связаны соотношениями: $h_{10}^2 + h_{20}^2 + h_{30}^2 = G^2$, $(I_3\omega_{30} + h_{30})^2 = G^2$. В случае решения (4) примем $G = I_3\omega_{30} + h_{30}$.

Исследование устойчивости стационарных решений (3), (4) выполнено вторым методом Ляпунова. При построении функций Ляпунова использован тот факт, что производная функции $2T = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2$ по времени в силу системы (1) имеет вид $\dot{T} = -k_1\omega_1^2 - k_2\omega_2^2$. Вследствие существования у системы (1) первого интеграла (2) асимптотическая устойчивость решений (3), (4) невозможна. Можно доказать только их условную асимптотическую устойчивость или асимптотическую устойчивость по части переменных. Ограничимся случаем $G \neq 0$.

Начнем с решения (4). Будем говорить, что это решение условно асимптотически устойчиво, если любое решение системы (1), начальные условия которого лежат в достаточно малой окрестности точки (4) и на той же самой поверхности интеграла (2), стремится к (4) при $t \to +\infty$. Чтобы исследовать такую устойчивость, можно с помощью интеграла (2) при $G = I_3\omega_{30} + h_{30}$ исключить ω_3 из системы (1) и исследовать обычную асимптотическую устойчивость стационарного решения $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $h_1 = h_2 = 0$ получившейся системы. В данном случае нет необходимости выполнять это понижение порядка в явном виде. Достаточно исследовать поведение функции T на поверхности интеграла (2) в окрестности точки (4) и воспользоваться результатами Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского[1]. На этой поверхности

$$2T_G = I_3\omega_{30}^2 + I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 - \omega_{30}G^{-1}\left[(I_1\omega_1 + h_1)^2 + (I_2\omega_2 + h_2)^2\right] + \cdots.$$

Здесь многоточие означает члены третьей и более высокой степени относительно ω_1, ω_2, h_1 и h_2. Возьмем функцию Ляпунова в виде $V = 2T_G - I_3\omega_{30}^2$. Ее производная по времени в силу системы, полученной из (1) исключением ω_3, имеет вид $\dot{V} = -2k_1\omega_1^2 - 2k_2\omega_2^2$. Условие положительной определенности квадратичных слагаемых V выражается неравенством $G\omega_{30} < 0$. Множество $\dot{V} = 0$ при $\omega_{30} \neq 0$ не содержит целых траекторий новой системы кроме ее тривиального стационарного решения. По теореме Барбашина – Красовского при $G\omega_{30} < 0$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ это тривиальное решение асимптотически устойчиво. Если же $G\omega_{30} > 0$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, то согласно теореме Красовского рассматриваемое тривиальное решение неустойчиво.

При исследовании устойчивости стационарного решения (3) использовано обобщение теорем Барбашина – Красовского для задачи устойчивости по части переменных[2]. Фазовые переменные системы разбиваются на две группы – переменные $\mathbf{y} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\mathbf{z} = (h_1, h_2)$. В решениях системы (1) евклидовы нормы $\|\mathbf{y}\|$ и $\|\mathbf{z}\|$ ограничены. При $I \geq \max(I_1, I_2, I_3) > 0$ имеет место неравенство $T \geq I\|\mathbf{y}\|^2$. Множество $\dot{T} = 0$ в случае, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ и $|h_{10}| + |h_{20}| > 0$ не содержит целых траекторий системы (1) кроме решения (3). Следовательно, по теоремам 19.1 и 19.2, из книги Румянцева и Озиранера это решение асимптотически **y**-устойчиво. Иными словами, в любом решении системы (1) с начальными условиями из достаточно малой окрестности точки (3) $\mathbf{y}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Посредством численного интегрирования системы (1), в диссертации построены оценки областей притяжения стационарных решений (3), (4). Для этого система (1) представлена в виде: $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$, $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. Здесь использованы векторные обозначения, введенные выше. Для любого решения системы (1) существует конечный предел $\kappa = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\|\mathbf{y}(t)\| - \|\mathbf{z}(t)\|\right)$. Значения $\kappa > 0$ имеют решения из области решения (4), значения $\kappa < 0$ – решения из области притяжения решения (3). Величина κ вычислялась приближенно для большого числа решений системы (1). Решения, для которых $\kappa \approx 0$, лежат вблизи границы, разделяющей искомые области притяжения. Как показали расчеты, эта граница располагается в малой окрестности некоторой гладкой поверхности. Указанное обстоятельство позволило получить оценки областей притяжения стационарных

[1] Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
[2] Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.

решений в пространстве каких-либо трех параметров задачи (начальных условий решения и параметров системы (1)) при фиксированных значениях остальных параметров. Пример построения искомых областей в пространстве $R^3[\omega_2(0), \omega_3(0), h_{30}]$ приведен на рис. 1. Здесь изображена поверхность, которая аппроксимирует границу, разделяющую эти области. По осям координат размерность угловой скорости – град./с, кинетического момента – Нмс.

Проведенные расчеты выявили сравнительно большой размер области притяжения стационарного решения (4). В этой области не обеспечивается полное гашение угловой скорости КА, что говорит о достаточно высокой вероятности реализации такого события. Однако было установлено, что при $h_1(0) = h_2(0) = h_{30} = 0$ движение КА всегда стремится к благоприятному стационарному решению (3). Следовательно, если процесс гашения начать после естественного выбега маховиков, то полное гашение угловой скорости КА будет обеспечено. Этот вывод подтвержден летными испытаниями.

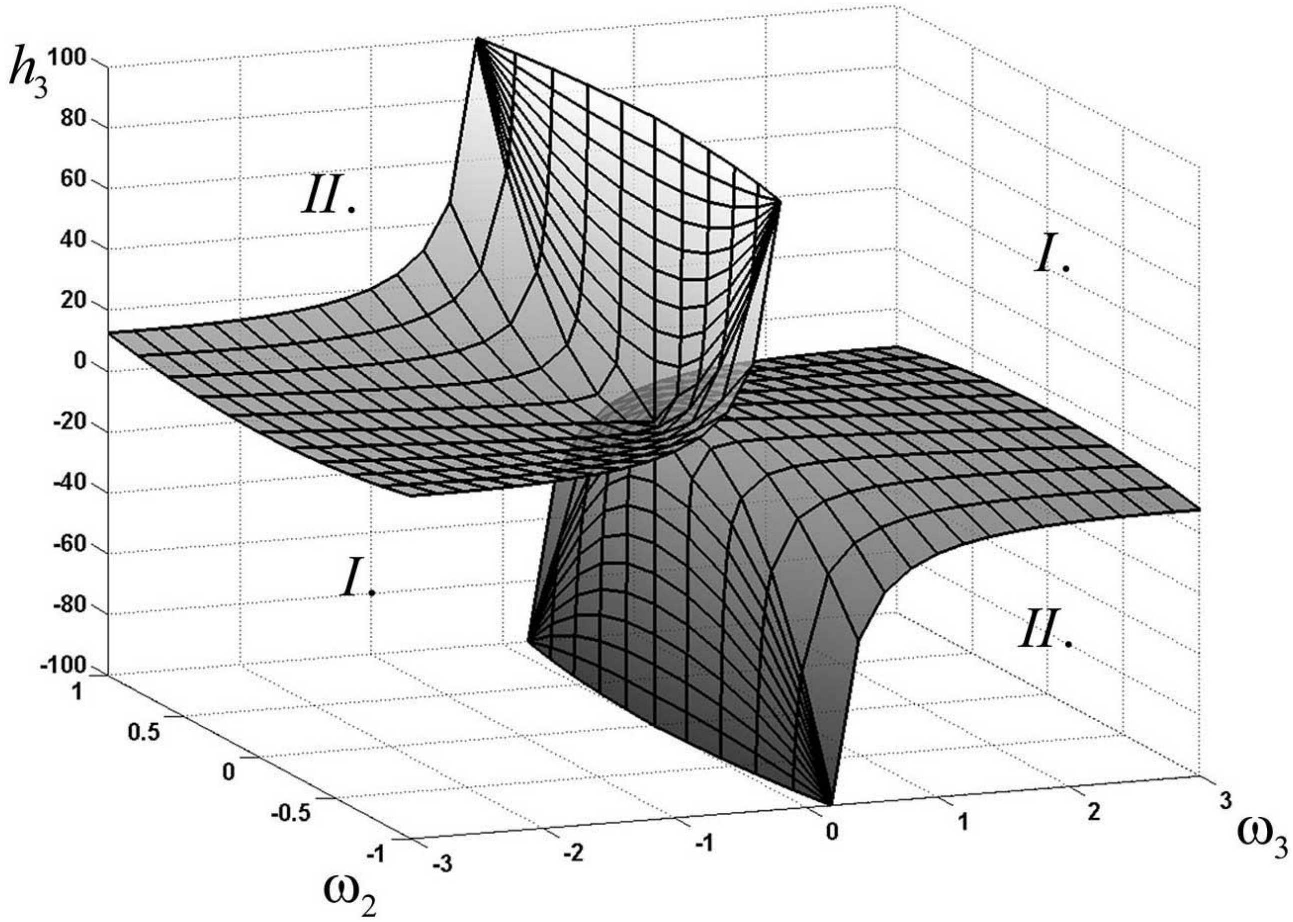

Рис. 1. Граница, разделяющая области притяжения стационарных решений; *I* – область притяжения решения (3), *II* – область притяжения решения (4).

Чтобы показать адекватность описания реального вращательного движения КА системой (1), с помощью решений этой системы была выполнена аппроксимация имеющихся телеметрических значений компонент угловой скорости и гиростатического момента, полученных в нештатной ситуации. При построении аппроксимации данных, ряд параметров системы выступал в роли параметров согласования.

Телеметрическая информация об угловой скорости КА и гиростатическом моменте КА в обработанном виде представляет собой последовательности чисел t_n, $\omega_1^{(n)}$, $\omega_2^{(n)}$, $h_1^{(n)}$, $h_2^{(n)}$ $h_3^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots N)$. Здесь $\omega_i^{(n)}$ и $h_j^{(n)}$ – приближенные значения величин ω_i, h_j в момент времени t_n, $t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_N$. Считалось, что данные телеметрии относятся к системе координат $x_1x_2x_3$. В принятой модели $h_3 = h_{30} = \mathrm{const}$, поэтому последовательность данных $h_3^{(n)}$ аппроксимировалась постоянной h_{30}.

Аппроксимация телеметрических данных строилась методом максимального правдоподобия. Телеметрические данные сглаживались соответствующими компонентами фазового вектора в решении системы (1), доставляющем минимум функционалу

$$\Phi = 2N \ln \Phi_\omega + 3N \ln \Phi_h + \ln \Phi_p ,$$

$$\Phi_\omega = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{2} [\omega_i^{(n)} - \omega_i(t_n)]^2 , \quad \Phi_h = \sum_{n=1}^{N} \left\{ \sum_{i=1}^{2} [h_i^{(n)} - h_i(t_n)]^2 + [h_3^{(n)} - h_{30}]^2 \right\}$$

$$\Phi_p = 1 + w_1[(\lambda - \lambda_0)^2 + (\mu - \mu_0)^2] + w_2 \sum_{i=1}^{2} (\kappa_i - \kappa_{i0})^2 .$$

Функционал составлен в предположении, что ошибки в данных независимы, стандартные отклонения ошибок в данных одного типа одинаковы, но неизвестны. Член с Φ_p введен для учета априорной информации об уточняемых параметрах $\lambda = I_1 / I_3$, $\mu = (I_2 - I_3)/I_1$, $\kappa_1 = k_1 / I_1$, $\kappa_2 = k_2 / I_1$ и регуляризации задачи поиска минимума. Параметрами регуляризации служили положительные коэффициенты w_1, w_2. Все уточняемые величины были объединены в вектор q. При этом $\Phi = \Phi(q)$. Аппроксимирующее решение отвечало значению $q_* = \arg\min \Phi(q)$. Минимизация $\Phi(q)$ выполнялась в несколько этапов. Сначала методом случайного поиска находилась грубая оценка q_*, затем она уточнялась методами Марквардта и Гаусса-Ньютона. Точность аппроксимации телеметрических данных и разброс в определении компонент q_* характеризовались соответствующими стандартными отклонениями.

На рис. 2 представлен пример аппроксимации телеметрических данных для одной из реализаций режима гашения угловых скоростей КА. Здесь по оси абсцисс отложено время в секундах от начала исследуемого интервала. Размерность угловой скорости – град./с, размерность кинетического момента – Нмс. Сплошные кривые – графики решения системы (1), маркерами обозначены точки $\left(t_n, \omega_i^{(n)}\right)$ и $\left(t_n, h_j^{(n)}\right)$, которые изображают аппроксимируемые телеметрические данные. Как видно из рисунка, движение КА стремится к стационарному решению (3). Оценки параметров системы (1) для приведенного интервала близки к значениям, рассчитанным по проектной документации. Стандартные отклонения ошибок аппроксимации и уточняемых параметров достаточно малы. Основываясь на результатах аппроксимации, в диссертации сделан вывод об адекватности системы (1).

Во **второй главе** решается задача реконструкции вращательного движения КА «Монитор-Э» по телеметрическим данным о токе солнечных батарей. КА считается твердым телом, геоцентрическое движение центра масс которого – Кеплерово эллиптическое. Система уравнений вращательного движения КА образована динамическими уравнениями Эйлера для компонент угловой скорости в связанной системе координат, образованной главными центральными осями инерции КА, и кинематическими уравнениями Пуассона для элементов первой и третьей строк матрицы перехода от связанной системы к орбитальной системе. Уравнения Эйлера записаны с учетом действия на КА гравитационного и восстанавливающего аэродинамического моментов.

Фактическое вращение КА аппроксимировано решениями уравнений его вращательного движения, которые найдены из условия наилучшего сглаживания с их помощью телеметрических данных о токе, снимаемом с солнечных батарей (СБ). При построении аппроксимации, наряду с начальными условиями движения КА, уточнялся ряд параметров системы уравнений движения, характеризующих отношения главных центральных моментов инерции КА, положение в связанной системе координат центра давления и направление в этой системе нормали к рабочей поверхности СБ.

Ток, вырабатываемый СБ, примерно пропорционален косинусу угла падения солнечных лучей на их светочувствительную поверхность. Эта зависимость задается формулами

$$\eta = \arccos(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}), \quad I = I_0 \max(\eta, 0),$$

где $I_0 = 45\,\text{А}$ – ток, вырабатываемый СБ на орбите Земли при перпендикулярном падении солнечных лучей на их плоскость, $\mathbf{S}$ – орт направления «Земля – Солнце», $\mathbf{n}$ – орт нормали к рабочей поверхности СБ.

Телеметрическая информация о токе СБ представляет собой последовательность чисел t_n, I_n $(n = 1, 2, ..., N)$. Здесь I_n – приближенное значение тока в момент времени t_n, $t_1 \le t_2 \le ... \le t_N$. Обработка этих данных выполнялась методом наименьших квадратов. На решениях уравнений вращательного движения КА, заданных на отрезке $t_1 \le t \le t_N$, был определен функционал

$$\Phi = \sum_{n=1}^{N} \left[I_n - I_0 \eta(t_n) \right]^2 . \quad (5)$$

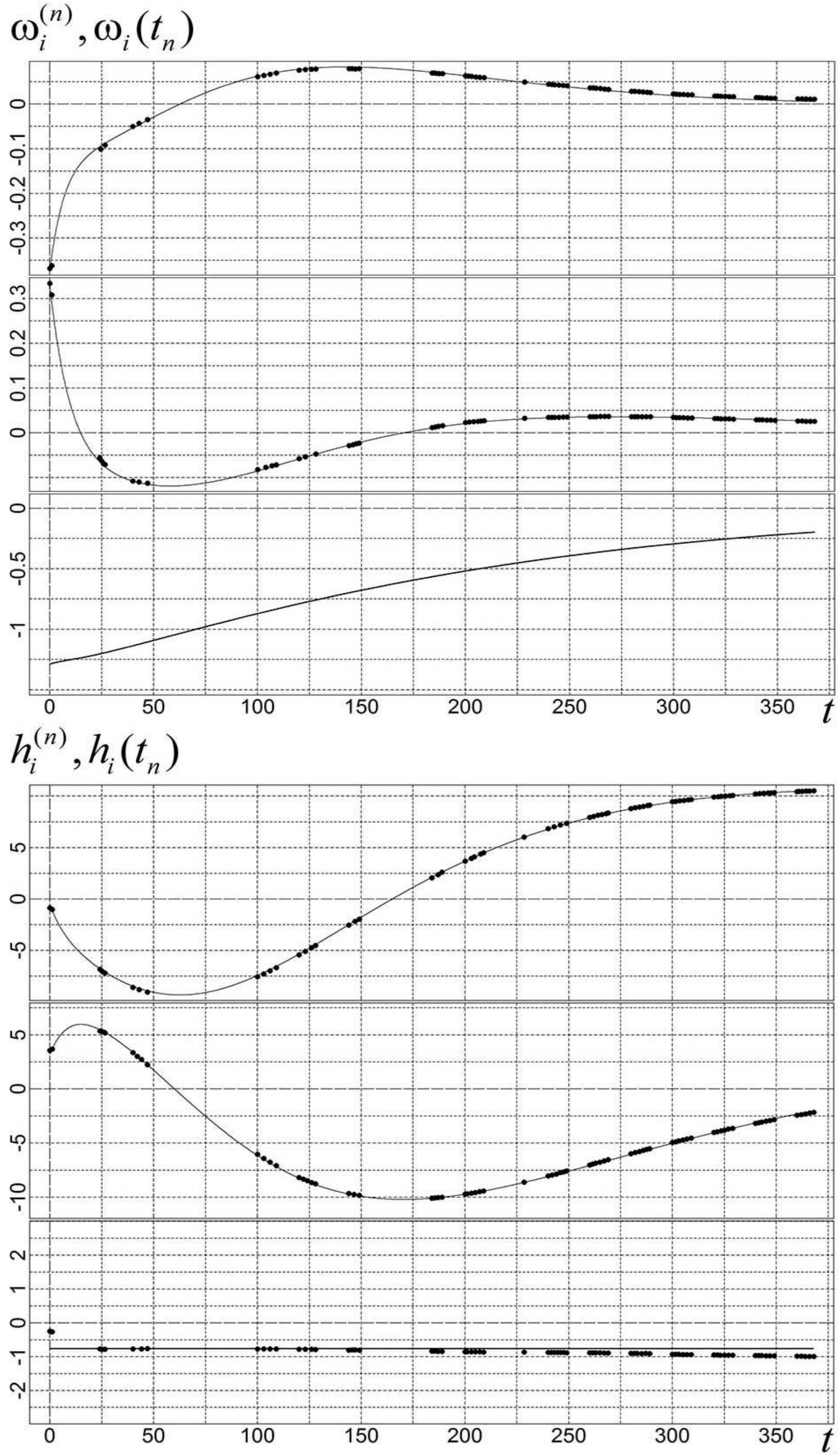

Рис. 2. Результаты аппроксимации телеметрических данных.

Аппроксимацией фактического движения КА на этом отрезке считалось решение, доставляющее такому функционалу минимум. Минимизация Ф проводилась по начальным условиям решения в точке t_1 и параметрам уравнений движения. Уточняемые величины были объединены в вектор q. Тогда $\Phi = \Phi(q)$, $q_* = \arg\min \Phi(q)$ – искомая оценка вектора q.

Минимизация функционала (5) выполнялась в несколько этапов. Сначала методом случайного поиска находилась грубая оценка q_*, затем эта оценка уточнялась методом Левенберга-Марквардта и – на заключительном этапе – методом Гаусса-Ньютона. Для поиска начального приближения q_* была введена параметризация начального углового положения КА, сокращающая число варьируемых параметров, и использован ряд дополнительных приемов. Точность аппроксимации телеметрических данных и разброс в определении компонент вектора q_* характеризовались соответствующими стандартными отклонениями, рассчитываемыми в рамках метода наименьших квадратов.

Реконструкция движения КА по данным о токе СБ была выполнена на нескольких интервалах времени. Полученные значения стандартных отклонений показали, что точность определения некоторых уточняемых параметров зависит от сложности реализовавшегося вращательного движения КА. Чем сложнее движение – тем выше точность.

На рис. 3 приведены результаты аппроксимации телеметрических данных о токе солнечных батарей решениями уравнений вращательного движения КА для одного из рассмотренных интервалов времени.

На рисунке приведено четыре графика. По оси абсцисс (единой для всех графиков) отложено время в секундах от начала реконструируемого интервала. По оси ординат на графиках (сверху вниз): данные измерений I_n (сплошная кривая) и расчетные значения $I_0\eta_n$ (обозначены маркерами) тока СБ в амперах, угловые скорости $\omega_{1,2,3}$ КА вокруг осей 1, 2 и 3 связанной с КА системы координат в град./с.

Полученные результаты позволили объяснить ряд эффектов, наблюдавшихся во время неуправляемого движения спутника и определить методику выведения КА из нештатной ситуации.

Третья глава так же, как и вторая, посвящена задаче реконструкции вращательного движения малого спутника по телеметрическим данным о токе СБ. КА – геостационарный спутник связи «КазСат-1» – считается гиростатом, совершающим свободное движение. Принятая система уравнений вращательного движения КА образована уравнениями, выражающими теорему об изменении кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс, и кинематическими соотношениями Пуассона для элементов матрицы перехода от некоторой инерциальной системы координат к связанной системе координат, образованной главными центральными осями инерции КА. Гиростатический момент КА на интервале реконструкции движения считался постоянным. Поскольку длина таких интервалов не превышала нескольких часов, ось 1 инерциальной системы координат выбиралась параллельной орту **S** направления «Земля – Солнце».

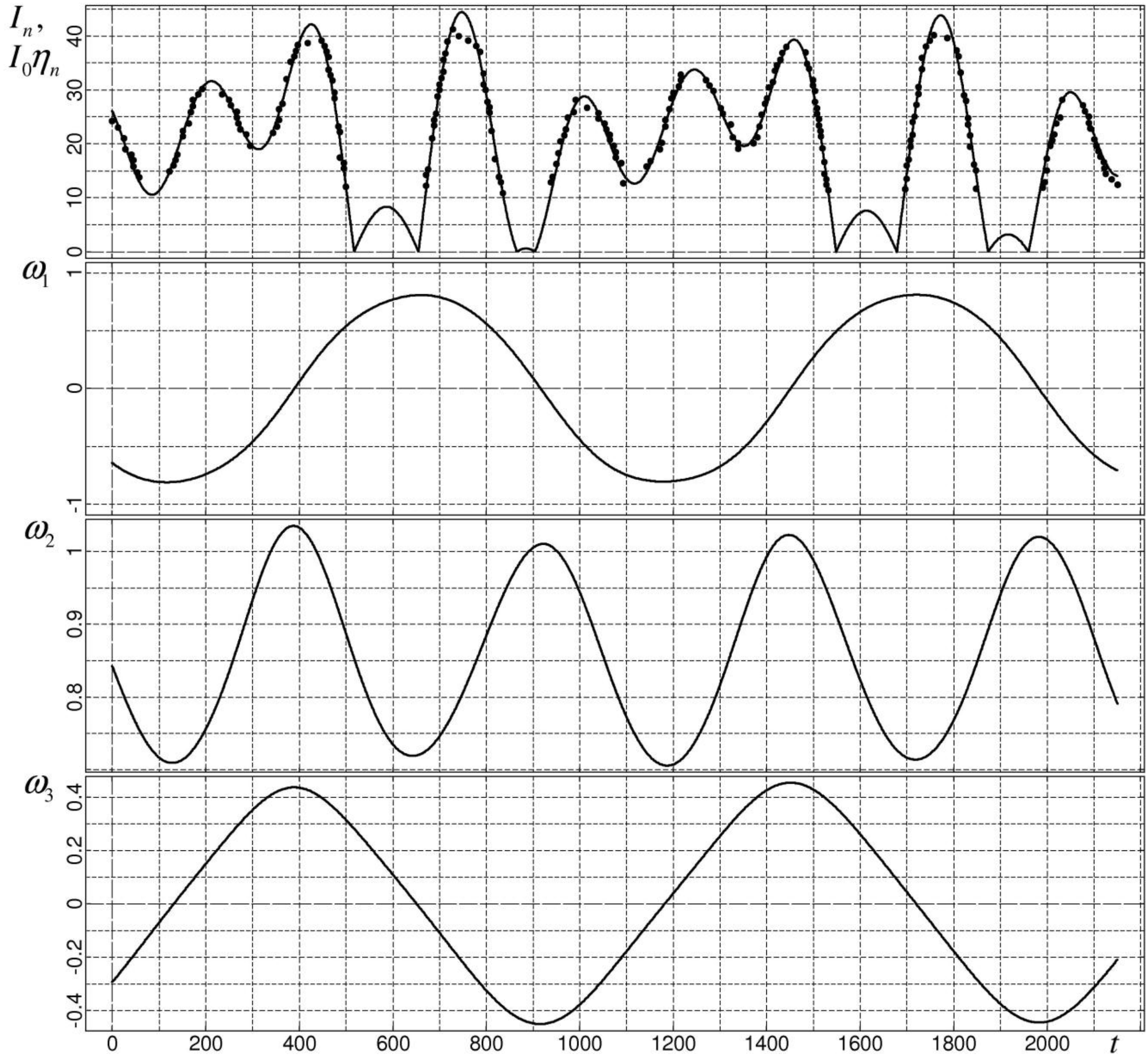

Рис. 3. Пример реконструкции движения КА.

Решения уравнений, аппроксимирующие фактическое движение КА относительно центра масс, выбирались из условия минимума функционала (5), где $I_0 = 102$ А. Инвариантность этого функционала и уравнений движения относительно поворота вокруг оси 1 инерциальной системы координат позволила уменьшить число уточняемых параметров. Функционал (5) и уравнения движения инвариантны также относительно трех дискретных преобразований симметрии, что потребовало привлечения априорной информации о реальных значениях гиростатического момента для устранения неоднозначности в реконструкции движения.

На рис. 4, организованном аналогично рис. 3, приведен пример аппроксимации телеметрических данных о токе СБ решениями уравнений вращательного движения КА для одного из обработанных интервалов времени. Реконструкция движения на нескольких интервалах времени позволила установить, что вращательное движение КА представляло собой суперпозицию быстрого вращения корпуса КА вокруг оси, малоподвижной в связанной системе координат (данная ось близка по направлению к вектору гиростатического момента), и медленного вращения этой оси вокруг вектора полного кинетического момента КА-гиростата.

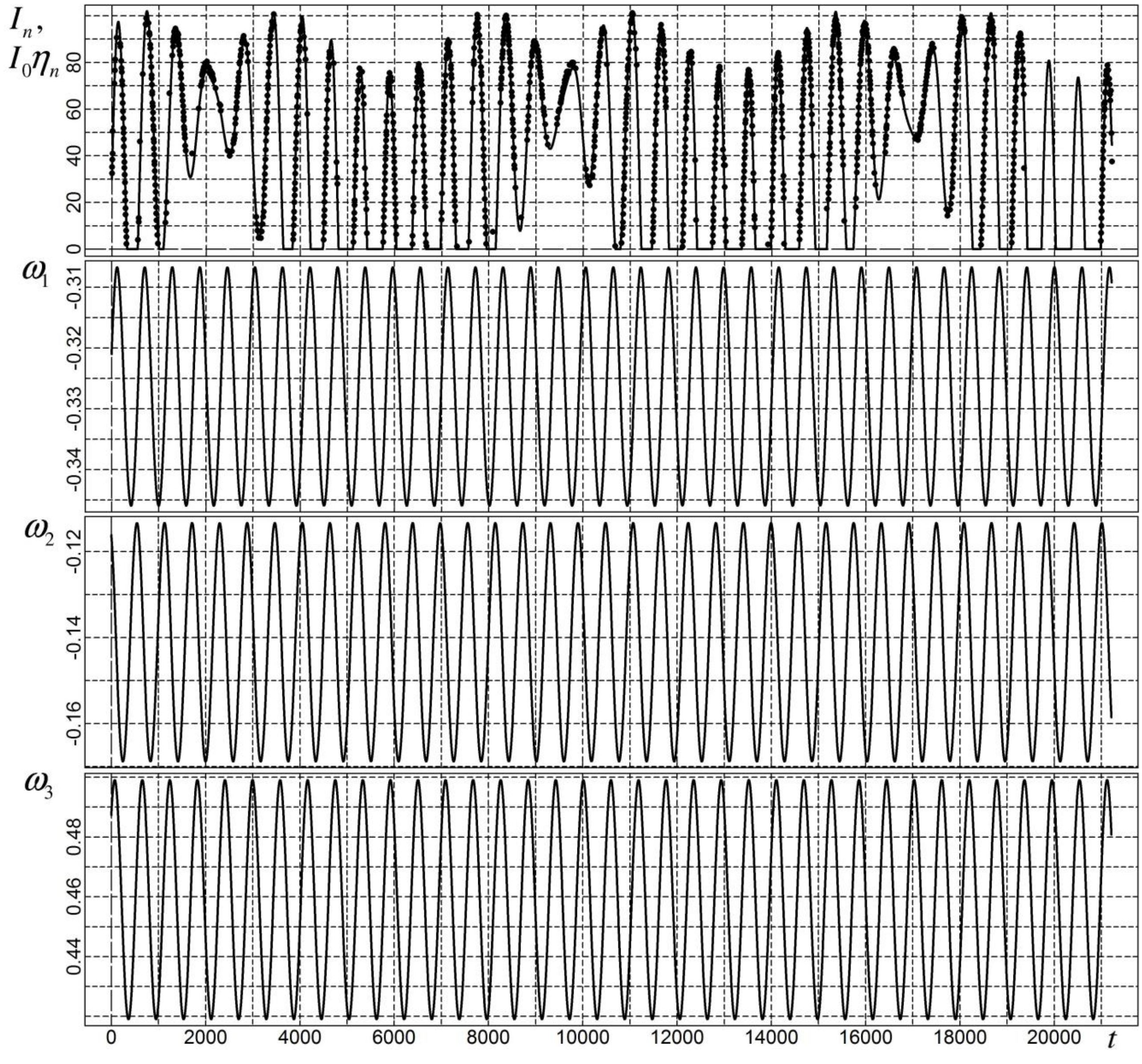

Рис. 4. Пример реконструкции движения КА.

Четвертая глава посвящена разработке математической модели вращательного движения МКА (далее – КА). КА рассматривается как система твердых тел, сочлененных шарнирами. Уравнения движения КА записываются в виде уравнений Эйлера–Лагранжа[3]. Расчетная схема КА представлена на рис. 5. Здесь имеется 7 элементов: 1) главное тело, 2) корневое звено СБ, 3 – 6) панели СБ, 7) вращающееся зеркало целевой аппаратуры (ЦА). Соединение элементов

[3] Лурье А.И. Аналитическая механика. М, Физматгиз, 1961.

системы, за исключением ЦА, осуществляется через двухстепенные шарниры, допускающие поворот одного элемента относительно другого вокруг двух взаимно перпендикулярных осей. Конструктивно все шарниры в системе – одностепенные. Дополнительные степени свободы введены для моделирования деформаций конструкции КА.

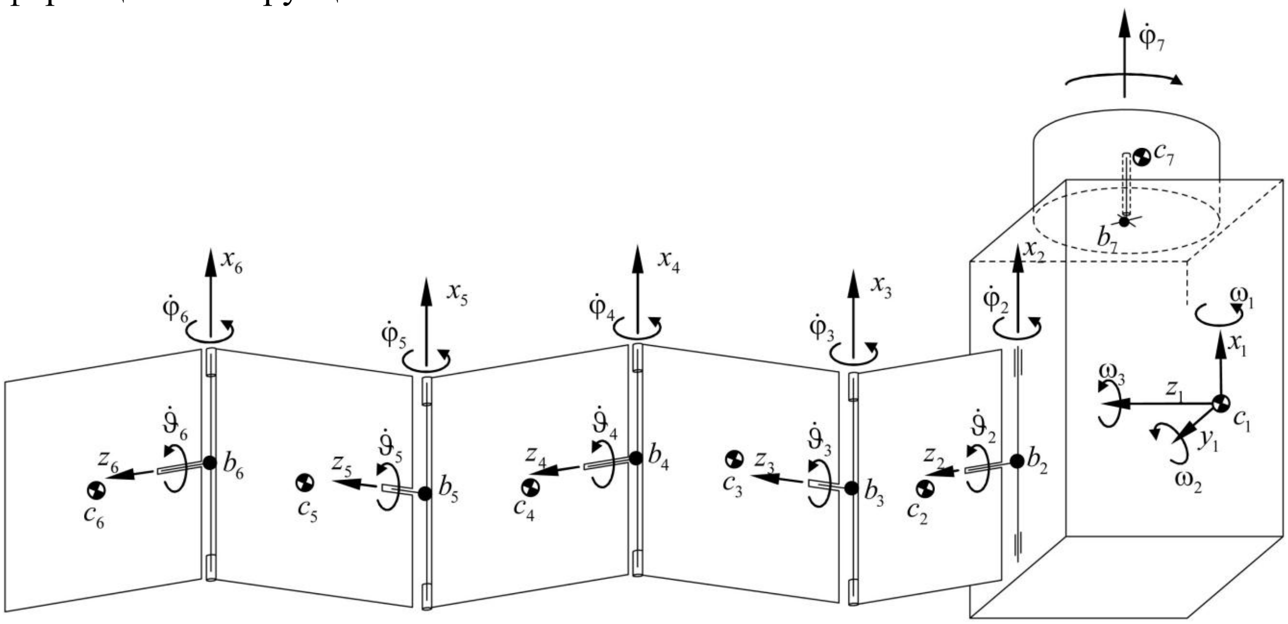

Рис. 5. Расчетная схема КА.

С каждым элементом конструкции связана своя система координат $b_i x_i y_i z_i$, начало которой лежит в точке b_i, совпадающей с центром вращения соответствующего шарнира (см. рис. 5). При полностью раскрытых панелях солнечных батарей и отсутствии возмущений соответствующие оси всех систем координат совпадают по направлению. В уравнениях учитывались три вращательные степени свободы главного тела, вращательная степень свободы ЦА, а также степени свободы в шарнирах. Обозначения перечисленных степеней свободы приведены на рис. 5. В шарнирах, за исключением оси вращения ЦА, присутствуют упругость и вязкое трение. Массово-инерционные и геометрические характеристики всех элементов системы считались известными.

В диссертации введены обозначения $[\boldsymbol{v}_k]_n$, означающие, что некоторый вектор $\boldsymbol{v}_k$, связанный с k-м элементом, задан в системе координат $b_n x_n y_n z_n$ n-го элемента. При этом для перехода от одной системы координат к другой использовались матрицы перехода A_{nk} так, что $[\boldsymbol{a}_k]_n = A_{nk}[\boldsymbol{a}_k]_k$. Все эти матрицы выражались в виде произведений матриц $A_{k+1,k}$, которые задавались в явном виде.

Выражение для кинетической энергии движения рассматриваемой системы относительно общего центра масс записано в виде

$$T_r = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{7}[\boldsymbol{\omega}_k]_k^T \hat{J}_k [\boldsymbol{\omega}_k]_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{7} m_k [\boldsymbol{v}_k]_1^T [\boldsymbol{v}_k]_1 ,$$

где $[\boldsymbol{\omega}_k]_k = (\omega_{1k}, \omega_{2k}, \omega_{3k})^T$ – вектор угловой скорости k-го элемента в собственной системе координат, $[\mathbf{v}_k]_1 = [\boldsymbol{v}_k]_1 - [\boldsymbol{v}_C]_1$ – скорость центра масс k-го элемента относительно общего центра масс системы,

$$[\boldsymbol{v}_C]_1 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{7} m_k [\boldsymbol{v}_k]_1, \quad m = \sum_{k=1}^{7} m_k, \quad [\boldsymbol{v}_1]_1 = 0.$$

Выражение для кинетической энергии вращательного движения КА можно преобразовать к виду

$$T_r = \frac{1}{2} x^T M x,$$

где $M = M(q)$ – симметричная матрица порядка 14, $x = (\omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{31}, \dot{q})^T$, $q = (\varphi_2, \vartheta_2, \varphi_3, \vartheta_3, \varphi_4, \vartheta_4, \varphi_5, \vartheta_5, \varphi_6, \vartheta_6, \varphi_7)^T$ – вектор обобщенных координат.

Матрица $M(q)$ вычислялась с использованием специально разработанного набора процедур[4]. Процедуры оперировали с двумя типами векторов и скаляров. К первому типу векторов (скаляров) относятся обычные векторы (скаляры). Для них невозможно или нет необходимости выделить явную зависимость от обобщенных скоростей. Примером векторов первого типа являются радиус-векторы центров вращения $\boldsymbol{b}_i$ и центров масс $\boldsymbol{c}_i$ элементов системы (см. рис. 5). Ко второму типу относятся векторы (скаляры), зависящие как от обобщенных координат, так и от обобщенных скоростей, причем зависимость от последних должна быть линейной и заданной в явном виде. Примерами векторов второго типа могут служить скорости отдельных точек системы и угловые скорости элементов системы.

Векторы и скаляры первого типа будем обозначать соответственно $\mathbf{a}$ и a. Векторы и скаляры второго типа обозначим $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{a}$; $\bar{\mathbf{a}}$ – матрица 3×14, $\bar{a}$ – матрица 1×14 (фактически вектор-строка). Вектор скаляр второго типа можно преобразовать в вектор и скаляр первого типа по формулам $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}x$, $a = \bar{a}x$. Реальный механический смысл имеют только векторы первого типа. Векторы второго типа используются только для получения матрицы $M(q)$, найти которую можно, выполнив над векторами второго типа обычные векторные операции. Эти операции реализованы как операции над специальными матрицами. Имеются также процедуры, выполняющие переход от одной систем координат $b_n x_n y_n z_n$ к другой.

Используя введенные типы векторов, можно записать

$$M = \sum_{k=1}^{7} [\bar{\boldsymbol{\omega}}_k]_k^T \hat{J}_k [\bar{\boldsymbol{\omega}}_k]_k + \sum_{k=1}^{7} m_k [\bar{\mathbf{v}}_k]_1^T [\bar{\mathbf{v}}_k]_1,$$

[4] Балабан И.Ю., Боровин Г.К., Сазонов В.В. Язык программирования правых частей уравнений движения сложных механических систем. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1998, № 62.

и для вычисления входящих в последнюю формулу величин получить удобный и достаточно компактный программный код. Это код входит составной частью в процедуру расчета правых частей уравнений движения КА. Фазовыми переменными этих уравнений служат обобщенные импульсы $p = Mx$, обобщенные координаты q и кватернион, задающий матрицу перехода от системы $b_1x_1y_1z_1$ к базовой (инерциальной или орбитальной) системе координат. Процедура формируется с учетом требуемой конфигурации КА и степени детализации модели. Принятый подход обеспечил простоту программного кода разработанной модели и его автономность, т. е. возможность использования на вычислительной машине без привлечения сторонних математических библиотек и пакетов программ.

Для выбора матрицы D упругих связей в шарнирах были исследованы малые собственные колебания линейной системы

$$M_0\ddot{\chi} + D\chi = 0, \quad D = \mathrm{diag}(0, 0, 0, d_4, d_5, ..., d_{13}, 0),$$
$$\chi = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \phi_2, \vartheta_2, \ldots, \phi_6, \vartheta_6, \phi_7)^T,$$

θ_i – компоненты вектора бесконечно малого поворота системы $c_1x_1y_1z_1$, M_0 – матрица кинетической энергии системы, вычисленная для равновесной конфигурации. С помощью вычислительных процедур линейной алгебры были вычислены собственные частоты выписанной системы. Расчеты были проведены при одной и той же матрице D и разных матрицах M_0. Вначале были найдены частоты при очень больших инерционных характеристиках главного тела. Такая конфигурация КА означает глухую заделку шарнира между корневым звеном СБ и главным телом в неподвижную стенку. Эта расчетная схема согласуется со схемой, принятой при расчете собственных частот конструкции СБ методом конечных элементов. Проведение расчетов при указанном выборе матрицы M_0 по разработанной модели позволило выбрать правильные значения коэффициентов жесткости в шарнирах и при расчетах с реальными инерционными характеристиками КА вычислить собственные частоты системы.

В заключении приведены основные результаты диссертации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработана математическая модель управляемого вращательного движения МКА «Монитор-Э» в режиме гашения угловой скорости при условии отсутствия измерений компоненты угловой скорости относительно одной из связанных осей аппарата. Найдены стационарные решения модельных уравнений движения и исследована их устойчивость. Построена оценка областей притяжения стационарных решений модельных уравнений. Дана рекомендация, обеспечивающая успешное гашение угловой скорости МКА.

2. Разработаны и реализованы в виде программы для персонального компьютера две интегральные статистические методики реконструкции вращатель-

ного движения МКА по телеметрической информации определенного вида. Одна из этих методик позволила по данным измерений двух компонент угловой скорости МКА и суммарного кинетического момента двигателей-маховиков реконструировать вращательное движение МКА в нескольких реализациях указанного в п. 1 режима гашения угловой скорости. Реконструкция подтвердила адекватность разработанной математической модели и эффективность выданной рекомендации. С помощью второй методики выполнена реконструкция вращательного движения МКА «Монитор-Э» и «КазСат-1» по телеметрическим значениям тока, снимаемого с солнечных батарей. Созданное программное обеспечение использовано в инженерном сопровождении летных испытаний указанных МКА при парировании нештатных ситуаций.

3. Разработана математическая модель вращательного движения проектируемого МКА, учитывающая влияние на это движение нежесткости сочленений панелей солнечных батарей и наличия на борту вращающейся целевой аппаратуры. Использован специальный математический аппарат для программирования процедуры расчета правых частей уравнений движения МКА. Принятый подход обеспечил достаточную простоту программной реализации разработанной модели и одновременно ее программную автономность, т. е. возможность использования на специальном моделирующем стенде без привлечения сторонних математических библиотек и пакетов программ. Проведено исследование малых колебаний системы в окрестности заданного равновесного положения. Выбраны параметры упругих связей шарнирных сочленений панелей солнечных батарей и определены собственные частоты колебаний модели в окрестности равновесного положения.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **А.А. Давыдов, В.В. Сазонов. Определение параметров вращательного движения КА «Монитор-Э» по телеметрическим данным о токе солнечных батарей. Космические исследования, 2009, т. 47, № 5, стр. 434-443.**
2. **А.А. Давыдов. Определение параметров вращательного движения малого спутника связи по данным измерений тока солнечных батарей. Космические исследования, 2011, т. 49, № 4, стр. 345-354.**
3. **А.А. Давыдов. Определение параметров вращательного движения КА по телеметрическим данным о токе солнечных батарей. Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, №4, часть 2.**
4. А.А. Давыдов, В.В. Сазонов. Исследование режима гашения угловой скорости космического аппарата в нештатной ситуации. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 73, 2011.

5. А.А Давыдов, В.В. Сазонов Определение параметров вращательного движения КА «Монитор-Э» по телеметрическим данным о токе солнечных батарей. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 85, 2008.

6. А.А Давыдов, В.В. Сазонов Определение параметров вращательного движения малого спутника связи по данным измерений тока солнечных батарей. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, №32, 2009.

7. А.А. Давыдов, В.В. Сазонов Определение параметров вращательного движения КА «Монитор-Э» по данным о токе солнечных батарей. Актуальные проблемы российской космонавтики: Труды XXXII Академических чтений по космонавтике. Под общей редакцией А.К. Медведевой. М.: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, 2008.

8. А.А. Давыдов. Определение параметров вращательного движения малых спутников по данным измерений тока солнечных батарей. Труды международной конференции «Научные и технологические эксперименты на автоматических космических аппаратах и малых спутниках», Самара, Издательство СНЦ РАН, 2008.

9. А.А. Давыдов. Определение параметров вращательного движения малого спутника связи по данным измерений тока солнечных батарей. Сборник трудов молодежной научно-технической конференции «Аэрокосмическая техника: исследования, разработки, пути решения актуальных проблем», М.: Компания Спутник+, 2008.

10. А.А. Давыдов. Определение параметров вращательного движения малого спутника связи по данным измерений тока солнечных батарей. Актуальные проблемы российской космонавтики: Труды XXXIII Академических чтений по космонавтике. Под общей редакцией А.К. Медведевой. М.: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, 2009.

11. Модель вращательного движения КА «Канопус-СТ». Технический отчет. ИПМ им. М.В. Келдыша. Москва 2010г.